

P O L S K A A K A D E M I A N A U K

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

88

WARSZAWA – POZNAŃ 1985

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW
MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA - EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WŁODZIMIERZ PROSNAK · KAZIMIERZ STELLER
ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY - CHAIRMAN) · JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1985

Printed in Poland

ISBN 83-01-07020-X

ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 340 + 90 egz. Ark. wyd. 13. Ark. druk. 10,875. Papier druk. sat. kl. V, 70 g. 70 × 100 cm. Oddano do składania 3 I 1985 r. Podpisano do druku 5 XI 1985 r.

Druk ukończono w listopadzie 1985 r. Zam. nr 240/107. S-7/712. Cena zł 220,-

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

JÓZEF ŚMIGIELSKI

Gdańsk

Charakterystyka magnetyczna cewki z ferromagnetycznym rdzeniem otwartym*

Przedstawiono ogólne wyrażenia na siłę magnetyczną działającą na rdzeń w polu cewki. Podano zależność zredukowanej siły magnetycznej od długości i położenia rdzenia. Wyznaczono zależność zredukowanej indukcyjności cewki z rdzeniem od parametrów geometrycznych układu, wykorzystując ją w wyrażeniu na siłę magnetyczną.

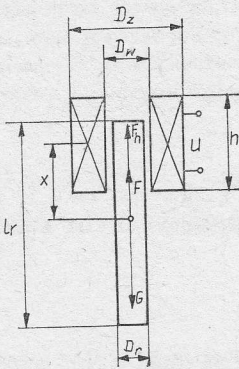
1. Wprowadzenie

Cewka z ferromagnetycznym rdzeniem otwartym stanowi podstawowy element elektromagnetycznego przepływomierza pływakowego [1] oraz wielu układów elektromechanicznych i przekaźnikowych stosowanych w systemach automatycznego sterowania. Układ taki przedstawia rysunek 1, na którym zaznaczono podstawowe wymiary i wielkości. Opis matematyczny oraz procedura optymalizacyjna stosowana przy projektowaniu wszelkich układów, których elementem jest cewka z rdzeniem otwartym, wymagają znajomości charakterystyki magnetycznej takiego elementu, a więc zależności siły magnetycznej działającej na pływak od jego położenia $F(x)$.

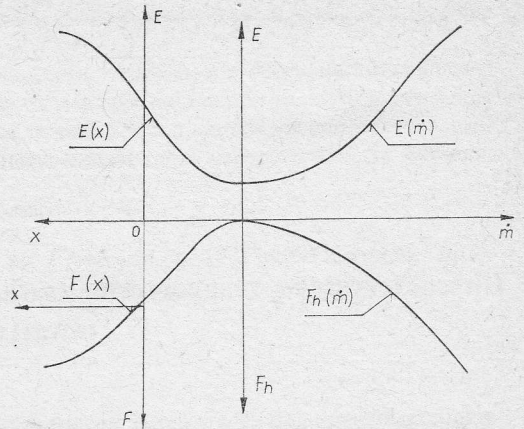
W przypadku przepływomierzy elektromagnetycznych, które są przetwornikami indukcyjnymi, konieczna jest także znajomość innych charakterystyk składowych: hydrodynamicznej, określającej zależność spowodowanej przepływem siły działającej na ruchomą dyszę od natężenia przepływu $F_h(\dot{m})$, oraz elektrycznej, określającej zależność siły elektromotorycznej E indukowanej w uzwojeniu pomiarowym od położenia pływaka $E(x)$.

Typowy kształt charakterystyk składowych i odpowiadającej im charakterystyki wyjściowej pływakowego przepływomierza elektromagnetycznego pokazano na rysunku 2. W odniesieniu do charakterystyk hydrodynamicznych określających zależność siły od natężenia przepływu można znaleźć pewne dane w literaturze [2], gdyż zagadnienie to wiąże się z wykorzystaniem elementów przepływowych w systemach sterowania automatycznego (pneumatyka i fluidyka). Są one jednak wrywkowe i dotyczą głównie współczynników straty ciśnienia przy gwałtownych zmianach przekroju kanału. Nic natomiast nie wiadomo o sile działającej na przewężenia zwłaszcza w przypadku kanałów pierście-

* Praca wykonana w ramach planu CI (badania własne placówki).



Rys. 1. Oznaczenie najważniejszych wymiarów cewki i rdzenia



Rys. 2. Charakterystyki składowe i charakterystyka wyjściowa elektromagnetycznego przepływomierza pływakowego

niowych, co ma szczególne znaczenie w przypadku pływakowych przepływomierzy elektromagnetycznych. Brak nawet wyczerpujących uogólnień wyników przeprowadzonych jednostkowych badań eksperymentalnych. Jeszcze mniej informacji spotyka się w literaturze na temat pozostałych charakterystyk. Charakterystyki magnetyczne zostały przedstawione dość pobieżnie w pracy [3], ale podane tam zależności, mimo że o bardzo ograniczonym zakresie stosowalności i złożonej postaci, prowadzą do wyników odbiegających znacznie od rzeczywistych stwierdzonych eksperymentalnie.

W [1] dokonano próby ustalenia charakterystyk magnetycznych i elektrycznych cewki z rdzeniem przy wykorzystaniu zasady podobieństwa oraz na podstawie wyników badań eksperymentalnych, których wyniki zostały uogólnione. Ze względu na ograniczony zakres badań doświadczalnych przedstawione rezultaty stanowiły jedynie pierwsze przybliżenie. Dopiero dalsze badania przeprowadzone w szerszym zakresie umożliwiły uściślenie, weryfikację i szersze uogólnienie uzyskanych wyników.

Praca [4] dotyczy również charakterystyk magnetycznych, jednak dokonane w niej próby uogólnienia wyników badań szły odmienną drogą i nie doprowadziły jeszcze do zależności nadających się do szerszego praktycznego wykorzystania.

Charakterystyka elektryczna dotyczy układu dwóch cewek z ferromagnetycznym rdzeniem otwartym, sprzęgającym je indukcyjnie. Stanowi to problem niezależny. Został on przedstawiony w pracy [1] oraz w późniejszej pracy [4], ale wyniki nie zostały jeszcze uogólnione w zadowalającym stopniu i zagadnienie to musi być przedmiotem dalszych badań i studiów.

2. Energia w układzie cewki z otwartym rdzeniem ferromagnetycznym

Cewka z rdzeniem stanowi układ elektromechaniczny, którego bilans energii musi być rozpatrywany z uwzględnieniem źródła zasilania [5]. Bilans ten ma postać

$$W_U = W_p + W_h + W_R + W_m. \quad (1)$$

Praca wykonana przez źródło W_U przy przemieszczeniu rdzenia jest równoważna zmianie energii pola magnetycznego W_p i pracy mechanicznej W_m , z uwzględnieniem strat spowodowanych histerezą materiału rdzenia W_h i energii rozproszonej na rezystancji W_R . Zmianę energii pola magnetycznego cewki określa wyrażenie

$$W_p = - \int E I dt, \quad (2)$$

gdzie I – natężenie prądu, t – czas, E – siła elektromotoryczna samoindukcji, którą reprezentuje relacja

