

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

69

WARSZAWA-POZNAŃ 1975

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA EDITORIAL OFFICE
Instytut Maszyn Przepływowych PAN,
80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, ul. Gen. Józefa Fiszerza 14, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1975

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 380+90 egz.	Oddano do składania 7 III 1975 r.
Ark. wyd. 14,75 Ark. druk. 11,5	Podpisano do druku 2 XII 1975 r.
Papier druk sat. kl. V, 62 g 70×100 cm.	Druk ukończono w grudniu 1975 r.
Nr zam. 259/91.	R - 15/876. Cena zł 45,-

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

TADEUSZ KORONOWICZ

Gdańsk

Wyróżniki całkowe pola prędkości indukowanego przez układ wirów śrubowych o skończonych wymiarach jądra wirowego*

W pracy przedstawiono współczynniki uśredniające składowe prędkości indukowanych przez układy skupionych wirów śrubowych (wyróżniki całkowe), które umożliwiają powiązanie pola prędkości z siłami zewnętrznymi to pole wywołującymi.

Obliczenie wielkości wyróżników całkowych oparto na dokładnym kształcie osobliwości wirów skupionych.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

$b_{v\infty} = \frac{\Gamma}{4\pi R_\infty V_0}$ – bezwymiarowa wielkość cyrkulacji,
 p – ciśnienie,

$r = \frac{R_p}{R_\infty}$ – bezwymiarowa wielkość promienia,

R_∞ – promień cylindra osiowego, na którym są rozłożone wiry wierzchołkowe,

S – powierzchnia kontrolna,

V_0 – prędkość przepływu niezakłóconego,

Z – ilość wirów wierzchołkowych,

β_∞ – kąt skoku linii śrubowej,

Γ – cyrkulacja prędkości,

$\delta_0 = \frac{2b_{v\infty}}{\sqrt{\sigma_0}}$ – parametr charakteryzujący wielkość osobliwości wirów,

$\left. \begin{matrix} v_x \\ v_p \\ v_\varphi \end{matrix} \right\}$ – składowe prędkości indukowanych; osiowa, promieniowa i obwodowa,

$\lambda_3 = \frac{V_0}{\omega_0 R_\infty}$ – współczynnik posuwu,

$\sigma_0 = \frac{p - p_{kr}}{\frac{1}{2}\rho V_0^2}$ – liczba kawitacyjna,

φ_0 – współrzędna kątowa osobliwości wiru,

ω_0 – prędkość kątowa,

$\left. \begin{matrix} \xi \\ \chi \\ \rho \end{matrix} \right\}$ – współczynniki uśredniające pole prędkości indukowanych.

1. Wstęp

Znane w hydromechanice współczynniki uśredniające niejednorodne pole prędkości znajdują duże zastosowanie przy obliczaniu pola prędkości indukowanych przez układy śrubowych wirów skupionych, a wręcz umożliwiając analizę tego pola.

* Praca wykonana w ramach problemu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 5.

Współczynniki uśredniające pęd, kręt i energię w przepływie wywołanym pracą pędnika śrubowego znajdują zastosowanie przede wszystkim w równaniach wiążących pole prędkości z wielkością sił wywołujących to pole.

Pierwsze prace nad analizą pola prędkości indukowanych przez układy skupionych wirów śrubowych zostały zapoczątkowane w Zakładzie Pędników Okrętowych w roku 1967 [3]. Pierwsze obliczenia współczynników uśredniających, jeśli chodzi o uwzględnienie osobliwości wirów skupionych, były prowadzone w sposób przybliżony, przy założeniu, że osobliwości w przekroju normalnym do osi wiru mają kształt koła. Dla wyjaśnienia poprawności przyjętych założeń upraszczających oraz uściślenia pewnych prawidłowości stwierdzonych w analizie pola, zostały przeprowadzone obliczenia dla układu skupionych wirów prostoliniowych jako przypadku granicznego układu wirów śrubowych (skok linii śrubowej $\text{tg } \beta_\infty = \infty$) [4]. W tym przypadku pole prędkości daje się opisać względnie prostymi wzorami, a całki w nich występujące rozwiązać w sposób ścisły metodami klasycznymi. Wyniki obliczeń i analizy dla układu wirów prostoliniowych dostarczyły cennego materiału ułatwiającego i uściślającego analizę bardziej skomplikowanego w opisie pola prędkości indukowanych przez układ wirów śrubowych, dla którego obliczenia można przeprowadzić przy obecnym stanie wiedzy jedynie metodami numerycznymi.

2. Prędkości indukowane od układu wirów śrubowych

Wzory opisujące prędkości indukowane przez pojedynczy, nieskończenie długi wir w kształcie prawidłowej linii śrubowej, zostały wyprowadzone i przedstawione w pracy [2], a dla układu wirów skończonej długości i z uwzględnieniem kontrakcji strumienia pędnikowego w pracy [5].

W niniejszym opracowaniu rozważania zostaną ograniczone do przypadku nieskończenie długich wirów skupionych w kształcie linii śrubowej, rozłożonych równomiernie na powierzchni cylindra osiowego oraz prostoliniowego wiru rdzeniowego, a więc układu charakteryzującego pole prędkości indukowanych daleko za pędnikiem swobodnym.

Taki układ wirów można jednoznacznie określić następującymi wielkościami:

- ilością wirów wierzchołkowych Z ,
- skokiem linii śrubowej $\text{tg } \beta_\infty$,
- promieniem cylindra osiowego, na którego poboczniczy są rozłożone wiry wierzchołkowe R_∞ ,

$$\text{d) bezwymiarową wielkością cyrkulacji } b_{v_\infty} = \frac{\Gamma}{4\pi R_\infty V_0} \text{ lub } b_{n_\infty} = \frac{\Gamma}{4\pi R^2 \omega_0},$$

$$\text{e) liczbą kawitacyjną } \sigma_0 = \frac{p - p_k}{\frac{1}{2}\rho V_0^2} \text{ lub } \sigma_n = \frac{p - p_k}{\frac{1}{2}\rho (\omega_0 R)^2}.$$

Pole prędkości od tak scharakteryzowanego układu wirowego w układzie cylindrycznym (x, ρ, φ) daje się opisać następującymi wzorami (bliższe wyjaśnienia są przedstawione w pracy [5]).

$$v_x = \frac{1}{4\pi R_\infty} \frac{\Gamma}{Z} \sum_{k=0}^{Z-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[1 - r \cos\left(\varphi_p - \varphi_{M_0} - \frac{2\pi}{Z} k\right) \right] d\varphi_M}{\left[1 + r^2 - 2r \cos\left(\varphi_p - \varphi_{M_0} - \frac{2\pi}{Z} k\right) + (\varphi_A - \varphi_{M_0})^2 \text{tg}^2 \beta_\infty \right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$v_\rho = \frac{1}{4\pi R_\infty} \frac{\Gamma}{Z} \operatorname{tg} \beta_\infty \sum_{k=0}^{Z-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[(\varphi_A - \varphi_{M_0}) \cos\left(\varphi_p - \varphi_{M_0} - \frac{2\pi}{Z} k\right) - \sin\left(\varphi_p - \varphi_{M_0} - \frac{2\pi}{Z} k\right) \right] d\varphi_M}{\left[1 + r^2 - 2r \cos\left(\varphi_p - \varphi_{M_0} - \frac{2\pi}{Z} k\right) + (\varphi_A - \varphi_{M_0})^2 \operatorname{tg}^2 \beta_\infty \right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$v_\varphi = \frac{1}{4\pi R_\infty} \frac{\Gamma}{Z} \times$$

$$\times \operatorname{tg} \beta_\infty \sum_{k=0}^{Z-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[r - \cos\left(\varphi_p - \varphi_{M_0} - \frac{2\pi}{Z} k\right) - (\varphi_A - \varphi_{M_0}) \sin\left(\varphi_p - \varphi_{M_0} - \frac{2\pi}{Z} k\right) \right] d\varphi_M}{\left[1 + r^2 - 2r \cos\left(\varphi_p - \varphi_{M_0} - \frac{2\pi}{Z} k\right) + (\varphi_A - \varphi_{M_0})^2 \operatorname{tg}^2 \beta_\infty \right]^{\frac{3}{2}}} -$$

$$\frac{2\Gamma}{4\pi R_\infty} \frac{1}{r},$$

gdzie $r = R_p/R_\infty$.

