POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

62-63

WARSZAWA—POZNAŃ 1973

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE
Instytut Maszyn Przepływowych PAN, 80-952 Gdańsk,
skr. pocztowa 621, Gdańsk-Wrzeszcz, ul. Gen. Józefa Fiszera 14, tel. 41-12-71

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 410+90 egz.	Oddano do składania 19 XII 1972 r.
Ark. wyd. 19,5. Ark. druk. 15,375+2 wkl.	Podpisano do druku 29 IX 1973 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g	Druk ukończono w październiku 1973 r.
Nr zam. 814/155	D-15/787 Cena zł 58,–

DRUKARNIA UNIWERSYTETU im. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

Czwarte Seminarium poświęcone zagadnieniom

MAGNETOHYDRODYNAMIKI STOSOWANEJ
I GAZODYNAMIKI WYSOKICH TEMPERATUR

Jena, maj 1972

Čtvrty Seminař o

APLIKOVANÉ MAGNETOHYDRODYNAMICE
A DYNAMICE PLYNU ZA VYSOKÝCH TEPLOT

Jena, květěn 1972

Viertes Arbeitsseminar über Fragen

DER ANGEWANDTEN MAGNETOHYDRODYNAMIK
UND HOCHTEMPERATUR-GASDYNAMIK

Jena, Mai 1972

Fourth Seminar on

APPLIED MAGNETOHYDRODYNAMICS
AND HIGH TEMPERATURE GASDYNAMICS

Jena, May 1972

Четвертый Семинар по

ПРИКЛАДНОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКЕ
И ГАЗОДИНАМИКЕ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Ена, май 1972 г.

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH
1973 Zeszyt 62 - 63

КАРЕЛЬ ЖИТНЫ

Прага*

Автомодельные решения магнитогидродинамического пограничного слоя при $Re_m \ll 1$ и априорная оценка величины сопротивления трения на стенке

Рассматриваются автомодельные решения уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя в несжимаемой жидкости при степенных распределениях скорости внешнего потока и внешнего поперечного магнитного поля. Предполагается, что электрическая проводимость σ среды постоянна для всего потока и что индуцированное магнитное поле на много меньше внешнего. Как указывается напр. в работе Э. Л. Китанина и Ю. А. Соковишина [3], затем можно свести систему уравнений пограничного слоя к обыкновенному дифференциальному уравнению. Когда скорость невязкого потока изменяется по закону $V_0 = cx_1^m$ и вводится подстановка Хартри

$$\eta = \sqrt{\frac{m+1}{2}\frac{c}{\nu}}\, x_2 x_1^{\frac{m-1}{2}}, \quad \Psi(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{2\nu c}{m+1}}\, x_1^{\frac{m+1}{2}} F(\eta),$$

где Ψ — функция тока, уравнение для автомодельных уравнений запишется в виде

$$F''' + FF'' + \lambda(1 - F'^2) + N(1 - F') = 0, \tag{1}$$

где

$$\lambda = \frac{2m}{m+1}, \quad N = \frac{2\sigma B_0^2}{\rho c(m+1)},$$

и поперечное магнитное поле изменяется по закону $B_{02} = B_0 x_1^{\frac{m-1}{2}}$. Граничные условия будут

$$F(0) = 0, \quad 0 \leqslant F'(0) = \beta < 1, \quad \lim_{\eta \to \infty} F'(\eta) = 1, \tag{2}$$

где случай $\beta = 0$ отвечает обыкновенному гидродинамическому условию прилипания на стенке.

В предшествующей работе [6] было на основе качественных методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказано, что существует единствен-

---

* Ústav termomechaniky ČSAV, Praha.

ное решение краевой задачи (1), (2) а именно такое, что для всех η, $0 \leqslant \eta < +\infty$ имеется $F''(\eta) > 0$. Неравенство $F'' > 0$ означает, что в пограничном слое не возникают возвратные течения. Этот качественный результат достаточен для того, чтобы получить без использования численных методов оценку второй производной в точке $\eta = 0$ и таким образом оценку напряжения сдвига на стенке.

В дальших рассуждениях используем простую форму теоремы, доказанной Е. Камке (см. Коппел [1]). Пусть $f(x, y_1, y_2)$ непрерывна в области трехмерного пространства и является неубывающей функцией переменной y_1. Предположим, что через каждую точку проходит единственное решение дифференциального уравнения

$$w'' = f(x, w, w').$$

Пусть $w(x)$ является решением этого уравнения и $z(x)$ решением неравенства

$$z'' \leqslant f(x, z, z')$$

в интервале $a \leqslant x < b$. Если выполняется $z(a) \leqslant w(a)$, $z'(a) \leqslant w'(a)$, то справедливы неравенства $z(x) \leqslant w(x)$, $z'(x) \leqslant w'(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Если также $\lim\limits_{x \to b-} w(x) = \lim\limits_{x \to b-} z(x)$, то из теоремы Камке следует $w(x) = z(x)$.

