

P O L S K A            A K A D E M I A            N A U K  
I N S T Y T U T   M A S Z Y N   P R Z E P Ł Y W O W Y C H

TRANSACTIONS  
OF THE INSTITUTE OF  
FLUID-FLOW MACHINERY

PRACE  
INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH

101



GDAŃSK 1996

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

---

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machines

\*

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH

---

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*Wydanie publikacji dofinansowane zostało przez PAN ze środków DOT uzyskanych z Komitetu Badań Naukowych*

EDITORIAL BOARD – RADA REDAKCYJNA

TADEUSZ GERLACH \* HENRYK JARZYNA \* JERZY KRZYŻANOWSKI  
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ \* WŁODZIMIERZ J. PROSNAK  
JÓZEF ŚMIGIELSKI \* ZENON ZAKRZEWSKI

EDITORIAL COMMITTEE – KOMITET REDAKCYJNY

EUSTACHY S. BURKA (EDITOR-IN-CHIEF – REDAKTOR NACZELNY)  
JAROSŁAW MIKIELEWICZ  
EDWARD ŚLIWICKI (EXECUTIVE EDITOR – REDAKTOR) \* ANDRZEJ ŻABICKI

EDITORIAL OFFICE – REDAKCJA

Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych  
Polskiej Akademii Nauk  
ul. Gen. Józefa Fiszera 14, 80-952 Gdańsk, skr. poczt. 621,  
☎ (0-58) 46-08-81 wew. 141, fax: (0-58) 41-61-44,  
e-mail: esli@imppan.imp.pg.gda.pl

ISSN 0079-3205

JAROSŁAW MIKIELEWICZ<sup>1</sup>

## Kształt strugi cieczy rozplywającej się po powierzchni płaskiej dowolnie zorientowanej w przestrzeni<sup>2</sup>

W pracy przedstawiono model teoretyczny rozplywu po powierzchni strugi cieczy powstałej wskutek uderzenia strugi o powierzchnię płaską dowolnie zorientowaną w przestrzeni. Rozplyw cieczy newtonowskiej powodują siły bezwładności i siła grawitacji. Ograniczenie rozplywu cieczy powodują siły napięcia powierzchniowego. Zaproponowano metodę rozwiązania zagadnienia.

### Oznaczenia

$C_f$	– współczynnik tarcia,	$v$	– prędkość radialna,
$g$	– przyspieszenie ziemskie,	$w$	– prędkość w kierunku osi $z$ ,
$Q$	– objętościowe natężenie przepływu cieczy,	$r, \phi, z$	– współrzędne walcowe,
$q$	– jednostkowe objętościowe natężenie przepływu cieczy,	$\alpha$	– kąt pochylenia płyty,
$p$	– ciśnienie,	$\delta$	– grubość warstwy cieczy,
$P$	– punkt,	$\mu$	– lepkość dynamiczna,
$s$	– krawędź strugi,	$\Psi$	– kąt między krawędzią a styczną do krawędzi, jak na rys. 2,
$S$	– wektor styczny do kierunku ruchu cieczy w filmie,	$\rho$	– gęstość cieczy,
$u$	– prędkość obwodowa,	$\tau$	– naprężenia styczne na ścianie,
		$\theta$	– kąt zwilżania,
		$Fr_{in} = \frac{v_{in}}{\sqrt{g\delta_{in}}}$	– wlotowa liczba Froude'a.

### Indeksy dolne

$b$	– brzeg strugi,	$o$	– otoczenie,
$\phi$	– kierunek obwodowy,	$in$	– parametry wlotowe,
$r$	– kierunek promieniowy,	$w$	– ścianka,
$z$	– kierunek prostopadły do płyty,	$s$	– krawędź strugi.

### Indeksy górne

+ – wielkość bezwymiarowa.