Całki występujące w powyższych wzorach nie dają się rozwiązać inaczej jak tylko metodami numerycznymi. Wykorzystanie szybkich maszyn cyfrowych pozwala na wyznaczenie składowych prędkości indukowanych w dowolnym punkcie przestrzeni otaczającej układ, ale analiza tego pola wymaga jeszcze dodatkowych obliczeń, szczególnie pracochłonnych w pobliżu osobliwości wirów skupionych.

Dla układu nieskończenie długich wirów w kształcie prawidłowej linii śrubowej, pole prędkości można rozpatrywać w układzie płaskim (ρ, φ) . Charakteryzuje się ono pewnymi własnościami, które ułatwiają jego analizę (są to własności, których większość niestety daje się dowieść jedynie na drodze obliczeń numerycznych).

1. Bezwzględne wartości składowych prędkości indukowanych są zależne od wielkości charakterystycznych dla całego układu wirowego, a więc wielkości Γ , R_∞ , $\operatorname{tg} \beta_\infty$ i Z oraz położenia punktu $P(R_p, \varphi_p)$ względem układu wirowego, a więc $r = R_p/R_\infty$ i $(\varphi_p - \varphi_A) = \theta_A = \varphi$.

2. Składowe prędkości indukowanych mają charakter funkcji okresowych o okresie $2\pi/Z$. Ponadto składową osiową i obwodową cechuje parzystość, a składową promieniową nieparzystość

$$v_x(r, \theta_A) = v_x(r, -\theta_A) = v_x\left(r, \theta_A \pm \frac{2\pi}{Z}\right),$$

$$v_\varphi(r, \theta_A) = v_\varphi(r, -\theta_A) = v_\varphi\left(r, \theta_A \pm \frac{2\pi}{Z}\right),$$

$$v_\rho(r, \theta_A) = -v_\rho(r, -\theta_A) = v_\rho\left(r, \theta_A \pm \frac{2\pi}{Z}\right).$$

3. Składowe osiowa i obwodowa mają wyraźne ekstrema dla $\theta_A = (2\pi/Z) \cdot k$, gdzie $k = 0, 1, 2, \dots, (Z-1)$. Wartość składowych prędkości w punktach ekstremalnych wzrasta przy zbliżaniu się do osobliwości wirów wierzchołkowych.

4. Składowa promieniowa dla $\theta_A = (\pi/Z)l$, gdzie $l = 0, 1, 2, \dots, (2Z-1)$, jest równe zero.

5. Dla pełnego, nieskończenie długiego układu wirów (wiry wierzchołkowe z osiowymi) między składowymi prędkościami indukowanymi osiową i obwodową istnieje zależność spełniona we wszystkich punktach pola

$$v_x \operatorname{tg} \beta_\infty = -v_\varphi r. \quad (2.1)$$

6. Ciekawe własności cechują wartości średnie względem wydatku składowych prędkości indukowanych dla ustalonego promienia r , zdefiniowane następująco:

$$\bar{v} = \frac{1}{2\pi \frac{Z}{Z} - 2\varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\frac{2\pi}{Z} - \varphi_0} \frac{v}{V_0} d\varphi, \quad (2.2)$$

gdzie φ_0 – współrzędna kątowa osobliwości wiru (w przypadku gdy promień r nie przecina osobliwości $\varphi_0 = 0$), v – jedna ze składowych prędkości indukowanych przez układ.

6.1. Składowa osiowa. Dla wszystkich promieni mniejszych od R_∞ i nie obejmujących osobliwości wirów wierzchołkowych $r < 1 - r_{w1}$ (r_{w1} – dolna granica osobliwości jądra wiru wierzchołkowego), wartości średnie są niezależne od r i wyrażają się prostą zależnością:

$$\frac{\bar{v}_x}{V_0} = \frac{\Gamma}{4\pi R_\infty V_0} \frac{2}{\operatorname{tg} \beta_\infty} = \frac{2b_{v_\infty}}{\operatorname{tg} \beta_\infty} = m_{v_\infty}. \quad (2.3)$$

Dla wszystkich promieni większych od R_∞ i nie obejmujących osobliwości wirów wierzchołkowych $r > 1 + r_{w2}$ (r_{w2} – górna granica osobliwości jądra wiru wierzchołkowego) wartości średnie są równe zero.

Dla promienia $r = 1$ wartość średnia przyjmuje wielkość równą połowie wartości jaka wynika ze wzoru (2.3), a więc:

$$\left(\frac{\bar{v}_x}{V_0} \right)_{r=1} = \frac{1}{2} m_{v_\infty}. \quad (2.4)$$

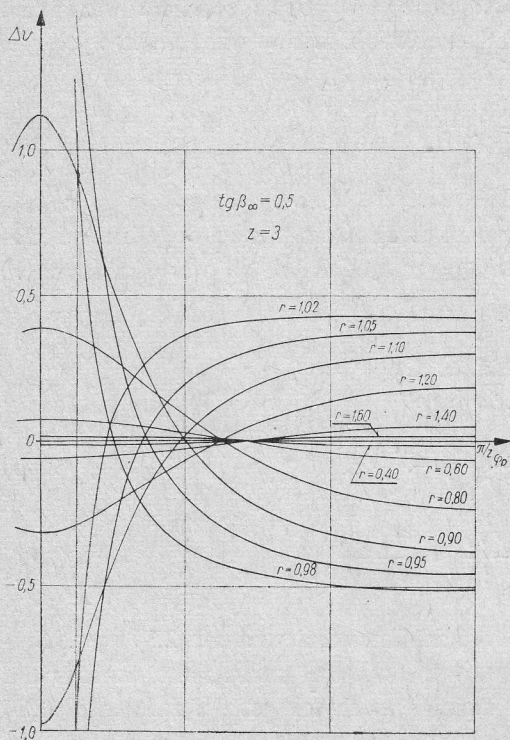
Dla promieni obejmujących osobliwość wirów wierzchołkowych $1 - r_{w1} < r < 1 + r_{w2}$ wartości średnie są funkcją promienia, przyjmując w punktach $r = 1 - r_{w1}$, $r = 1 + r_{w2}$ i $r = 1$ wyżej określone wartości. Na rys. 3 jest przedstawiona wielkość $A = (v_x/v_0)/m_{v_\infty}$ dla układu 3 wirów śrubowych o skoku $\operatorname{tg} \beta_\infty = 0,3$.

6.2. Składowa odwodowa (dla pełnego układu wirowego). Dla wszystkich promieni mniejszych od R_∞ i nie obejmujących osobliwości wirów wierzchołkowych $r < 1 - r_{w1}$ wartości średnie wyrażają się prostym wzorem (jak dla wiru osiowego):

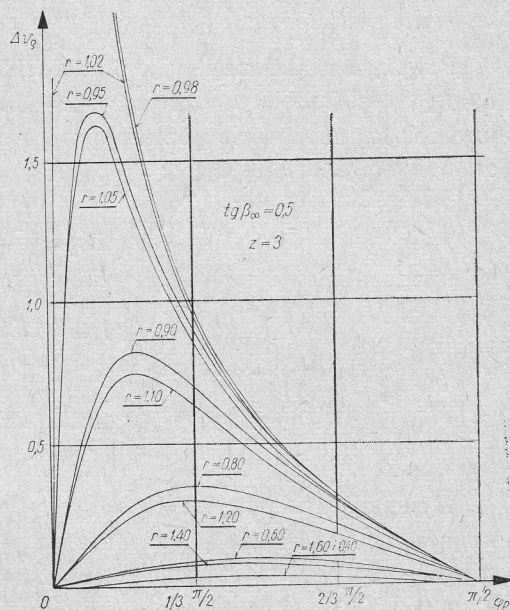
$$\frac{\bar{v}_\varphi}{V_0} = \frac{\Gamma}{4\pi R_\infty \cdot V_0} \frac{2}{r} = \frac{2b_{v_\infty}}{r} = \frac{m_{v_\infty} \operatorname{tg} \beta_\infty}{r}. \quad (2.5)$$

