

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
I N S T Y T U T   M A S Z Y N   P R Z E P Ł Y W O W Y C H

P R A C E  
I N S T Y T U T U   M A S Z Y N  
P R Z E P Ł Y W O W Y C H

T R A N S A C T I O N S  
O F   T H E   I N S T I T U T E   O F   F L U I D - F L O W   M A C H I N E R Y

77

W A R S Z A W A - P O Z N A Ń 1980

---

P A Ń S T W O W E   W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E

---

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH  
poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych  
w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględ-  
nieniem problematyki maszyn przepływowych

\*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW  
MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all  
aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference  
to fluid-flow machinery

---

RADA REDAKCYJNA - EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI  
STEFAN PERYCZ · WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ROMUALD PUZYREWSKI  
KAZIMIERZ STELLER (PRZEWODNICZĄCY · CHAIRMAN) · ROBERT SZEWAŁSKI  
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR  
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI  
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN  
ul. Gen. Józefa Fiszerza 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe  
Warszawa 1980

Printed in Poland

ISBN 83-01-01613-2

ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 1000 - 90 egz.

Oddano do składania 5 XII 1978 r.

Arty. wyd. 15. Arty. druki. 11,275

Podpisano do druku 1 II 1980 r.

Waga druku. neto. 40. 70 g 70 x 100 cm.

Druk ukończono w lutym 1980 r.

№ zam. 177/1980

Cena zł 50,- L-7/751.

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

JERZY SZCZĘSNY

Gdańsk

## Kryterium stabilności dwóch klas nieliniowych układów automatycznej regulacji\*

### Część I. Układy z histerezą

W pierwszej części pracy, dla określonej klasy układów nieliniowych z histerezą, przeprowadzono analizę dynamiczną w obszarze małych odchyień i na tej podstawie sformułowano kryterium stabilności lokalnej. Kryterium to stanowi efektywną metodę wyznaczania obszarów i granic stabilności lokalnej. W metodzie tej badany układ nieliniowy zastępuje się tzw. ekwiwalentnym układem liniowym i następnie z odpowiedzi skokowej ekwiwalentnego układu liniowego wnioskuje się o stabilności lokalnej układu nieliniowego.

Praktyczne zastosowanie podanego kryterium zilustrowano przykładami.

#### Spis oznaczeń

$r$ – próg nieczułości,	$G_{N\text{lok}}$ – granica stabilności lokalnej układu nieliniowego,
$s$ – zmienna zespolona,	$P_1, P_2$ – punkty rozgałęzienia (bifurkacji) 1- i 2-go rodzaju,
$t$ – czas,	$\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ – jak wyżej, lecz wyznaczone metodą przybliżoną,
$v$ – rząd astatyzmu części liniowej,	
$x_0, y_0$ – amplitudy sygnałów $x, y$ ,	
$x(s), y(s)$ – transformaty Laplace'a sygnałów $x, y$ ,	
$y_E(t)$ – odpowiedź skokowa ekwiwalentnego układu liniowego,	Indeksy
$\lambda$ – przeregulowanie odpowiedzi $y_E(t)$ ,	$f$ – końcowy (finalny),
$G_L(s)$ – transmitancja części liniowej,	$s$ – statyczny,
$G_S(s)$ – transmitancja części statycznej,	$L$ – liniowy,
$G_E(s)$ – transmitancja ekwiwalentnego układu liniowego,	$N$ – nieliniowy,
	$E$ – ekwiwalentny.

### 1. Wstęp

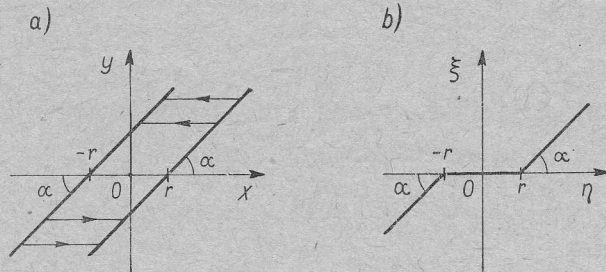
Rozpatrując rzeczywiste układy regulacyjne należy się liczyć z oddziaływaniem w tych układach wielu zjawisk szkodliwych (tarcie, luzy itd.), które – w mniejszym lub większym stopniu – prowadzą do nieliniowego charakteru układu regulacyjnego. Między innymi,

\* Praca wykonana w ramach problemu międzyresortowego MR-I.26, grupa tematyczna 10.



wspomniane zjawiska mogą być przyczyną występowania w układzie silnych nieliniowości, w rodzaju *histerezy* oraz *strefy nieczułości* (rys. 1).

Do celów analizy i syntezy układów nieliniowych dysponujemy pewną liczbą metod ścisłych i przybliżonych [1 ÷ 7], z tym, że metody ścisłe na ogół są dość pracochłonne i mało-efektywne, zwłaszcza w odniesieniu do układów wyższego rzędu.



Rys. 1. Charakterystyki nieliniowości: a) histereza  $y=f(x)$ , b) strefa nieczułości  $\xi=f(\eta)$   
 $r$  – próg nieczułości,  $K = \operatorname{tg} \alpha = 1$

W praktyce projektowania układów regulacyjnych – z uwagi na wymaganą efektywność obliczeń – dość szerokie zastosowanie znajduje metoda linearyzacji harmonicznej oraz modelowanie na elektronicznej maszynie analogowej. Pod względem dokładności metody te w całym szeregu przypadków dają dobre wyniki i błąd względem rozwiązania ścisłego jest praktycznie pomijalnie mały.

Ale można również wskazać i na takie układy nieliniowe (ważne w sensie technicznym), w odniesieniu do których wspomniane metody linearyzacji i modelowania analogowego nie dają dobrych rezultatów. Są to – między innymi – następujące dwie klasy układów:

klasa 1 – układy zawierające histerezę  $y=f(x)$  i część liniową z astatyzmem rzędu  $v=1$ ,

klasa 2 – układy zawierające strefę nieczułości  $\xi=f(\eta)$  i część liniową z astatyzmem rzędu  $v=2$ .

Układy klasy 1 i 2 charakteryzują się specyficznym przebiegiem krzywych cyklu granicznego i wskutek tego, w obszarze „małych odchyień” błąd metody linearyzacji harmonicznej lub modelowania na elektronicznej maszynie analogowej bywa nieraz na tyle duży, że cykle graniczne i obszary stabilności, wyznaczone tymi metodami, nie dają dostatecznie dokładnego obrazu właściwości dynamicznych badanego układu. W takich przypadkach uzyskane wyniki powinny być korygowane za pomocą innych metod, o wyższym stopniu dokładności.

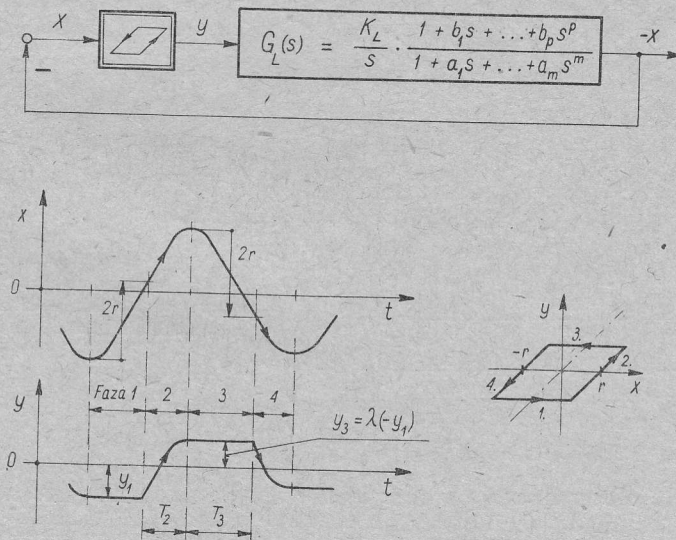
W niniejszym opracowaniu, dla odpowiednio określonej klasy 1 i klasy 2 układów nieliniowych, sformułujemy ściśle kryterium stabilności lokalnej, oparte na tzw. ekwiwalentnym układzie liniowym. Kryterium to pozwoli w efektywny sposób wyznaczać granice stabilności wspomnianych układów, jak również może być pomocne przy ocenie i korygowaniu błędów metod przybliżonych.

