

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
I N S T Y T U T   M A S Z Y N   P R Z E P Ł Y W O W Y C H

**PRACE  
INSTYTUTU MASZYN  
PRZEPLÝWOWYCH**

**TRANSACTIONS  
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY**

74

WARSZAWA—POZNAŃ 1977

---

P A Ń S T W O W E   W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E

---

# PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

\*

## THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

---

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS  
KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR  
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI  
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN,  
80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, ul. Gen. Józefa Fiszerza 14, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe

Warszawa 1977

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 350 + 90 egz.	Oddano do składania 1 II 1977 r.
Ark. wyd. 13,5. Ark. druk. 10,25.	Podpisano do druku 2 VIII 1977 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g.	Druk ukończono w sierpniu 1977 r.
Nr zam. 72/239, 70 × 100 cm. U-1/466.	Cena zł 42,—

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

## TADEUSZ CHMIELNIAK

Gliwice

## Ustalony rozkład temperatur w tarczy wirnikowej z łopatkami

W pracy wyznaczono ustalony rozkład temperatur w tarczy wirnikowej z łopatkami dla różnych wariantów warunków brzegowych. Na podstawie otrzymanych rozwiązań przeanalizowano wpływ wielu czynników na postać poszukiwanych rozkładów temperatur w tarczy i łopatkach.

## Spis oznaczeń

- $a$  — stała,  
 $b$  — szerokość wieńca,  
 $b_1$  — długość cięciwy profilu,  $\bar{b} = b/b_1$ ,  
 $c, w$  — prędkość pary,  
 $c_t, c_d, \rho_t, \rho_d$  — ciepło właściwe i gęstość łopatki i tarczy,  
 $c_p$  — ciepło właściwe pary,  $\bar{c} = c_p/c_{p0}$ ,  
 $i_p, \rho_p$  — entalpia i gęstość pary omywającej tarczę,  
 $k = \sin \beta_2 / \sin \beta_1$ ,  
 $l$  — wysokość łopatki,  
 $m^2 = Bi_1 \frac{\bar{P}}{A\lambda}$ ,  
 $\dot{m}$  — strumień masy pary,  
 $n$  — liczba łopatek,  
 $p$  — ciśnienie pary,  
 $q$  — strumień ciepła,  
 $q_l$  — zadana wartość strumienia ciepła w przekroju podstawy łopatki ( $x=0$ ),  
 $r, x, u$  — współrzędne,  
 $r_1$  — promień zewnętrzny tarczy wirnikowej,  $\bar{r} = r/r_1$ ,  
 $r'_1$  — promień pomocniczy (rys. 2),  
 $r_0$  — promień wewnętrzny tarczy,  
 $t(x, \tau), T(r, \tau)$  — temperatury łopatki i tarczy,  
 $t_1$  — zadana wartość temperatury u podstawy łopatki,  
 $t_p, T_p$  — temperatura pary omywającej łopatkę i tarczę,  
 $t'_p$  — temperatura czynnika w szczelinie między bandażem a kadłubem,  
 $t_p^* = t'_p + \sqrt[3]{Pr} \frac{w^2}{2c_p}$ ,  
 $t$  — podziałka,  $\bar{t} = t/b_1$ ,  
 $\bar{u} = u/r_1, \bar{z} = z/r_1$ ,  
 $A(x), P(x)$  — przekrój i obwód łopatki,  $\bar{A}(x) = A(x)/l^2$ ,  
 $Bi_i = \frac{\alpha_i r_1}{\lambda_0}, Bi_1 = \frac{\alpha_1 l}{\lambda_0}$ ,  
 $C_i, D_i$  — stałe,  
 $D$  — średnica podziałowa stopnia,  
 $\bar{P} = P/l$   
 $Pr$  — liczba Prandtla,  
 $Q_i = \frac{2\pi}{\Delta \dot{m}_i} W \quad (i=1, 2),$   
 $\frac{\Delta \dot{m}_i}{m} c_p$   
 $Q'_3$  — ciepło wymienione drogą promieniowania,  
 $Re_1 = \frac{\omega}{\nu_p} r_1^2$ ,

$S, U$  – pole przekroju i obwód kanału o szerokości  $s$ , przez który przepływa para omywająca tarczę,  
 $S_0$  – pole przekroju łopatki u jej podstawy,  $\bar{S}_0 = S_0/l^2$ ,  
 $S_1 = S'_1 + S''_1$  (rys. 1),  
 $S'_1, S''_1$  – powierzchnie wymiany ciepła,  
 $W = \frac{\lambda_0 r_1}{mc_p}$ ,  
 $\alpha$  – współczynnik wnikania ciepła,  
 $\beta$  – liczba uwzględniająca opór przepływu ciepła w zamkach łopatek,  
 $\bar{\Delta t} = \vartheta(0) - \Theta(\bar{r}_1)$ ,

$\Delta \dot{m}$  – strumień masy pary omywający powierzchnie boczne tarczy,  
 $\vartheta = t/t_0, \vartheta_p^* = t_p^*/t_0$ ,  
 $\lambda$  – współczynnik przewodzenia,  $\bar{\lambda} = \lambda_l/\lambda_0, \lambda_d/\lambda_0$ ,  
 $\nu_p$  – lepkość kinematyczna pary,  
 $\sigma$  – przyrost entalpii w jednostce objętości na skutek tarcia,  
 $\tau$  – czas,  
 $\omega$  – prędkość kątowna  
 $\Theta = T/t_0, \Theta_{pi} = T_{pi}/t_0 \quad i=1, 2$ ,  
 $\Theta_{p10}, \Theta_{p20}$  – wartości brzegowe temperatur pary omywającej tarczę.

### Indeksy

$d$  – tarcza wirnikowa,  
 $i$  – liczba porządkowa, numer kolejnej przestrzeni przed i za tarczą wirnikową,  
 $l$  – łopatka,  
 $0$  – stan odniesienia,

$p$  – para,  
 $\bar{s}$  – wartość średnia,  
 $\bar{s}c$  – na ścianie,  
 $( )^*$  – stan spiętrzenia,  
 $( - )$  – wielkości bezwymiarowe.

