

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

87

WARSZAWA - POZNAŃ 1984

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with/special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA - EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WŁODZIMIERZ PROSNAK · KAZIMIERZ STELLER
ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY - CHAIRMAN) · JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1984

Printed in Poland

ISBN 83-01-05677-0

ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 300 + 90 egz.	Oddano do składania 30 XI 1983 r.
Ark. wyd. 10,25. druk. 9,5	Podpisano do druku 3 IX 1984 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g, 70 × 100	Druk ukończono we wrześniu 1984 r.
Cena zł 120,-. A-12/542.	Zamówienie nr 160/36.

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

JANUSZ STELLER

Gdańsk

Nieściśliwy opływ profilu umieszczonego w palisadzie prostoliniowej oraz między ściankami równoległymi z uwzględnieniem niektórych zjawisk zachodzących w warstwie przyściennej*

Rozwinięta przez K. Jacoba metoda obliczeń rozkładu prędkości wokół skończonych układów profili w przepływie z oderwaniem została zaadaptowana do palisad prostoliniowych. Jako szczególny przykład takiej palisady potraktowano palisadę naprzemienną występującą w zagadnieniu opływu płata między ściankami równoległymi. Omówiono sposób wyznaczania parametrów warstwy przyściennej ze szczególnym uwzględnieniem powstawania pęcherzy oderwaniowych oraz kryteriów turbulizacji. Całość metody obliczeniowej ujęto w formę schematu blokowego.

1. Wprowadzenie

Z wzorów Blasiusa-Czapłygina [20] wynika, że w warunkach bezoderwaniowego opływu profilu cieczą idealną, jej całkowita reakcja nie posiada składowej skierowanej wzdłuż kierunku napływu. Brak oporu opływającego ciała — zwany paradoksem d'Alemberta — stoi w jaskrawej sprzeczności z powszechnie znanymi faktami doświadczałnymi.

Trudności tej starano się zaradzić na długo przed rozwinięciem numerycznej mechaniki płynów, a zwłaszcza tej jej gałęzi, która zajmuje się opływem płata cieczą lepką. Temu celowi służyły prace Kirchhoffa, Helmholtza, Żukowskiego oraz innych badaczy, którzy począwszy od schyłku ubiegłego stulecia zajmowali się opływem płytki oraz innych przeszkód o ostrych, powodujących oderwanie, krawędziach (głównie klinów i łuków krzywoliniowych). Postępowanie polegało z reguły na założeniu pewnego schematu przepływu z oderwaniem (np. schemat Kirchhoffa, Riabuszyńskiego, Roshko i in.), a następnie poszukiwaniu odwzorowania płaszczyzny fizycznej na płaszczyznę hodografu prędkości lub potencjału zespolonego. Zakładano przy tym zwykle stałą szybkość przepływu na granicy śladu aerodynamicznego oraz istnienie wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między płaszczyzną fizyczną a pomocniczą. Uzyskany tą drogą współczynnik siły oporu wykazywał zazwyczaj spore odstępstwa od wartości empirycznej. Według G. Birkhoffa i E. H. Zarantonello [3] główną przyczyną takiego stanu rzeczy jest tak zwana niestabilność Helmholtza, która na granicy śladu aerodynamicznego rozwija się o wiele szybciej niż na granicy kawerny

* Praca wykonana w ramach Programu Rządowego PR-8 pt.: „Kompleksowy rozwój energetyki” kierunek 6.

kawitacyjnej. Rzeczywiście, rezultaty otrzymane dla przepływów z superkawitacją wykazują o wiele lepszą zgodność z doświadczeniem.

Sytuacja uległa zdecydowanej poprawie w wyniku rozwoju teorii warstwy przyściennej oraz numerycznej mechaniki płynów. Z jednej strony możliwe stało się określenie współczynników naprężenia stycznego oraz punktów oderwania na przeszkodzie o dowolnym kształcie, z drugiej zaś — taka modyfikacja zakładanego schematu przepływu, by uzyskać wyniki zbliżone do doświadczalnych.

