P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

83-84

WARSZAWA – POZNAŃ 1983

P A Ń S T W O W E   W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

---

REDAKCJA—EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszera 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

ISBN 83-01-04553-1
ISBN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 340+90 egz.	Oddano do składania 17 VI 1982 r.
Ark. wyd. 21,5. Ark. druk. 16,75+1 wkl.	Podpisano do druku 22 IV 1983 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g	Druk ukończono w maju 1983 r.
Nr zam. 489/184.	E-9/215. Cena zł 200,–

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

HYDROFORUM

KONFERENCJA NAUKOWO-TECHNICZNA

na temat

PROBLEMY ROZWOJU HYDRAULICZNYCH MASZYN WIROWYCH ZE SZCZEGÓLNYM UWZGLĘDNIENIEM POTRZEB ENERGETYKI

Porąbka-Kozubnik, 20 - 23, września 1980 r.

*

HYDROFORUM

SCIENTIFIC-TECHNICAL CONFERENCE

on

DEVELOPMENT PROBLEMS OF HYDRAULIC TURBOMACHINES WITH SPECIAL ACCOUNT OF THE NEEDS OF POWER ENGINEERING

Porąbka-Kozubnik, September 20 - 23, 1980

*

ГИДРОФОРУМ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

на тему

ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ РОТОРНЫХ МАШИН С ОСОБЫМ УЧЕТОМ НУЖД ЭНЕРГЕТИКИ

Поромбка-Козубник, 20 - 23 сентября 1980 г.

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH
1983 Zeszyt 83 - 84

ZYGFRYD DOMACHOWSKI*, CEZARY ORLIKOWSKI*, JULIAN SKIBA**

Gdańsk, Poznań

Metoda operatorowa Laplace'a analizy uderzeń hydraulicznych

Omówiono zastosowanie metody Laplace'a do analizy procesów przejściowych podczas uderzeń hydraulicznych oraz do syntezy urządzeń korekcyjnych w systemach hydraulicznych.

Wstęp

W analizie uderzeń hydraulicznych stosuje się różne metody; wśród nich występują również oparte na transformacjach operatorowych. Między innymi na transformacji Laplace'a oparta jest tzw. metoda impedancji [6, 7], dotycząca analizy stanów ustalonych systemów hydraulicznych. Metody typu transformacji Laplace'a próbowano również stosować do analizy procesów przejściowych podczas uderzeń hydraulicznych, w pewnych szczególnych przypadkach, przy czym głównie w modelu bez tarcia [4]. Wówczas, przykładowo, otrzymuje się przebieg ciśnienia oscylacyjny nietłumiony, co wskazuje na analogię takich przypadków z wcześniej wymienioną analizą stanów ustalonych metodą impedancji.

Zamiarem autorów jest wskazanie na możliwość i celowość zastosowania metody transformacji Laplace'a do analizy uderzeń hydraulicznych w ogóle, a zwłaszcza do korekcji procesów przejściowych podczas uderzeń hydraulicznych, poprzez dobór odpowiednich urządzeń korekcyjnych, co można by nazwać syntezą układów zabezpieczających. Takie postępowanie byłoby analogiczne do analizy i syntezy, metodą transformacji Laplace'a, układów regulacji automatycznej.

1. Linearyzacja równań różniczkowych opisujących uderzenie hydrauliczne

Równanie różniczkowe ruchu cieczy o gęstości ρ, w przewodzie hydraulicznym o średnicy wewnętrznej D i przekroju poprzecznym A, nachylonym pod kątem θ do poziomu, ma postać

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{dv}{dt}+g\sin\theta-\frac{4\tau}{\rho D}, \tag{1}$$

* Instytut Maszyn Przepływowych PAN.
** Politechnika Poznańska.

gdzie p – ciśnienie, v – prędkość cieczy, τ – siła tarcia przypadająca na jednostkę długości przewodu i jednostkę obwodu przekroju poprzecznego przepływu, g – przyspieszenie ziemskie [6, 7]. Ponieważ