Dla wszystkich $r > 1 + r_{w2}$ wartość średnia jest równa 0. Dla promienia $r = 1$ wartość średnia jest równa połowie wartości określonej wzorem (2.5)

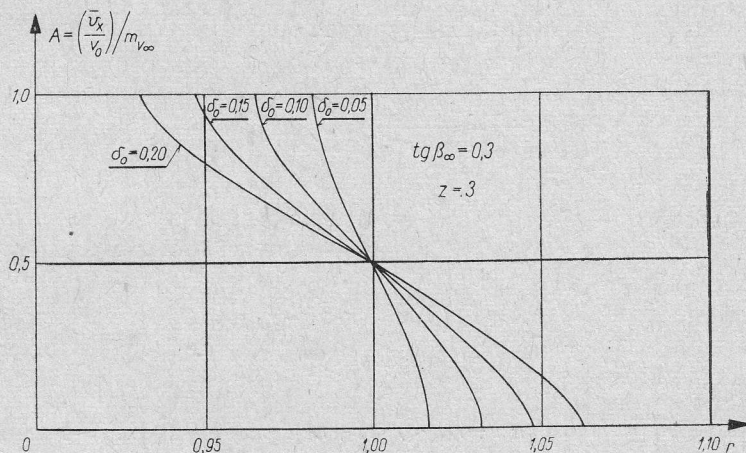
$$\left(\frac{\bar{v}_\varphi}{V_0} \right)_{r=1} = b_{v_\infty} = \frac{m_{v_\infty}}{2} \operatorname{tg} \beta_\infty. \quad (2.6)$$



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Dla promieni obejmujących osłabiłości wirów wierzchołkowych przebieg funkcji $(\overline{v}_\varphi/V_0)/b_{v_\infty}$ ma charakter bardzo zbliżony do przebiegu przedstawionego na rys. 2 w pracy [4] (wielkość δ_0 charakteryzuje wielkość osłabiłości wiru wierzchołkowego). Od wielkości $A = (\overline{v}_x/V_0)/m_{v_\infty}$, przedstawionej na rys. 3 w niniejszym opracowaniu, wielkość $(\overline{v}_\varphi/V_0)/b_{v_\infty}$ różni się mnożnikiem $(1/r)$.

6.3. Składowa promieniowa. Wartości średnie są równe zeru dla wszystkich promieni, łącznie z promieniami obejmującymi osobliwość wirów wierzchołkowych

$$\frac{\bar{v}_\rho}{V_0} = 0. \quad (2.7)$$

Powyższe właściwości pola prędkości indukowanych, a zwłaszcza proste zależności na prędkości średnie, umożliwiają opis składowych prędkości w postaci dogodnej do analizy pola, a mianowicie pozwalają wprowadzić pojęcie odchyłek od wartości średnich, zdefiniowanych następująco:

$$\Delta v_x = \frac{1}{m_{v_\infty}} \left(\frac{v_x}{V_0} - \frac{\bar{v}_x}{V_0} \right), \quad (2.8a)$$

$$\Delta v_\varphi = \frac{r}{m_{v_\infty} \operatorname{tg} \beta_\infty} \left(\frac{v_\varphi}{V_0} - \frac{\bar{v}_\varphi}{V_0} \right), \quad (2.8b)$$

$$\Delta v_\rho = \frac{1}{m_{v_\infty}} \left(\frac{v_\rho}{V_0} - \frac{\bar{v}_\rho}{V_0} \right) = \frac{1}{m_{v_\infty}} \frac{v_\rho}{V_0}. \quad (2.8c)$$

Występująca w powyższych wzorach wielkość zdefiniowana wzorem (2.3) i przedstawiająca prędkość średnią w strumieniu pędnikowym, została uznana jako wzorzec dla całego przepływu. Wychodząc z powyższych definicji odchyłek oraz z zależności (2.1) i wzorów (2.3), (2.5), składowe prędkości indukowanych można przedstawić w postaci dogodniejszej w obliczeniach:

$$\frac{v_x}{V_0} = m_{v_\infty} (A + \Delta v), \quad (2.9a)$$

$$\frac{v_\varphi}{V_0} = \frac{m_{v_\infty} \operatorname{tg} \beta_\infty}{r} (A + \Delta v), \quad (2.9b)$$

$$\frac{v_\rho}{V_0} = m_{v_\infty} \Delta v_\rho, \quad (2.9c)$$

gdzie

$$A = 1 \quad \text{dla} \quad r < 1 - r_{w1},$$

$$A = 0 \quad \text{dla} \quad r > 1 + r_{w2},$$

$A = A(r)$ dla promieni pośrednich $1 - r_{w1} < r < 1 + r_{w2}$, przy czym dla $r = 1$ wielkość $A = 1/2$.

Przykład funkcji $A(r)$ dla układu złożonego z 3 wirów wierzchołkowych o skoku $\operatorname{tg} \beta_\infty = 0,3$ jest przedstawiony na rys. 3.

Ponieważ dla rozpatrywanego układu wirów odchyłki od wartości średnich Δv_x i Δv_φ są sobie równe we wszystkich punktach pola prędkości, we wzorach (2.9) przyjęto dla nich wspólne oznaczenie Δv .

Wprowadzenie pojęcia odchyłek od wartości średnich względem wydatku stanowi duże udogodnienie jeśli chodzi o opis pola prędkości oraz znakomicie ułatwia analizę

tego pola. Przykład pola prędkości w układzie $\Delta v(\varphi_p)$ i $\Delta v_\rho(\varphi_p)$ dla $r = \text{const}$ jest przedstawiony na rys. 1 i 2.

Z analizy uzyskanych metodami numerycznymi wyników obliczeń wynika, że dla układów wirowych o liczbie wirów wierzchołkowych $z > 2$ i punktów $P(r, \varphi_p)$ oddalonych od układu wirów wierzchołkowych o więcej niż połowę promienia R_∞ ($r < 0,5$ i $r > 1,6$) wielkości odchyłek od wartości średnich Δv i Δv_ρ są pomijalnie małe. Im większa ilość wirów wierzchołkowych, tym wartości odchyłek są mniejsze; i tak dla $Z=9$ wielkość odchyłek nie przekracza 1% wartości średniej już dla promieni $r < 0,8$ i $r > 1,2$ (dla $\delta = |1-r| > 0,2$).

3. Osobliwości układów wirów śrubowych

Przy analizie pola prędkości indukowanych przez układy wirów skupionych istotną rolę odgrywa umiejętność określania granic osobliwości. Przepływ wokół osobliwości jąder wirowych, zwłaszcza dla przepływu modelowego, można uważać za przepływ potencjalny. W tym przypadku istnieje ścisła zależność pomiędzy polem ciśnień i polem prędkości. Związek ten można wyznaczyć porównując moc sił zewnętrznych określonych z zasady krętu i z zasady energii lub korzystając z całki Cauchy-Lagrange'a dla przepływu względnego [1]:

$$\begin{aligned} \frac{p_0 - p}{\rho V_0^2} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v_x}{V_0} \right)^2 + \left(\frac{v_\varphi}{V_0} \right)^2 + \left(\frac{v_\rho}{V_0} \right)^2 \right] + \frac{v_x}{V_0} - \frac{r}{\lambda_3} \frac{v_\varphi}{V_0} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{v_i}{V_0} \right)^2 + \frac{v_x}{V_0} - \frac{r}{\lambda_3} \frac{v_\varphi}{V_0} \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Powyższe równanie można przekształcić wprowadzając zapis na składowe prędkości indukowanych, zgodnie z wzorami (2.9) oraz wyrażenie na współczynnik posuwu λ_3 . Współczynnik posuwu λ_3 (dla przepływu daleko za pędnikiem) można wyznaczyć ze wzoru definiującego skok linii śrubowej [5]:

$$\text{tg } \beta_\infty = \frac{V_0 + v_{x0}}{\omega_0 R_\infty - v_{\varphi 0}} = \frac{1 - \frac{v_{x0}}{V_0}}{\frac{1}{\lambda_3} - \frac{v_{\varphi 0}}{V_0}}. \quad (3.2)$$

Wykorzystując zależność (2.4) i (2.6) uzyskujemy:

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\text{tg } \beta_\infty} \left[1 + \frac{m_{v_\infty}}{2} (1 + \text{tg}^2 \beta_\infty) (1 + 2\Delta v_0) \right], \quad (3.3)$$

gdzie prędkości własne wirów wierzchołkowych zostały określone zgodnie z zapisem wzorów (2.9) po przyjęciu, że $A=1/2$:

$$\frac{v_{x0}}{V_0} = m_{v_\infty} \left(\frac{1}{2} + \Delta v_0 \right) = \frac{m_{v_\infty}}{2} (1 + 2\Delta v_0), \quad (3.4)$$

$$\frac{v_{\varphi 0}}{V_0} = m_{v_\infty} \text{tg } \beta_\infty \left(\frac{1}{2} + \Delta v_0 \right) = \frac{v_{x0}}{V_0} \text{tg } \beta_\infty. \quad (3.5)$$

Ostatecznie uzyskujemy ogólny wzór na pole ciśnień indukowanych przez układ wirów:

$$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2}\rho V_0^2} = m_{v_\infty}^2 \left[\Delta v^2 \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_\infty}{r^2} \right) + \Delta v_\rho^2 - \Delta v (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) (1 + \Delta v_0) + A^2 \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_\infty}{r^2} \right) + \right. \\ \left. + 2A\Delta v \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_\infty}{r^2} \right) - A (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_\infty) (1 + 2\Delta v_0) \right] \quad (3.6)$$

W zależności od r wielkość A przyjmuje wartości określone przy opisie wzorów (2.9).

Jeśli przyjąć, że w miejscach, w których ciśnienie p uzyskuje wartość krytyczną p_{kr} występuje powierzchnia rozdziału i tworzy się osobliwość jądra wirowego, to wzór (3.6) może służyć do wyznaczenia granic osobliwości. Jak to wynikało z rozważań nad osobliwościami układu wirów prostoliniowych [4], bardzo ciekawą i praktyczną w zastosowaniu wielkością jest parametr $\delta_0 = 2b_{v_\infty}/\sqrt{\sigma_0}$ wiążący wielkość liczby kawitacyjnej, a więc warunki przepływu niezakłóconego, z wirowością układu i charakteryzujący wielkość osobliwości jąder wirów skupionych.

Wprowadzając do wzoru (3.6) parametr δ_0 uzyskujemy równanie, które dla określonej wartości promienia r i określonego pola prędkości (zadanego wielkością $\operatorname{tg} \beta_\infty$ oraz związanych z nią odchyłek $\Delta v(\varphi)$, $\Delta v_\rho(\varphi)$) oraz zadanych wartości δ_0 (oraz związane z nią wartości Δv_0), pozwala określić wielkość kąta φ_0 wyznaczającego granicę jądra wirowego. Rozwiązania należy szukać dla promieni w granicach $1 - \delta_0/Z < r < 1 + \delta_0/Z$:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \beta_\infty}{\delta_0^2} = \Delta v^2 \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_\infty}{r^2} \right) + \Delta v_\rho^2 - \Delta v (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_\infty) (1 + 2\Delta v_0) + \\ + A^2 \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_\infty}{r^2} \right) + 2A \cdot \Delta v \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_\infty}{r^2} \right) - A (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_\infty) (1 + 2\Delta v_0). \quad (3.7)$$

Przeprowadzone obliczenia metodą numeryczną i wykresną, zmierzające do wyznaczenia granic osobliwości wykazały, że dla $\delta_0 < 0,2$ przekrój jądra wiru wierzchołkowego nieznacznie tylko odbiega kształtem od przekroju kołowego o promieniu $r_w = \delta_0/Z$.

Promień wiru rdzeniowego można bezpośrednio wyznaczyć ze wzoru (3.7), gdyż, jak wykazały obliczenia, dla promieni $r < 0,3$ wielkość odchyłek Δv i Δv_ρ jest pomijalnie mała:

$$r_r = \frac{\delta_0}{\sqrt{1 + \delta_0^2 \left(1 + \frac{2\Delta v_0}{\sin^2 \beta_\infty} \right)}} \cong \frac{\delta_0}{\sqrt{1 + \delta_0^2}}. \quad (3.8)$$

Znajomość wielkości osobliwości wirów skupionych ma zasadnicze znaczenie przy wyznaczaniu wielkości współczynników uśredniających.

4. Wyróżniki całkowite pola prędkości indukowanych

Podstawowe równania mechaniki płynu umożliwiają powiązanie pola prędkości indukowanych z siłami zewnętrznymi pole to wywołującymi. W wielu zagadnieniach złożoność przepływu w bliskim sąsiedztwie sił zewnętrznych utrudnia powiązanie rozkładu

sił z polem prędkości i ciśnien indukowanych przez te siły. Jednak niejednokrotnie w rozważaniach teoretycznych i w praktyce projektowej wystarcza dla określonego rodzaju sił (np. pędnika śrubowego) umiejętność przypisania wielkościom wypadkowym (jak np. napór całkowity T i moment całkowity Q) charakterystycznego dla nich pola prędkości i ciśnien. Takie możliwości stwarzają równania oparte na zasadzie pędu, krętu i energii, w odniesieniu do przepływu obejmującego całe pole zakłóceń wywołanych działaniem sił zewnętrznych. W tych równaniach występują wielkości całkowe uśredniające niejednorodność tego pola. Są to prędkości średnie wyznaczone z wydatku i określone wzorem (2.2) oraz wielkości wynikające z uśrednienia pędu, krętu i energii przepływu.

Na przykład dla wyznaczenia siły wypadkowej na powierzchni kontrolnej daleko za pędnikiem można się posłużyć równaniem (3.6), które jest pewną przekształconą postacią równania energii i wyznaczyć wielkość charakteryzującą pole ciśnien indukowanych (potrzebną przy wyznaczaniu wielkości naporu pędnika z zasady pędu):

$$P = \frac{1}{\pi R_\infty^2} \iint_S \frac{p_0 - p}{\rho V_0^2} dS. \quad (4.1)$$

Przy określaniu wielkości P wystąpią wszystkie trzy interesujące nas współczynniki uśredniające składowe prędkości indukowanych, które same lub w kombinacji ze sobą charakteryzują pęd, kręt i energię kinetyczną dla pola prędkości indukowanych na powierzchni kontrolnej S i które można uznać za wyróżniki całkowe pola prędkości.

Biorąc pod uwagę równanie (3.6), uzyskamy:

$$P = m_{v_\infty}^2 \int_{r_r}^{\infty} r dr \frac{Z}{\pi} \int_{\varphi_0}^{\frac{2\pi}{Z} - \varphi_0} \left[\Delta v^2 \left(1 + \frac{\text{tg}^2 \beta_\infty}{r} \right) + \Delta v_\rho^2 + A^2 \left(1 + \frac{\text{tg}^2 \beta_\infty}{r^2} \right) - A(1 + \text{tg}^2 \beta_\infty)(1 + 2\Delta v_0) \right] d\varphi \quad (4.2)$$

(w powyższym równaniu uwzględniono zależność wynikającą z definicji odchyłek od wartości średnich $\int_{\varphi_0}^{\frac{2\pi}{Z} - \varphi_0} \Delta v d\varphi = 0$). W całe wewnętrznej (względem parametru φ) występującej w równaniu (4.2) można wyróżnić tylko dwie wielkości będące funkcją tego parametru. Są to Δv i Δv_ρ . Dla wygody obliczeń i analizy pola prędkości, w tym przypadku wygodnie jest posłużyć się definicją współczynników uśredniających dla poszczególnych składowych prędkości indukowanych podanych w pracy [4] (wzory (4.1)). Jednak ze względu na już zastosowane oznaczenie w pracy [6] (rozpatrującej również układy śrubowych wirów skupionych), wzory definicyjne zastosowane w tej pracy będą się różniły brakiem mnożnika przy $b_{v_\infty}^2$:

$$\beta_r = \frac{1}{b_{v_\infty}^2 (\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{Z}} \left(\frac{v_x}{V_0} - \bar{V}_x \right)^2 d\varphi = \frac{4}{\text{tg}^2 \beta_\infty (\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{Z}} \Delta v^2 d\varphi, \quad (4.3a)$$

$$\chi_r = \frac{1}{b_{V_\infty}^2} \frac{Z}{(\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{Z}} \left(\frac{v_\varphi}{V_0} - \bar{V}_\varphi \right)^2 d\varphi = \frac{4}{r^2} \frac{Z}{(\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{Z}} \Delta v^2 d\varphi, \quad (4.3b)$$

$$\rho_r = \frac{1}{b_{V_\infty}^2} \frac{Z}{(\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{Z}} \left(\frac{v_\rho}{V_0} - \bar{V}_\rho \right)^2 d\varphi = \frac{4}{\text{tg}^2 \beta_\infty} \frac{Z}{(\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{Z}} \Delta v_\rho^2 d\varphi. \quad (4.3c)$$

Przy przekształcaniach wzorów definicyjnych uwzględniono zależności (2.8).