Przykładem szczególnie owocnego postępowania jest metoda osobliwości rozwijana od początku lat sześćdziesiątych przez K. Jacoba [11 ÷ 15] i oparta na teorii harmonicznych pól wektorowych, a zwłaszcza wynikach E. Martensena i K. v. Sengbuscha [18]. Symulując obszar oderwania, jak również obecność warstwy przyściennej, polem prędkości pochodzącym od pewnego rozkładu źródeł na konturze profilu* udało się uzyskać wartości współczynników siły nośnej i siły oporu zbliżone do wartości zmierzonych doświadczalnie [13, 14]. Pod koniec lat siedemdziesiątych metoda była już na tyle rozwinięta, by uwzględnić obecność laminarnych pęcherzy oderwaniowych, wprowadzić poprawki na ściśliwość oraz uogólnić ją na układ kilku profili [15]. Metodę zastosowano również do opływu płata umieszczonego w tunelu [27]. Płat między ściankami równoległymi potraktowano — podobnie jak we wcześniejszej pracy W. J. Prosnaka [21] — jako fragment naprzemiennej palisady prostoliniowej. Obliczając opływ profilu uwzględniono wpływ pozostałych elementów palisady w postaci nieskończonego szeregu przyczynków.

Podobna metoda była też stosowana do analizy przepływu przez palisady prostoliniowe z uwzględnieniem zjawiska oderwania przez W. Gellera [8]. Rozkład źródłowości symulujących oderwanie nie był tu zadawany standardowo, z dokładnością do czynnika skalującego, jak to czyni K. Jacob, lecz wyznaczany z żądania stałego ciśnienia na konturze profilu w obszarze oderwania. Podobnie jak w pracach [11, 12], nie uwzględniano obecności przyłączonej warstwy przyściennej, a ślad aerodynamiczny rozciągał się do nieskończoności.

Powyższe wyniki są nadzwyczaj istotne z punktu widzenia teorii maszyn wirowych, a w szczególności — hydraulicznych maszyn odwracalnych, w których zjawiska oderwania przepływu zarówno od łopatek wirnika, jak i kierownicy nie da się uniknąć. Dowody twierdzeń zamieszczonych w pracy [18] wskazują, że przedstawiona tam teoria przenosi się bez zmian na palisady, w których elementem powtarzającym okresowo jest nie profil pojedynczy, lecz układ kilku profili. Szczególnym przypadkiem takiej palisady jest palisada naprzemienna występująca przy okazji rozwiązywania zagadnienia przepływu między ściankami równoległymi.

W tej sytuacji dalsze prace nad zastosowaniem koncepcji K. Jacoba do okresowych układów profilowych należy uznać za przedsięwzięcie celowe. Zadaniem prezentowanej tutaj pracy jest sformułowanie podstaw teoretycznych i zasad funkcjonowania metody obliczeniowej. Szczegóły numerycznej realizacji algorytmu jak również jego weryfikacja doświadczalna będą przedmiotem oddzielnych opracowań.

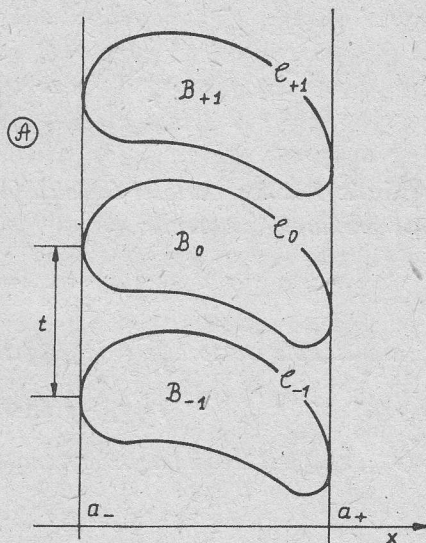
* Na możliwość wprowadzenia takiej symulacji w ramach rozwiniętej przez W. J. Prosnaka metody odwzorowań konforemnych [22] wskazano m.in. w pracy [28].