W tej części opracowania zajmiemy się układami z histerezą, natomiast w części II – układami ze strefą nieczułości.



## 2. Układy klasy 1 z histerezą

Dowolny układ nieliniowy klasy 1, a więc zawierający jedną nieliniowość  $y=f(x)$  typu *histereza* i część liniową z astatyzmem 1-go rzędu, można przedstawić schematem podanym na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat układu nieliniowego klasy 1 z histerezą oraz sygnały  $x$  i  $y$  w poszczególnych fazach swobodnego ruchu układu

Część liniowa układu wyraża się transmitancją  $G_L(s)$ :

$$G_L(s) = \frac{K_L}{s} \frac{1 + b_1 s + \dots + b_p s^p}{1 + a_1 s + \dots + a_m s^m} = \frac{K_L}{s} G_s(s),$$

gdzie

$$\frac{K_L}{s}$$

– część astatyczna (rzęd astatyzmu  $\nu=1$ ),

$$G_s(s) = \frac{1 + b_1 s + \dots}{1 + a_1 s + \dots} = \frac{L_s(s)}{M_s(s)}$$

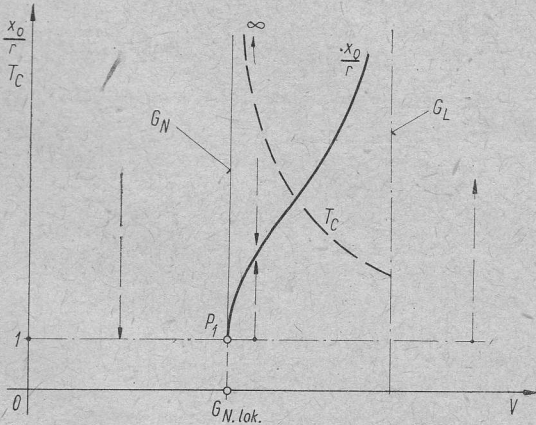
– część statyczna, o współczynniku wzmocnienia równym jedności.

Odnośnie do części liniowej  $G_L(s)$  przyjmujemy następujące założenia:

- 1) rząd astatyzmu  $\nu=1$ ,  $K_L > 0$ ;
- 2)  $p < n$  (gdzie rząd układu nieliniowego  $n=m+1$  może być dowolnie wysoki);
- 3) część statyczna  $G_s(s)$  jest stabilna, przy czym wszystkie bieguny  $s_i$  transmitancji  $G_s(s)$  są liczbami rzeczywistymi:  $s_i < 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ );

4) w przypadku układów rzędu  $n \geq 4$  dodatkowo zakładamy, że transmitancja  $G_s(s)$  posiada tę własność, iż odpowiedź skokowa  $h(t)$  części statycznej  $G_s(s)$  jest monotonicznie rosnącą (niemalejącą) funkcją czasu i o wartości początkowej  $h(0+) \geq 0$ .

W przypadku układów klasy 1 z histerezą, cała strefa nieczułości ( $-r \leq x \leq r$ ) w przetrzeniu stanu  $\Omega$  (o współrzędnych:  $x, x', \dots, x^{(n-1)}$ ) stanowi *odcinek osobliwy* (na osi  $x$ ), będący ciągłym zbiorem stanów równowagi statycznej.



Rys. 3. Przykład charakterystyki dynamicznej

$V$  – ogólny symbol zmiennego parametru,  $G_L$  – granica stabilności układu liniowego,  $G_{N \text{ lok}}$  – granica stabilności lokalnej układu nieliniowego

Z tego względu *obszarem małych odchyień*  $\Omega_\varepsilon$  jest dostatecznie małe  $\varepsilon$ -otoczenie odcinka osobliwego. W obszarze  $\Omega_\varepsilon$  odchylenia mogą więc przyjmować wartości:  $|x/r| \leq 1 + \varepsilon$  oraz  $|x^{(i)}/r| \leq \varepsilon$  ( $i \leq 1$ ), gdzie  $\varepsilon$  – dostatecznie mała (ściślej – nieskończenie mała) liczba dodatnia. Stabilność układu w obszarze małych odchyień nazywana jest stabilnością lokalną.

W układach nieliniowych specyficznym zjawiskiem dynamicznym są *cykle graniczne*, czyli stacjonarne drgania swobodne, o ściśle określonych parametrach (amplitudzie i częstotliwości), które zależą wyłącznie od transmitancji układu. Cykl graniczny charakteryzuje się zerowym tłumieniem [6].

Rysunek 3 przedstawia charakterystykę dynamiczną, typową dla układów klasy 1 (por. przykłady 1 i 2). Krzywa cyklu granicznego  $x_0/r$  bierze początek w pewnym punkcie  $P_1$  położonym na linii  $x_0/r = 1$ . W teorii drgań punkt  $P_1$  przyjęto nazywać *punktem rozgałęzienia (bifurkacji) 1-go rodzaju*.

Punktowi  $P_1$  odpowiada cykl graniczny o eksperymentalnych parametrach: nieskończenie małej amplitudzie  $y_0/r = 0+$  (czyli  $x_0/r = 1+$ ) i nieskończenie długim okresie drgań cyklu granicznego  $T_c \rightarrow \infty$ .

Jednocześnie punkt  $P_1$  wyznacza granicę stabilności lokalnej  $G_{N \text{ lok}}$  układu nieliniowego. Na rysunku 3 strzałkami zaznaczono kierunki zmian amplitudy drgań  $x_0/r$  w poszczególnych obszarach zmiennego parametru  $V$ .

Z rysunku 3 wynika, że początkowy odcinek krzywej cyklu granicznego przebiega w obszarze małych amplitud  $x_0/r \approx 1$  i długich okresów drgań  $T_c$ . Wskutek tego, dokładne wyznaczenie tego odcinka (a więc i granicy  $G_{N \text{ lok}}$ ) napotyka trudności. Stosując na przykład metodę linearyzacji harmonicznej lub modelowanie na elektronicznej maszynie analogowej, należy się liczyć w takich przypadkach ze znacznym błędem przy wyznaczaniu granicy  $G_{N \text{ lok}}$  (por. przykłady 1 i 2).

Poniżej przeprowadzimy analizę swobodnego ruchu układu klasy 1 w obszarze małych odchyłeń  $\Omega_\varepsilon$  i na tej podstawie sformułujemy kryterium stabilności lokalnej. Kryterium to pozwoli w prosty sposób wyznaczać punkt bifurkacji  $P_1$ , a tym samym i granicę stabilności  $G_{N \text{ lok}}$ .

### 3. Analiza dynamiczna w obszarze małych odchyłeń

Histeresa  $y=f(x)$  jest funkcją odcinkami liniową. Wobec tego, można swobodny ruch układu nieliniowego podzielić na kolejno po sobie następujące *fazy ruchu*: 1, 2, 3, ..., w których układ opisuje się odpowiednimi, liniowymi równaniami różniczkowymi (rys. 2).

W fazach nieparzystych (1, 3, ...) sygnał  $y$  zachowuje stałe wartości ( $y=\text{const}$ ), natomiast w fazach parzystych (2, 4, ...) wartość sygnału  $y$  ulega odpowiedniej zmianie.

Analizę swobodnego ruchu układu nieliniowego rozpoczniemy od fazy 1.