Przy obliczeniu \mathfrak{z}_r , χ_r i ρ_r jak również przy szczegółowej analizie pola prędkości, wygodnie jest posługiwać się wielkościami podobnie zdefiniowanymi, ale o zmiennych granicach całkowania:

$$\mathfrak{z}_r^*(\varphi) = \frac{4}{\text{tg}^2 \beta_\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{Z} - \varphi} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{Z}} \Delta v^2 d\varphi, \quad (4.4a)$$

$$\rho_r^*(\varphi) = \frac{4}{\text{tg}^2 \beta_\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{Z} - \varphi} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{Z}} \Delta v_\rho^2 d\varphi. \quad (4.4b)$$

W tym przypadku \mathfrak{z}_r i ρ_r są wartościami szczególnymi wielkości $\mathfrak{z}_r^*(\varphi)$ i $\rho_r^*(\varphi)$ dla określonych wartości φ , wyznaczających granicę jądra wiru φ_0 lub dla promieni nie przecinających osi, dla $\varphi=0$.

Znajomość współczynników \mathfrak{z}_r i ρ_r dla poszczególnych promieni na całej powierzchni kontrolnej S , pozwala wyznaczyć współczynniki uśredniające poszczególne składowe prędkości indukowanych dla całego przepływu w przekroju daleko za pędnikiem

$$\mathfrak{z} = \int_{r_r}^{\infty} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi} \right) \mathfrak{z}_r r dr, \quad (4.5a)$$

$$\chi = \int_{r_r}^{\infty} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi} \right) \text{tg}^2 \beta_\infty \frac{\mathfrak{z}_r}{r} dr, \quad (4.5b)$$

$$\rho = \int_{r_r}^{\infty} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi} \right) \rho_r r dr. \quad (4.5c)$$

Ze względu na sposób przeprowadzania obliczeń, wygodnie jest podzielić powierzchnię kontrolną S na trzy obszary pierścieniowe:

obszar 1 – pomiędzy osiowością wiru rdzeniowego i dolną granicą osiowości wirów wierzchołkowych $r_r < r < 1 - r_{w1}$,

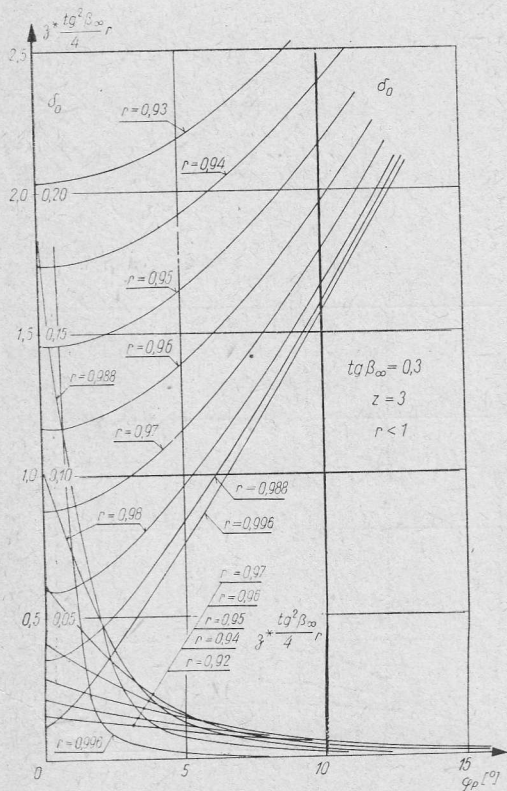
obszar 2 – objęty granicami osobliwości wirów wierzchołkowych $1 - r_{w1} < r < 1 + r_{w2}$,
 obszar 3 – pozostała część powierzchni S rozciągającej się do nieskończoności
 (praktycznie do promienia $r=2$) $r > 1 + r_{w2}$.

Dla wyznaczenia granic poszczególnych obszarów potrzebna jest znajomość wielkości osobliwości, a więc r_{w1} , r_{w2} i r_r . W tym celu posługujemy się równaniem (3.7) i (3.8), ustalając pewne wartości parametru δ_0 .

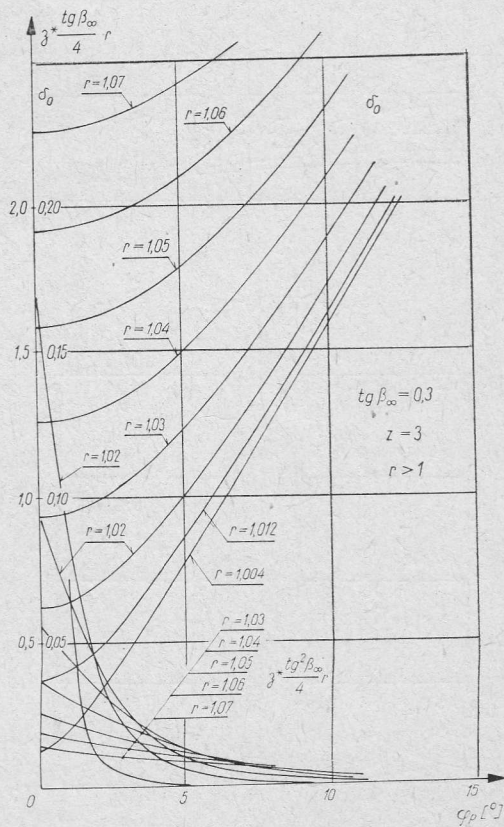
Równanie (3.7) pozwala również wyznaczyć zależność δ_0 od φ dla danego promienia r , co przy równoczesnej znajomości $z_r(\varphi)$, $\rho_r(\varphi)$ dla ustalonych wartości δ_0 umożliwia w sposób numeryczny lub wykresny wyznaczyć interesujące nas wartości z_r i ρ_r .

Na rysunkach 4, 5 i 6 przedstawiono wykresy wielkości $z_r^*(\varphi)$, $\rho_r^*(\varphi)$ i $\delta_0(\varphi)$ dla układu złożonego z trzech wirów wierzchołkowych o skoku $\text{tg } \beta_\infty = 0,3$. Dla ułatwienia dalszych obliczeń oraz analizy porównawczej zależności $z_r^*(\varphi)$ i $\rho_r^*(\varphi)$ od skoku linii śrubowej, na wykresach naniesiono wielkości $z_r^*(\varphi)$ i $\rho_r^*(\varphi)$ pomnożone przez wyrażenie $r \text{tg}^2 \beta_\infty$.