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

przy czym w rozpatrywanych systemach hydraulicznych

$$v\frac{\partial v}{\partial x}\ll\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{3}$$

to równanie różniczkowe ruchu cieczy można przedstawić następująco:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial t}+g\sin\theta-\frac{4\tau}{\rho D}. \tag{4}$$

Równanie różniczkowe ciągłości przepływu cieczy można zapisać następująco [6, 7], uwzględniając relację analogiczną jak (3):

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho a^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{5}$$

gdzie a jest prędkością dźwięku w cieczy.

Metodę transformacji Laplace'a stosuje się do rozwiązywania równań różniczkowych liniowych; równanie (4) jest nieliniowe, wymaga więc linearyzacji.

1.1. Linearyzacja tarcia w równaniu ruchu cieczy

W rozważaniach dotyczących uderzeń hydraulicznych tarcie często pomija się, dla ułatwienia rozwiązania problemu [4], lub linearyzuje. Spotyka się kilka sposobów linearyzacji. Jeżeli prędkość przepływu cieczy zmienia się w przedziale od $(-v_m)$ przez 0 do $(+v_m)$, przy czym jest to przepływ turbulentny, to przyjmuje się

$$\tau=\frac{\rho f v^2}{8}, \tag{6}$$

gdzie f jest współczynnikiem tarcia, oraz – patrz równanie (4) –

a) podczas gwałtownych zmian warunków przepływu i gdy rozważa się przede wszystkim tylko kilka pierwszych okresów drgań w rozwiązaniu [4]:

$$\frac{4\tau}{\rho D}=\frac{fv^2}{2D}=\left(\frac{f}{2D}v_m\right)v=Kv, \tag{7}$$

b) gdy zmiany warunków przepływu nie są gwałtowne (np. stopniowe zamykanie zaworu) i gdy bierze się pod uwagę wiele okresów drgań w rozwiązaniu [4]:

$$\frac{4\tau}{\rho D}=\frac{2}{3}\left(\frac{f}{2D}v_m\right)v=\frac{2}{3}Kv, \tag{8}$$

c) można by stosować również inne sposoby, na przykład graficzną linearyzację strat ciśnienia w funkcji prędkości (liczby Reynoldsa), uwzględniającą zakres zmian prędkości przepływu w rozważanym zagadnieniu; wymienione wcześniej punkty a) i b) można traktować jako szczególne przypadki tego typu linearyzacji. Do dalszych rozważań przyjmiemy linearyzację tarcia postaci (7).

1.2. Linearyzacja równania ruchu ze względu na składową od ciężaru cieczy

Równanie (4) opisuje ruch cieczy w przewodzie ogólnie zakrzywionym. Wnosi to nieliniowość, ponieważ $\theta=\theta(x)$. W celu linearyzacji tego równania, przekształćmy równania (4) i (5), wprowadzając przyrosty sygnałów od wartości ustalonych. Oznaczmy

$$\begin{aligned} \Delta p(x,t)&=p(x,t)-p_0(x),\\ \Delta v(x,t)&=v(x,t)-v_0(x), \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie ogólnie

$$p_0(x)=p(x,0)=p_s+\rho g\int_0^x \sin\theta(x)\,dx-\frac{4}{D}\int_0^x \tau_0(x)\,dx, \tag{10}$$

$$v_0(x)=v(x,0),$$

przy czym p_s oznacza składową statyczną ciśnienia cieczy w przewodzie, $\tau_0(x)=\rho f v_0^2(x)/8$.