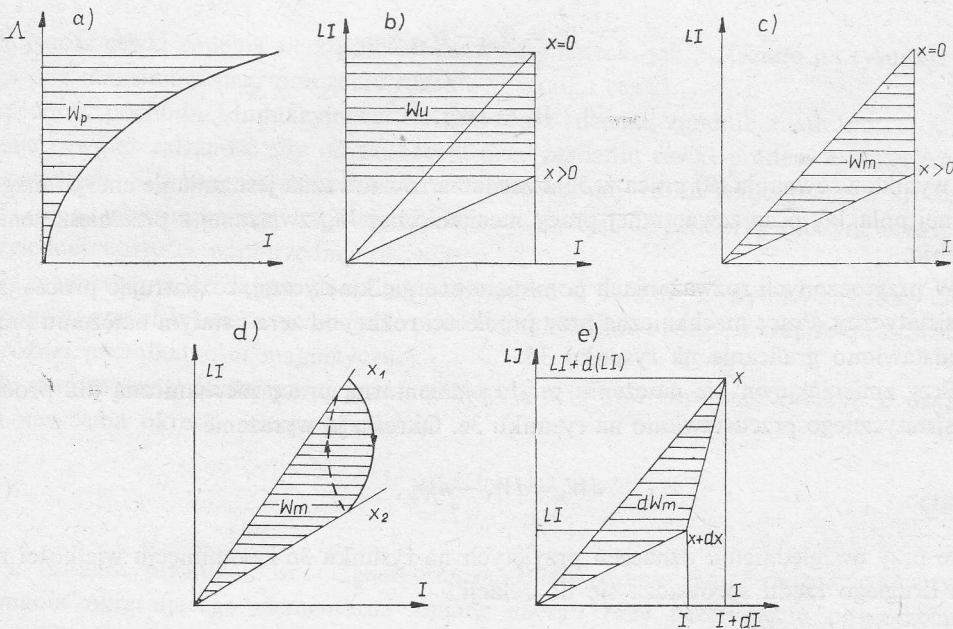
$$E = - \frac{d\Lambda}{dt} \quad (3)$$

(Λ oznacza strumień indukcji magnetycznej sprzężony z cewką). Z (2) i (3) wynika związek

$$W_p = \int_0^{\Lambda} I d\Lambda, \quad (4)$$

Energię magnetyczną cewki przedstawiono graficznie na rysunku 3a dla danej charakterystyki układu $\Lambda(I)$. W przypadku, gdy w układzie występuje duża szczelina powietrzna, prawie cała energia skoncentrowana jest w szczelinie, która ma przenikalność magnetyczną μ_0 i wobec tego charakterystyka $\Lambda(I)$ jest liniowa. Ponieważ wówczas

$$\Lambda = LI, \quad (5)$$



Rys. 3. Graficzna reprezentacja poszczególnych składników równania energii układu cewki z rdzeniem ferromagnetycznym

więc energię magnetyczną określa wyrażenie

$$W_p = \int_0^{LI} I d(LI), \quad (6)$$

albo przy $L = \text{const}$

$$W_p = \frac{1}{2} LI^2. \quad (7)$$

Przy różnych położeniach x rdzenia względem cewki zmieniają się charakterystyki magnetyczne układu. Pracę wykonaną przez źródło zasilania przy przemieszczaniu rdzenia z położenia $x=0$ do $x>0$ określa wyrażenie (6), które przy stałej wartości natężenia prądu przybiera postać

$$W_U = I \int_{(LI)_{x=0}}^{(LI)_{x>0}} d(LI). \quad (8)$$

Przedstawia ją w formie graficznej rysunek 3b.

Przemieszczając rdzeń od położenia x_1 do x_2 trzeba wykonać pracę mechaniczną W_m . Przy pominięciu strat histerezy i na rezystancji, bilans energetyczny układu przybiera postać

$$W_{p1} + W_m = W_U + W_{p2}. \quad (9)$$

Uwzględniając (6) i (8) można pracę mechaniczną przedstawić graficznie, tak jak to pokazano na rysunku 3c. Ma ona wartość ujemną przy wzroście x , przy czym dla liniowych charakterystyk zachodzą relacje (por. rys. 3b i c)

$$W_m = W_{p1} - W_{p2} \quad (10)$$

oraz

$$W_U = 2W_m. \quad (11)$$

Jak wynika z równania (9) praca źródła zasilania równoważna jest zmianie energii magnetycznej pola W_p oraz zewnętrznej pracy mechanicznej W_m związanej z przemieszczeniem rdzenia.

W przytoczonych rozważaniach pominięto energię kinetyczną, rozpatrując proces jako quasistatyczny. Pracę mechaniczną przy prędkości różnej od zera i stałym natężeniu prądu przedstawiono graficznie na rysunku 3d.

Przy zmieniającym się natężeniu prądu elementarną pracę mechaniczną dla procesu quasistatycznego przedstawiono na rysunku 3e. Określa ją wyrażenie

$$dW_m = dW_U - dW_p, \quad (12)$$

które przy uwzględnieniu oznaczeń przyjętych na rysunku 3e i pominięciu wielkości małych drugiego rzędu sprowadza się do relacji

$$dW_m = \frac{1}{2} I^2 dL. \quad (13)$$

3. Siła działająca na rdzeń ferromagnetyczny w polu cewki

Siłę działającą na rdzeń ferromagnetyczny w polu cewki określa zależność

$$dW_m = F dx. \quad (14)$$

Uwzględniając (13) można tę siłę wyrazić w postaci

$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx}. \quad (15)$$

Zależność ta jest spełniona zarówno dla prądu stałego jak i przemiennego, jeśli bierze się pod uwagę skuteczną wartość natężenia prądu i gdy indukcyjność cewki ma wartość zależną tylko od położenia rdzenia. Jest ona słuszna także przy zmieniającym się natężeniu prądu. Przy prądzie przemiennym F oznacza wartość średnią.

Przy zasilaniu cewki ze źródła o stałym napięciu U i przy niskiej wartości pulsacji ω prąd zależy od indukcyjności cewki zgodnie z relacją

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}; \quad (16)$$

łę magnetyczną (15) określa więc zależność

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{U}{R} \right)^2 \frac{dL/dx}{1 + (\omega L/R)^2}. \quad (17)$$

Indukcyjność cewki zmienia się z położeniem x rdzenia tak, jak pokazano na rysunku 4. Osiąga ona maksimum przy położeniu rdzenia w środku cewki.

Zależność pochodnej indukcyjności od położenia rdzenia, zgodnie z zależnością (15) obrazuje również zależność siły od położenia przy zasilaniu cewki prądem o stałej wartości natężenia. Siła magnetyczna ma wartość zerową, gdy rdzeń znajduje się w środku cewki i osiąga maksimum przy współrzędnych $\pm x_0$, malejąc do zera przy dalszym wzroście bezwzględnej wartości współrzędnej rdzenia.

Siła magnetyczna działająca na cylindryczny rdzeń w polu cewki wynika z różnicy ciśnień magnetycznych wywieranych na obie powierzchnie czołowe rozgraniczające dwa ośrodki o różnej przenikalności magnetycznej.