Okazuje się, że dla promieni symetrycznie rozłożonych wokół $r=1$ i dla $\delta = z|1-r| < 0,2$ wielkości $\rho_r^*(\varphi)r$ ($\rho_r^*(\varphi)$ pomnożone przez wartości promienia r) przyjmują praktycznie biorąc te same wartości, a pomiędzy wielkościami $z_r(\varphi)r$ różnice są niewielkie. Dla $r=1$ i



RYS 4

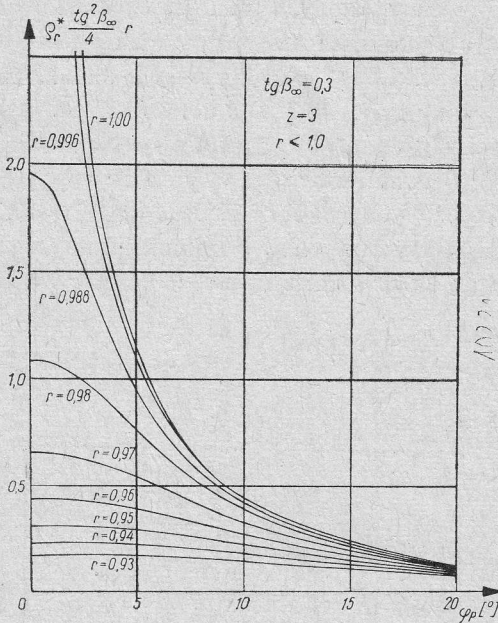


RYS 5

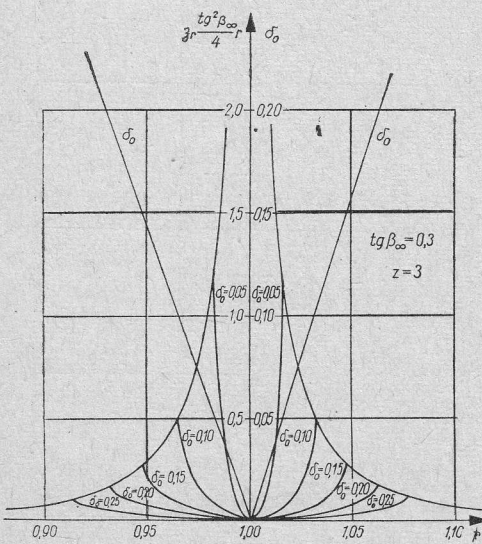
$\varphi=0$, zarówno $z_r^*(\varphi)$ jak i $\rho_r^*(\varphi)$, tak samo jak składowe prędkości, posiadają wartości nieokreślone.

Wraz ze wzrostem wielkości $(1-r)$ oraz współrzędnej φ wartości $z_r^*(\varphi)$ i $\rho_r^*(\varphi)$ szybko maleją. Krzywe $\delta_0(\varphi)$ mają kształt parabol drugiego stopnia przecinających oś $\varphi=0$ w punktach określających osobliwości jąder wirów wierzchołkowych r_{w1} i r_{w2} .

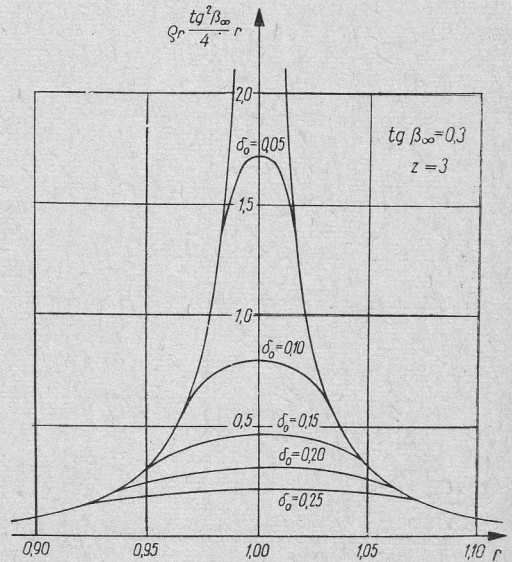
Jak można sądzić z przedstawionych na rysunkach 4 i 5 danych oraz innych szczegółowych obliczeń, wielkości r_{w1} i r_{w2} dla $\delta_0 < 0,1$ praktycznie są równe wielkości δ_0/Z . Dla



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

większych wartości δ_0 wielkość r_{w1} przyjmuje wartości nieznacznie większe, a r_{w2} nieznacznie mniejsze od δ_0/z .

Z przedstawionych na rysunkach 4, 5 i 6 krzywych można dla określonych wartości δ_0 wyznaczyć wartości współczynników \mathcal{Z}_r i ρ_r w zakresie osobliwości wirów wierzchołkowych. Wyniki takich obliczeń zostały przedstawione na rys. 7 i 8.

Porównując przebieg krzywych na rys. 7 i 8 z przebiegiem krzywych χ_r i ρ_r w pracy [4], można stwierdzić te same prawidłowości, z tą różnicą, że χ_r i ρ_r poza osobliwościami wirów dla układu wirów prostoliniowych ($\text{tg } \beta_\infty = \infty$) pokrywają się, a dla układu wirów śrubowych różnice pomiędzy \mathcal{Z}_r i ρ_r wzrastają wraz z maleniem skoku linii śrubowej.

Przebieg współczynników \mathcal{Z}_r i ρ_r w obszarach 1 i 2 ma charakter zbliżony do krzywych określonych w sposób ścisły dla układu wirów prostoliniowych, a więc krzywych określonych wzorami:

– dla $r < 1$

$$\chi_r = \rho_r = \frac{r^{2Z}}{2r^2(1-r^{2Z})}, \quad (4.6a)$$

– dla $r > 1$

$$\chi_r = \rho_r = \frac{1}{2r^2(r^{2Z} - 1)}. \quad (4.6b)$$

Posiadają one osobliwości dla $r=1$, która zanika jeśli wielkości \mathcal{Z}_r i ρ_r przemnożymy przez wielkość $(1-r)$.

Analizując uzyskane w sposób numeryczny wyniki obliczeń można stwierdzić, że wielkość ρ_r pomnożona przez $\sin \beta_\infty$, wielkość $(1-r)$ oraz ilość wirów wierzchołkowych rozpatrywanego układu Z , dla $r=1$ przyjmuje wartość równą jedności, niezależnie od skoku (słuszne również dla skoku nieskończenie dużego $\text{tg } \beta_\infty = \infty$ (wiry prostoliniowe) z zastrzeżeniem, że wielkość ρ_r określoną w pracy [4] należy pomnożyć przez 4). Na rys. 9 przedstawiono przebieg wielkości $Z\rho_r|1-r|\sin \beta_\infty$ dla kilku wartości skoku linii śrubowej układów złożonych z trzech wirów wierzchołkowych.

Uzależnienie wielkości $Z\rho_r$ od parametru δ , w zakresie poza osobliwościami, ma duże znaczenie praktyczne, gdyż okazuje się, że w tym układzie odniesienia wielkość $Z\rho_r$ jest już mało zależna od ilości wirów Z . Jest to prawidłowość stwierdzona również przy analizie układu wirów prostoliniowych [4].

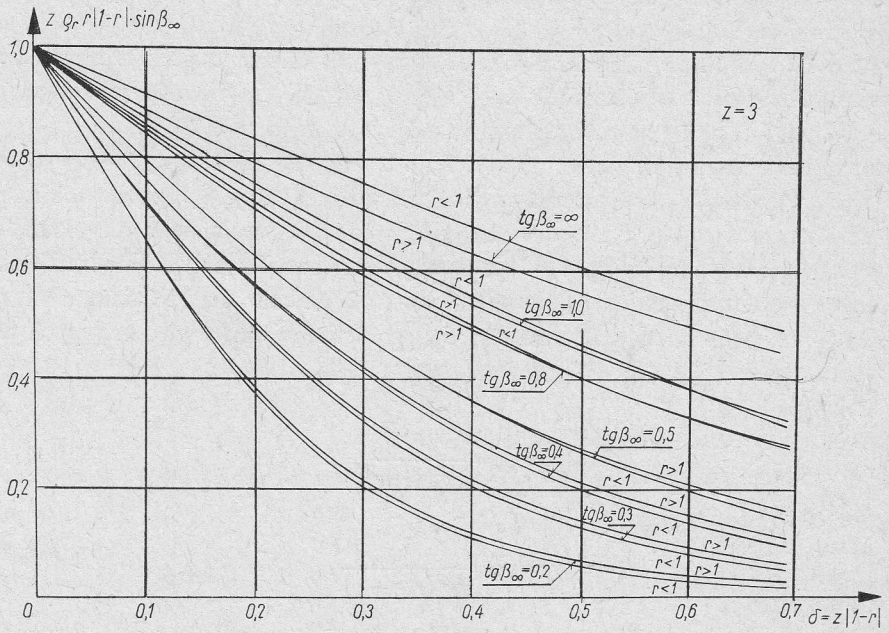
Inną własnością pola prędkości stwierdzoną zarówno dla układu wirów prostoliniowych, jak i dla układu wirów śrubowych jest stwierdzenie, że wielkości

$$\kappa_{\mathcal{Z}} = \frac{1}{2} \delta \left[\left(1 - \frac{\delta}{Z}\right) \mathcal{Z}_{r1} + \left(1 + \frac{\delta}{Z}\right) \mathcal{Z}_{r2} \right], \quad (4.7a)$$