Uwzględniając w równaniach (4) i (5) podstawienia (9) oraz dokonując linearyzacji tarcia według (7), otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x}&=-\frac{\partial(\Delta v)}{\partial t}-K(\Delta v),\\ \frac{\partial(\Delta v)}{\partial x}&=-\frac{dv_0}{dx}-\frac{1}{\rho a^2}\frac{\partial(\Delta p)}{\partial t}, \end{aligned} \tag{11}$$

z warunkami początkowymi zerowymi,

$$\Delta p(x,0)=\Delta v(x,0)=0. \tag{12}$$

2. Zastosowanie transformacji Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych opisujących uderzenia hydrauliczne

Dokonując nad układem równań (11) transformacji Laplace'a, otrzymuje się

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{d(\Delta P)}{dx}&=-s(\Delta V)-K(\Delta V)\\ \frac{d(\Delta V)}{dx}&=-\frac{1}{s}\frac{dv_0}{dx}-\frac{1}{\rho a^2}s(\Delta P), \end{aligned} \tag{13}$$

gdzie

$$\Delta P = \Delta P(x, s) = \propto \{\Delta p(x, t)\},$$
$$\Delta V = \Delta V(x, s) = \propto \{\Delta v(x, t)\}; \tag{14}$$

symbol $\propto$ oznacza transformację Laplace'a, s jest operatorem Laplace'a.

Rozwiązując układ równań (3) względem $\Delta V(x, s)$, otrzymamy

$$\frac{d^2(\Delta V)}{dx^2} - \frac{1}{a^2} s(s+K)(\Delta V) = -\frac{1}{s} \frac{d^2 v_0}{dx^2} \tag{15}$$

oraz

$$\Delta V(x, s) = V_0(x, s) + C_1 \cosh \frac{\sqrt{s(s+K)}}{a} x + C_2 \sinh \frac{\sqrt{s(s+K)}}{a} x, \tag{16}$$

gdzie $V_0(x, s)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania (15) ze względu na funkcję po jego prawej stronie. Najczęściej rozpatruje się modele, w których $v_0(x) \cong \text{const}$ (przewód hydrauliczny o stałym przekroju); wówczas

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{d^2 v_0}{dx} = 0 \quad \text{oraz} \quad V_0(x, s) = 0.$$

W dalszym ciągu, dla uproszczenia zapisu, będziemy rozważać tylko taki przypadek. Wówczas, poszukując następnie rozwiązania układu równań (13) ze względu na $\Delta P(x, s)$, otrzymuje się, zgodnie z (16),

$$\Delta P(x, s) = -\frac{1}{s} \rho a^2 \left(C_1 \sinh \frac{\sqrt{s(s+K)}}{a} x + C_2 \cosh \frac{\sqrt{s(s+K)}}{a} x \right). \tag{17}$$

Obliczenie współczynników $C_1(s)$, $C_2(s)$ w rozwiązaniu układu równań (13) – patrz (16) i (17) – wymaga znajomości warunków brzegowych w rozpatrywanym zadaniu. Warunki brzegowe mają najczęściej postać

$$\begin{aligned} \Delta V_p(s) &= \Delta V(0, s), \quad \Delta P_p(s) = \Delta P(0, s), \\ \Delta V_k(s) &= \Delta V(l, s), \quad \Delta P_k(s) = \Delta P(l, s), \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie indeksy p, k oznaczają początkowy i końcowy ($x=l$) przekrój przewodu hydraulicznego. Do określenia współczynników C_1, C_2 wystarcza znajomość dwóch warunków brzegowych; niech będą nimi pierwszy i trzeci spośród wymienionych w (18). Wtedy

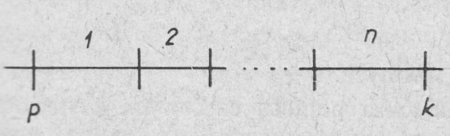
$$C_1(s) = \Delta V_p(s), \quad C_2(s) = \frac{\Delta V_k(s) - \Delta V_p(s) \cosh \dfrac{\sqrt{s(s+K)}}{a} l}{\sinh \dfrac{\sqrt{s(s+K)}}{a} l}. \tag{19}$$