Siłę magnetyczną działającą na powierzchnię A przy równomiernej indukcji B oraz braku nasycenia określa relacja Maxwella

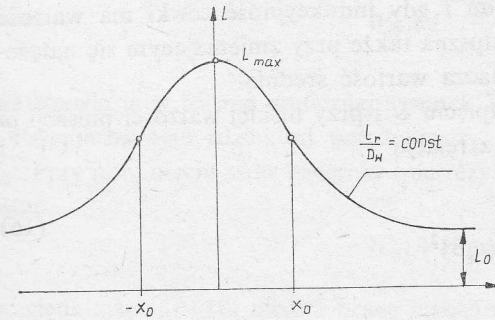
$$F = \frac{1}{2} AB^2 \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right), \quad (18)$$

gdzie μ oznacza przenikalność magnetyczną materiału rdzenia. Siłę F można wyznaczyć z równania określającego elementarną zmianę energii przy przesunięciu powierzchni czołowej rdzenia o dx . Rozkład gęstości strumienia indukcji magnetycznej B wewnątrz cewki z rdzeniem jest trudny do ścisłego określenia. Ponieważ współczynnik μ materiału

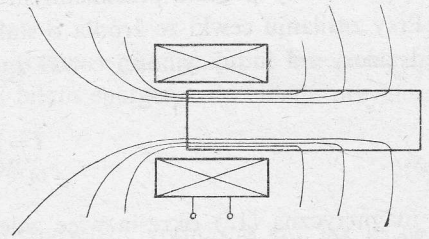
rdzenia spełnia nierówność

$$\mu \gg \mu_0, \quad (19)$$

więc praktycznie cały strumień koncentruje się w zewnętrznej warstwie rdzenia. Można się o tym przekonać mierząc siły magnetyczne działające na poszczególne warstwy rdzenia wykonanego w formie kilku współśrodkowych dopasowanych rurek. Okazuje się przy tym, że na rurki wewnętrzne nie działa praktycznie żadna siła magnetyczna. Wynika to również ze stwierdzonego faktu, że wielkość siły magnetycznej działającej na rdzeń wykonany w postaci rurki nie zależy od grubości jej ścianki [1], jeśli tylko nie występuje zjawisko nasycenia magnetycznego.



Rys. 4. Zależność indukcyjności cewki od położenia rdzenia ferromagnetycznego



Rys. 5. Konfiguracja pola magnetycznego cewki z rdzeniem ferromagnetycznym

Linie sił są prostopadłe do powierzchni materiału rdzenia w miejscu jej przenikania od strony otoczenia [6]. Ich przebieg na zewnątrz rdzenia można uwidocznic np. za pomocą opiłków żelaznych (rys. 5).

Charakter zależności siły magnetycznej, działającej na każdą z powierzchni czołowych rdzenia, od jego położenia względem cewki

$$F_1 = f(x+a) \quad (20a)$$

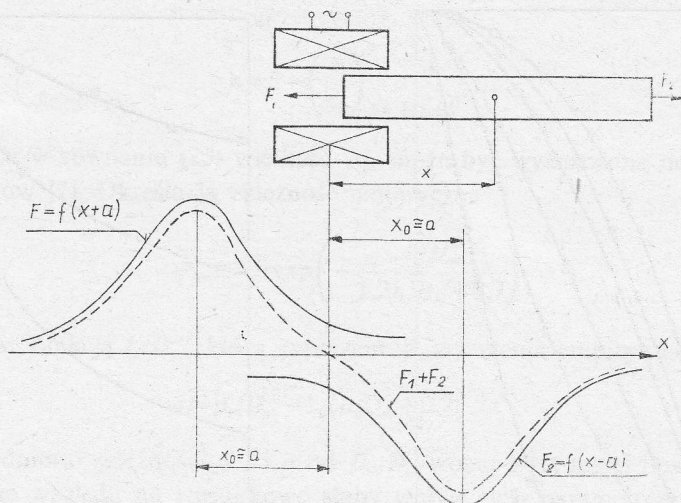
$$F_2 = f(x-a) \quad (20b)$$

można ustalić eksperymentalnie dla rdzeni o dużej długości, gdy wartość jednej z sił jest pomijalnie mała (rys. 6). Przyjęto też, że funkcję reprezentuje krzywa symetryczna względem osi $x = -a$ i $x = a$. W rzeczywistości gałęzie krzywej dla $|x| > a$ mogą mieć inny przebieg niż zaznaczono na rysunku 6 linią przerywaną, ale jest to nieistotne przy ustalaniu charakterystyki magnetycznej, gdyż praktyczne znaczenie ma jedynie jej odcinek w przedziale $-a < x < a$.

Odrzucając warunek symetrii, funkcji (20a) odpowiadaby funkcja

$$F_2 = -f[-(x-a)], \quad (20c)$$

uwzględniająca obrót względem osi x ($y=0$), obrót względem osi $x = -a$ oraz przesunięcie wzdłuż osi x o odcinek $2a$. Składowe siły magnetyczne osiągają ekstrema przy położeniu



Rys. 6. Zależność sił działających na powierzchnie krańcowe i siły wypadkowej od położenia rdzenia względem cewki

rdzenia określonego współrzędną $\pm a$. Linia przerywaną oznaczono na rysunku 6 zależność siły wypadkowej od położenia rdzenia

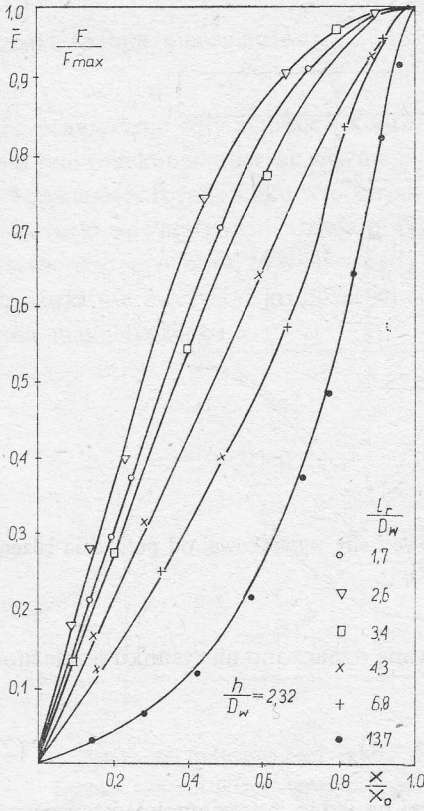
$$F(x) = f(x+a) - f(x-a), \quad (21)$$

która wobec małej wartości siły składowej działającej na jedną z powierzchni krańcowych rdzenia znajdującego się w położeniu a osiąga ekstremum przy współrzędnej rdzenia

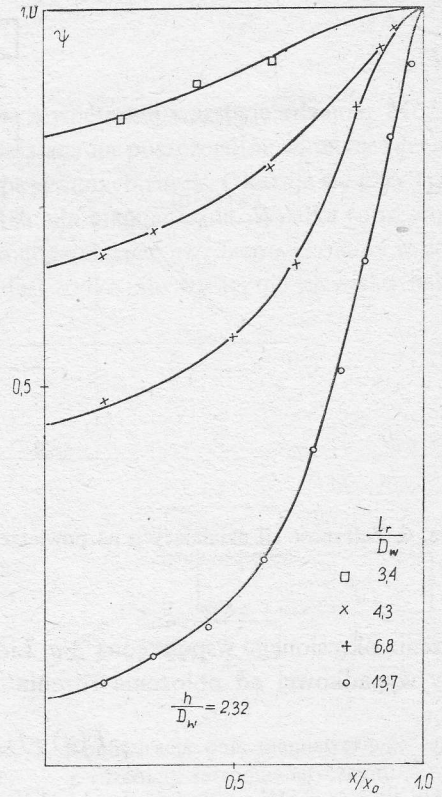
$$x_0 \cong a. \quad (22)$$

Długość l_r rdzenia ma pewien wpływ na przebieg charakterystyk składowych sił magnetycznych, gdyż zależy od niej rozkład pola magnetycznego, ale ich charakter pozostaje niezmienny. Przebieg charakterystyki sumarycznej związany jest głównie ze zmianą $x_0 \cong a$, która to wielkość – jak wykazują badania – jest proporcjonalna do l_r w dużym zakresie zmian tej wielkości [7]. Ustalony eksperymentalnie wpływ długości względnej rdzenia l_r/D_w na kształt charakterystyk magnetycznych obrazują wykresy na rysunku 7 przedstawione w układzie współrzędnych zredukowanych. Odnoszą się one do przedziału $|x| < a$, ale biorąc pod uwagę symetrię, ograniczono się na rysunku 7 tylko do jednej połowy. Wykresy te dotyczą przypadku zasilania cewki prądem o stałym natężeniu oraz danej wartości względnej wysokości cewki h/D_w i jej średnicy zewnętrznej D_z/D_w . Wielkości te mają pewien (niezbyt wielki) wpływ na kształt charakterystyk magnetycznych, ale brak jeszcze wyników jego systematycznych badań. Rodziny krzywych z rysunku 7 nie udaje się przedstawić za pomocą prostej funkcji o postaci ogólnej

$$\frac{F}{F_{\max}} = f\left(\frac{x}{x_0}, \frac{l_r}{D_w}, \frac{D_z}{D_w}, \frac{h}{D_w}\right). \quad (23)$$