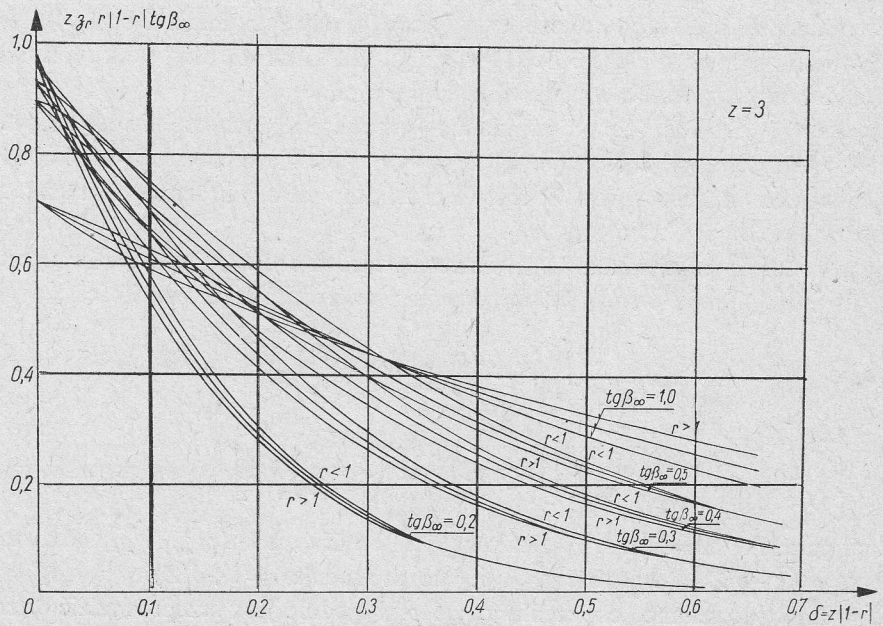
$$\kappa_{\rho} = \frac{1}{2} \delta \left[\left(1 - \frac{\delta}{Z}\right) \rho_{r1} + \left(1 + \frac{\delta}{Z}\right) \rho_{r2} \right], \quad (4.7b)$$

w funkcji parametru $\delta = Z|1-r|$ są mało zależne od Z (wielkości \mathcal{Z}_{r1} i ρ_{r1} odnoszą się do promienia $r=1-\delta/Z$, a wielkości \mathcal{Z}_{r2} i ρ_{r2} do promienia $r=1+\delta/Z$).

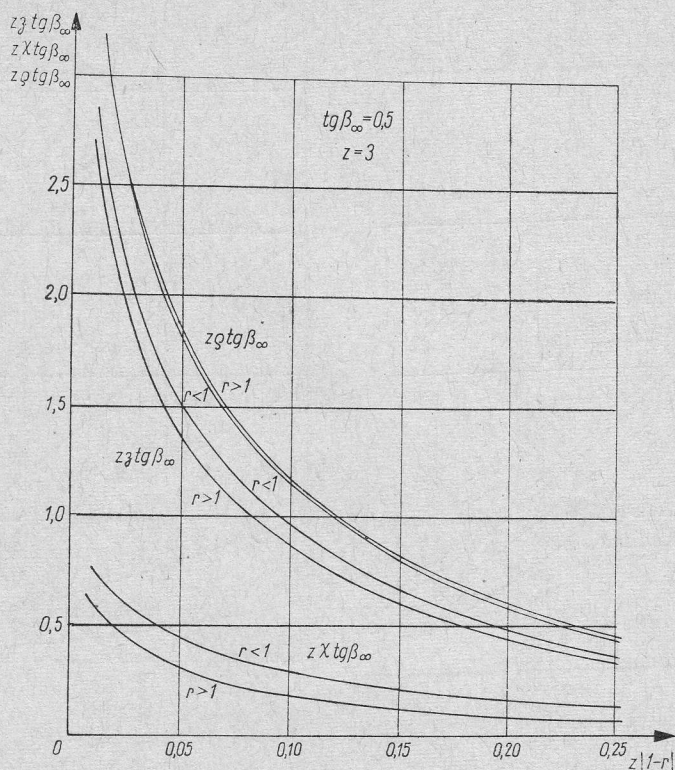
Jak wyżej wspomniano, obliczenia \mathcal{Z} , χ i ρ wygodnie jest przeprowadzić w rozbiciu na 3 wyżej zaproponowane obszary pierścieniowe.



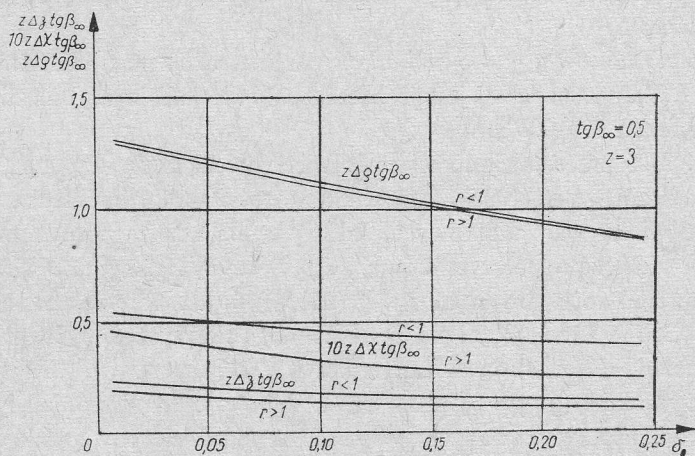
Rys. 9



Rys. 10



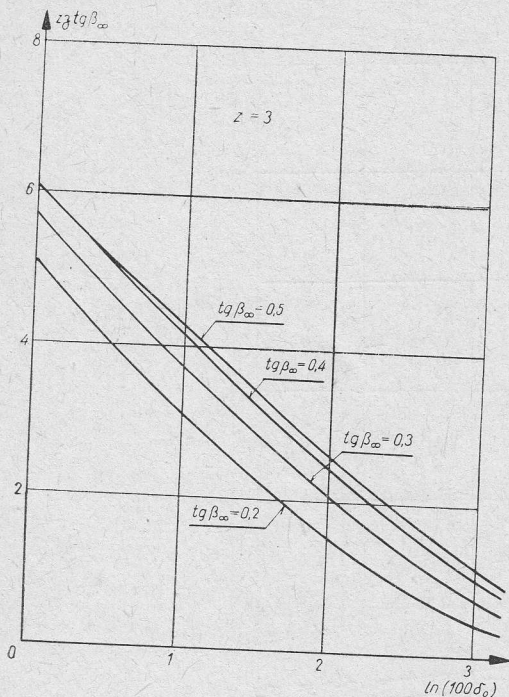
Rys. 11



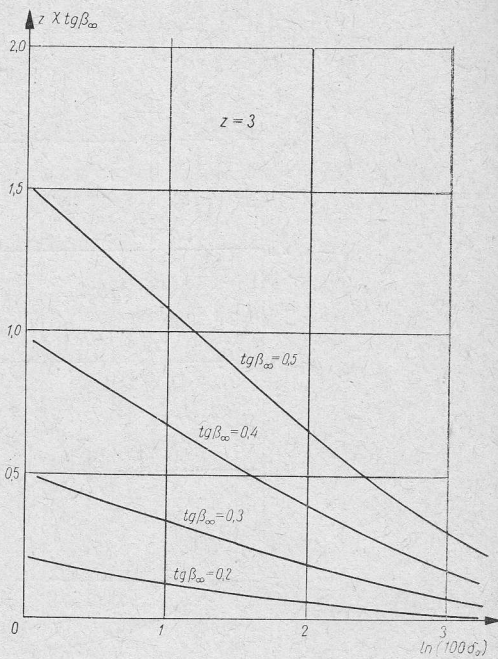
Rys. 12

Na rys. 11 przedstawiono wyniki obliczeń w odniesieniu do wielkości współczynników γ , χ i ρ dla obszarów 1 ($r_r < r < r_{w1}$) i 3 ($r > 1 + r_{w2}$) w funkcji parametru $\delta = Z|1-r|$, a na rys. 12 w odniesieniu do obszaru 2 ($1 - r_{w1} < r < 1 + r_{w1}$) w funkcji parametru δ_0 .