#### 3.1. Faza 1

Niech  $t=0$  oznacza chwilę, w której układ nieliniowy, wykonując swobodny ruch w fazie 1 ( $y=\text{const}=y_1 < 0$ ), przechodzi przez położenie odpowiadające połowie strefy nieczułości, czyli  $x(0)=y_1$ .

Ze schematu (rys. 2), przy uwzględnieniu, że  $y=y_1=\text{const}$ , wynika równanie fazy 1:

$$a_m x^{(m+1)} + \dots + a_1 x'' + x' = -K_L y_1 = K_L y_0, \quad (1)$$

przy czym oznaczono

$$-y_1 = y_0.$$

Całka ogólna równania (1) posiada postać:

$$x(t) = \sum_0^m C_i e^{s_i t} + K_L y_0 t, \quad (2)$$

gdzie  $s_0=0$ ,  $s_i < 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ).

Wyraźmy warunki początkowe  $x^{(i)}(0)$  za pomocą  $y_0$  w sposób następujący:  $x^{(i)}(0) = \rho_i y_0$ , gdzie  $\rho_0 = -1$ , natomiast  $\rho_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) — dowolne stałe.

Uwzględniając wprowadzone oznaczenie na  $x^{(i)}(0)$  można wykazać, opierając się na metodzie wyznaczników (wzory Cramera), że wszystkie stałe całkowania  $C_i$  w równaniu (2) są proporcjonalne do  $y_0$ , czyli  $C_i = \mu_i y_0$ , gdzie  $\mu_i$  — pewne stałe.

Dzieląc obustronnie równanie (2) przez  $r$  oraz podstawiając  $C_i = \mu_i y_0$ , dla końca fazy 1 ( $t=T_1$ ,  $x(T_1)=r-y_0$ ), otrzymujemy:

$$1 - \frac{y_0}{r} = \frac{y_0}{r} \left[ \sum_0^m \mu_i e^{s_i T_1} + K_L T_1 \right]. \quad (3)$$

W granicy, dla  $y_0/r \rightarrow 0$  (to znaczy, dla ruchu w obszarze małych odchyłeń  $\Omega_\varepsilon$ ), wyrażenie w nawiasie kwadratowym równania (3) przyjmuje wartość nieskończenie dużą, a to oznacza, że  $T_1 \rightarrow \infty$ .



W konsekwencji, z równania (2) wynika, że w obszarze  $\Omega_\varepsilon$  warunki końcowe (finalne) sygnału  $x$  w fazie 1 przyjmują wartości:

$$x_{1,f} = r - y_0, \quad \frac{x'_{1,f}}{y_0} = K_L, \quad (4a)$$

natomiast wszystkie wyższe odniesione pochodne sygnału  $x$  zerują się:

$$\frac{x_{1,f}^{(i)}}{y_0} = 0 \quad (i=2, 3, \dots). \quad (4b)$$

### 3.2. Faza 2

Oznaczmy przez  $t=0$  chwilę początkową, odpowiadającą stykowi faz 1 i 2. W chwili tej sygnał  $y$  posiada wartość początkową  $y(0) = y_1 = -y_0$ .

Ze schematu (rys. 2) wynika transformata Laplace'a  $y(s)$  sygnału  $y(t)$ :

$$y(s) = \frac{-1}{G_L(s)} x(s) + \frac{W_x(0-) - W_y(0-)}{K_L L_s(s)}, \quad (5)$$

gdzie wyrażenia  $W_x(0-)$  i  $W_y(0-)$  są wielomianami warunków początkowych (lewostronnych) sygnałów  $x$  i  $y$  w chwili  $t=0-$ .

Na podstawie reguł rachunku operatorowego [8, 9], przy uwzględnieniu warunków (4), otrzymujemy:

$$W_x(0-) - W_y(0-) = (r - y_0) M_s(s) + K_L [M_s(s) - L_s(s)] \frac{y_0}{r}. \quad (6)$$

W fazie 2 obowiązuje relacja:

$$y = x - r, \quad (7)$$

czyli

$$x(s) = y(s) + \frac{r}{s}. \quad (8)$$

Podstawiając (6) i (8) do (5) otrzymujemy transformatę sygnału  $y$  w fazie 2:

$$y(s) = \left[ \frac{K_L}{s} \frac{1}{1 + G_L(s)} - 1 \right] \frac{y_0}{s}. \quad (9)$$

Oznaczmy przez  $\Delta y_2(t)$  przyrost sygnału  $y$  w fazie 2 względem wartości początkowej  $y(0) = -y_0$

$$\Delta y_2(t) = y(t) + y_0.$$

Stąd

$$y(s) = \Delta y_2(s) - \frac{y_0}{s}. \quad (10)$$

Podstawiając równanie (10) do (9) otrzymujemy transformatę przyrostu  $\Delta y_2(t)$  w fazie 2:

$$\Delta y_2(s) = \left[ \frac{K_L}{s} \frac{1}{1 + G_L(s)} \right] \frac{y_0}{s}. \quad (11)$$

Zaznaczmy, że transformaty (9) i (11) obowiązują z ograniczeniem do zakresu ruchu w fazie 2.

Dla końca fazy 2 jest  $x' = y' = 0$ , a to oznacza, że punktowi końcowemu fazy 2 ( $t = T_2$ ) odpowiada ekstremum sygnału  $y$  z zerową pochodną  $y'(T_2) = 0$  (por. rys. 2). Niech  $y_{2,f} = y(T_2)$  oznacza wartość końcową  $y$ . Jest to jednocześnie wartość  $y$  w następnej fazie 3, czyli

$$y_{2,f} = y_3.$$

Oznaczmy przez  $\lambda$  stosunek wartości  $y_3$  do bezwzględnej wartości  $|y_1| = -y_1 = y_0$  sygnału  $y$  w fazie 1:

$$\lambda = \frac{y_3}{-y_1} = \frac{y_3}{y_0}. \quad (12)$$

Wyrażenie to będziemy dalej nazywać *stosunkiem amplitud* sygnału  $y$  w fazach 3 i 1.

Z postaci transformaty (9) wynika, że sygnał  $y(t)$  w fazie 2 jest odpowiedzią skokową pewnego układu liniowego na wymuszenie skokowe  $y_0 \cdot \mathbf{1}(t)$ . Wobec tego, dla sygnału  $y$  wszystkie warunki końcowe fazy 2 ( $t = T_2$ ) są proporcjonalne do  $y_0$  i można je zapisać w następującej formie:

$$y_{2,f}^{(i)} = y_0 k_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

gdzie  $k_i$  — stałe, zależne wyłącznie od transmitancji  $G_L(s)$ .

Natomiast dla sygnału  $x$ , przy uwzględnieniu (7), warunki końcowe fazy 2 przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} x_{2,f} &= r + y_{2,f} = r + y_3, \\ x_{2,f}^{(i)} &= y_0 k_i \quad (i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Zauważmy, że dla  $i = 0$  z równań (12) i (13) otrzymujemy:

$$y_{2,f} = y_0 k_0 = y_3 = \lambda y_0.$$

Wobec tego

$$\lambda = k_0 \neq f(y_0), \quad (15)$$

a to oznacza, że w obszarze małych odchyień  $\Omega_\varepsilon$  stosunek amplitud  $\lambda$  zależy wyłącznie od transmitancji układu  $G_L(s)$  i nie jest funkcją  $y_0$ .

### 3.3. Faza 3

Oznaczmy przez  $t = 0$  chwilę początkową, odpowiadającą stykowi faz 2 i 3. W fazie 3 sygnał  $y$  zachowuje stałą wartość  $y = \text{const} = y_3 = \lambda y_0$ . Dla  $t = 0$  sygnał  $x$  posiada wartość początkową  $x(0) = x_{2,f} = r + y_3$ .