2. Podstawy teoretyczne

Niech \mathcal{B}_0 (profil) będzie zwartym, jednospójnym obszarem w płaszczyźnie (x, y) ograniczonym nieprzecinającą się krzywą zamkniętą \mathcal{C}_0 (kontur) sparametryzowaną odwzorowaniem $\varphi \rightarrow (x(\varphi), y(\varphi))$ różniczkowalnym w sposób ciągły. Parametryzację tę można zawsze dobrać tak, by jej okres wynosił 2π , co oznacza w szczególności, że

$$x(0) = x(2\pi) \quad \text{oraz} \quad y(0) = y(2\pi). \quad (1)$$

Niech \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} oznaczają wersory skierowane odpowiednio wzdłuż osi x, y, z . Przez płaską palisadę prostoliniową (rys. 1) rozumiemy będziemy za [18] sumę teoriomnogościową nie-



Rys. 1. Płaska palisada prostoliniowa

skończenie wielu obszarów \mathcal{B}_k , $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, utworzonych z \mathcal{B}_0 przez przesunięcie o wektor $kt\hat{y}$, gdzie t (podziałka palisady) jest na tyle dużą rzeczywistą liczbą dodatnią, by brzegi \mathcal{C}_k tych obszarów nie miały punktów wspólnych. Przez a_+ i a_- oznaczamy odpowiednio odcięte najbardziej na prawo i na lewo wysuniętych punktów tych obszarów, natomiast przez \mathcal{A} – obszar leżący na zewnątrz palisady. Weźmiemy pod uwagę pola wektorowe \mathbf{v} określone na \mathcal{A} i \mathcal{C}_k ($k=0, \pm 1, \dots$) i obdarzone następującymi własnościami:

- \mathbf{v} jest ciągle na \mathcal{C}_k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$),
- \mathbf{v} jest harmoniczne w \mathcal{A} ,
- jeśli $(x, y) \in \mathcal{A} \cup \bigcup_k \mathcal{C}_k$, to $\mathbf{v}(x, y+t) = \mathbf{v}(x, y)$,
- istnieją granice

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} |e^{\mp 2\pi x/t} \mathbf{v}(x, \eta)| = 0$$

rozumiane w sensie zbieżności jednostajnej.

Niech v_n i v_t oznaczają odpowiednio składową normalną i styczną wektora \mathbf{v} zaczepionego na \mathcal{C}_k . Przez źródłowość całkowitą profilu \mathcal{B}_k rozumiemy całkę

$$E = \oint_{\mathcal{C}_k} v_n ds, \quad (2)$$

natomiast przez cyrkulację wokół tego profilu – całkę

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}_k} v_t ds. \quad (3)$$

Przy tych założeniach można udowodnić następujące twierdzenia [18]:

Twierdzenie 1: *Istnieją takie stałe wektorowe $\mathbf{v}_{+\infty} = (v_{+\infty x}, v_{+\infty y})$ i $\mathbf{v}_{-\infty} = (v_{-\infty x}, v_{-\infty y})$, że dla wszystkich $a'_+ > a_+$ i $a'_- < a_-$ oraz dla wszystkich y zachodzi*

$$\frac{1}{t} \int_{y-\frac{t}{2}}^{y+\frac{t}{2}} \mathbf{v}(a'_\pm, \eta) d\eta = \mathbf{v}_{\pm\infty}. \quad (4)$$

Twierdzenie 2: *Różnica wartości średnich (4) określona jest przez całkowitą cyrkulację i źródłowość profilu \mathcal{B}_0 wzorem*

$$\mathbf{v}_{+\infty} - \mathbf{v}_{-\infty} = -\frac{E}{t} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\Gamma}{t} \hat{\mathbf{y}}. \quad (5)$$