<sup>1</sup>Institut Maszyn Przepływowych PAN, Zakład Termodynamiki i Wymiany Ciepła, ul. Fiszerowa 14, 80-952 Gdańsk

<sup>2</sup>Praca została wykonana w ramach grantu KBN nr PB 0376

## 1. Wprowadzenie

Ruch cieczy po powierzchni ścianki występuje w szeregu wymiennikach ciepła i wielu aparatach inżynierii chemicznej. Wymienniki takie zwane są ociekowymi lub kondensatorami. Proces rozplywu cieczy w wymiennikach ociekowych różni się od rozplywu kondensatu w kondensatorach. Oba procesy były badane teoretycznie i eksperymentalnie. Szczególnie dużo prac poświęconych jest splywowi grawitacyjnemu filmu cieczowego powstałego wskutek kondensacji pary. Dla tego typu splywu przeprowadzono badania dla wielu geometrii rur (nachylonych okrągłych i eliptycznych, okrągłych żebrowanych) [1-3]. W przypadku splywu grawitacyjnego trajektorie ruchu filmu wyznaczone są przez największe gradienty spadku grawitacyjnego. Pomijane są siły bezwładności. Natomiast w przypadku uderzenia strugi o powierzchnię, siły bezwładności nie mogą być pomijane, gdyż mają one istotny wpływ na trajektorie rozplywającej się po powierzchni cieczy. Proces rozplywu cieczy, uderzającej z określoną prędkością o powierzchnię płaską horyzontalną, był badany teoretycznie i eksperymentalnie [4-5]. Brak rozwiązań teoretycznych rozplywu na powierzchniach pochyłonych. Rozwiązania takie mogą posłużyć do opracowania modeli rozplywu na rurach poziomych lub bardziej złożonych geometriach powierzchni, które mogą wystąpić między innymi w wymiennikach ociekowych. Celem pracy jest poznanie zjawiska rozplywu cieczy na dowolnie zorientowanej płaszczyźnie w przestrzeni.

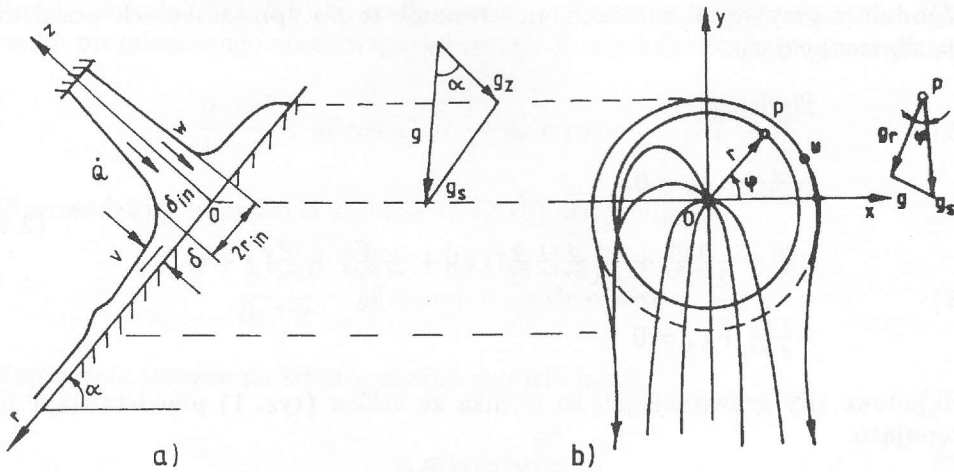
Poddano analizie rozplyw strugi po powierzchni dowolnie zorientowanej w przestrzeni. Zagadnienie wyznaczania kształtu strugi płynącej po powierzchni poziomej rury analizowano w [6]. Rozplyw strugi cieczy po powierzchni ciała stałego posiada swoją specyfikę, przedstawiono to w pracy. Pęd strugi uderzającej o powierzchnię jest wyhamowywany przez siły tarcia, a w końcu równoważony jest przez siły napięcia powierzchniowego. Wykonano obliczenia numeryczne ilustrujące metodę.