Oznaczmy przez  $\Delta x_3(t)$  przyrost sygnału  $x$  w fazie 3 względem wartości początkowej:

$$\Delta x_3(t) = x(t) - x(0) = x(t) - (r + y_3). \quad (16)$$

Ze schematu (rys. 2) wynika, że przyrost ten dla  $t > 0$  opisuje się równaniem różniczkowym:

$$a_m \Delta x_3^{(m+1)} + \dots + a_1 \Delta x_3'' + \Delta x_3' = -K_L y_3 = -K_L \lambda y_0, \quad (17)$$

którego całka ogólna posiada postać

$$\Delta x_3(t) = \sum_0^m C_i e^{s_i t} - \lambda K_L y_0 t, \quad (18)$$

gdzie  $s_0 = 0$ ,  $s_i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Można wykazać (patrz Dodatek A), że w obszarze małych odchyień warunki początkowe sygnału  $\Delta x_3(t)$  dla chwili  $t = 0+$  są proporcjonalne do  $y_0$  i wyrażają się wzorem (29), według którego jest:  $\Delta x_3^{(i)}(0+) = \rho_i y_0$ , gdzie  $\rho_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) — pewne stałe. Wynika stąd (por. podrozdz. 3.1), że również wszystkie stałe całkowania  $C_i$  są proporcjonalne do  $y_0$ , czyli  $C_i = \mu_i y_0$ , gdzie  $\mu_i$  — stałe.

Wobec tego, całka (18) przyjmuje następującą postać:

$$\Delta x_3(t) = y_0 \left[ \sum_0^m \mu_i e^{s_i t} - \lambda K_L t \right]. \quad (19)$$

Rozpatrzmy przypadek  $y_3 > 0$  (czyli  $\lambda > 0$ ) i dodatkowo załóżmy, że w fazie 3 dla dowolnej chwili  $t > 0$  spełniona jest nierówność:

$$\Delta x_3(t) \leq 0 \quad (\text{dla } t > 0). \quad (20)$$

Nierówność (20) oznacza, że po rozpoczęciu fazy 3 układ nie wkracza ponownie w obszar fazy 2.

Przy powyższych założeniach, dla końca fazy 3 ( $t = T_3$ ;  $\Delta x_{3,f} = -2r$ ) równanie (19) można (po obustronnym podzieleniu przez  $r$ ) napisać w postaci:

$$-2 = \frac{y_0}{r} \left[ \sum_0^m \mu_i e^{s_i T_3} - \lambda K_L T_3 \right].$$

Z równania tego wynika, że w obszarze małych odchyień  $\Omega_e$  (to znaczy dla  $y_0/r \rightarrow 0$ ) czas trwania fazy 3  $T_3 \rightarrow \infty$ .

Wobec tego, na mocy równania (19) warunki końcowe sygnału  $x$  w fazie 3 przyjmują następujące wartości:

$$x_{3,f} = -r + y_0 = -(r - y_0), \quad \frac{x'_{3,f}}{y_0} = -\lambda K_L, \quad (21a)$$

natomiast wszystkie wyższe odniesione pochodne sygnału  $x$  zerują się:

$$\frac{x_{3,f}^{(i)}}{y_0} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots). \quad (21b)$$



### 3.4. Faza 4 oraz warunki stabilności lokalnej

Zauważmy, że jeżeli spełniona jest nierówność (20) oraz stosunek amplitud  $\lambda=1$ , to warunki końcowe (21) sygnału  $x$  w fazie 3 różnią się tylko znakiem w stosunku do warunków końcowych (4) tego sygnału w fazie 1, a to oznacza, że faza 4 (następująca po fazie 3) będzie powtórzeniem fazy 2 (ze znakiem przeciwnym).

Wobec tego, dla  $\lambda=1$  w układzie nieliniowym wystąpią okresowe, swobodne drgania stacjonarne (cykl graniczny) o nieskończenie małej amplitudzie  $y_0/r=0+$ .

Dla  $\lambda>1$  w fazie 4 (i w następnych fazach parzystych) amplituda sygnału  $y$  będzie narastać (w stosunku  $\lambda$ ):

$$\frac{-y_5}{y_3} = \lambda, \quad \frac{y_7}{-y_5} = \lambda \quad \text{itd.},$$

a więc układ nieliniowy będzie lokalnie niestabilny.

Natomiast dla  $0<\lambda<1$  amplituda sygnału  $y$  w fazach parzystych będzie maleć, czyli układ będzie lokalnie stabilny.

Dodajmy, że jeżeli  $\lambda=0$  i spełniony jest warunek (20), to nie wystąpi faza 4. Istotnie, na mocy (19) dla  $t \rightarrow \infty$  jest  $\Delta x_3 \rightarrow y_0 \mu_0 = r((y_0/r) \mu_0)$ . A ponieważ  $y_0/r$  jest wartością małą rzędu  $\varepsilon$ , to ruch układu nieliniowego kończy się w fazie 3. Wobec tego, dla  $\lambda=0$  układ jest lokalnie stabilny.

Na podstawie powyższych rozważań, dla układów nieliniowych klasy I można w następujący sposób sformułować warunki stabilności lokalnej:

Jeżeli spełniona jest nierówność (20), a stosunek amplitud  $\lambda$  przyjmuje wartości:

$\lambda>1$  – układ nieliniowy jest lokalnie niestabilny,

$\lambda_{kr}=1$  – układ znajduje się na granicy stabilności lokalnej,

$0 \leq \lambda < 1$  – układ jest lokalnie stabilny.

Należy zaznaczyć, że granica stabilności (odpowiadająca krytycznej wartości  $\lambda_{kr}=1$ ) ma charakter oscylacyjny, ponieważ dla  $\lambda_{kr}=1$  w układzie występuje cykl graniczny (o ekstremalnej amplitudzie  $y_0/r=0+$ ), któremu odpowiada punkt bifurkacji 1-go rodzaju –  $P_1$  (rys. 3).

## 4. Ekwiwalentny układ liniowy

W podrozdziale 3.2 wykazaliśmy, że w obszarze małych odchyłeń, przy ruchu układu nieliniowego w fazie 2, przyrost  $\Delta y_2(t)$  sygnału  $y$  wyraża się transformatą (11), którą skrótowo można zapisać w następujący sposób:

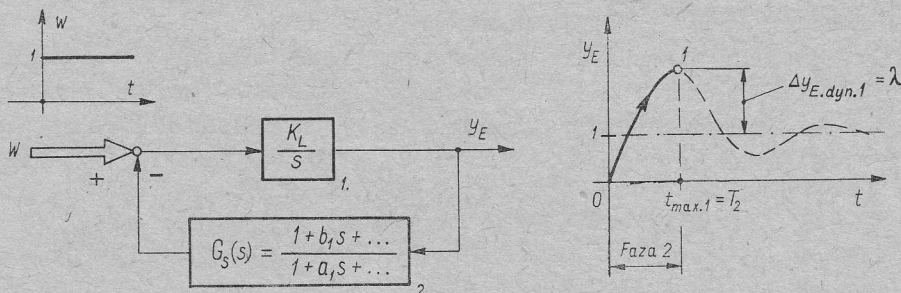
$$\Delta y_2(s) = G_E(s) \frac{y_0}{s}, \quad (22)$$

gdzie

$$G_E(s) = \frac{K_L}{s} \frac{1}{1 + G_L(s)}. \quad (23)$$

Transmitancja  $G_E(s)$  będzie dalej nazywana transmitancją *ekwiwalentnego układu liniowego*.

Z równania (23) wynika, że danemu układowi nieliniowemu, z częścią liniową  $G_L(s)$ , przyporządkowany jest tylko jeden, ściśle określony ekwiwalentny układ liniowy  $G_E(s)$ , z tym, że transmitancję  $G_E(s)$  — określoną wzorem (23) — można oczywiście zrealizować na szereg różnych sposobów, tj. przedstawić w formie różnych schematów strukturalnych.