Twierdzenie 3: *Pole wektorowe \mathbf{v} da się przedstawić w \mathcal{A} wzorem:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty - \text{grad } \Phi + \text{rot}(\Psi \hat{\mathbf{z}}), \quad (6)$$

gdzie $\mathbf{v}_\infty = (v_{\infty x}, v_{\infty y})$ jest średnią arytmetyczną

$$\mathbf{v}_\infty = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{-\infty} + \mathbf{v}_{+\infty}), \quad (7)$$

natomiast

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_0} v_n F ds \quad (8)$$

i

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_0} v_t F ds \quad (9)$$

są harmonicznymi i okresowymi względem y funkcjami z jądrem całkowym

$$F(x, y; \xi, \eta) = \ln \frac{1}{\sqrt{2 \left[\text{ch} \frac{2\pi(x-\xi)}{t} - \cos \frac{2\pi(y-\eta)}{t} \right]}}. \quad (10)$$

Twierdzenie 4: *Dla każdego przedziału $y - \frac{t}{2} \leq \eta \leq y + \frac{t}{2}$ istnieją wartości graniczne*

rozumiane w sensie zbieżności jednostajnej

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{v}(x, \eta) = \mathbf{v}_{-\infty} \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(x, \eta) = \mathbf{v}_{+\infty}. \quad (11)$$

Twierdzenie 5: Niech v_n i v_t będą dwiema funkcjami ciągłymi na \mathcal{C}_0 , zaś \mathbf{v}_{∞} pewną stałą wektorową. Wówczas spełnienie któregokolwiek z dwóch równań całkowych

$$v_n + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n} \oint_{\mathcal{C}_0} v_n F ds = 2(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{v}_{\infty}) + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\mathcal{C}_0} v_t F ds, \quad (12)$$

$$v_t + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n} \oint_{\mathcal{C}_0} v_t F ds = 2(\hat{\mathbf{t}}, \mathbf{v}_{\infty}) - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\mathcal{C}_0} v_n F ds, \quad (13)$$

jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla istnienia pola wektorowego \mathbf{v} w \mathcal{A} i na \mathcal{C}_k , $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, które posiada na \mathcal{C}_0 składową normalną v_n i składową styczną v_t , i którego wartości średnie $\mathbf{v}_{\pm\infty}$ spełniają równanie (7). Dla każdej kombinacji $v_n, v_t, \mathbf{v}_{\infty}$, która spełnia równania (12) lub (13) istnieje dokładnie jedno takie pole wektorowe; daje się ono przedstawić równaniami (6) do (10).

Symbolami $\hat{\mathbf{n}}$ i $\partial/\partial n$ oraz $\hat{\mathbf{t}}$ i $\partial/\partial t$ oznaczono tutaj odpowiednio wersory i pochodne skierowane normalnie oraz stycznie do konturu. Należy zwrócić uwagę, że całki we wzorach (12) i (13) rozumiane są w sensie wartości głównej Cauchy'ego. Całkując po konturze nie obejmującym bieguna jądra całkowego F otrzymalibyśmy szczególnie przypadek równania (6). Twierdzenie 5 ma podstawowe znaczenie dla prezentowanych niżej metod obliczeniowych.

3. Przepływ przez palisadę prostoliniową

W dalszym ciągu kropki nad współrzędnymi i innymi wielkościami określonymi na konturze oznaczać będą różniczkowanie względem parametru φ . Jeśli wziąć pod uwagę, że

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{\partial}{\partial y} \quad (13a)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (13b)$$

to równanie (13) można zapisać w postaci

$$\omega_t(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi) \omega_t(\psi) d\psi = 2[\dot{x}(\varphi) v_{\infty x} + \dot{y}(\varphi) v_{\infty y}] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(\varphi, \psi) \omega_n(\psi) d\psi, \quad (14)$$

gdzie

$$\omega_n = v_n \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (15a)$$

$$\omega_t = v_t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (15b)$$

oznaczają odpowiednio normalną i styczną do konturu składową prędkości zredukowanej, zaś jądra całkowe K i L wyrażają się wzorami:

$$K(\varphi, \psi) = \frac{2\pi}{t} \frac{\dot{y}(\varphi) \operatorname{sh} \frac{2\pi[x(\varphi) - x(\psi)]}{t} - \dot{x}(\varphi) \sin \frac{2\pi[y(\varphi) - y(\psi)]}{t}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi[x(\varphi) - x(\psi)]}{t} - \cos \frac{2\pi[y(\varphi) - y(\psi)]}{t}} =$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi[y(\varphi) - y(\psi)]}{t}}{\operatorname{th} \frac{\pi[x(\varphi) - x(\psi)]}{t}}, \quad (16)$$