## 1. Wstęp

Warunki pracy turbin wymagają stosunkowo dokładnej metody oceny stanu obciążeń cieplnych ich elementów. Rozwiązanie tego problemu postawionego z uwzględnieniem złożoności geometrii, skomplikowanego charakteru warunków brzegowych oraz innych czynników byłoby niezwykle utrudnione, a zakres stosowalności w obliczeniach projektowych skomplikowanego modelu byłby bardzo ograniczony. Ważnym więc zadaniem jest przeprowadzenie oceny wpływu poszczególnych czynników na rozkłady temperatur i naprężeń w najważniejszych elementach turbiny. Klasyfikacja intensywności wpływu poszczególnych wielkości na poszukiwane wartości temperatur i naprężeń oraz eliminacja czynników o małym znaczeniu pozwoli zapewne w niektórych przypadkach na znaczne uproszczenie problemów lub sposobów ich rozwiązania.

Przedmiotem analizy powinna być głównie ocena wpływu zmienności i dokładności wyznaczenia warunków brzegowych oraz ocena wpływu cech materiałowych na stan techniczny danych elementów i węzłów konstrukcyjnych turbin. Wydaje się, że od postępów w rozwiązywaniu tych zagadnień uzależniony jest postęp w poszukiwaniu optymalnych geometrycznych i materiałowych cech konstrukcyjnych elementów z punktu widzenia stanu ich obciążeń cieplnych.

W pracy przedstawiono niektóre dane dotyczące wpływu na rozkłady temperatur w tarczy wirnikowej łącznie z łopatkami sposobu zadawania warunków brzegowych.

## 2. Sformułowanie zagadnienia

### 2.1. Równania podstawowe

Jednowymiarowe pole temperatur w łopatkach i tarczy opisuje układ równań

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{c_l \rho_l A(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A(x) \lambda_l(t) \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right] - \frac{\alpha_1(x, \tau) P(x)}{c_l \rho_l A(x)} [t(x, \tau) - t_p^*(x, \tau)], \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( 2rz(r) \lambda_d \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 2rz(r) \rho_d c_d \frac{\partial T}{\partial \tau} + \alpha_2 (T - T_{p1}) r + \alpha_3 (T - T_{p2}) r, \quad (2)$$

$$\frac{di_{pi}}{d\tau} = \frac{U_i(q_{sc})_i}{S_i \rho_{pi}} + \frac{1}{\rho_{pi}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_{pi} \frac{\partial T_{pi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho_{pi}} \frac{\partial p_i}{\partial \tau} + \frac{T_{pi} \sigma_i}{\rho_{pi}}, \quad i=1, 2. \quad (3)$$

Równania (1) i (2) określają odpowiednio rozkład temperatur w łopatkach i w tarczy. Równanie (3) jest równaniem energii płynu omywającego tarczę. Wiązą one wielkości uśrednione w następujący sposób:

$$T_p = \frac{\int_S c T_p \rho_p dS}{\int_S c \rho_p dS}, \quad i_p = \frac{\int_S \rho_p i_p c dS}{\dot{m}}, \quad c = \frac{\dot{m}}{\rho_p S}.$$

Strumień ciepła  $q_{sc}$  w ogólnym ujęciu oznacza sumę strumieni wnikających od tarcz kierowniczych i wirujących do omywającego płynu. Rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia wymaga łącznego rozpatrywania pól i temperatur w całym układzie przepływowym. Dla uproszczenia problemu przyjmuje się zwykle [1], że udział tarcz kierowniczych w procesie wymiany ciepła jest niewielki. Pozwala to sprowadzić zagadnienie do rozpatrzenia temperatur tylko w danej tarczy wirnikowej. Dla procesu ustalonego po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych analizowane zagadnienie opisuje układ równań

$$\frac{1}{A} \frac{d}{d\bar{x}} \left( A \bar{\lambda} \frac{d\vartheta}{d\bar{x}} \right) - Bi_1 \bar{P} \frac{1}{A} (\vartheta - \vartheta_p) = 0, \quad (4)$$

$$\bar{\lambda}_d \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \bar{r} \bar{z} \frac{d\Theta}{dr} \right) - \frac{1}{2} [Bi_2 (\Theta - \Theta_{p1}) + Bi_3 (\Theta - \Theta_{p2})] = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d\Theta_{p1}}{d\bar{r}} = Q_1 \bar{r} (\Theta - \Theta_{p1}) Bi_2, \quad (6)$$

$$\frac{d\Theta_{p2}}{d\bar{r}} = -Q_2 \bar{r} (\Theta - \Theta_{p2}) Bi_3. \quad (7)$$

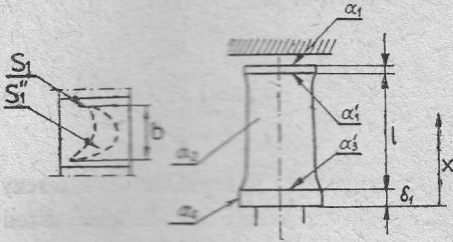
Zwykle można założyć, że  $Bi_2 = Bi_3$  i  $Q_1 = Q_2$ . Wtedy układ równań (4)÷(7) upraszcza się. Ma to dość istotne znaczenie zwłaszcza w procesie poszukiwania rozwiązania analitycznego rozpatrywanego układu równań.

## 2.2. Warunki brzegowe

Dokładne ustalenie warunków brzegowych dla rozpatrywanego zagadnienia ze względu na złożoną geometrię i skomplikowany charakter zachodzących procesów cieplnych jest w zasadzie niemożliwe.