Rys. 4. Ekwiwalentny układ liniowy w postaci standardowej dla układów nieliniowych klasy 1 z histerezą  
1 — część astatyczna, 2 — część statyczna

Na rysunku 4 podano schemat ekwiwalentnego układu liniowego w postaci, którą nazwiemy *standardową*. Układ ten powstaje z układu nieliniowego (rys. 2) przez przyjęcie zerowego progu nieczułości ( $r=0$ ), przy czym, w torze głównym (1) występuje *część astatyczna*, natomiast w torze sprzężenia zwrotnego (2) — *część statyczna*  $G_S(s)$  transmitancji  $G_L(s)$ .

Jeżeli na wejściu układu o transmitancji  $G_E(s)$  (rys. 4) podamy jednostkowe wymuszenie skokowe:

$$w(t) = \mathbf{1}(t), \quad \text{czyli} \quad w(s) = \frac{1}{s}, \quad (24)$$

to na wyjściu otrzymamy odpowiedź, którą będziemy nazywać *odpowiedzią skokową*  $y_E(t)$  ekwiwalentnego układu liniowego.

Przy uwzględnieniu relacji (22) i (24) nietrudno zauważyć, że odpowiedź skokowa  $y_E(t)$  ekwiwalentnego układu liniowego jest  $K$ -krotnie „powiększoną” funkcją czasu  $\Delta y_2(t)$ , przy czym współczynnik skali (dla  $y_E$ ) wynosi:  $K = 1/y_0$  (skala czasu nie ulega oczywiście zmianie).

Z rysunku 2 wynika, że faza 2 kończy się w chwili, dla której pochodna sygnału  $y$  zeruje się, tj. gdy  $y' = \Delta y_2' = y_E' = 0$ . Wobec tego, początkowy odcinek odpowiedzi skokowej  $y_E(t)$ , zawarty między punktem początkowym ( $t=0$ ) i punktem 1 pierwszego maksimum ( $t_{\max,1} = T_2$ ), przedstawia (w skali  $K$ ) ruch układu nieliniowego w fazie 2.

Oznaczmy przez  $\Delta y_{E, \text{dyn}, 1}$  *przeregulowanie* (odniesiony uchyb dynamiczny) *pierwszego ekstremum* odpowiedzi skokowej  $y_E(t)$  — rys. 4. Ponieważ całkowity przyrost sygnału  $y$  w fazie 2 wynosi:  $\Delta y_{2,f} = y_0 + y_3 = y_0 + \lambda y_0$ , wobec tego można napisać:

$$y_E(t = T_2) = K \Delta y_{2,f} = K y_0 (1 + \lambda) = 1 + \lambda.$$

Wynika stąd, że *przeregulowanie*  $\Delta y_{E, \text{dyn}, 1}$  *równa się wprost stosunkowi amplitud*  $\lambda$ :

$$\Delta y_{E, \text{dyn}, 1} = \lambda = \frac{y_3}{-y_1} = \frac{y_3}{y_0}. \quad (25)$$

W ten sposób wykazaliśmy, że za pomocą odpowiedzi skokowej  $y_E(t)$  ekwiwalentnego układu liniowego (23) można w prosty sposób wyznaczać stosunek amplitud  $\lambda$ , charakteryzujący ruch układu nieliniowego w fazie 2.

Z uwagi na zachodzącą równość (25), przeregulowanie  $\Delta y_{E \text{ dyn } 1}$  będziemy dalej oznaczać wprost przez  $\lambda$ .

## 5. Kryterium stabilności lokalnej

W podrozdziale 3.4 wykazaliśmy, że dla oceny stabilności lokalnej układów klasy 1 wymagane jest sprawdzenie warunku (20) oraz wyznaczenie stosunku amplitud  $\lambda$ .

Ponieważ w Dodatkach B.1 i B.2 wykazano, że wszystkie układy nieliniowe należące do klasy 1 spełniają warunek (20), wobec tego – przy uwzględnieniu równości (25) – warunki stabilności (podane w podrozdz. 3.4) redukują się do następującego, prostego kryterium.

### *Kryterium stabilności lokalnej układów klasy 1*

*Jeżeli odpowiedź skokowa  $y_E(t)$  ekwiwalentnego układu liniowego (rys. 4) dla pierwszego ekstremum wykazuje przeregulowanie  $\lambda$  o wartości krytycznej, równej jedności*

$$\lambda_{kr} = 1,$$

*to układ nieliniowy jest na granicy stabilności lokalnej.*

*Dla  $\lambda > 1$  układ jest lokalnie niestabilny, natomiast dla  $0 \leq \lambda < 1$  – lokalnie stabilny.*

Granicy stabilności lokalnej ( $\lambda_{kr} = 1$ ) odpowiada punkt bifurkacji 1-go rodzaju ( $P_1$ ), będący początkowym punktem krzywej cyklu granicznego. W punkcie  $P_1$  cykl graniczny wykazuje ekstremalne parametry:

$$\frac{y_0}{r} = 0+, \quad \frac{x_0}{r} = 1+, \quad T_c = \infty,$$

gdzie  $T_c$  – okres cyklu granicznego.

Dodajmy, że z relacji (15) wynika, iż w połączonej przestrzeni (o współrzędnych: amplituda drgań  $x_0/r$  oraz odpowiedni, zmienny parametr  $V$  części liniowej układu – np. rys. 3), w punkcie bifurkacji  $P_1$  styczna do krzywej cyklu granicznego  $x_0/r$  jest prostopadła do osi parametru  $V$ .

## 6. Uwagi końcowe

Podane wyżej kryterium stabilności można skrótowo nazwać: „kryterium pierwszego przeregulowania” lub „metodą  $\lambda$ ”.

W związku z tym zauważmy, że z kryterium tego bezpośrednio wynika efektywna metoda badania stabilności lokalnej, oparta na zasadzie wyznaczania odpowiedzi skokowej  $y_E(t)$  ekwiwalentnego układu liniowego.



Do tego celu najwygodniejsza jest elektroniczna maszyna analogowa, na której – bez większych trudności – można zamodelować odpowiedni ekwiwalentny układ liniowy (rys. 4) i następnie w prosty sposób badać wartość przeregulowania  $\lambda$  odpowiedzi skokowej  $y_E(t)$  w funkcji zmiennych parametrów układu. Na podstawie wartości  $\lambda$  wnioskujemy z kolei o stabilności lokalnej układu nieliniowego.

Należy podkreślić, że w metodzie  $\lambda$  modelujemy układ liniowy, to znaczy z pominięciem członu nieliniowego (histerezy). Dzięki temu, wyniki otrzymane na elektronicznej maszynie analogowej odznaczają się wysokim stopniem dokładności.

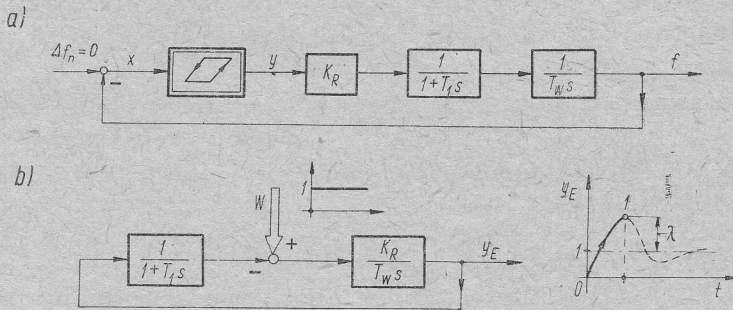
Z tych też względów wyniki uzyskane metodą  $\lambda$  mogą być wykorzystywane do korygowania (w obszarze małych odchyłeń) charakterystyk dynamicznych otrzymanych metodami przybliżonymi, np. metodą linearyzacji harmonicznej.