## 2. Analiza

Powierzchnia płaska nachylona do poziomu pod kątem  $\alpha$  przedstawiona jest wraz z układem współrzędnych na rys. 1. Przyjęto walcowy układ współrzędnych. Współrzędna wzdłużna  $z$  jest prostopadła do powierzchni nachylonej. Rozważa się przepływ płaski opisany współrzędnymi  $r$  i  $\phi$ . Obie współrzędne leżą w płaszczyźnie rozważanej powierzchni, o którą prostopadle uderza struga cieczy o natężeniu  $Q$ .

W analizie przyjęto, że:

1. Ruch filmu cieczowego jest ustalony, laminarny i spowodowany tylko siłą ciężkości, siłami bezwładności i tarcia cieczy.
2. Ośrodek jest „nieruchomy” i nie wywołuje naprężeń stycznych na powierzchni rozdziału faz.



Rys. 1. Rozptyw strugi na powierzchni płaskiej pochylonej pod kątem  $\alpha$  do poziomu: a) schemat rozptywu, b) układ współrzędnych biegunowych

3. Powierzchnie rozdziału faz: ciecz-ścianka i ciecz-para są gładkie
4. Własności fizyczne cieczy są stałe.
5. Grubość filmu ciekowego jest mała, co pozwala na zastosowanie uproszczeń w równaniach bilansowych masy i pędu.
6. Prędkość w przekroju poprzecznym filmu jest stała i równa średniej prędkości w filmie. Film porusza się z prędkością średnią zależną od współrzędnych  $r$  i  $\phi$ .
7. Składowe prędkości: obwodowa i prostopadła do płaszczyzny są równe zeru ( $w = u = 0$ ). Oznacza to, że składowa promieniowa i grubość filmu są funkcjami promienia  $r$  i kąta  $\phi$ .

Pełny układ równań bilansu masy i pędu we współrzędnych cylindrycznych przedstawia się następująco [7]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u)}{\partial \phi} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{v u}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r u)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + g_{\phi},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u \partial v}{r \partial \phi} - \frac{u}{r} + v \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} + g_r,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial w}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + g_z.$$

(2.1)

Zgodnie z przyjętymi założeniami, równania te po uproszczeniach przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rv)}{\partial r} &= 0, \\ \frac{2\mu}{r^2 \rho \partial \phi} + g_\phi &= 0, \\ v \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} + g_r, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Składowe siły grawitacji jak to wynika ze szkicu (rys. 1) przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} g_r &= g \sin \alpha \cos \phi, \\ g_\phi &= g \sin \alpha \sin \phi, \\ g_z &= g \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bilans masy w granicach grubości filmu cieczowego otrzymuje się przez scałkowanie pierwszego z równań (2.2) w granicach warstwy cieczy:

$$\frac{\partial(rv\delta)}{\partial r} = 0. \quad (2.4)$$

Całkując i porównując z objętościowym natężeniem przepływu uderzającej strugi uzyskuje się:

$$Q = 2\pi r v \delta. \quad (2.5)$$

Całkując z kolei równanie ruchu w kierunku  $z$  otrzymuje się rozkład ciśnienia w postaci:

$$p = \rho g \delta \cos \alpha + p_0, \quad (2.6)$$

z którego, po zróżniczkowaniu otrzymuje się:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho g \frac{\partial \delta}{\partial r} \cos \alpha. \quad (2.7)$$

Z równania ruchu w kierunku obwodowym uzyskuje się:

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} = -\frac{g\rho}{2\mu} r^2 \sin \alpha \cos \phi. \quad (2.8)$$

Różniczkując (2.8) otrzymuje się:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = \frac{g\rho}{2\mu} r^2 \sin \alpha \sin \phi. \quad (2.9)$$

Podstawiając (2.7) i (2.9) do scałkowanego w kierunku  $z$  równania ruchu dla kierunku promieniowego oraz uwzględniając (2.3) uzyskuje się po przekształceniach:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v^2}{2} + g\delta \cos \alpha \right) = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cos \phi - \frac{1}{\rho\delta} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_w. \quad (2.10)$$