Mając określone $\Delta P(x, s)$, $\Delta V(x, s)$ transformaty Laplace'a odchyłek od stanu ustalonego ciśnienia i prędkości cieczy w przewodzie hydraulicznym można, dokonując odwrotnej transformacji Laplace'a, obliczyć $\Delta p(x, t)$, $\Delta v(x, t)$,

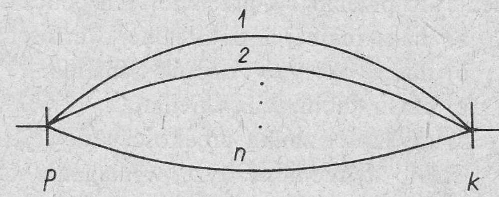
$$\begin{aligned} \Delta p(x, t) &= \propto^{-1}\{\Delta P(x, s)\}, \\ \Delta v(x, t) &= \propto^{-1}\{\Delta V(x, s)\}, \end{aligned} \tag{20}$$

a także następnie $p(x, t), v(x, t)$.

Przed szerszym zastosowaniem komputerów, obliczanie odwrotnych transformat Laplace'a było trudne, z powodu ogólnie bardzo złożonych postaci funkcji $\Delta P(x, s)$, $\Delta V(x, s)$; często praktycznie niemożliwe. Dlatego tę metodę przedstawiano głównie w charakterze dydaktycznym, a ewentualne jej zastosowania dotyczyły prostych przypadków [4].



Rys. 1. Schemat połączenia łańcuchowego elementów hydraulicznych



Rys. 2. Schemat połączenia równoległego elementów hydraulicznych

Komputeryzacja obliczeń pozwala usunąć wymienioną niedogodność metody transformacji Laplace'a. Przy tym, w odróżnieniu od, na przykład, metody charakterystyk – w której rozwiązanie odbywa się na całej siatce płaszczyzny x, t – metoda transformacji Laplace'a pozwala obliczać rozwiązanie bezpośrednio w wybranym przekroju lub przekrojach przewodu hydraulicznego.

Warto zwrócić uwagę na jeszcze jedną zaletę opisanej metody. Otóż, w strukturze systemu hydraulicznego występują głównie dwa rodzaje połączeń, łańcuchowe – jak schematycznie pokazano na rys. 1 i równoległe – jak schematycznie pokazano na rys. 2. Przy połączeniu łańcuchowym elementów

$$\begin{bmatrix} \Delta P_k(s) \\ \Delta V_k(s) \end{bmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} B_{n-i} \begin{bmatrix} \Delta P_p(s) \\ \Delta V_p(s) \end{bmatrix}, \tag{21}$$

gdzie B_i oznacza odwrotną macierz łańcuchową elementu i. Oznacza to, że przy połączeniu łańcuchowym zastępcza odwrotna macierz łańcuchowa jest iloczynem odwrotnych macierzy łańcuchowych poszczególnych elementów. Przy połączeniu równoległym

$$\begin{bmatrix} \Delta V_p(s) \\ \Delta V_k(s) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} A_i \begin{bmatrix} \Delta P_p(s) \\ \Delta P_k(s) \end{bmatrix}, \tag{22}$$

gdzie A_i oznacza macierz admitancyjną elementu i. Oznacza to, że przy połączeniu równoległym zastępcza macierz admitancyjna jest sumą macierzy admitancyjnych poszczególnych elementów. Posługując się zależnościami (21), (22) można znaleźć zastępczą macierz, na przykład odwrotną łańcuchową złożonego systemu hydraulicznego. Pozwala to, mając dane transformaty rozwiązania w jednym przekroju, obliczać je – a następnie rozwiązanie w funkcji czasu – w wybranych innych przekrojach.