Rys. 7. Zależność zredukowanej siły magnetycznej od położenia rdzenia przy różnych jego długościach względnych



Rys. 8. Zależność wartości funkcji poprawkowej ψ od położenia rdzenia i jego długości

Zależność tę można aproksymować funkcją o postaci [7]

$$\frac{F}{F_{\max}} = \frac{x}{x_0} e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - 1 \right]} \psi \left(\frac{x}{x_0}, \frac{l_r}{D_w}, \frac{h}{D_w}, \frac{D_z}{D_w} \right). \quad (24)$$

Funkcja poprawkowa ψ ma przebieg taki, jak pokazano na rysunku 8. Można ją aproksymować funkcjami Gaussa albo dyspersyjną, które dobrze odwzorowują charakterystyczny kształt krzywych na rysunku 8. W ten sposób można ograniczyć liczbę stałych parametrów do dwóch zamiast pięciu w przypadku aproksymacji wielomianem.

Ostatecznie w przypadku wyboru funkcji dyspersyjnej, dochodzi się do relacji [7]

$$\frac{\psi - \psi_{\infty}}{1 - \psi_{\infty}} = \frac{1}{1 + \left[\frac{(x/x_0) - 1}{\sigma} \right]^2}, \quad (25)$$

przy czym

$$\sigma = 1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)_{\psi = \frac{1}{2}(1 + \psi_\infty)}. \quad (26)$$

Występująca w równaniu (25) wielkość ψ_∞ może być wyznaczona na podstawie wyników pomiarów [7]. Określa ją zależność empiryczna

$$\psi_\infty \cong 2,0 \exp\left(-\frac{l_r/D_w}{1,2h/D_w + 0,7}\right). \quad (27)$$

Parametr σ jest funkcją l_r/D_w , którą reprezentuje wyrażenie empiryczne [7]

$$\sigma = |l_r/D_w - 1,2h/D_w + 0,7|^{-1}. \quad (28)$$

Nie uwzględniono zależności ψ_∞ i σ od D_z/D_w wobec zbyt małej ilości wyników pomiarów oraz ze względu na stosunkowo słaby wpływ tych parametrów, mieszczący się w granicach błędów pomiaru [7]. Zależność bezwzględnej wartości siły magnetycznej od bezwzględnej wartości współrzędnej położenia rdzenia można ustalić znając ekstremalną wartość siły F_{\max} oraz współrzędną rdzenia x_0 , przy której siła osiąga tę wartość. Współrzędna x_0 , jak ustalono eksperymentalnie, zmienia się z długością rdzenia tak, jak to pokazano na rysunku 9. Można więc przyjąć, że dla

$$2,0 \leq l_r/D_w \leq 7,0 \quad (29)$$

współrzędna x_0 ma stałą wartość

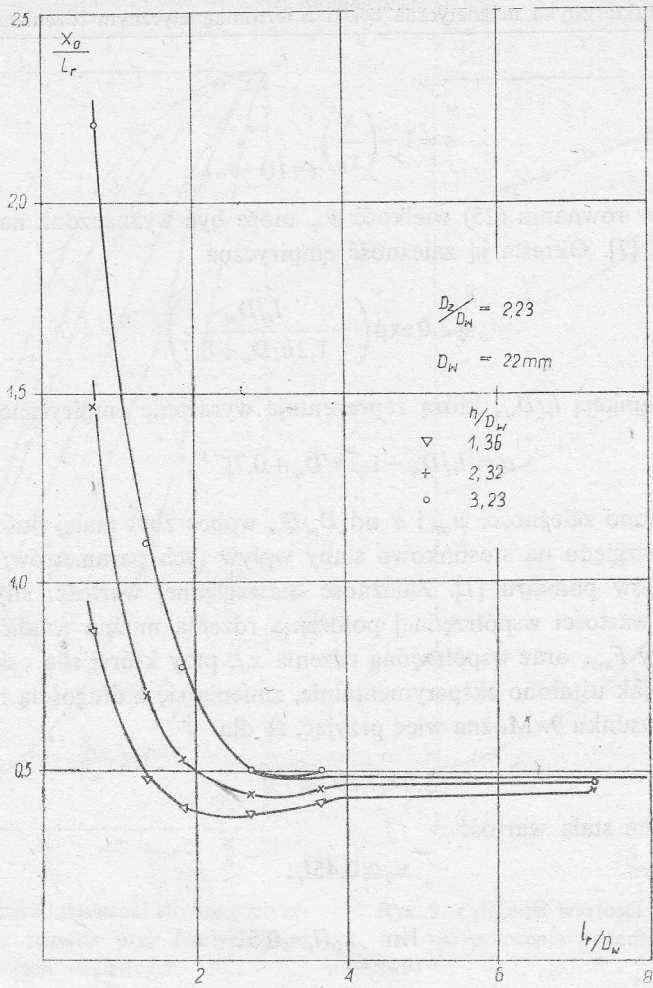
$$x_0 \cong 0,45l_r, \quad (30)$$

czy czym

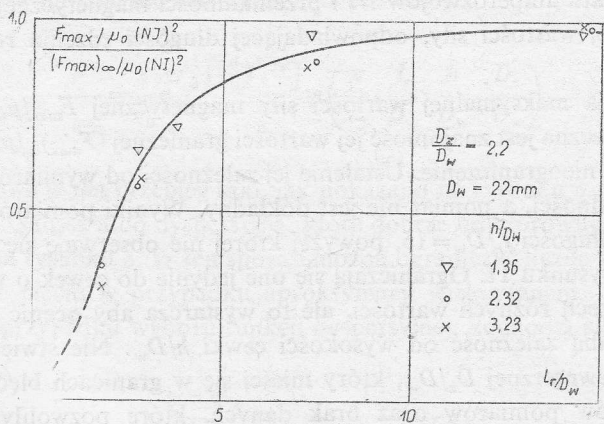
$$\lim_{l_r/D_w \rightarrow \infty} x_0/l_r = 0,5. \quad (31)$$

Ustaloną doświadczalnie zależność maksymalnej wartości siły magnetycznej od długości rdzenia pokazuje rysunek 10. Siła jest tu wyrażona w formie bezwymiarowej przez odniesienie jej do kwadratu amperozwojów NI i przenikalności magnetycznej μ_0 oraz zredukowana do granicznej wartości siły, odpowiadającej długości rdzenia rosnącej nieograniczenie.