Wprowadzając naprężenia styczne do (2.10) otrzymuje się:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v^2}{2} + g\delta \cos \alpha \right) = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cos \phi - \frac{1}{\rho\delta} \tau. \quad (2.11)$$

Naprężenia styczne na ścianie można wyrazić jako:

$$\tau = C_f \rho \frac{v^2}{2}. \quad (2.12)$$

Wówczas, znając współczynnik tarcia można posługiwać się (2.11) w ruchu laminarnym i turbulentnym.

Zależność (2.11) wraz z bilansem masy (2.5) stanowi zamknięty układ równań pozwalający na wyznaczenie pola prędkości i lokalne grubości filmu. W zależności, którą z wielkości – prędkość czy grubość filmu – wyznacza się, można sformułować odpowiednie warunki brzegowe. Przyjmuje się, że zarówno prędkość jak i grubość filmu, na promieniu początkowym  $r_{in}$ , są znane i wynoszą  $\delta_{in}$  i  $v_{in}$ . Wprowadźmy grubość filmu z równania bilansu masy (2.5) oraz zależność (2.12) do równania bilansu pędu (2.11). W rezultacie, po przekształceniach otrzymamy:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\frac{gQ \cos \alpha}{2\pi r^2 v} + \frac{g \sin \alpha \cos \phi}{2} - \frac{C_f v^3 \pi r}{Q}}{v - \frac{gQ \cos \alpha}{2\pi r v^2}}, \quad (2.13)$$

gdzie:  $C_f$  – jest współczynnikiem tarcia i może być określony z zależności Blasiusa dla warstwy przyściennej jako:

$$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{\frac{v(r - r_{in})}{v}}}, \quad (2.14)$$

w której  $r_{in}$  – jest wlotowym promieniem warstwy cieczy.

Równanie na grubość warstwy cieczy  $\delta$ , analogiczne do (2.13), można otrzymać wprowadzając z równania zachowania masy, zamiast grubości warstwy cieczy, jej prędkość do (2.11).

Całkując (2.13), można otrzymać zależność prędkości od promienia  $r$ , lub wyrażając prędkość przez grubość warstwy z równania (2.5) można otrzymać zależność grubości warstwy cieczy od promienia.

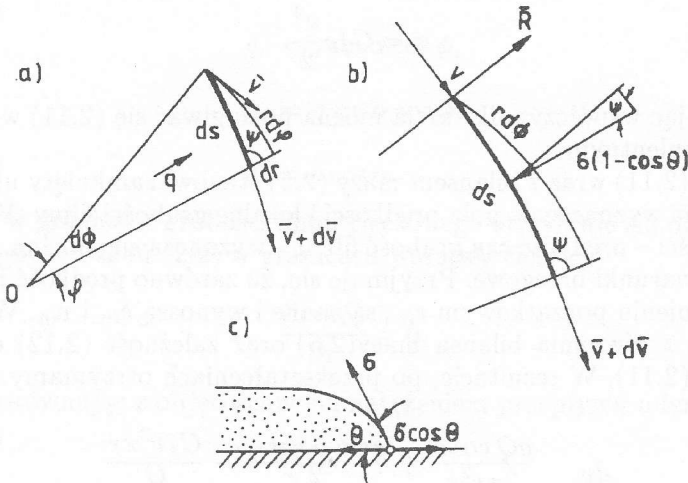
Aby wykonać obliczenia numeryczne sprowadźmy (2.13) do postaci bezwymiarowej:

$$\frac{dv^+}{dr^+} = \frac{\frac{\cos \alpha}{r^{+2}v^+} + \frac{1}{2}\left(\frac{r_{in}}{\delta_{in}}\right) \sin \alpha \cos \phi - C_f Fr_{in}^2 \left(\frac{r_{in}}{\delta_{in}}\right) r^+ v^{+3}}{Fr_{in}^2 v^+ - \frac{\cos \alpha}{r^+ v^{+2}}}, \quad (2.15)$$

gdzie:  $r^+ = \frac{r}{r_{in}}$ ,  $v^+ = \frac{v}{v_{in}}$ ,  $Fr_{in}^2 = \frac{2\pi r_{in} v_{in}^3}{gQ} = \frac{v_{in}^2}{g\delta}$ .