3. Korekcja przebiegu uderzeń hydraulicznych z użyciem metody transformacji Laplace'a

Uderzenia hydrauliczne wymagają środków zabezpieczających przed ich skutkami – wymagają stosowania urządzeń korygujących przebieg występujących wówczas zmian ciśnienia i prędkości cieczy. Przykładowo, w systemach wodociągowych dotyczy to specjalnych urządzeń odciążających (m. in. zaworów); w systemach zasilających turbiny dotyczy to regulatora sterującego ruchem (zwłaszcza w kierunku zamykania) zaworów regulacyjnych przed turbiną.

Formułowane ze względów bezpieczeństwa wymagania (w postaci ograniczeń) w odniesieniu do przebiegów przejściowych podczas uderzeń hydraulicznych dotyczą:

a) maksymalnej i minimalnej wartości dodatnich ciśnień,

b) ilości okresów drgań ciśnienia,

c) czasu stabilizacji ciśnienia,

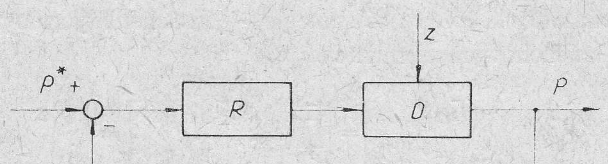
d) szybkości zmian prędkości kątowej turbin wodnych.

Często wymienione wyżej wymagania można ująć za pomocą całkowych kryteriów optymalności, z ewentualną dodatkową kontrolą procesu przejściowego w rozwiązaniu całkowo optymalnym. Przykładowo, jedno ze stosowanych kryteriów całkowych optymalności procesów przejściowych ma postać

$$I=\int_{0}^{+\infty}(\Delta p-\Delta p_u)^2 dt=\text{minimum}, \tag{23}$$

gdzie indeks u oznacza stan ustalony.

Rysunek 3 przedstawia typowy schemat blokowy układu regulacji automatycznej; O oznacza obiekt regulacji (system hydrauliczny), R – regulator (urządzenie korygujące procesy przejściowe podczas uderzeń hydraulicznych), p jest, przykładowo, ciśnieniem w wy-



Rys. 3. Uproszczony schemat blokowy układu regulacji automatycznej

branym przekroju systemu hydraulicznego (p^* – jego wartością zadaną), z – sygnałem zakłócającym (powodującym wystąpienie uderzenia hydraulicznego, ujętym, na przykład, pod postacią warunków brzegowych). Posługując się schematem blokowym z rysunku 3, zadaniem jest synteza takiego regulatora R, który przy wystąpieniu określonych zakłóceń powodujących uderzenie hydrauliczne minimalizowałby wartość całki (23).

Oznaczmy

$$\varepsilon_p(t)=\Delta p(t)-\Delta p_u \tag{24}$$

oraz

$$E_p(s) = \propto \{\varepsilon_p(t)\}. \tag{25}$$

Wówczas całka (23) przybiera postać [2]

$$I = \int_0^{+\infty} [\varepsilon_p(t)]^2 dt = \int_0^{+\infty} \varepsilon_p(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} E_p(\omega)\, d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_p(\omega)|^2 d\omega, \tag{26}$$

gdzie

$$\int_0^{+\infty} \varepsilon_p(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_p(t) e^{j\omega t} dt = \overline{E_p(\omega)}, \tag{27}$$

ponieważ dla $t<0$, $\varepsilon_p(t)=0$; ponadto

$$E_p(\omega) = \lim_{\sigma \to 0} E_p(\sigma + j\omega). \tag{28}$$

Na podstawie rysunku 3 można określić transformatę uchybu ciśnienia $E_p(s)$, w zależności od struktury (macierzy transmitancji) systemu hydraulicznego, danych warunków początkowych i brzegowych oraz struktury (transmitancji regulatora). Następnie należy parametry regulatora dobrać w taki sposób, ażeby całka (26) osiągnęła minimum. Przy tym, przystępując do rozwiązania postawionego zadania, można by na wstępie założyć ogólnie regulator proporcjonalno-różniczkująco-całkujący (PID). Optymalizacja polegałaby wówczas na określeniu optymalnych parametrów regulatora o założonej strukturze.