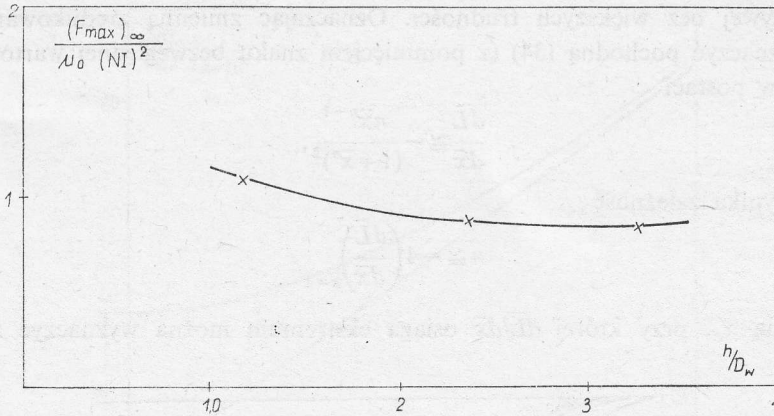
Dla wyznaczenia maksymalnej wartości siły magnetycznej $F_{\max}/\mu_0 (NI)^2$ z wykresu na rysunku 10 konieczna jest znajomość jej wartości granicznej $(F_{\max})_\infty/\mu_0 (NI)^2$ dla rdzenia o długości rosnącej nieograniczenie. Ustalenie jej zależności od wymiarów cewki nastęrcza jednak znaczne trudności, a pomiar nie jest dokładny. Wyniki pomiarów siły magnetycznej dla rdzenia o długości $l_r/D_w = 15$, powyżej której nie obserwuje się już przyrostu siły przedstawiono na rysunku 11. Ograniczają się one jedynie do cewek o wysokościach skupionych dokoła trzech różnych wartości, ale to wystarcza aby ocenić wielkość siły granicznej oraz jej słabą zależność od wysokości cewki h/D_w . Nie stwierdzono natomiast wpływu średnicy zewnętrznej D_z/D_w , który mieści się w granicach błędu pomiaru. Mała dokładność wyników pomiarów oraz brak danych, które pozwoliłyby ocenić postać zależności siły od parametrów geometrycznych układu skłaniają do poszukiwania zależności na drodze pośredniej, przez wykorzystanie zależności (15).



Rys. 9. Zależność zredukowanej współrzędnej ekstremalnego położenia rdzenia od jego długości



Rys. 10. Zależność zredukowanej maksymalnej siły magnetycznej odniesionej do jej wartości granicznej od długości rdzenia



Rys. 11. Zależność granicznej wartości zredukowanej siły magnetycznej od wysokości cewki

4. Indukcyjność cewki z otwartym rdzeniem ferromagnetycznym

Ogólny charakter zależności indukcyjności cewki z rdzeniem od jego położenia pokazano na rysunku 4. Zależność tę reprezentuje cała rodzina krzywych, której parametrami są wymiary geometryczne cewki i rdzenia. Ma ona więc postać

$$L = \mu_0 N^2 f(x, h, D_w, D_z, l_r). \quad (32)$$

Wpływ średnicy D_r rdzenia został pominięty. Zwykle przyjmuje się możliwie największą wartość D_r , dążąc do uzyskania maksymalnej wartości siły magnetycznej. W przypadku przepływomierza elektromagnetycznego, ze względów konstrukcyjnych $(D_r)_{\max} = 2/3 D_w$ [1]. Indukcyjność cewki jest proporcjonalna do kwadratu liczby zwojów N oraz do przenikalności magnetycznej μ_0 ośrodka. Wielkości te potraktowane zostały jako współczynniki w równaniu (32). Nie uwzględniono również współczynnika przenikalności magnetycznej μ materiału rdzenia, gdyż w rozpatrywanej konfiguracji jego zmiany nie mają istotnego wpływu na charakterystykę układu wobec dużej drogi magnetycznej w powietrzu.

W układzie współrzędnych odpowiednio zredukowanych rodzinę krzywych określoną funkcją (32) można znormalizować, co przedstawia rysunek 12. Określa ją wyrażenie

$$\bar{L} = \frac{L - L_0}{L_{\max} - L_0} = f_x\left(\frac{x}{x_c}, \frac{l_r}{D_w}\right), \quad (33)$$

przy h/D_w i D_z/D_w traktowanych jako stałe, ponieważ w praktyce zmieniają się one w wąskich granicach, a wpływ ich jest niewielki. Zależność (33) można przedstawić jako rodzinę krzywych przecinających się w punkcie $x/x_c = 0$, $\bar{L} = 1,0$ oraz w punkcie $x/x_c = 1,0$, $\bar{L} = \bar{L}_c$. Spośród różnych istniejących możliwości jako funkcję aproksymującą przyjęto

$$\bar{L} \cong \frac{1}{1 + \left| \frac{x}{x_c} \right|^n}, \quad (34)$$

przy czym x_c oznacza wartość zmiennej x , przy której $\bar{L}_c = 1/2$ i może być wyznaczone dla

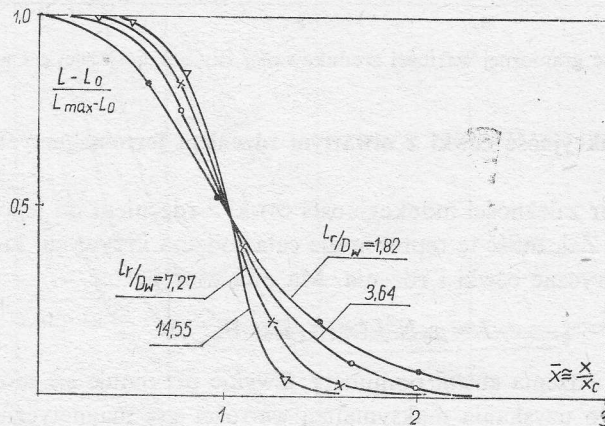
każdej krzywej bez większych trudności. Oznaczając zmienną zredukowaną $x/x_c = \bar{x}$ można wyznaczyć pochodną (34) (z pominięciem znaku bezwzględnej wartości, a więc dla $x > 0$) w postaci

$$\frac{d\bar{L}}{d\bar{x}} \cong -\frac{n\bar{x}^{n-1}}{(1+\bar{x}^n)^2}, \quad (35)$$

z której wynika zależność

$$n \cong -4 \left(\frac{d\bar{L}}{d\bar{x}} \right)_{\bar{x}=1}. \quad (36)$$

Współrzedną x_c , przy której $d\bar{L}/d\bar{x}$ osiąga ekstremum można wyznaczyć z warunku



Rys. 12. Zależność zredukowanej indukcyjności cewki od położenia rdzenia

$d^2\bar{L}/d\bar{x}^2 = 0$ w postaci związku

$$\left(\frac{x}{x_0} \right)^n = \bar{x}_0^n \cong \frac{n-1}{n+1}. \quad (37)$$