Warunkiem brzegowym dla (2.15) jest:  $r^+ = 1, v^+ = 1$ .

Przyjmijmy, że ciecz wpływa do sektora stycznie do krawędzi, wzbogaca się w ciecz płynącą w sektorze i opuszcza sektor stycznie do krawędzi, jak na rys. 2.



Rys. 2. Schemat rozplywu cieczy w segmencie elementarnym  $d\phi$ , a) rozkład prędkości na krawędzi strugi, b) napięcia powierzchniowe działające na element krawędzi strugi, c) równowaga napięć powierzchniowych działających na film ciekowy

Rozpatrzmy bilans pędu na elementarnym odcinku krawędzi strugi (rys.2):

$$v\delta\rho\Delta\vec{v}du = \vec{\sigma}(1 \cos \theta)ds \quad (2.16)$$

Po lewej stronie występuje strumień pędu a po prawej siły napięcia powierzchniowego cieczy i gazu oraz ciała stałego i cieczy, jak na rys. 2. Bilans sił dla kierunku normalnego do odcinka krawędzi dostarcza równanie:

$$qv \cos \psi r d\phi = \sigma(1 - \cos \theta) \sin \psi ds. \quad (2.17)$$

Długość elementu krawędzi  $ds$  wyraża się przez:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{rd\phi}\right)^2}, \quad (2.18)$$



a

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{dr}{rd\phi} \quad (2.19)$$

Wprowadzając długość łuku – (2.18) oraz  $\operatorname{ctg} y$  – (2.19) do (2.17) otrzymuje się:

$$\frac{\rho q}{\sigma(1 - \cos \theta)} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{rd\phi}\right)^2}}{v\left(\frac{dr}{rd\phi}\right)^2}, \quad (2.20)$$

gdzie:  $q = \delta v$  jest jednostkowym objętościowym natężeniem przepływu. Rozwiązując równanie (2.20) względem  $\frac{dr}{rd\phi}$  otrzymuje się:

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{\rho q}{\sigma(1 - \cos \theta)}\right)^2 v^2 - 1}}. \quad (2.21)$$

Przyjmując, że grubość warstwy cieczy nie podlega dużym zmianom i może być uważana za stałą oraz, że cała ciecz wpływa do sektora o kącie środkowym  $\phi$  i następnie płynie stycznie do krawędzi, obowiązuje równanie ciągłości w postaci:

$$Q = 2\pi r_{in} q_{in} = \phi r v \delta \cong \phi r_{in} q. \quad (2.22)$$

Wprowadzając równanie ciągłości do (2.21) otrzymuje się:

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{2\pi \rho q_{in}}{\sigma \phi (1 - \cos \theta)}\right)^2 v^2 - 1}}. \quad (2.23)$$

W postaci bezwymiarowej (2.23) przedstawia się następująco:

$$\frac{dr^+}{d\phi} = \pm \frac{r^+}{\sqrt{\left(\frac{2\pi \rho q_{in} v_{in}}{\sigma \phi (1 - \cos \theta)}\right)^2 v^{+2} - 1}} = \pm \frac{r^+}{\sqrt{\left(\frac{K v^+}{\phi}\right)^2 - 1}}. \quad (2.24)$$

Warunkiem brzegowym dla tego równania jest wartość promienia  $r_b$ : dla  $\phi = \pi/2$ ,  $r^+ = r_b^+$ .