4. Podsumowanie

Metoda transformacji Laplace'a, zastosowana do zagadnień uderzeń hydraulicznych, pozwala otrzymać rozwiązanie w postaci operatorowej bezpośrednio w wybranym przekroju systemu hydraulicznego. Stosując odwrotną transformację Laplace'a, otrzymuje się rozwiązanie w funkcji czasu. Ta ostatnia czynność, analitycznie trudna, jest ułatwiona dzięki komputeryzacji obliczeń.

Zaletą metody transformacji Laplace'a jest również możliwość formalnie jednolitego przedstawienia modelu matematycznego systemu hydraulicznego, za pomocą transmitancji, z wykorzystaniem do tego celu teorii czwórników [1, 3, 5].

W dalszym ciągu, posługując się transformacją Laplace'a, można stosować do analizy uderzeń hydraulicznych i do syntezy urządzeń korygujących procesy przejściowe podczas uderzeń hydraulicznych metody analogiczne do występujących w teorii regulacji automatycznej.

Literatura

[1] Z. Klimacki, C. Orlikowski, *Analiza wpływu parametrów linii hydraulicznej na dynamikę układu sterowania.* Biuletyn IMP PAN, nr 144/808/1975.

[2] M. J. Kontorowicz, *Rachunek operatorowy i procesy w układach elektrycznych.* WNT, Warszawa 1968.

[3] C. Orlikowski, *Uogólniony algorytm do analizy i optymalizacji hydraulicznych układów regulacji automatycznej z linią długą.* Prace IMP, z. 77, 1980.

[4] G. R. Rich, *Water-Hammer Analysis by the Laplace-Mellin Transformation.* Trans. of the A.S.M.E., vol. 67, 1945.

[5] A. Serwach, *Właściwości dynamiczne hydraulicznej linii długiej.* Archiwum Budowy Maszyn, t. XVII, z. 1, 1969.

[6] V. L. Streeter, E. B. Wylie, *Fluid Mechanics.* Mc Graw-Hill Kogakusha LTD, 1975.

[7] E. B. Wylie, V. L. Streeter, *Fluid Transients.* Mc Graw-Hill International Book Company, 1978

Laplace Operator Analysis of Water Hammers

Summary

The method of characteristics as used up to now for the analysis of water hammers provides numerical results only. Application of the operator calculus for the same purpose gives an analytic solution in the operator form. The parameters of hydraulic line which are sought can be obtained as functions of time from the inverse operator transform.

It is assumed that the velocity of liquid is low compared to the speed of sound (as in the method of characteristics) and that the dependence of the pressure losses on the liquid velocity is linear. The same boundary conditions as in the method of characteristics are assumed.

The operator analysis of water hammers as discussed in the paper makes it possible to apply for the synthesis of systems protecting against effects of water hammers methods used in the analysis and synthesis of automatic control systems.

Операторный метод Лапласа анализа гидравлических ударов

Резюме

Применяемый до сих пор в анализе гидравлических ударов метод характеристик является исключительно численного типа. Применение с этой целью операторного исчисления позволяет получить аналитическое решение в операторной форме. В результате обратной операторной трансформации получаются разыскиваемые величины гидравлической линии в функции времени.

Предполагается, что скорость жидкости мала в сравнении со скоростью звука (как в методе характеристик), а также линейная зависимость потерь давления от скорости жидкости; предполагаются краевые условия такого же типа, как и в методе характеристик.

Обсуждаемый операторный способ анализа гидравлических ударов позволяет применять для синтеза систем предохраняющих перед следствиями гидравлических ударов методы соответствующие анализу и синтезу систем автоматического регулирования.