$$L(\varphi, \psi) = \frac{2\pi}{t} \frac{\dot{x}(\varphi) \operatorname{sh} \frac{2\pi[x(\varphi) - x(\psi)]}{t} + \dot{y}(\varphi) \sin \frac{2\pi[y(\varphi) - y(\psi)]}{t}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi[x(\varphi) - x(\psi)]}{t} - \cos \frac{2\pi[y(\varphi) - y(\psi)]}{t}} =$$

$$= -\operatorname{ctg} \frac{\psi - \varphi}{2} + H(\varphi, \psi), \quad (17)$$

$$H(\varphi, \psi) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi[x(\varphi) - x(\psi)]}{t} - \cos \frac{2\pi[y(\varphi) - y(\psi)]}{t}}{\sin^2 \frac{\varphi - \psi}{2}}. \quad (18)$$

Z równań (16) i (18) wynika w szczególności

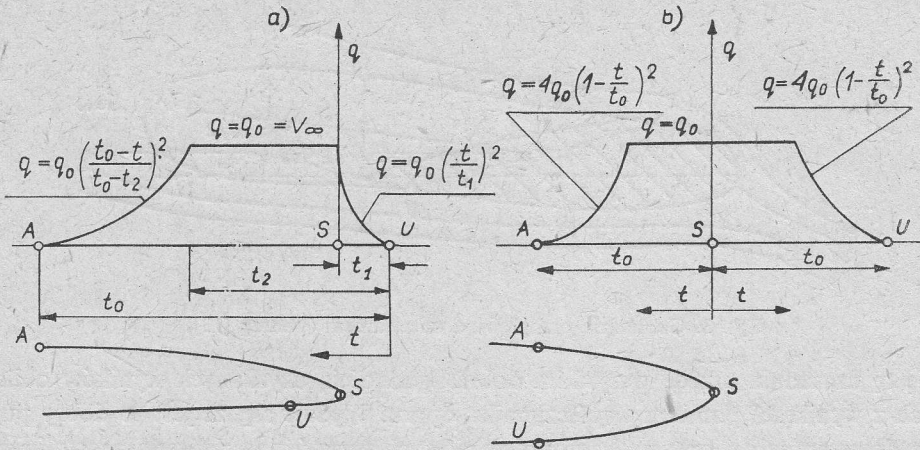
$$\int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi) d\varphi = 2\pi \quad (19)$$

i

$$\int_0^{2\pi} H(\varphi, \psi) d\varphi = 0. \quad (20)$$

Związki (19) i (20) okazują się pomocne przy pokonywaniu trudności związanych z wyznaczeniem wartości jądra całkowego K oraz z osobliwością jądra L w punkcie $\psi = \varphi$. Całość metody obliczeniowej sprowadza się do rozwiązania równania całkowego (14) ze względu na ω , przy założonym rozkładzie prędkości normalnej do konturu. W szczególności w przypadku opływu cieczą idealną zakłada się spełnienie warunku $\omega_n = 0$. W przypadku cieczy rzeczywistej symuluje się obecność obszaru oderwania pewnym zadaniem z góry – z dokładnością do współczynnika skalującego – rozkładem źródeł o gęstości liniowej q_1 (rys. 2). Obecność warstwy przyściennej symuluje się rozkładem źródeł o gęstości q_2 liczonej ze związku [13]

$$q_2 ds = d(v_i \delta_i), \quad (21)$$



Rys. 2. Standardowy rozkład źródłowości symulującej obszar oderwania na profilu symetrycznym (a) i asymetrycznym (b) (według [13])