Na zakończenie – dla zilustrowania praktycznego zastosowania podanego kryterium – rozpatrzmy dwa przykłady układów nieliniowych z histerezą.

### Przykład 1

Zbadajmy prosty układ regulacyjny 2-go rzędu z histerezą (rys. 5a), rozpatrywany w wielu publikacjach, między innymi w *Poradniku* [8, s. 73] oraz przez G. J. Thalara i M. P. Pastela w [4].

Rozwiązując ten układ nieliniowy na elektronicznej maszynie analogowej (EMA) oraz metodą funkcji opisującej (FO), otrzymujemy krzywe cyklu granicznego  $E$  i  $F$ , podane na rysunku 6a w funkcji bezwymiarowego parametru  $\theta = K_R T_1 / T_w$ .



Rys. 5. Schemat układu nieliniowego (a) oraz ekwiwalentny układ liniowy (b)

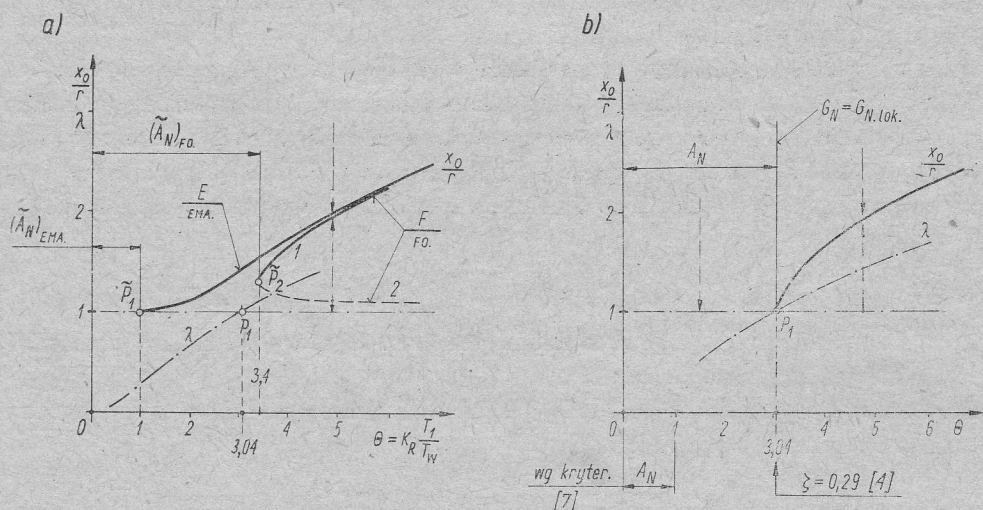
Krzywa  $E$  (przedstawiająca cykl graniczny stabilny) bierze początek w punkcie bifurkacji  $\tilde{P}_1$  (dla  $\theta=1$ ) i następnie rośnie monotonicznie ze wzrostem  $\theta$ .

Natomiast krzywa  $F$  wykazuje punkt rozgałęzienia (bifurkacji) 2-go rodzaju  $\tilde{P}_2$  i posiada dwie gałęzie: górną – 1 (cykl stabilny) oraz dolną – 2 (cykl niestabilny) z asymptotą  $x_0/r=1$ .

Obszar stabilności globalnej  $\tilde{A}_N$  układu nieliniowego (zależnie od użytej metody przybliżonej) jest więc wyznaczony przez punkt  $\tilde{P}_1$  względnie  $\tilde{P}_2$ .

Jak widać z rysunku 6a, w obszarze dużych amplitud ( $x_0/r > 2$ ) obie metody przybliżone dają praktycznie ten sam wynik ( $E \approx F$ ), natomiast w obszarze małych odchyłeń występują zasadnicze (jakościowe) różnice między charakterystykami  $E$  i  $F$ .

Mianowicie, z przebiegu krzywej  $E$  wynika, że dla  $\theta > 1$  układ jest niestabilny i wzbudza się miękko. Natomiast z krzywej  $F$  wynika, że układ jest lokalnie stabilny w całym obszarze parametru  $\theta$  i nawet na prawo od punktu  $\tilde{P}_2$  (czyli dla  $\theta > 3,4$ ) wzbudza się twardo, ze względu na sąsiedztwo niestabilnego cyklu (2).



Rys. 6. Charakterystyki układu z rys. 5a: a) przeregulowanie  $\lambda = f(\theta)$  oraz przybliżone charakterystyki dynamiczne, b) skorygowana krzywa cyklu granicznego

W celu wyjaśnienia tych rozbieżności zastosujemy ściśle kryterium stabilności lokalnej (rozdz. 5), oparte na odpowiedzi skokowej  $y_E(t)$  ekwiwalentnego układu liniowego, którego schemat podaje rysunek 5b.

Z otrzymanej krzywej przeregulowania  $\lambda$  wynika (rys. 6), że krytyczna wartość  $\lambda_{kr} = 1$  występuje dla

$$\theta_{kr} = 3,04.$$

Jest to zatem granica stabilności lokalnej, której odpowiada faktyczny punkt bifurkacji  $P_1$ , dający początek krzywej stabilnego cyklu granicznego.

Na tej podstawie można w obszarze małych odchyłeń skorygować krzywą cyklu granicznego, łącząc punkt  $P_1$  łukiem gładkim z górnym fragmentem krzywej  $F$  (względnie  $E$ ), uwzględniając przy tym, że w punkcie  $P_1$  styczna do krzywej cyklu granicznego jest prostopadła do osi parametru  $\theta$ . W ten sposób otrzymujemy poprawioną charakterystykę dynamiczną (rys. 6b) ze ściśle wyznaczonym obszarem stabilności  $A_N$  i dostatecznie dokładnym (dla celów praktycznych) przebiegiem krzywej cyklu granicznego.

Zaznaczmy, że przy korygowaniu charakterystyki  $F$  odrzucamy dolną gałąź (2), ponieważ dla  $\theta > 3,04$  wypada  $\lambda > 1$ , czyli układ jest lokalnie niestabilny i wzbudza się miękko. Wobec tego, cykl niestabilny (2) nie może w układzie występować i gałąź (2) oraz punkt bifurkacji 2-go rodzaju  $\tilde{P}_2$  są jedynie wynikiem błędów przybliżonej metody funkcji opisującej.

Dodajmy, że G. J. Thaler i M. P. Pastel [4] badali ten układ ścisłą metodą płaszczyzny fazowej i ustalili, że granica stabilności układu występuje dla

$$\zeta = 0,29,$$

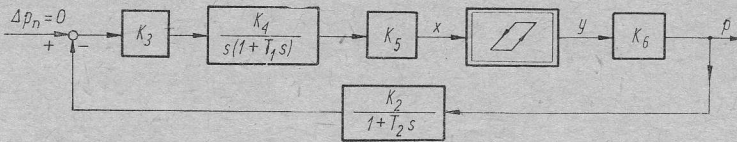
gdzie  $\zeta = -\alpha/\omega_0$  jest odniesionym współczynnikiem tłumienia układu 2-go rzędu. Ponieważ zachodzi relacja:  $\zeta = 0,5/\sqrt{\theta}$ , wobec tego, dla  $\theta = 3,04$  jest  $\zeta = 0,29$ , a więc obie metody dają zgodny wynik.

Jeżeli natomiast do rozpatrywanego układu zastosujemy kryterium stabilności W. A. Jakubowicza [7], to otrzymamy granicę stabilności dla  $\theta = 1$  i wyznaczony w ten sposób obszar stabilności jest 3-krotnie mniejszy od obszaru faktycznego. Taki wynik należy tłumaczyć tym, że kryterium [7] oparte jest na warunku wystarczającym, który w przypadku rozpatrywanego układu (rys. 5) nie jest koniecznym warunkiem stabilności.