Так как $FF'' \geqslant 0$ для всех $\eta \geqslant 0$ из уравнения (1) сразу вытекает неравенство

$$F''' \leqslant \lambda (F'^2 - 1) + N(F' - 1). \tag{3}$$

Сделав далее для сокращения записи подстановку $Z(\eta) = F'(\eta)$, мы получим для функции $Z(\eta)$ неравенство второго порядка

$$Z'' \leqslant \lambda (Z^2 - 1) + N(Z - 1). \tag{4}$$

Если это неравенство заменено соответствующим уравнением

$$W'' = \lambda (W^2 - 1) + N(W - 1), \tag{5}$$

после несложных вычислений найдем его решение в виде

$$W(\eta) = 3\left(1 + \frac{N}{2\lambda}\right) \operatorname{tgh}^2 \sqrt{\frac{\lambda}{2}\left(1 + \frac{N}{2\lambda}\right)}(\eta + \eta_0) - \left(2 + \frac{3N}{2\lambda}\right), \tag{6}$$

где η_0 является постоянной интегрирования, которую мы выбрали так, чтобы $W(0) = \beta$. Кроме того заметим, что $\lim\limits_{\eta \to \infty} W(\eta) = 1$.

Теперь можно сразу вычислить $W'(0)$ и получается

$$W'(0) = \sqrt{\frac{2}{3}\lambda\left(2 + \beta + \frac{3N}{2\lambda}\right)(1 - \beta)}. \tag{7}$$

Если бы было действительно неравенство $Z'(0) \leqslant W'(0)$, то из теоремы Камке следовало бы, что $Z(\eta) = W(\eta)$.

Однако это ведет к противоречию, ибо для данного решения $FF''>0$ для $\eta>0$. Следовательно выполняется неравенство

$$W'(0)<Z'(0)=F''(0). \tag{8}$$

Этим оценивается снизу вторая производная F в точке $\eta=0$.

Аналогично можно найти и верхнюю оценку второй производной. К более общей и точной оценке можно однако прийти и другим способом.

Так как $\frac{1}{2}F'^2-FF''$ является строго возрастающей функцией для всех $\eta>0$, имеем

$$\tfrac{1}{2}F'^2-FF''>\tfrac{1}{2}\beta^2.$$

Учитывая эту оценку и сделая подстановку $Z(\eta)=F'(\eta)$ из уравнения (1), получаем

$$Z''>(\lambda-\tfrac{1}{2})Z^2+NZ+\tfrac{1}{2}\beta^2-(\lambda+N). \tag{9}$$

Далее воспользуемся заменой переменной и выберем Z как новую независимую переменную. Приходим к следующему неравенству:

$$\frac{d}{dZ}(\tfrac{1}{2}V^2)>(\lambda-\tfrac{1}{2})Z^2+NZ+\tfrac{1}{2}\beta^2-(\lambda+N), \qquad V=Z'.$$

Его интегрированием в интервале от β до 1 получаем после несложных преобразований

$$[F''(0)]^2<\{\tfrac{1}{3}[2\lambda(2+\beta)+1+2\beta]-N\}(1-\beta)^2. \tag{10}$$

Что касается постоянной β, заметим — условие $\beta\neq 0$ означает, что на обтекаемой поверхности составляющая скорости v_1 в β-раз меньше, чем скорость внешнего потока. Если $\beta=0$, то и $v_1(x_1, 0)=0$, что является условием прилипания к стенке.

Для случая $\beta=0$ из вышеприведенных оценок получим:

$$\tfrac{4}{3}\lambda+N<[F''(0)]^2<\tfrac{4}{3}\lambda+N+\tfrac{1}{3}. \tag{11}$$

Для указания точности оценки приведем числовой пример:
положим $\lambda=1$, $N=10$ и получим $\frac{34}{3}<[F''(0)]^2<\frac{35}{3}$.
Используя предшествующую формулу (11), можно теперь оценить коэффициент местного сопротивления на стенке.