Ze względu na symetrię strugi, wartość promienia granicznego można wyznaczyć całkując (2.15), aż do osiągnięcia prędkości:

$$v_b^+ = \frac{1}{v_{in}} \sqrt{\frac{\sigma(1 - \cos \theta)}{\rho}}. \quad (2.25)$$

Prędkość ta wynika z równowagi pędu z siłami napięcia powierzchniowego.

Z (2.15) i (2.24) wynika równanie na zmianę prędkości wzdłuż brzegu strugi w postaci:

$$\frac{dv^+}{d\phi} = \frac{\frac{\cos \alpha}{r^+ v^+} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_{in}}{\delta_{in}}\right) r^+ \sin \alpha \cos \phi - C_f F r_{in}^2 \left(\frac{r_{in}}{\delta_{in}}\right) r^{+2} v^{+3}}{\left(F r_{in}^2 v^+ - \frac{\cos \alpha}{r^+ v^{+2}}\right) \sqrt{\left(\frac{2\pi \rho q_{in} v_{in}}{\sigma \phi (1 - \cos \theta)}\right)^2 v^{+2} - 1}} \quad (2.26)$$

Aby znaleźć kształt linii brzegu strugi należy rozwiązać układ równań (2.24) i (2.26) wraz z warunkami brzegowymi.

### 3. Obliczenia numeryczne

Obliczenia wykonano dla parametrów krytycznych i podkrytycznych [8] Przykładowe obliczenia numeryczne przeprowadzono dla kąta pochylenia płyty  $\alpha = 1$  rad. Wartości parametrów wynosiły:  $Fr_{in}^2 = 400$ ,  $\frac{r_{in}}{\delta_{in}} = 35$ ,  $C_f = 0.0007$ ,  $v_b^+ = 0.2$ ,  $K = 40$ . Wyniki obliczeń metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu, wykonane na PC za pomocą programu Mathcad 5+, przedstawiono na rys. 3, 4 i 5. Na

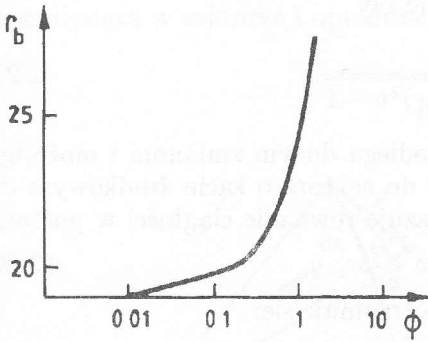


Fig. 3. Zależność promienia krawędzi strugi od kąta  $\phi$

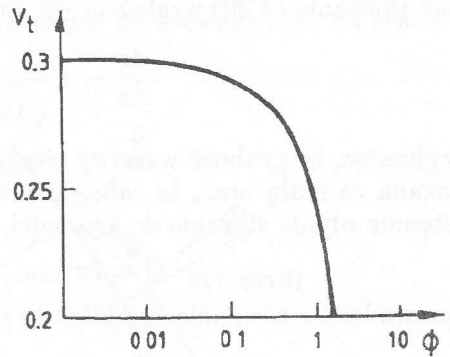
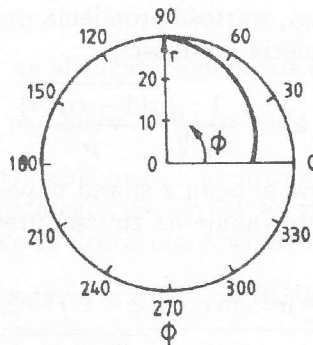


Fig. 4. Zależność prędkości stycznej na krawędzi strugi od kąta  $\phi$

rys. 3 i tabeli 1 przedstawiono we współrzędnych prostokątnych zależność promienia brzegu strugi od kąta, natomiast na rys. 4 zależność prędkości stycznej na brzegu strugi od kąta. Na rys. 5, w układzie biegunowym, dla kątów od 0 do  $\pi/2$  przedstawiono kształt linii brzegowej.