Warunek graniczny dla końca łopatki ( $x=l$ ) w większości przypadków przyjmowany jest w postaci [1, 2, 3, 4]

$$\frac{dt}{dx}(l) = 0. \quad (8)$$



Rys. 1. Współczynniki wnikania ciepła w układzie łopatkowym

W pracy [5] zaleca się przyjmowanie dla  $x=0,8l$  temperatury czynnika jak dla końca łopatki ( $x=l$ ). Temperaturę łopatki w przekroju  $x=l$  można określić dokładniej również inną drogą [6]. Dla oznaczeń podanych na rys. 1 otrzymujemy

$$S_1' \lambda_l \left( \frac{dt}{dx} \right)_{x=1} + Q_1' = Q_2' + Q_3' = S_1 \frac{\lambda_l}{\delta_1} [t(l) - t(l + \delta_1)], \quad (9)$$

gdzie

$$Q_1' = \alpha_1' [t_p^*(l) - t(l)] S_1', \quad Q_2' = \alpha_2 [t(l + \delta_1) - t_p^*] S_1.$$

Przyjmując, że  $Q_3' \approx 0$  (turbiny parowe) z równania (9) otrzymujemy równość

$$\vartheta(1) = \frac{\frac{\bar{\lambda}}{\delta_1/l} Bi_2' \vartheta_p'^* + \left( \frac{\bar{\lambda}}{\delta_1/l} + Bi_2' \right) \left[ \frac{\bar{S}_1''}{\bar{S}_1} \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=1} + Bi_1' \frac{\bar{S}_1'}{\bar{S}_1} \vartheta_p'^* \right]}{\frac{\bar{\lambda}}{\delta_1/l} \left( Bi_2' + \frac{\bar{S}_1'}{\bar{S}_1} Bi_1' \right) + Bi_1' Bi_2' \frac{\bar{S}_1'}{\bar{S}_1}}. \quad (10)$$

Dla  $S_1'/S_1 < 1$  ( $S_1' \approx S_1$ ) równość (10) ma postać

$$\vartheta(1) = \frac{\frac{\bar{\lambda}}{\delta_1/l} Bi_2' \vartheta_p'^* + \left( \frac{\bar{\lambda}}{\delta_1/l} + Bi_2' \right) Bi_1' \vartheta_p'^*}{\frac{\bar{\lambda}}{\delta_1/l} (Bi_2' + Bi_1') + Bi_1' Bi_2'}.$$

Warunek dla podstawy łopatki  $x=0$  może być ustalony w postaci

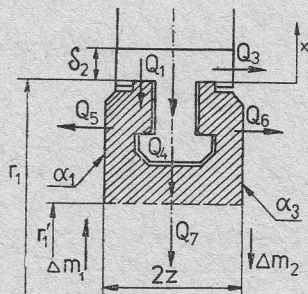
$$t = t_1 \quad (11)$$

lub

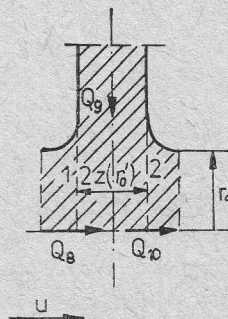
$$-\lambda_l \left( \frac{dt}{dx} \right)_{x=0} = q_l. \quad (12)$$

Wartości  $t_1$  i  $q_t$  zależą od konkretnych warunków termodynamicznych i geometrycznych i są bardzo trudne do określenia na drodze analitycznej. W przypadkach nowo projektowanych turbin, kiedy brak możliwości ustalenia  $t_1$  lub  $q_t$  również na drodze eksperymentalnej, wybiera się zwykle jako wygodniejszy pierwszy warunek brzegowy, przyjmując [5]

$$t_1 = (0,7 \div 0,8) (t_{p1} + t_{p2})$$



Rys. 2. Schemat dla ustalenia warunku brzegowego dla połączenia łopatki z tarczą



Rys. 3. Schemat dla ustalenia warunku brzegowego dla tarczy ( $\bar{r} = \bar{r}_0$ )

Problem wyznaczenia wartości  $t_1$  lub  $q_t$  można uprościć rozpatrując rozkład temperatur w całym układzie łopaska-tarcza. Dla oznaczeń podanych na rys. 2 można zapisać równość

$$Q_1 + Q_2 = Q_4 + Q_5 + Q_6, \quad (13)$$

gdzie

$$Q_1 = \frac{2\pi z (r_1) [t_p^*(0) - t(0)]}{\frac{1}{2\alpha_4 (r_1 + \delta_2)} + \frac{1}{2\lambda_l \ln \frac{r_1 + \delta_2}{r_1}}} - Q_3, \quad (14)$$

$$Q_2 = \lambda_l \left( \frac{dt}{dx} \right)_{x=0} S_0 n \beta, \quad (15)$$

$$Q_3 = 4\pi\alpha_5 [T_p(r_1) - t(0)] (r_1 + \delta_2/2) \delta_2, \quad (16)$$

$$Q_4 = \lambda_d \frac{4\pi z_{sr} \Delta t}{\ln(r_1/r_1')}, \quad (17)$$

$$Q_5 = \pi\alpha_2 \left[ t(0) - \frac{\Delta t}{2} - T_{p1} \left( \frac{r_1' + r_1}{2} \right) \right] (r_1 - r_1') (r_1 + r_1'), \quad (18)$$

$$Q_6 = \pi\alpha_3 \left[ t(0) - \frac{\Delta t}{2} - T_{p2} \left( \frac{r_1' + r_1}{2} \right) \right] (r_1 - r_1') (r_1 + r_1'), \quad (19)$$

$$\Delta t = t(0) - T(r_1').$$

Ze związków (13)÷(19) po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$\bar{x} = 0, \quad \frac{d\vartheta}{d\bar{x}} = \varphi_1 \vartheta + \varphi_2, \quad (20)$$

gdzie

$$\varphi_1 = \frac{\pi \left( \frac{r_1}{l} \right)}{\lambda S_0 n \beta} \left[ \frac{2\bar{z}}{\frac{1}{2Bi_4 \left( 1 + \frac{\delta_2}{r_1} \right)} + \frac{1}{2\lambda} \ln \left( 1 + \frac{\delta_2}{r_1} \right)} + \right. \\ \left. - 4Bi_5 \left( 1 + \frac{\delta_2}{2r_1} \right) \frac{\delta_2}{r_1} + \left( 1 - \frac{r'_1}{r_1} \right) \left( 1 + \frac{r'_1}{r_1} \right) (Bi_2 + Bi_3) \right],$$