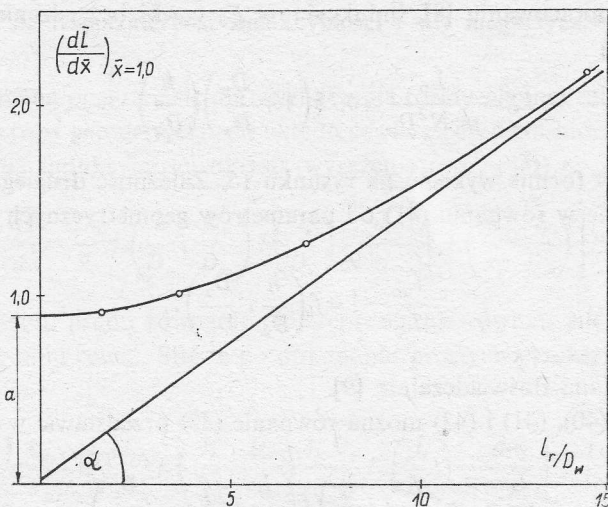
Na podstawie wyników badań można wyznaczyć zależność pochodnej (35) w punkcie o współrzędnej $\bar{x} = 1$ od długości rdzenia. Przedstawiono ją w formie graficznej na rysunku 13. Wynika z niej, że $n > 3,2$, a zatem określona równaniem (37) współrzedna ekstremum $x_c \cong x_0$. Wartość zależności (35) dla $\bar{x} = 1$ przedstawioną na rysunku 13 można aproksymować równaniem hiperboli

$$\left(\frac{d\bar{L}}{d\bar{x}} \right)_{\bar{x}=1}^2 \cong a^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(\frac{l_r}{D_w} \right)^2. \quad (38)$$

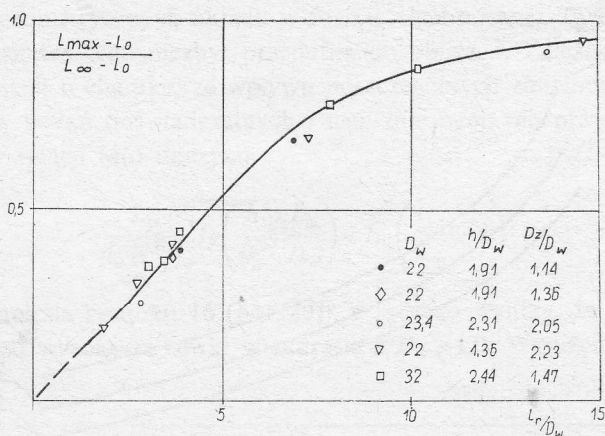
Parametr a jest to wielkość początkowa odpowiadająca $l_r/D_w = 0$ (rys. 1), podczas gdy współczynnik kierunkowy asymptoty (rys. 13)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}. \quad (39)$$

Maksymalną wartość indukcyjności L_{\max} można również przedstawić jako jedną krzywą



Rys. 13. Zależność maksymalnej wartości pochodnej zredukowanej indukcyjności rdzenia od jego długości



Rys. 14. Zależność zredukowanej maksymalnej wartości indukcyjności cewki od długości rdzenia

dobierając odpowiednio współrzędne. Reprezentuje ją funkcja

$$\frac{L_{\max} - L_0}{L_{\infty} - L_0} = f_l \left(\frac{l_r}{D_w} \right) \quad (40)$$

przedstawiona na rysunku 14. L_{∞} oznacza indukcyjność cewki z rdzeniem o długości rosnącej nieograniczenie, umieszczonym w środku. Mianownik wyrażenia (40) można przedstawić w postaci

$$L_{\infty} - L_0 = L_0 \left(\frac{L_{\infty}}{L_0} - 1 \right). \quad (41)$$

Jak wykazano w opracowaniu [8], indukcyjność L_0 cewki bez rdzenia można aproksymować zależnością

$$\bar{L}_0 = \frac{L_0}{\mu_0 N^2 D_w} \cong 0,25 \left(1 + \frac{D_z}{D_w} \right) \left(\frac{h}{D_w} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (42)$$

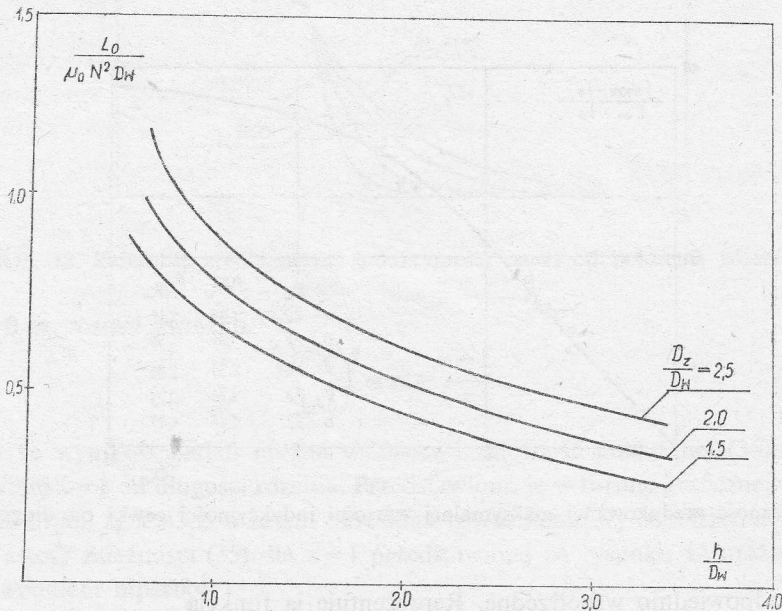
Przedstawiono ją w formie wykresu na rysunku 15. Zależność drugiego czynnika występującego w nawiasie w równaniu (41) od parametrów geometrycznych cewki reprezentuje funkcja

$$\frac{L_\infty}{L_0} - 1 = f_h \left(\frac{h}{D_w}, \frac{D_z}{D_w} \right), \quad (43)$$

która została zbadana doświadczalnie [9].

Uwzględniając (40), (41) i (43) można równanie (33) przedstawić w postaci wyrażenia

$$\frac{L}{L_0} - 1 = f_x \left(\frac{x}{x_c}, \frac{l_r}{D_w} \right) f_l \left(\frac{l_r}{D_w} \right) f_h \left(\frac{h}{D_w}, \frac{D_z}{D_w} \right). \quad (44)$$



Rys. 15. Zależność zredukowanej indukcyjności cewki bez rdzenia od jej wysokości.

Ma ono postać iloczynu funkcji jednej albo dwóch zmiennych. Stwierdzenie takiej formy zależności od parametrów geometrycznych układu znacznie ułatwia przeprowadzanie badań doświadczalnych i uogólnianie ich wyników przez ustalenie postaci funkcji empirycznych, reprezentujących zależność indukcyjności cewki z rdzeniem od trzech zmiennych, wyrażających proporcje geometryczne oraz od średnicy wewnętrznej D_w i liczby zwojów (por. (42)).

5. Współzależność indukcyjności i siły magnetycznej

Relacją (44) można posłużyć się dla wyznaczenia formy ogólnej zależności siły magnetycznej od parametrów geometrycznych układu cewki z rdzeniem biorąc pod uwagę związek (15). Pochodną indukcyjności określa wyrażenie (por. (44))

$$\frac{d\bar{L}}{dx} = \frac{L_0}{x_c} f_h\left(\frac{h}{D_w}, \frac{D_z}{D_w}\right) f_l\left(\frac{l_r}{D_w}\right) \frac{d}{d(x/x_c)} \left[f_x\left(\frac{x}{x_c}, \frac{l_r}{D_w}\right) \right]. \quad (45)$$