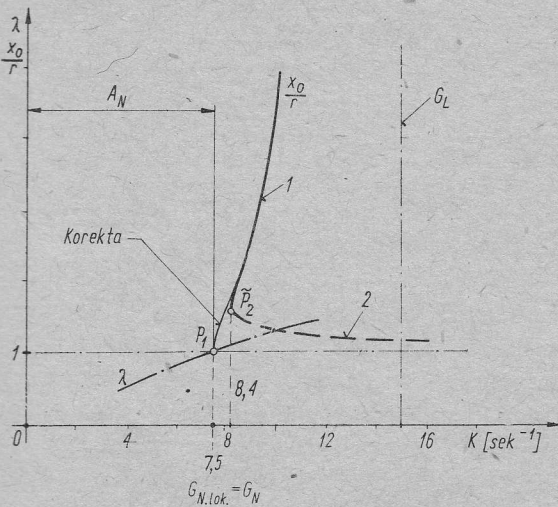
### Przykład 2

Rozpatrzmy układ regulacyjny reduktora gazu (rys. 7), który był badany przez E. P. Popowa metodą przybliżoną [2].

Stałe czasowe wynoszą:  $T_1 = 0,2$  s,  $T_2 = 0,1$  s, a wypadkowy współczynnik wzmocnienia oznaczmy przez  $K = K_2 K_3 K_4 K_5 K_6$ .



Rys. 7. Schemat układu regulacyjnego reduktora gazu



Rys. 8. Charakterystyka dynamiczna układu z rys. 7

Na rysunku 8 podano krzywą cyklu granicznego, otrzymaną przez E. P. Popowa metodą linearyzacji harmonicznej. Podobnie jak w przykładzie 1, również i tu krzywa cyklu granicznego posiada dwie gałęzie: górną — 1 (cykl stabilny) i dolną — 2 (cykl nie-



stabilny). Punkt bifurkacji  $\tilde{P}_2$  wyznacza przybliżoną granicę stabilności układu nieliniowego, która wynosi  $K=8,4$ . Przez  $G_L$  oznaczono granicę stabilności układu liniowego ( $r=0$ ). Jeżeli natomiast do tego układu zastosujemy kryterium pierwszego przeregulowania, to z badań (na elektronicznej maszynie analogowej) odpowiedzi skokowej  $y_E(t)$  ekwiwalentnego układu liniowego wynika, że krytyczna wartość przeregulowania  $\lambda_{kr}=1$  wypada dla  $K=7,5$ . Wobec tego, cykl niestabilny (gałąź 2) nie może w układzie występować i skorygowana krzywa cyklu granicznego bierze początek w punkcie bifurkacji 1-go rodzaju  $P_1$ .

Warto zaznaczyć, że w przypadku rozpatrywanego układu 3-go rzędu, histereza zmniejsza obszar stabilności układu dokładnie o połowę.

Dodatek

### A. Warunki początkowe fazy 3

Ze schematu (rys. 2) wynika transformata Laplace'a  $x(s)$  sygnału  $x(t)$ :

$$x(s) = -G_L(s)y(s) + \frac{W_y(0-) - W_x(0-)}{sM_s(s)}. \quad (26)$$

Na podstawie reguł rachunku operatorowego [9, 8], przy uwzględnieniu warunków (13) i (14), otrzymujemy

$$W_y(0-) - W_x(0-) = rM_s(s) + y_0 F(s, k_i), \quad (27)$$

gdzie  $F(s, k_i)$  – funkcja zmiennej zespolonej  $s$  oraz współczynników  $k_i$  występujących w warunkach (13) i (14).

Z równania (26), przy uwzględnieniu równań (16) i (27) oraz z zależności:  $y_3 = \text{const} = \lambda y_0$ , po prostych przekształceniach otrzymujemy transformatę  $\Delta x_3(s)$  przyrostu  $\Delta x_3(t)$ :

$$\Delta x_3(s) = \left[ \frac{F(s, k_i)}{M_s(s)} - \lambda(G_L(s) + 1) \right] \frac{y_0}{s}. \quad (28)$$

Z równań (28) i (15) wynika, że transformata  $\Delta x_3(s)$  jest proporcjonalna do  $y_0$ . Tym samym, również wszystkie warunki początkowe (dla  $t=0+$ ) sygnału  $\Delta x_3(t)$  są proporcjonalne do  $y_0$ , to znaczy, że można napisać

$$\Delta x_3^{(i)}(0+) = \rho_i y_0 \quad (i=0, 1, 2, \dots), \quad (29)$$

gdzie  $\rho_i$  – pewne stałe zależne od transmitancji  $G_L(s)$ .

### B. Ruch układu w fazie 3

B.1. Rozpatrzmy układ nieliniowy klasy 1 rzędu  $n=3$  (czyli  $m=2$ ) i niech  $t=0$  oznacza chwilę początkową fazy 3. W fazie tej ruch układu opisuje się równaniem (17) 3-go rzędu. Zastosujmy podstawięcie:  $\Delta x_3'(t) = x_3'(t) = v(t)$ . Wówczas (17) przechodzi w równanie 2-go rzędu, opisujące aperiodyczny przebieg funkcji  $v(t)$ .

Początkowemu punktowi fazy 3 (rys. 2) odpowiada maksimum funkcji  $x(t)$ . Wobec tego, dla  $t=0$  jest  $v(0)=0$  oraz  $v'(0)<0$ . Dla tych warunków początkowych oraz  $\lambda \geq 0$ , z uwagi na aperiodyczny przebieg  $v(t)$ , prędkość  $x_3'(t)=v(t)$  nie może przyjmować wartości dodatnich, czyli obowiązuje relacja:

$x'_3(t) \leq 0$ . Tym samym, dla układów rzędu  $n=3$  w fazie 3 spełniona jest nierówność (20):

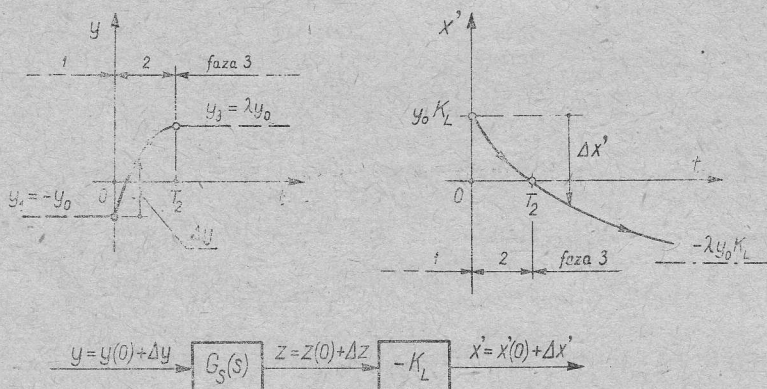
$$\Delta x_3(t) = \int_0^t x'_3 dt < 0 \quad \text{dla } t > 0.$$

Dla układów rzędu  $n=2$  powyższy warunek jest oczywiście również spełniony.

B.2. Przejdźmy obecnie do rozpatrzenia układu nieliniowego klasy 1 dowolnie wysokiego rzędu  $n \geq 4$  i oznaczmy przez  $h(t)$  odpowiedź skokową części statycznej  $G_s(s)$ :

$$G_s(s) = \frac{1 + b_1 s + \dots + b_p s^p}{1 + a_1 s + \dots + a_m s^m} \quad p \leq m = n - 1$$

na wymuszenie jednostkowe:  $u(t) = \mathbf{1}(t)$ .