Первый случай соответствует большим значениям параметра N. Допуская $N\gg 1$ и пренебрегая остальными выражениями, приводим оценку к виду

$$F''(0)\simeq\sqrt{N}. \tag{12}$$

В частности, для напряжения трения на стенке и для коэффицента местного сопротивления из этого непосредственно получаем требуемый результат:

$$\begin{aligned} \tau_0 &\simeq \rho c\sqrt{\frac{m+1}{2}\nu c x_1^{3m-1}N}=\frac{Ha_1}{Re_1}\rho V_0^2(x_1), \\ c_f &= \frac{2\tau_0}{\rho V_0^2(x_1)}\simeq\frac{2Ha_1}{Re_1}, \end{aligned} \tag{13}$$

где введены местное число Рейнольдса $Re_1 = V_0(x_1)x_1/\nu$ и местное число Гартманна $Ha_1 = B_{02}(x_1)x_1\sqrt{\sigma/(\rho\nu)}$.

Для того, чтобы получить более точные оценки, достаточно потребовать выполнения неравенства $\frac{4}{3}\lambda/N < 1$. Если предположить, что $N \geqslant \frac{8}{3}$, неравенство будет справедливо для всех допустимых значений параметра λ.

В силу предположения $\frac{4}{3}\lambda/N < 1$, пользуясь только разложением выражения в левой части неравенства (11) в степенный ряд и замечая, что старшие члены этого биноминального ряда попеременно положительны и отрицательны, получим, что коэффициент местного сопротивления допускает нижнюю оценку:

$$\frac{2Ha_1}{Re_1} + \frac{2}{3}\frac{m}{Ha_1}\left(2 - \frac{1}{3}m\frac{Re_1}{Ha_1}\right) < c_f. \tag{14}$$

Таким образом переходим к исследованиям правой части неравенства (11). Предположим теперь, что $\frac{4}{3}\lambda/N + 1/3N < 1$ и получим, что величина коэффициента местного сопротивления c_f не превосходит величину

$$\frac{2Ha_1}{Re_1} + \frac{2}{3Ha_1}\left(2m + \frac{m+1}{4}\right). \tag{15}$$

Наконец, если предположим, что коэффициент сопротивления при течении вдоль пластинки вне магнитного поля есть $c_f^0 = 2/\sqrt{Re_1}$, получается требуемое выражение для сопротивления в виде

$$\frac{Ha_1}{\sqrt{Re_1}} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{Re_1}}{Ha_1}m\left(2 - \frac{1}{3}m\frac{Re_1}{Ha_1}\right) < \frac{c_f}{c_f^0} < \frac{Ha_1}{\sqrt{Re_1}} + \frac{\sqrt{Re_1}}{3Ha_1}\left(m + \frac{m+1}{2}\right). \tag{16}$$

Если положим $S_1 = H^2a_1/Re_1$ (число Стюарта), отсюда вытекает простая оценка зависимости коэффициента относительного сопротивления

$$\frac{c_f}{c_f^0} \simeq \sqrt{S_1} + \frac{2m}{3\sqrt{S_1}}. \tag{17}$$

В достаточно сильных магнитных полях, как и следовало ожидать, коэффициент пропорционален квадратному корню из числа Стюарта. Не трудно проверить, что более сложные аналогичные оценки получаются и в случае, когда использовано другое выражение для сопротивления трения при отсутствии магнитного поля. Так как основная оценка (11) справедлива даже для $N = 0$, заметим, что при степенном распределении скорости внешнего потока можно для c_f^0 использовать приближенное выражение $2\sqrt{m}/(3\sqrt{Re_1})$.

В заключении необходимо обратить внимание на то, что полученные выражения нельзя до сих пор удовлетворительно сопоставлять ни с экспериментальными, данными, ни с точными расчетами. Не смотря на частное и может быть случайное совпадение с некоторыми формулами для коэффициентов сопротивления течения в прямоугольных трубах в поперечном магнитном поле, можно привести только расчеты Митала - Бодаса [5] и более интересные результаты Гуревича, Миллера, Цинобера, Штерна [2]. Первые авторы решили численным методом магнитогидродинамическое уравнение Блазиуса, т.е. уравнение (1), для $\lambda=0$, $0{,}025<N<0{,}25$ и получили значения второй производной решения в точке $\eta=0$, которые находятся в пределах оценок, но к сожалению отвечают только малым значениям параметра N, для которых оценки довольно грубы.

Гуревич и др. [2] решили задачу о магнитогидродинамическом пограничном слое на пластине в поперечном магнитном поле, на которую набегает однородный параллельный поток, и получили асимптотическую формулу дла коэффициента сопротивления пластины с длиной x_1

$$c_f \simeq \frac{2Ha_1}{Re_1} + \frac{1}{Ha_1}\lg\left(1+\sqrt{1-\exp(-4S_1)}\right), \tag{18}$$

которая при больших значениях числа Гартманна отвечает численным расчетам Левиса [4]. Не смотря на различия в общей физической картине течений, при $S_1 \geqslant 1$ это выражение удовлетворительно отвечает оценке определенной в данной работе.