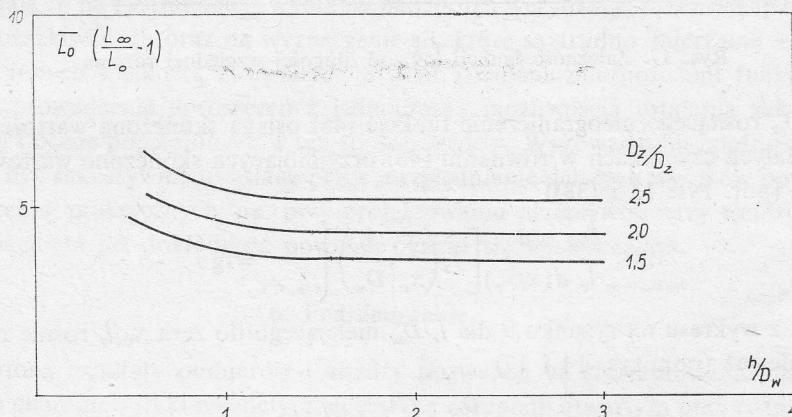
Przy stałym natężeniu prądu równanie (45) reprezentuje również siłę magnetyczną działającą na rdzeń w polu cewki. Siłę tę po dokonaniu prostych przekształceń można wyrazić w postaci

$$\frac{F}{\mu_0(NI)^2} = \frac{1}{2} \frac{x_0}{x_c} \frac{L_0}{N^2 D_w} f_h\left(\frac{h}{D_w}, \frac{D_z}{D_w}\right) \frac{l_r}{x_0} \frac{D_w}{l_r} f_l\left(\frac{l_r}{D_w}\right) \frac{d}{d(x/x_c)} \left[f_x\left(\frac{x}{x_c}, \frac{l_r}{D_w}\right) \right]. \quad (46)$$

Uwzględnienie w równaniu (46) odpowiednich wyrażeń aproksymujących funkcje składowe (33), (37), (42) oraz innych, które mogłyby zostać również aproksymowane wyrażeniami algebraicznymi (tj. x_0/l_r i $f_l(l_r/D_w)$) pozwoliłoby uzyskać zależność siły magnetycznej od parametrów geometrycznych układu w formie algebraicznej. Byłaby ona jednak bardzo złożona i wskutek tego niezbyt przydatna do obliczeń. Zależność ta dostarczałaby natomiast informacji o charakterze wpływu poszczególnych zmiennych, ułatwiając interpretację wyników badań doświadczalnych i ustalanie ogólnych prawidłowości. Wartości występującego w relacji (46) iloczynu

$$\frac{L_0}{\mu_0 N^2 D_w} f_h\left(\frac{h}{D_w}, \frac{D_z}{D_w}\right) = \bar{L}_0 \left(\frac{L_\infty}{L_0} - 1 \right) \quad (47)$$

przedstawia wykres na rysunku 16 (por. [9]), z którego wynika, że zależą one słabo od D_z/D_w , a także od wysokości cewki w zakresie $h/D_w \geq 1,0$. Wyrażenie (47) można apro-



Rys. 16. Zależność funkcji (47) od wysokości względnej cewki

ksymować funkcją

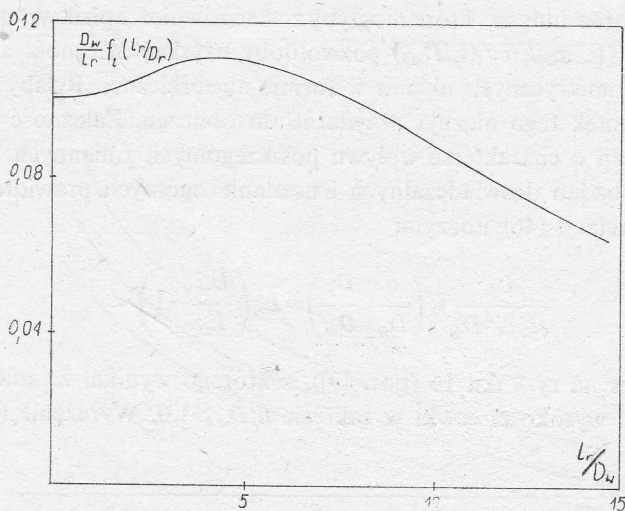
$$\bar{L}_0 \left(\frac{L_{0\infty}}{L_0} - 1 \right) \cong 1,8 \left(\frac{h}{D_w} \right)^{-2} + \frac{D_z}{D_w} + 3,6. \quad (48)$$

Charakter tej zależności jest zgodny ze stwierdzoną zależnością zredukowanej granicznej siły magnetycznej od wysokości cewki h/D_w pokazaną na rysunku 11 i wykazuje oczekiwany wpływ średnicy zewnętrznej D_z/D_w .

Zespalając występujące w równaniu (46) dwa czynniki w jedną funkcję

$$\varphi \left(\frac{l_r}{D_w} \right) = \frac{D_w}{l_r} f_l \left(\frac{l_r}{D_w} \right) \quad (49)$$

określającą pochylenie linii, łączącej rozpatrywany punkt na krzywej z rysunku 14 z początkiem układu współrzędnych, można stwierdzić, że ma ona przebieg pokazany w formie wykresu na rysunku 17, zachowując praktycznie stałą wartość około 0,11 dla $l_r/D_w \leq 6,0$. Rozpatrując przypadki graniczne można wydedukować charakter zmian funkcji składowych w zakresie wartości parametrów uniemożliwiającym bezpośredni pomiar.



Rys. 17. Zależność funkcji (49) od długości względnej rdzenia

Dla l_r/D_w rosnącego nieograniczenie funkcja (46) osiąga skończoną wartość, a zatem przy pozostałych czynnikach w równaniu (46) przyjmujących skończone wartości można przyjąć, że (por. rys. 13 i (38))

$$\lim_{l_r/D_w \rightarrow \infty} \frac{D_w}{l_r} \frac{d}{d(x/x_c)} \left[f_x \left(\frac{x}{x_c}, \frac{l_r}{D_w} \right) \right]_{x/x_c=1} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (50)$$

Jak wynika z wykresu na rysunku 9 dla l_r/D_w malejącego do zera x_0/l_r rośnie nieograniczenie: Ponieważ (por. rys. 14 i 17)

$$\lim_{l_r/D_w \rightarrow 0} \frac{D_w}{l_r} f_l \left(\frac{l_r}{D_w} \right) \cong 0,1, \quad (51)$$

a wyrażenie (46) osiąga wartość zerową bez względu na wartości innych czynników, jeśli tylko są one ograniczone, więc (por. (38) i rys. 13)

$$\lim_{l_r/D_w \rightarrow 0} \frac{d}{d(x/x_c)} \left[f_x \left(\frac{x}{x_c}, \frac{l_r}{D_w} \right) \right]_{x/x_c=1} = a. \quad (52)$$

Wartość $\text{tg } \alpha$ może być wyznaczona z wykresów na rysunkach 9, 10 i 14, przy znanej granicznej wartości siły magnetycznej, która zależy od długości cewki – jak pokazuje rysunek 11. Tak obliczony $\text{tg } \alpha$, a zarazem pochylenie asymptoty krzywej na rysunku 13 wynosi (por. (38) i (39))

$$\frac{a}{b} = \text{tg } \alpha \cong 0,15. \quad (53)$$

Biorąc pod uwagę zarówno formuły empiryczne (34) i (48), uogólniające wyniki badań doświadczalnych, jak też zależności ustalone w formie wykresów (rys. 9, 14, 17), równanie (46) umożliwia wyznaczenie wartości liczbowych bezwymiarowej siły magnetycznej dla danego rdzenia jak też jej wartości granicznej. Uzyskane w ten sposób wartości zgodne są z ustalonymi przez bezpośredni pomiar. Z równania (46) wynika również relacja określająca zależność siły magnetycznej zredukowanej do wartości maksymalnej. Ma ona postać

$$\frac{F}{F_{\max}} = \frac{\frac{d}{d(x/x_c)} f_x \left(\frac{x}{x_c}, \frac{l_r}{D_w} \right)}{\left[\frac{d}{d(x/x_c)} f_x \left(\frac{x}{x_c}, \frac{l_r}{D_w} \right) \right]_{x/x_c=x_0/x_c}}, \quad (54)$$

gdzie x_0 oznacza współrzędną rdzenia, przy której siła, a zatem i pochodna indukcji, osiąga maksimum określoną równaniem (37). Uwzględniając (35) można równanie (54) wyrazić w postaci

$$\frac{F}{F_{\max}} = \frac{x}{x_0} \left[\frac{1 + (x_0/x_c)^n}{1 + (x/x_c)^n} \right]^2. \quad (55)$$

Formuła ta jest alternatywą (24).