Rys. 9. Ruch układu nieliniowego klasy 1, rzędu  $n \geq 4$ , w fazie 2 i 3

Zgodnie z założeniem 4 (rozdz. 2) odpowiedź skokowa  $h(t)$  jest monotonicznie rosnącą (niemalejącą) funkcją czasu i o wartości początkowej  $h(0+) \geq 0$ .

Wykażemy, że układy rzędu  $n \geq 4$  spełniają warunek (20). W tym celu rozpatrzmy swobodny ruch układu nieliniowego w obszarze małych odchyłeń  $\Omega_\epsilon$  (rys. 9) i niech  $t=0$  oznacza chwilę, odpowiadającą stykowi faz 1 i 2. Z warunków (4) i rysunku 9 wynika, że dla końca fazy 1 ( $t=0$ ) część statyczna  $G_s(s)$  (przy sygnale wejściowym:  $y = y_1 = \text{const} = -y_0$ ) osiąga stan ustalony, przy czym sygnał wyjściowy  $z(t)$  przyjmuje wartość  $z(0) = -y_0$ , natomiast pochodna  $x'(0) = K_L y_0$ .

Oznaczmy przez  $\Delta y(t)$ ,  $\Delta z(t)$  oraz  $\Delta x'(t)$  przyrosty sygnałów:  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $x'(t)$  — liczone od chwili  $t=0$  (czyli w fazie 2 i 3).

Przy uwzględnieniu, że  $\Delta y(0) = 0$ , możemy transformatę  $\Delta z(s)$  sygnału  $\Delta z(t)$  zapisać w następującej formie:

$$\Delta z(s) = G_s(s) \Delta y(s) = \frac{G_s(s)}{s} s \Delta y(s) = \frac{G_s(s)}{s} \Delta y'(s).$$

Wobec tego, na mocy twierdzenia Borela, można przyrost  $\Delta z(t)$  wyrazić za pomocą spłotu dwóch funkcji: odpowiedzi skokowej  $h(t)$  i pochodnej  $\Delta y'(t)$  przyrostu  $\Delta y(t)$ :

$$\Delta z(t) = \int_0^t h(t-\tau) \Delta y'(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (30)$$

Przyrost  $\Delta y(t)$  jest funkcją niemalejącą i ciągłą dla  $t \geq 0$ . Wobec tego, po zróżniczkowaniu spłotu (30) względem  $t$ , otrzymujemy

$$\Delta z'(t) = h(0+) \Delta y'(t) + \int_0^t h'(t-\tau) \Delta y'(\tau) d\tau \geq 0.$$

Nieujemna wartość pochodnej  $\Delta z'(t)$  dowodzi, że w fazach 2 i 3 sygnał  $\Delta z(t)$  jest funkcją ciągłą, monotonicznie rosnącą. Tym samym przyrost pochodnej  $\Delta x'(t) = -K_L \Delta z(t)$  jest ciągłą, monotonicznie malejącą funkcją czasu (rys. 9).

Dla  $t = T_2$  (koniec fazy 2 — por. rys. 2) jest  $x'(t = T_2) = 0$ . Wobec tego, z rysunku 9 wynika, że w fazie 3, dla  $\lambda > 0$ , pochodna  $x'(t)$  dla dowolnej chwili  $t > T_2$  nie może przyjmować wartości dodatnich. Można zatem dla przyrostu  $\Delta x_3(t)$  sygnału  $x$  w fazie 3 napisać:

$$\Delta x_3 = \int_{T_2}^t x' dt \leq 0 \quad \text{dla} \quad t > T_2,$$

a to dowodzi, że dla  $\lambda > 0$  spełniony jest warunek (20).

Dodajmy, że dla rozpatrywanych układów przeregulowanie  $\lambda$  odpowiedzi skokowej  $y_E(t)$  (rys. 4) nie może przyjmować wartości ujemnych. Istotnie, dla  $\lambda < 0$  w fazie 3 (por. rys. 9) pochodna  $x'(t)$  musiałaby przyjmować wartości dodatnie, a więc większe od  $x'(t = T_2) = 0$ , a to byłoby sprzeczne z uprzednio dowiedzionym stwierdzeniem, że w fazie 3 przyrost pochodnej  $\Delta x'(t)$  jest funkcją monotonicznie malejącą.

W skrajnym przypadku  $\lambda = 0$  czas trwania fazy 2 dąży do nieskończoności ( $T_2 \rightarrow \infty$ ) i ruch układu nieliniowego nie wykracza poza fazę 2. Wobec tego dla  $\lambda = 0$  przyrost  $\Delta x_3 = 0$  i układ nieliniowy jest lokalnie stabilny.

Praca wpłynęła do Redakcji w grudniu 1977r.

#### Literatura

- [1] R. A. Nielepin (red.), *Metody issledowanija nelinejnych sistem awtomatyczeskowo upravlenija*. Izd. Nauka, Moskwa 1975.
- [2] E. P. Popow, S. M. Fiedorow (red.), *Metody sintieza nelinejnych sistem awtomatyczeskowo upravlenija*. Izd. Maszinostrojenije, Moskwa 1970.
- [3] J. E. Gibson, *Nieliniowe układy automatycznego sterowania*. WNT, Warszawa 1968.
- [4] G. J. Thaler, M. P. Pastel, *Nieliniowe układy automatycznego sterowania*. WNT, Warszawa 1961.
- [5] E. P. Popow, I. P. Paltow, *Przybliżone metody badań nieliniowych układów automatycznych*. WNT, Warszawa 1964.
- [6] W. J. Cunningham, *Analiza układów nieliniowych*. WNT, Warszawa 1962.
- [7] W. A. Jakubowicz, *Metod matricznych nierawienstw. III — Absolutnaja ustojcziwost sistem s gisteriezisnymi nelinejnostiami*. Awtomatika i Tielemiechanika, 5, 1965.
- [8] *Poradnik Inżyniera — Automatyka*. WNT, Warszawa 1973.
- [9] J. Osowski, *Zarys rachunku operatorowego*. WNT, Warszawa 1972.

### Критерий устойчивости двух классов нелинейных систем автоматического регулирования Часть I. Системы с гистерезисом

#### Резюме

В работе, для определенного класса нелинейных систем с гистерезисом (рис. 2), представлен критерий устойчивости, который позволяет эффективно определять области и границы локальной устойчивости.

Этот критерий основан на исследовании перерегулирования  $\lambda$  переходной функции  $y_E(t)$ , т. наз. эквивалентной линейной системы (рис. 4).

Если для первого максимума перерегулирование  $\lambda$  достигает критическое значение  $\lambda_{kr} = 1$ , то нелинейная система находится на границе локальной устойчивости. Для  $\lambda > 1$  система локально неустойчива, а для  $0 \leq \lambda < 1$  — локально устойчива.



Применяя указанный критерий целесообразно пользование электронно-аналоговой машиной, на которой можно легко определить перерегулирование  $\lambda$  переходной функции  $y_E(t)$  эквивалентной линейной системы и таким способом исследовать локальную устойчивость нелинейной системы.

## Stability Criterion for Two Classes of Nonlinear Automatic Control System

### Part I. Systems with Hysteresis

#### Summary

The paper offers a stability criterion for a certain class of nonlinear systems with hysteresis. This criterion makes possible effective determination of the regions and verge of local stability.

The criterion consists in examining the overshoot  $\lambda$  of the unit-step-function response  $y_E(t)$  for a so called equivalent linear system (Fig. 4).

If the overshoot for the first maximum has the critical value  $\lambda_{kr}=1$  than the nonlinear system is on the verge of local stability. For  $\lambda > 1$  the system is locally unstable whereas for  $0 \leq \lambda < 1$  it is locally stable.

A use of an electronic analogue computer is advisable when the presented criterion is used for the investigation of the nonlinear system local stability. With such computer the overshoot  $\lambda$  of the unit-step-function response  $y_E(t)$  for the equivalent linear system is determined easily.