$$\varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_{22} \bar{d}_i,$$

$$\varphi_{21} = \frac{\pi \left( \frac{r_1}{l} \right)}{\lambda S_0 n \beta} \left[ 4Bi_5 \left( 1 + \frac{\delta_2}{2r_1} \right) \frac{\delta_2}{r_1} \vartheta_p(r_1) + \frac{2\bar{z}}{\frac{1}{2Bi_4 \left( 1 + \frac{\delta_2}{r_1} \right)} + \frac{1}{\lambda} \ln \left( 1 + \frac{\delta_2}{r_1} \right)} - \right. \\ \left. - \left( 1 - \frac{r'_1}{r_1} \right) \left( 1 + \frac{r'_1}{r_1} \right) \left[ Bi_2 \Theta_{p1} \left( \frac{r'_1 + 1}{\frac{r_1}{2}} \right) + Bi_3 \Theta_{p2} \left( \frac{r'_1 + 1}{\frac{r_1}{2}} \right) \right] \right],$$

$$\varphi_{22} = \frac{2\pi \left( \frac{r_1}{l} \right)}{\lambda S_0 n \beta} \left[ \frac{2\bar{z}_{sr} \bar{\lambda}_d}{\ln(r_1/r'_1)} - \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{r'_1}{r_1} \right) \left( 1 + \frac{r'_1}{r_1} \right) (Bi_2 + Bi_3) \right].$$

Związek (20) otrzymano zakładając, że gradient temperatur na odcinku między  $r_1$  i  $r'_1$  nie zmienia się ( $\Delta t/\Delta r = \text{idem}$  [5]). Założenie to pozwala wprowadzić w warunki brzegowe dla łopatki ( $x=0$ ) i dla tarczy ( $r=r_1$ ) różnicę  $\Delta t$  i w konsekwencji rozdzielić zadanie określenia temperatur w tarczy z łopatkami na zadania oddzielne dla łopatki i tarczy. Ścisłe mówiąc, uproszczenie to jest możliwe w przypadku kiedy można przyjąć wartości temperatur  $\Theta_{pi} \left( \frac{r'_1 + r_1}{2} \right)$  ( $i=1, 2$ ) i  $\Theta_p(r_1)$  za znane. W praktycznych obliczeniach wartości tych temperatur mogą być przyjęte za równe obliczeniowym temperaturom przed i za łopatką.

Warunki brzegowe dla tarczy, zgodnie z oznaczeniami podanymi na rys. 2 i 3, można zapisać w postaci [6]

$$\bar{r} = \bar{r}_1 : \frac{d\Theta}{d\bar{r}} = \varphi_3, \quad (21)$$

$$\bar{r} = \bar{r}_0 : \frac{d\Theta}{d\bar{r}} = \varphi_4, \quad (22)$$



gdzie

$$\varphi_3 = \frac{\Delta t}{\bar{r}'_1 \ln \frac{\bar{r}}{\bar{r}'_1}}, \quad \varphi_4 = \frac{1}{4} \frac{\bar{r}_0}{\bar{z}(\bar{r}_0)} \left[ \left( \frac{d\Theta_w}{d\bar{u}} \right)_1 - \left( \frac{d\Theta_w}{d\bar{u}} \right)_2 \right].$$

Warunki brzegowe dla równań (6) i (7) ustalono w postaci:

$$\bar{r} = \bar{r}_0: \quad \Theta_{p1} = \Theta_{p10}, \quad (23)$$

$$\bar{r} = \bar{r}'_1: \quad \Theta_{p2} = \Theta_{p20}. \quad (24)$$

### 3. Analiza pól temperatur

Rozwiązania wybranych równań z układu (4)÷(7) dla różnego stopnia ogólności warunków brzegowych były przedmiotem analizy w piśmiennictwie naukowym [1, 2, 7, 8], a układ równań (5)÷(7) był analizowany w pracach [1, 2]. Analityczne rozwiązania otrzymano dla pewnej rodziny funkcji  $z=f(r)$  dobranej w sposób ułatwiający otrzymanie rozwiązania zamkniętego. Mniej ogólne rozwiązanie zawiera praca [7]. Rozwiązanie równań (4) i (5) z warunkami typu (10) i (20) otrzymano w [8] dla stałych wartości współczynników  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  oraz hiperbolicznej zależności  $z=f(r)$ .

Uzyskanie analitycznego rozwiązania układu równań (4)÷(7) dla  $z=\text{idem}$ , czyli przypadku najczęściej występującego w konstrukcjach wirników wysokoprężnych i średnio-prężnych parowych turbin akcyjnych, napotyka znaczne trudności. Po zastosowaniu odpowiednich podstawień i przekształceń, można wprawdzie analizowane zagadnienie sprowadzić do niejednorodnego, zdegenerowanego równania hipergeometrycznego, ale jego ogólnego rozwiązania nie udaje się przedstawić w postaci zamkniętej.

Stosunkowo łatwo jest znaleźć pole temperatury w układzie łopatka-tarcza (o stałej grubości) przyjmując

$$Bi_i = \zeta \bar{r}^n, \quad \Theta_{pi} = \text{idem}.$$

Ma ono postać:

– dla tarczy

$$\Theta = \Theta_{sr} + C_1 I_0(a\bar{r}^{-1+\frac{n}{2}}) + C_2 K_0(a\bar{r}^{-1+\frac{n}{2}}), \quad (25)$$

gdzie

$$a = \frac{1}{1 + \frac{n}{2}} \sqrt{\frac{\zeta}{\bar{z}\lambda_d}},$$

– dla łopatki

$$\vartheta = \left\{ -\frac{m}{2} \int \vartheta_p(\bar{x}) \exp(-m\bar{x}) d\bar{x} + D_1 \right\} \exp(m\bar{x}) + \left\{ \frac{m}{2} \int \vartheta_p(\bar{x}) \exp(m\bar{x}) d\bar{x} + D_2 \right\} \exp(-m\bar{x}), \quad (26)$$

gdzie  $I_0, K_0$  – zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju.