Литература

[1] W. A. Coppel, *On a differential equations of boundary layer theory*. Phil. Trans. Roy. Soc. London, ser. A, (1960-1961), 253, 101-136.

[2] Б. Я., Гуревич, Р. Л. Миллер, А. Б. Цинобер, А. Г. Штерн, *Обтекание плоской пластины электропроводящей жидкостью в поперечном магнитном поле*. Магнитная гидродинамика, (1966), 4, 69 - 77.

[3] Э. Л. Китанин, Ю. А. Соковишин, *Пограничный слой проводящей среды в магнитном поле*. Магнитная гидродинамика, (1966), 1, 47 - 50.

[4] E. Lewis, *The solution of MHD problem using a numerical method devised by Raetz*. Quart. J. Mech. Appl. Math. (1968), XXI, 4, 401 - 411.

[5] V. Mital, N. G. Bodas, *On the magnetohydrodynamic flow pas a semi-infinite flat plate with transverse magnetic field*. Archivum Mech. Stos. (1970), 22, 37 - 41.

[6] K. Žitný, *Über einige Probleme der Theorie der MHD-Grenzschicht*. Prace IMP, z. 34, 1967, 171 - 187.

Rozwiązania podobne dla hydromagnetycznej warstwy przyściennej przy $Re_m \ll 1$ i oszacowanie a priori tarcia o ściankę

Streszczenie

Przedstawiono analizę hydromagnetycznej warstwy przyściennej w płynie nieściśliwym, przy potęgowych funkcjach rozkładów prędkości głównego strumienia i przyłożonego pola magnetycznego.

Własności globalne rozwiązania uogólnionego równania Falkner-Stana wykorzystano do wyznaczenia uniwersalnych granic dla wartości drugiej pochodnej rozwiązania na ściance. Daje to dwie nierówności dla obliczenia współczynnika tarcia na ściance. Granice górna i dolna są prostymi funkcjami wykładnika funkcji rozkładu prędkości, liczby Hartmana i Reynoldsa. Dokładność szacowania rośnie z wielkością liczby Hartmana. W przypadku przyłożenia silnego pola magnetycznego zredukowany współczynnik tarcia jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z liczby Stuarta. Otrzymane wyniki porównuje się z uzyskanymi przez kilku innych autorów na drodze analitycznej i numerycznej.

Ähnliche Lösungen für die hydromagnetische Grenzschicht bei $Re_m \ll 1$ und eine Abschätzung a priori der Reibung an der Wand

Zusammenfassung

Die Arbeit enhält eine Analyse der hydromagnetischen Grenzschicht in inkompressibler Flüssigkeit für Potenz-Verteilungen der Hauptgeschwindigkeit und des verwendeten magnetischen Feldes.

Globale Eigenschaften der Lösung der verallgemeinten Gleichung von Falkner und Stan werden zum Erhalten universaler Grenzen für den Wert der zweiten Ableitung der Lösung an der Wand verwendet. Das gibt zwei Ungleochungen für den Reibungskoeffizient an der Wand. Die Grenzen – obere und untere – sind einfache Funktionen des Exponenten im Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung, der Reynoldszahl und der Hartmannzahl. Die Genauigkeit der Abschätzung wächst mit der Größe der Hartmannzahl. Wenn ein starkes Magnetfeld angewendet wird, ist der reduzierte Reibungskoeffizient proportional zu der Wurzel aus der Stuartzahl. Die erwähnten Ergebnisse werden mit analytischen und numerischen Resultaten anderer Autoren verglichen.

Similar Solutions for Hydromagnetic Boundary Layer at $Re_m \ll 1$ and a priori Estimate of Skin Friction at the Wall

Summary

The analysis of the hydromagnetic boundary layer in incompressible fluid, for power functions of the distributions of mainstream velocity and applied magnetic field is presented.

The global features of the solution to the generalized Falkner-Stan equation are used to obtain the universal bounds for the value of the second derivative of solution at the wall. This yields two inequalities for the coefficient of skin friction at the wall. The upper and lower bounds are simple functions of the velocity distribution law exponent, of the Reynolds number and the Hartmann one. The accuracy of the estimation increases with the magnitude of the Hartmann number. If a strong magnetic field is applied, the reduced coefficient of friction will be proportional to the square root of the Stuart number. The results gained are compared with those obtained by several authors analytically or numerically.