Na podstawie wykresów współczynników uśredniających, dla poszczególnych obszarów powierzchni kontrolnej S , wykonano obliczenia współczynników uśredniających poszczegól-



Rys. 13



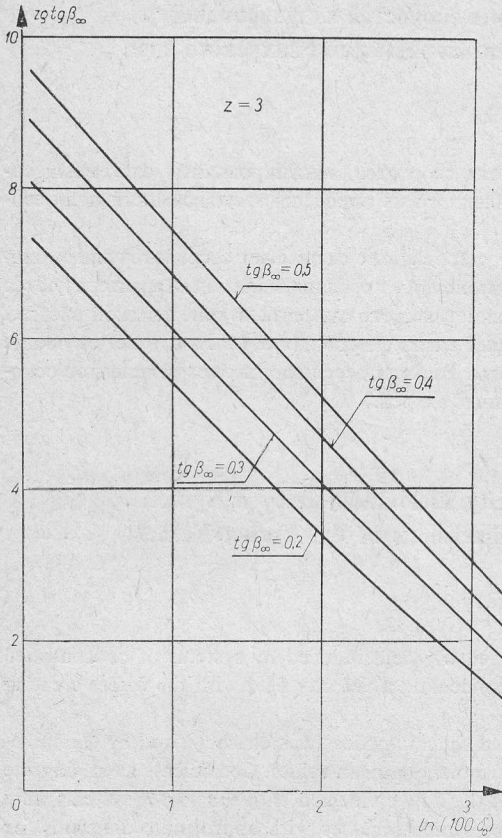
Rys. 14

gólne składowe prędkości indukowanych, zdefiniowanych wzorami (4.3) dla całej powierzchni kontrolnej S .

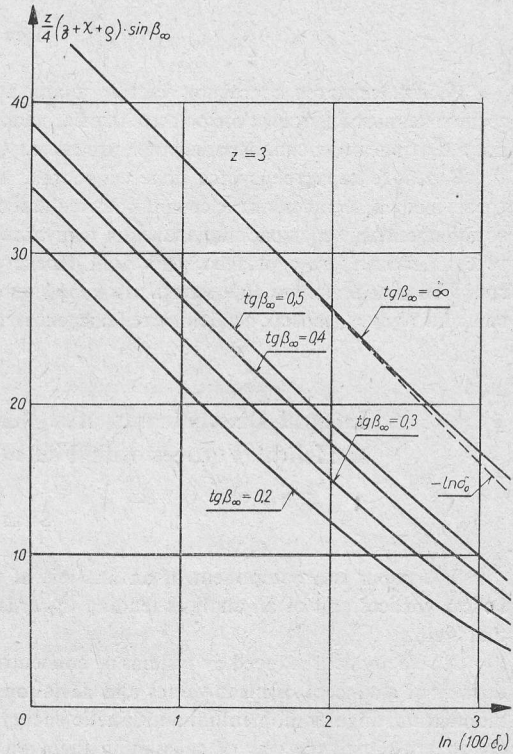
Krzywe współczynników z , χ i ρ w funkcji parametru δ_0 mają charakter krzywych logarymicznych i dlatego najlepiej jest je przedstawić w skali logarymicznej lub w zależności od parametru $\ln(100\delta_0)$.

Na rys. 13, 14 i 15 przedstawiono wykresy wielkości $Zz \operatorname{tg} \beta_\infty$, $Z\chi \operatorname{tg} \beta_\infty$ i $Z\rho \operatorname{tg} \beta_\infty$, w zależności od parametru $\ln(100\delta_0)$, dla kilku wartości skoku linii śrubowych układu złożonego z $Z=3$ wirów wierzchołkowych. Jak wykazała analiza porównawcza wpływu ilości wirów Z na wielkość współczynników z , χ i ρ , iloczyny Zz , $Z\chi$ i $Z\rho$ w zależności od parametru δ_0 (lub jego pochodnych jak np. $\ln(100\delta_0)$) są już mało zależne od Z i przedstawione na rys. 13, 14 i 15 wielkości dla $\delta_0 < 0,25$ mogą praktycznie być wykorzystywane dla układów o różnej ilości wirów wierzchołkowych Z .

Suma współczynników $(z + \chi + \rho)$ przedstawia współczynnik uśredniający energię kinetyczną pola prędkości indukowanych. Wielkość ta ma ściśle powiązanie z polem ciśnień indukowanych i znajduje swój odpowiednik w obliczeniach przeprowadzonych dla układu wirów prostoliniowych [4]. Na rys. 16 przedstawiono wielkości $\frac{1}{4}Z(z + \chi + \rho) \sin \beta_\infty$ dla kilku wartości skoku linii śrubowej $\operatorname{tg} \beta_\infty$ układów złożonych z $Z=3$ wirów wierzchołkowych. Charakter przebiegu wszystkich krzywych w tym układzie odniesienia jest bardzo zbliżony do siebie i wszystkie krzywe dla małych δ_0 przyjmują podobny kierunek wyznaczony dla $\operatorname{tg} \beta_\infty = \infty$, która dla małych wartości δ_0 pokrywa się z krzywą określoną wzorem $(-\ln \delta_0)$.



Rys. 15



Rys. 16

Przedstawione w pracy końcowe wykresy dla wielkości β , χ i ρ (rys. 13, 14 i 15) mogą być użyte do obliczeń charakterystyk hydrodynamicznych sił zewnętrznych, odpowiadających określonym układom wirów skupionych.

Praca wpłynęła do Redakcji w marcu 1974 r.

Literatura

- [1] W. J. Prosnak, *Mechanika płynów*. PWN, 1970.
- [2] T. Koronowicz, *Określenie pola prędkości wiru w kształcie prawidłowej linii śrubowej*. Biuletyn IMP PAN, nr 581, 1968.
- [3] T. Koronowicz, *Analiza pola prędkości układu wirów śrubowych*. Biuletyn IMP PAN, nr 642, 1969.
- [4] T. Koronowicz, *Analiza pola prędkości indukowanych przez wybrane układy wirów prostoliniowych*. Prace IMP, z. 64, 1974.
- [5] T. Koronowicz, *Określenie pola prędkości w bliskim sąsiedztwie pędnika śrubowego*. Biuletyn IMP PAN, nr 53/729/1973.
- [6] T. Tuskowska, T. Koronowicz, *Określenie charakterystyk geometrycznych śruby tylnej układów tandem współbieżnych*. Biuletyn IMP PAN, nr 20/695/1971.

Интегральные дискриминанты поля скоростей индуцированного системой винтовых вихрей с конечными размерами вихревого ядра

Резюме

Работа является составной частью анализа поля скоростей, индуцированных системами сосредоточенных винтовых вихрей и анализа, направленного на определение зависимости поля скоростей от внешних сил, вызывающих это поле.

В работе характеризуется поле скоростей, индуцированных системами сосредоточенных винтовых вихрей, вводя понятие средних значений и отклонений от средних значений. Характеризуются коэффициенты, осредняющие значения импульса, кинетического момента и кинетической энергии течения, связанного с вихревой системой. Представлен также способ их расчета и соответствующие графики, позволяющие определять эти коэффициенты. Расчеты осредняющих коэффициентов основаны на точных формах особенностей сосредоточенных вихрей.

Integral Discriminants of a Velocity Field Induced by a System of Helical Vortices with Finite Dimensions of the Vortex Kernel

Summary

The paper is a component of an analysis of a velocity field induced by systems of concentrated helical vortices and of an analysis tending towards connecting a velocity field with the forces creating that field.

A velocity field induced by systems of concentrated helical vortices was characterized by the introduction of a concept of mean values and deviations from these mean values. Coefficients averaging the momentum, angular momentum and kinetic energy of the flow connected with the vortex systems were characterized and the way of calculating them was presented together with appropriate diagrams for determining these coefficients. Calculations of the averaging coefficients were based upon the exact shape of the singularities of the concentrated vortices.