## Stale całkowania dla różnych warunków brzegowych

W1	$\frac{d\vartheta}{dx}(1)=0, \quad \vartheta(0)=\vartheta_1$ $\frac{d\Theta}{d\bar{r}}(\bar{r}'_1)=\varphi_3, \quad \frac{d\Theta}{d\bar{r}}(\bar{r}_0)=\varphi_4$	$C_1 = \omega_1 [\varphi_4 (\bar{r}_0)^{-n/2} K_1(\xi_1) - \varphi_3 (\bar{r}'_1)^{-n/2} K_1(\xi_0)] \quad (27)$ $C_2 = \omega_1 [\varphi_4 (\bar{r}_0)^{-n/2} I_1(\xi_1) - \varphi_3 (\bar{r}'_1)^{-n/2} I_1(\xi_0)] \quad (28)$ $\omega_1 = \frac{1}{a \left(1 + \frac{n}{2}\right) [K_1(\xi_1) I_1(\xi_0) - I_1(\xi_1) K_1(\xi_0)]}$ $D_1 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_p^*}{1 + \exp(2m)}, \quad D_2 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_p^*}{1 + \exp(-2m)} \quad (29)$ $\xi = a(\bar{r})^{1+n/2}, \quad \xi_0 = a(\bar{r}_0)^{1+n/2}, \quad \xi_1 = a(\bar{r}'_1)^{1+n/2}$ $\Delta t = \frac{\vartheta_1 - \Theta_{sr} - \omega_1 \varphi_4 \bar{r}_0^{-n/2} A}{1 - \omega_1 (\bar{r}'_1)^{-n/2-1} B \ln^{-1} \left( \frac{1}{\bar{r}'_1} \right)} \quad (30)$ $\Theta_{sr} = \frac{\Theta_{p1} + \Theta_{p2}}{2}, \quad A = K_1(\xi_1) I_0(\xi_1) + I_1(\xi_1) K_0(\xi_1)$ $B = K_1(\xi_0) I_0(\xi_1) + I_1(\xi_0) K_0(\xi_1)$
W2	$\frac{d\vartheta}{dx}(1)=0, \quad \frac{d\vartheta}{dx}(0) = \varphi_1 \vartheta(0) + \varphi_{22} \Delta t + \varphi_{21},$ $\frac{d\Theta}{d\bar{r}}(\bar{r}'_1) = \varphi_3, \quad \frac{d\Theta}{d\bar{r}}(\bar{r}_0) = \varphi_4$	$C_1 - \text{zal. (27)}, \quad C_2 - \text{zal. (28)}$ $D_1 = \frac{\varphi_1 \vartheta_p^* + \varphi_{22} \Delta t + \varphi_{21}}{(m - \varphi_1) - (m + \varphi_1) \exp(2m)}$ $D_2 = \frac{\varphi_1 \vartheta_p^* + \varphi_{22} \Delta t + \varphi_{21}}{\exp(-2m)(m - \varphi_1) - (m + \varphi_1)} \quad (31)$

$$\frac{\mathcal{G}_p^* - \Theta_{sr} + (\varphi_1 \mathcal{G}_p^* + \varphi_{21}) \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \omega_1 \varphi_4 (\bar{r}_0)^{-n/2} A}{\Delta t} = \frac{1 - \varphi_{22} \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \omega_1 (\bar{r}'_1)^{-n/2-1} B \ln^{-1} \left( \frac{1}{\bar{r}'_1} \right)}{\quad} \quad (32)$$

$$\kappa_1 = \exp(-2m)(m - \varphi_1) - (m + \varphi_1)$$

$$\kappa_2 = (m - \varphi_1) - (m + \varphi_1) \exp(2m)$$

W3  $\mathcal{G}(1) - \text{zal. (10)},$

$$\frac{d\mathcal{G}}{d\bar{x}}(0) = \varphi_1 \mathcal{G}(0) + \varphi_{22} \bar{\Delta} t + \varphi_{21}$$

$$\frac{d\Theta}{d\bar{r}}(\bar{r}'_1) = \varphi_3, \quad \frac{d\Theta}{d\bar{r}}(\bar{r}_0) = \varphi_4$$

$C_1 - \text{zal. (27)}, \quad C_2 - \text{zal. (28)}$

$$D_1 = \frac{(\gamma_1 \mathcal{G}_p^* - \gamma_2 - \gamma_4)(m + \varphi_1) - \exp(-m)(\gamma_1 + m\gamma_3)(\varphi_1 \mathcal{G}_p^* + \varphi_{22} \bar{\Delta} t + \varphi_{21})}{(m + \varphi_1)(m\gamma_3 - \gamma_1) \exp(m) - (m - \varphi_1) \exp(-m)(\gamma_1 + m\gamma_3)} \quad (33)$$

$$D_2 = \frac{(\varphi_1 \mathcal{G}_p^* + \varphi_{22} \bar{\Delta} t + \varphi_{21}) \exp(m)(\gamma_1 - m\gamma_3) - (m - \varphi_1)(\gamma_2 + \gamma_4 - \gamma_1 \mathcal{G}_p^*)}{(m + \varphi_1)(m\gamma_3 - \gamma_1) \exp(m) - (m - \varphi_1) \exp(-m)(\gamma_1 + m\gamma_3)}$$

$$\frac{\mathcal{G}_p^* - \Theta_{sr} + \frac{(\mathcal{G}_p^* \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_4) 2m + (\varphi_1 \mathcal{G}_p^* + \varphi_{21}) [\exp(m)(\gamma_1 - m\gamma_3) - \exp(-m)(\gamma_1 + m\gamma_3)]}{(m + \varphi_1)(m\gamma_3 - \gamma_1) \exp(m) - (m - \varphi_1) \exp(-m)(\gamma_1 + m\gamma_3)} - \omega_1 \varphi_4 (\bar{r}_0)^{-n/2} A}{\Delta t} = \frac{\varphi_{22} \exp(-2m)(\gamma_1 + m\gamma_3) - \gamma_1 + m\gamma_3}{(m + \varphi_1)(m\gamma_3 - \gamma_1) - (m - \varphi_1) \exp(-2m)(\gamma_1 + m\gamma_3)} - \omega_1 (\bar{r}'_1)^{-n/2-1} B \ln^{-1} \left( \frac{1}{\bar{r}'_1} \right) \quad (34)$$