Ustalone zależności teoretyczno-empiryczne wzajemnie się uzupełniają, tworząc spójny system. Pozwala to na ekstrapolację wyników badań, ich weryfikację przez ocenę odchyłek od wartości oczekiwanych oraz na wyznaczenie sił, które są trudno mierzalne – za pośrednictwem innych wielkości, związanych z nimi znanymi zależnościami funkcyjnymi. Ułatwia to wprowadzenie uproszczeń z jednoczesną możliwością ustalania zakresu ich stosowności i ocenę popełnionych w ten sposób błędów. Wprowadzone zależności empiryczne mogą być sukcesywnie uściślone przez uwzględnianie dalszych wyników pomiarów, chociaż dla celów praktycznych, np. przy projektowaniu przepływomierzy elektromagnetycznych, osiągnięta już dokładność powinna okazać się wystarczającą.

6. Podsumowanie

Przedstawione rezultaty pomiarów i analizy pozwalają na sformułowanie opisu matematycznego charakterystyki magnetycznej cewki z rdzeniem otwartym przy różnych porcjach geometrycznych układu. Ustalone zostały podstawowe prawidłowości, które

uogólniono w formie zależności empirycznych. W takim stopniu w jakim okazało się to możliwe wykorzystano związki wynikające z rozważań teoretycznych, co umożliwiło uzupełnienie obserwacji eksperymentalnych, ich weryfikację i rozszerzenie uogólnień poza obszary dostępne dla bezpośrednich badań. W szczególności można w ten sposób wydedukować wartości graniczne i ogólny charakter zależności.

Przez wprowadzenie wielkości zredukowanych okazało się możliwe sprowadzenie wyników badań przeprowadzonych na różnych obiektach do pojedynczych krzywych i wyrażenie ich za pomocą względnie prostych funkcji aproksymujących. W szczególności funkcje wielu zmiennych sprowadzone zostały do postaci iloczynów funkcji co najwyżej dwóch zmiennych, których postać można ustalić doświadczalnie bez większych trudności. Uzyskane wyniki udało się sprowadzić do spójnego systemu zależności, eliminując stwierdzone poprzednio pozorne anomalie oraz zależności cząstkowe [4], opisujące układ tylko w ograniczonych przedziałach.

Opierając się na podstawowej zależności dla siły magnetycznej wyrażono ją za pomocą indukcyjności, która jest łatwiej mierzalna i może być aproksymowana funkcjami o prostszej postaci. Znając ogólną postać zależności można lepiej zaplanować badania eksperymentalne oraz zweryfikować ich wyniki. Wprowadzając uproszczenia można również ocenić ich dopuszczalność i wielkość popełnionego w ten sposób błędu.

Nie uwzględniono w wyczerpujący sposób takich parametrów, jak wysokość cewki h/D_w i jej średnica zewnętrzna D_z/D_w , gdyż w wielu przypadkach wpływ ten był niewielki i mieścił się w granicach błędów pomiarowych. Przedstawiony opis może jednak zostać uzupełniony i uściślony, jeśli okażą się dostępne rezultaty dalszych pomiarów i badań. Ustalone ogólne zależności dotyczące charakterystyk magnetycznych układu cewki z rdzeniem otwartym, mogą znaleźć zastosowanie nie tylko przy projektowaniu przepływomierzy elektromagnetycznych, ale również wszelkich przekaźników elektromagnetycznych i przetworników elektromechanicznych stosowanych w systemach automatycznej regulacji, umożliwiając racjonalizację i optymalizację ich konstrukcji.

Praca wpłynęła do Redakcji w czerwcu 1983 r.

Literatura

- [1] J. Śmigielski, *Elektromagnetyczne pływakowe przetworniki wydatku i ciśnienia*. PWN, Warszawa 1980.
- [2] B. Eck, *Technische Strömungslehre*. Springer, Berlin 1966.
- [3] *Автоматические измерительные приборы с магнитной подвеской*, Izd. Energija, Moskwa 1970.
- [4] A. Jaworek, *Błędy przetwarzania elektromagnetycznego przepływomierza pływakowego i ich eliminacje*. Rozprawa doktorska, IMP PAN, Gdańsk 1982.
- [5] V. Gourishanker, *Electromechanical Energy Conversion*. Intern. Textbook Comp., Scranton, Penn., 1966.
- [6] M. Plonus, *Applied Electromagnetics*. Mc Graw Hill, New York 1978.
- [7] J. Śmigielski, *Zależność siły działającej na rdzeń w polu magnetycznym cewki od jego położenia*. Prace IMP, z. 88, 1985.
- [8] J. Śmigielski, *Indukcyjność cewki o grubym uzwojeniu i małej długości*. Prace IMP, z. 87, 1985.
- [9] J. Śmigielski, *Wyznaczanie charakterystyk parametrów pływakowego przepływomierza elektromagnetycznego na zasadzie podobieństwa*. Prace IMP, z. 88, 1985.

Магнитная характеристика катушки с ферромагнитным открытым сердечником

Резюме

Магнитная сила действующая на открытый сердечник в поле катушки является функцией геометрических параметров системы, расположения сердечника, числа обмоток катушки и силы тока. Путем соответственного выбора редуцированных координат можно уменьшить число переменных с 7 до 4. Основываясь на доказанных закономерностях, функцию определяющую магнитную силу можно представить в форме произведения трех функций не более чем двух переменных. Это значительно облегчает проведение экспериментальных исследований и обобщение их результатов.

Магнитная сила пропорциональна производной индуктивности относительно расположения сердечника. Можно её определить на основе результатов измерения индуктивности, что оказывается легче. Индуктивность катушки с сердечником выражено также в обобщенной форме в виде произведения функций не более чем двух переменных.

Сравнено результаты полученные путем непосредственного измерения и посредственного расчета, констатируя удовлетворительную сходимость так по величинам как и формам зависимостей. Представленные обобщение результатов измерений и зависимость могут быть использованы в проектировании различных электромагнитных преобразователей, а в особенности электромагнитных поплавковых расходомеров.

Magnetic Characteristics of a Coil with a Ferromagnetic Open Core

Summary

The general expressions of magnetic force are discussed. The dependence of the magnetic force exerted on a core on its position is approximated by an algebraic relation.

The reduced magnetic force is represented for different geometrical proportions by a single curve related to the limit value that corresponds to an infinitely long core. In the general relation the magnetic force is expressed by the inductance. The relevant relation estimated experimentally has been generalized and expressed in an algebraic form as a product of component functions of reduced number of non-dimensional geometrical quantities. The proposed procedure makes it possible to arrive at simple relations for the magnetic force which can be useful in the process of design of electromagnetic float-flowmeters.

The relation derived may be applied for generalization of experimental results concerning the magnetic force acting on a core in the field of a coil.