Rys. 5. Wykres biegunowy zależności promienia krawędzi strugi od kąta  $\phi$

Tabela 1. Wartości promienia granicznego strugi i prędkości strugi na krawędzi w zależności of kąta  $\phi$ 

Lp.	$\phi$	$r_6^+$	$v_6^+$
0	1,571	27.615	0,2
1	1.415	26.752	0.21
2	1.259	25.889	0.22
3	1.108	25.026	0.23
4	0.946	24.163	0.241
5	0.79	23,3	0.251
6	0.634	22.437	0.261
7	0.478	21.574	0.271
8	0.322	20.71	0.281
9	0.166	19.847	0.291
10	0.01	18.984	0.301

#### 4. Zakończenie i wnioski

Sformułowany prosty model rozplywu cieczy na powierzchni pochylej, składający się z równań bilansowych: masy, pędu oraz równań zamknięcia, może posłużyć przy pewnych modyfikacjach do opracowania rozplywu strugi na powierzchni walcowej, a następnie do obliczania zagadnienia przejmowania ciepła na takiej powierzchni. Prosty model kształtu strugi uwzględnia wpływ zasadniczych parametrów wpływających na rozplyw strugi, m. in. napięcia powierzchniowe: ciała stałego, cieczy oraz cieczy i gazu lub napięcie powierzchniowe cieczy i gazu oraz kąt zwilżania. Jak już wspomniano, wiąże się to z obliczaniem ociekowych wymienników ciepła. Podany przykład stanowi ilustrację zagadnienia.

Pracę zgłoszono w grudniu 1995 r.

#### Literatura

- [1] Hassan K. E., Jakob M.: *Laminar film condensation of pure saturated vapors on inclined circular cylinders*, Transactions of the ASME, May 1958.
- [2] Brainin M. I., Linieckij W. M., Szeinkman A. G.: *Gidrodinamika laminarnogo tieczenia tonkoi plienki zidkosti po naklonnomu cilindru*, Izvestia Akademii Nauk SSSR, Energetika i Transport, 1967.

- [3] Ktamiir A.: *Laminar condensation on helical reflux condensers and related configurations*, Lexington, Kentucky, 1976.
- [4] Thomas S., Hankey W., Faghri A.: *One-dimensional analysis of the hydrodynamic and thermal characteristics of thin film flows including the hydraulic jump and rotation*, Transaction of the ASME, Vol. 112, August 1990.
- [5] Rahman M. M., Hankey W. L., Faghri A.: *Analysis of the fluid flow and heat transfer in a thin liquid film in the presence and absence of gravity*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34, 1991.
- [6] Trela M., Mikielwicz J., Collins M.W.: *Investigation of the shape of gravity driven liquid sheets*, Proc. Int. Symposium on Turbulence Heat Mass Transfer, Lisbon, August 1994.
- [7] Malczewski J., Piekarski M.: *Modele procesów transportu masy, pędu i energii*, PWN, Warszawa 1992.

## Impingement of liquid jet on inclined plate

### Summary

Theoretical analysis of the phenomenon of impingement of liquid jet on inclined plate has been carried out. Splitting of Newtonian liquid within the inclined plate is caused by inertia and gravity forces. Theoretical model of the phenomenon has been formulated as well as the method of its solution has been proposed. The solution is based on qualitative analysis of geometrical and topology properties of the integral curves. Existing of turning and singular points in the solution has been pointed out. Method of solution depends on the character of singularity. Turning and singular points of the solution correspond to critical conditions of the flow. It means, they correspond to so called hydraulic jump.

Numerical calculations are presented which illustrate the theory. It has been shown that supercritical flow can reach critical parameters approaching the maximum spreading radius. Hydraulic jump may appear due to various disturbances even before reaching critical conditions. After hydraulic jump, the flow becomes subcritical. Transfer of the flow from supercritical conditions to the subcritical conditions is also possible in the case when integral curve is passing through nodal singular point.