$$\gamma_1 = \frac{\bar{\lambda}}{\delta_1/l} \left( Bi'_2 + \frac{\bar{S}'_1}{\bar{S}_1} Bi'_1 \right) + Bi'_1 Bi'_2 \frac{\bar{S}'_1}{\bar{S}_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\bar{\lambda}}{\delta_1/l} Bi'_2 \mathcal{G}_p^*,$$

$$\gamma_3 = \left( \frac{\bar{\lambda}}{\delta_1/l} + Bi'_2 \right) \bar{\lambda} \frac{\bar{S}'_1}{\bar{S}_1}, \quad \gamma_4 = \left( \frac{\bar{\lambda}}{\delta_1/l} + Bi'_2 \right) Bi'_1 \frac{\bar{S}'_1}{\bar{S}_1} \mathcal{G}_p^*.$$

Związki (25) i (26) zostały wykorzystane do przedyskutowania wpływu różnych czynników określających warunki brzegowe na wartości i strukturę pól temperatur w tarczach i łopatkach.

Związki opisujące stałe  $C_i$  i  $D_i$  dla różnych warunków brzegowych zestawiono w tabeli 1. Rozwiązania dla temperatur w łopatkach są ważne dla  $\mathcal{G}_p = \text{idem}$ .

Tabela 2

Formuły opisujące liczby Biota  $Bi_i$ 

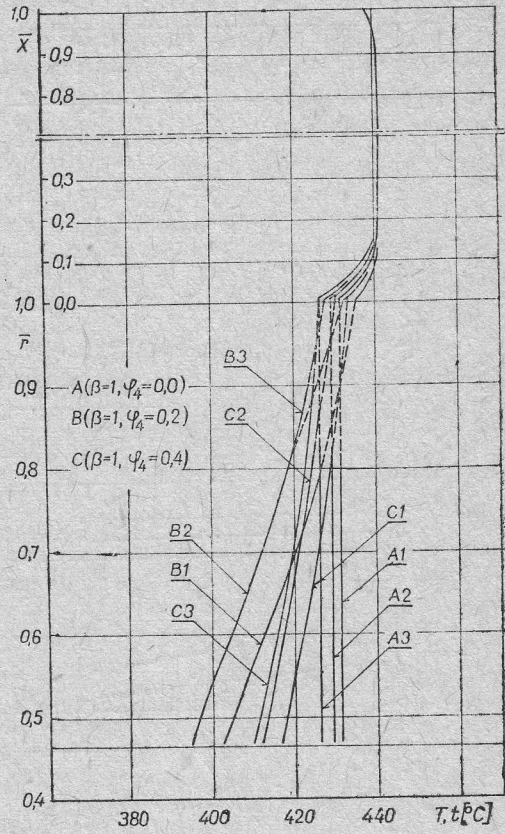
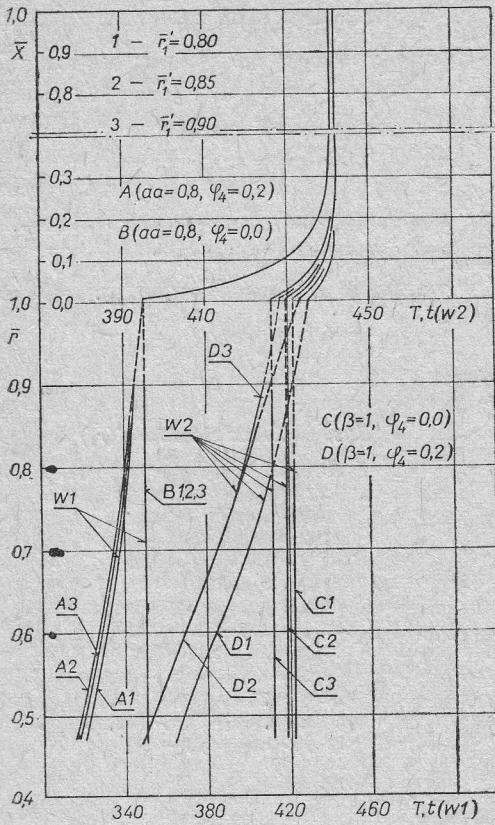
Lp.	Formuła
1	$Bi_1 = 0,0206 S u w_2^{0,66} S_g^{-0,58} \frac{\bar{\lambda}}{(v_p)^{0,66}} \frac{1}{b_1^{0,34}}$ $S u = 1 + 0,8 \left( \frac{u l}{w_2 D} \right)^{0,42}, \quad u - \text{predkość obwodowa}$ $S_g = k \left[ \frac{2\bar{b}}{\bar{t} \sin(\beta_1 + \beta_2) \cos^2 \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}} - 1 \right]^{1/2}$
2	$Bi_i = 0,0217 Re_1^{0,8} \bar{\lambda} r^{-0,6}, \quad i = 2, 3$
3	$Bi'_1 = 0,065 \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{w_1}{v_{p1}} + \frac{w_2}{v_{p2}} \right] \right\}^{0,8} S_g^{-0,54} \bar{\lambda} \frac{1}{b_1^{0,2}}$
4	$Bi'_2 = 0,047 \left( \frac{w_1 + w_2}{2} \right)^{0,8} \frac{\bar{\lambda}}{v_p^{0,8}} \frac{1}{b^{0,2}}$
5	$Bi_4 = Bi'_1 \cdot \frac{r_1}{I}$
6	$Bi_5 = Bi_2$

Szczegółowe obliczenia przeprowadzono dla pierwszego nieregularnego stopnia turbiny dużej mocy. Wykorzystane formuły opisujące poszczególne liczby Biota podano w tabeli 2.

Obliczeń dokonano dla kilku wartości  $\bar{r}'_1$  ( $\bar{r}'_1 = 0,8, 0,85, 0,9$ ) i  $\varphi_4$  ( $\varphi_4 = 0,0, 0,1, 0,2$ ). Rezultaty dla wariantów 1 i 2 zilustrowano na rys. 4, a dla wariantu 3 na rys. 5.

Dla wariantu 1 ( $\mathcal{G}_1 = a a \mathcal{G}_p$ ,  $a a = 0,8$ ) zarówno dla  $\varphi_4 = 0$  i  $\varphi_4 = 0,2$  przyjęcie w obliczeniach różnych wartości  $\bar{r}'_1$  nie wpływa w sposób istotny na rozkład temperatury w tarczy. Krzywe dla wariantów 2 i 3 ilustrują zróżnicowany wpływ wartości  $\bar{r}'_1$ , na przebiegi temperatur w zależności od  $\varphi_4$ . Dla tarczy izolowanej w obliczeniach należałoby przyjmować mniejsze wartości  $\bar{r}'_1$ . Natomiast ze wzrostem  $\varphi_4$  znaczenia  $\bar{r}'_1$  mogą rosnąć. W naszym przypadku dla  $\varphi_4 = 0,2$  rezultaty dla  $\bar{r}'_1 = 0,85$  i  $0,9$  są w obrębie tarczy prawie identyczne.

Na podstawie porównania wyników obliczeń dla wariantów 2 i 3 można stwierdzić, że różnica w przebiegach temperatur w łopatkach jest bardzo niewielka poza jej wierzchołkiem. Można stąd wnioskować o braku istotnego wpływu sposobu przyjęcia warunku brzegowego u wierzchołka łopatki na rozkład temperatur w tarczy wirnikowej. Zmiana  $\varphi_4$  wpływa na przebieg temperatur w dolnej części łopatki tym istotniej, im mniejsza jest wartość  $\bar{r}'_1$ .



Rys. 4. Rozkłady temperatur w tarczy i łopatkę  $T=f(\bar{r}, \bar{r}'_1, \varphi_4)$ ,  $t=\varphi(\bar{x}, \bar{r}'_1, \varphi_4)$ . Warianty 1 i 2

Rys. 5. Rozkłady temperatur w tarczy i łopatkę  $T=f(\bar{r}, \bar{r}'_1, \varphi_4)$ ,  $t=\varphi(\bar{x}, \bar{r}'_1, \varphi_4)$ . Wariant 3

Przedstawione rezultaty otrzymano dla  $\beta=1$ . Przeprowadzone obliczenia dla innych wartości dają wyniki mało różniące się od wyników dla  $\beta=1$ .

#### 4. Zastępczy współczynnik wnikania

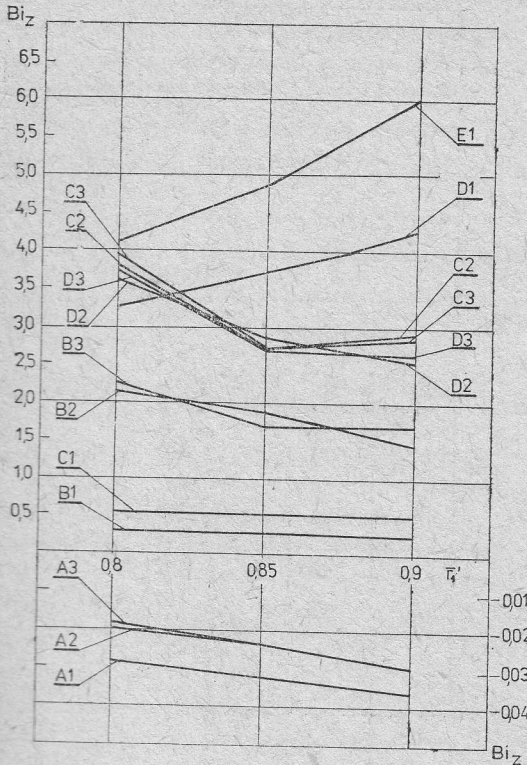
Pościową ocenę intensywności wymiany ciepła na brzegu tarczy ( $\bar{r}'_1 = \text{idem}$ ) najwygodniej jest przeprowadzić przez wprowadzenie zastępczego współczynnika wnikania ciepła  $\alpha_z$ . Ilość ciepła wnikająca do tarczy od łopatki będziemy określać zależnością

$$Q = 4\pi r'_1 z \alpha_z [t_p - T(r'_1)], \tag{35}$$

która stanowi definicję  $\alpha_z$ .

Porównując (35) z formułą (17) otrzymujemy następujący związek opisujący zastępczy współczynnik wnikania ciepła  $\alpha_z$

$$Bi_z = \frac{\alpha_z r_1}{\lambda_0} = \frac{\bar{\lambda}_d \Delta t}{\ln \frac{1}{r'_1}} \frac{1}{r'_1 [\vartheta_p^* - \Theta(r'_1)]}. \tag{36}$$



Wyniki obliczeń  $Bi_z$  zgodnie z formułą (36) przedstawiono na rys. 6. Potwierdzają one wnioski sformułowane na podstawie analizy przebiegów temperatur w tarczy i łopatkce. Dodatkowo na ich podstawie można ocenić wpływ współczynnika oraz wpływ wartości  $aa$  określającej temperaturę  $\vartheta_1$  w wariancie 1 ( $\vartheta_{(0)} = \vartheta_1 = aa\vartheta_{p\text{str}}^*$ ).

Rys. 6. Zależność  $Bi_z = f(\bar{r}_1)$

- A1 ( $aa=0,8, \varphi_4=0$ ) - W1,
- A2 ( $\beta=1, \varphi_4=0$ ) - W2,
- A3 ( $\beta=1, \varphi_4=0$ ) - W3,
- B1 ( $aa=0,8, \varphi_4=0,1$ ) - W1,
- B2 ( $\beta=1, \varphi_4=0,1$ ) - W2,
- B3 ( $\beta=1, \varphi_4=0,1$ ) - W3,
- C1 ( $aa=0,8, \varphi_4=0,2$ ) - W1,
- C2 ( $\beta=1, \varphi_4=0,2$ ) - W2,
- C3 ( $\beta=1, \varphi_4=0,2$ ) - W3,
- D1 ( $aa=1,0, \varphi_4=0,2$ ) - W1,
- D2 ( $\beta=0,5, \varphi_4=0,2$ ) - W2,
- D3 ( $\beta=0,5, \varphi_4=0,2$ ) - W3,
- E1 ( $aa=1, \varphi_4=0,2$ ) - W1

## 5. Uwagi końcowe

Przedstawiona analiza wpływu sposobu zadawania warunków brzegowych na rozkład temperatur w tarczy wirnikowej z łopatkami dotyczy stosunkowo prostego modelu. Uwzględnienie dodatkowych wielkości wpływających na stan termiczny tarczy nie pozwala otrzymać rozwiązania zamkniętego. W dalszym etapie analizy celowe będzie przebadanie wpływu zmienności temperatury  $\vartheta_p$  z wysokością łopatki oraz określenie zakresu wpływu tarczy kierowniczej na proces wymiany ciepła w tarczy wirnikowej. Wnioski w tym zakresie otrzymane w wyniku obliczeń numerycznych, zostaną przedstawione w terminie późniejszym.

Praca wpłynęła do Redakcji we wrześniu 1975 r.

## Literatura

- [1] E. Tuliszka, *Temperatury i naprężenia termiczne w tarczowych wirnikach turbin ciepłych w różnych warunkach pracy*. Archiwum Budowy Maszyn, t. VII (1960), z. 4, s. 387 - 477.
- [2] E. Tuliszka, *Niestacjonarny przepływ ciepła przez koło wirnikowe turbin parowych i gazowych*. Prace IMP, z. 49, 1970, s. 23 - 53.
- [3] S. Wiśniewski, *Obciążenia cieplne silników turbinowych*. WKiŁ, 1974.
- [4] I. T. Szwiec, E. P. Dyban, *Wozdusznoje ochładzienie rotorów gazowych turbin*, Kijew 1959.
- [5] W. S. Pietrowskij, M. I. Caplin, *Granicznye usłowija w zadaczach tieploпроводности dla rotorów gazowych turbin*. Trudy Moskowskiego Awiacionnogo Technologicznego Instituta, wyp. 72, Moskwa 1971, s. 5 - 19.

- [6] J. Kalbarczyk, Praca dyplomowa, Gliwice 1975.  
 [7] A. G. Kostiuk, *Temperaturnoje pole turbinnogo diska*. Izwestija AN SSSR, OTN, 6, 1954.  
 [8] W. S. Pietrowskij, *Sowmiestnoje rieszenije stacionarnych zadacz tieploпроводности dla lopatok i diska gazowej turbiny*. Trudy Moskovskogo Awiacionnogo Technologiczeskogo Instituta, wyp. 72, Moskwa 1971, s. 50 - 60.

### Установившееся распределение температур в роторных дисках с лопатками

#### Резюме

В работе представлен анализ влияния способа задачи краевых условий на распределение температур в роторном диске с лопатками. Рассматривается решение системы уравнений (4) - (5) для предположений:  $\bar{z} = \text{idem}$ ,  $\Theta_{pi} = \text{idem}$ ,  $\vartheta_p = \text{idem}$ ,  $Bi_i = \zeta \bar{r}^n$  ( $i=1, 2, 3$ ).

Используемые краевые условия определяются формулами: (8), (10), (20), (21), (22). Представлены подробные решения для трех способов установления краевых условий (25) - (34).

Результаты расчетов распределения температур представлены на рис. 4 (варианты 1 и 2) и 5 (вариант 3). Констатируется хорошую сходимость вариантов 2 и 3, а тем самым слабое влияние способа задачи условий для  $\bar{x} = 1$  на распределение температуры в диске. Устанавливается зависимость между принимаемой в расчетах величиной  $\bar{r}'_1$  и значением  $\varphi_4$ . Используя данные из расчетов различных вариантов определяется значение эквивалентного числа Био  $Bi_z$  (36)

$$Bi_z = \frac{\bar{\lambda}_d \Delta t}{\ln \left( \frac{1}{r'_1} \right)} \cdot \frac{1}{r'_1 [\vartheta_p^* - \Theta(\bar{r}'_1)]}$$

Результаты представлены на рис. 6.

### Steady-State Temperature Distribution in a Rotor Disk with Blades

#### Summary

An analysis of the effect of the way of setting the boundary conditions on the temperature distribution in a rotor disk with blades has been presented in the paper. The solution of the set of equations (4) - (5) has been analyzed under the following assumptions:  $\bar{z} = \text{idem}$ ,  $\Theta_{pi} = \text{idem}$ ,  $\vartheta_p = \text{idem}$ ,  $Bi_i = \zeta \bar{r}^n$  ( $i=1, 2, 3$ ). The boundary conditions used are given by formulae (8), (10), (20), (21) and (22). Detailed solutions for three ways of setting the boundary conditions have been presented. The solutions are given by formulae (25) ÷ (34).

The calculated temperature distributions have been presented in Figures 4 (variants 1 and 2) and 5 (variant 3). Close agreement between variants 2 and 3 has been observed, which shows a weak influence of the way of setting the condition  $\bar{x} = 1$  on the temperature distribution in a disk. The relation between the quantity  $\bar{r}'_1$  used for calculations and the value of  $\varphi_4$  has been determined.

Basing on data obtained when carrying out calculations for different variants the value of substitute Biot number  $Bi_z$  (36) has been determined

$$Bi_z = \frac{\bar{\lambda}_d \Delta t}{\ln \left( \frac{1}{r'_1} \right)} \cdot \frac{1}{r'_1 [\vartheta_p^* - \Theta(\bar{r}'_1)]}$$

The results are shown in Fig. 6.