gdzie δ_1 jest liniową miarą straty wydatku. Przyjmuje się, że w obszarze oderwania gęstość źródeł q_2 maleje liniowo do zera na krawędzi splywu. Dowodząc twierdzenia 5 wykazuje się, że spełnienie równania (12) i (13) oznacza znikanie prędkości normalnej i stycznej do konturu po jego stronie wewnętrznej. Wynika stąd, że zadanie rozkładu prędkości normalnych i stycznych do konturu profilu po jego stronie zewnętrznej równoważne jest obłożeniu go warstwą źródeł i wirów o gęstości liniowej wynoszącej odpowiednio

$$q = v_n \quad \text{oraz} \quad \gamma = v_t.$$

K. Jacob [13] wykazał, że znaczne polepszenie dokładności obliczeń oporu profilu pojedynczego uzyskuje się umieszczając za nim upusty o intensywności równej

$$E_1 = - \oint q_1 ds \quad \text{oraz} \quad E_2 = - \oint q_2 ds. \quad (22)$$

Wprowadzenie tych upustów sprawia również, że prawo zachowania masy naruszone jest jedynie w ograniczonym obszarze zastoju. W przypadku palisady prostoliniowej zapewnią się spełnienie warunku

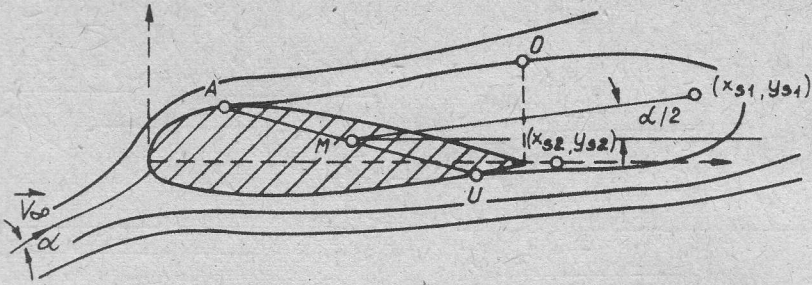
$$v_{-\infty x} = v_{+\infty x}.$$

Jacob proponuje, by w przypadku profilu pojedynczego współrzędne (x_{s1}, y_{s1}) i (x_{s2}, y_{s2}) upustów E_1 i E_2 określić następującymi wzorami

$$\begin{cases} x_{s1} = l + s^*, \\ y_{s1} = y_M + (x_{s1} - x_M) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \end{cases} \quad (23a)$$

$$\begin{cases} x_{s2} = 1,06l, \\ y_{s2} = 0, \end{cases} \quad (23b)$$

gdzie α jest kątem natarcia, l – długością cięciwy, s^* – długością łuku konturu między punktami oderwania A i U , zaś (x_M, y_M) – środkiem łączącego je odcinka (rys. 3). Pro-



Rys. 3. Geometria przepływu z oderwaniem (według [13])

pozycję tę uzasadnia przede wszystkim dobrą zgodnością uzyskanych wyników obliczeniowych z wynikami pomiaru współczynnika oporu. Wydaje się, że jest to dobry punkt wyjścia do ewentualnej optymalizacji położenia tych upustów za palisadą prostoliniową, której graniczną postacią jest właśnie profil pojedynczy. Oczywiście wzory (23) należy odczytywać w układzie współrzędnych związanym z cięciwą profilu, zaś przez α należy rozumieć odchylenie wektora v_∞ od tej cięciwy.

Ostatecznie równanie (14) można przedstawić w postaci

$$\omega_t - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi) \omega_t(\psi) d\psi = 2(\dot{x} v_{\infty x} + \dot{y} v_{\infty y}) + \kappa_{n1} + \kappa_{n2}, \quad (24)$$

przy czym człony κ_{n1} i κ_{n2} zapisują się wzorami

$$\kappa_{ni} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(\varphi, \psi) \omega_n(\psi) d\psi + \frac{E_i}{t} \frac{\dot{x} \operatorname{sh} \frac{2\pi(x-x_{si})}{t} + \dot{y} \sin \frac{2\pi(y-y_{si})}{t}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi(x-x_{si})}{t} - \cos \frac{2\pi(y-y_{si})}{t}} \quad (i=1, 2). \quad (25)$$

Symbole ω_{n1} i ω_{n2} użyte w równaniu (25) oznaczają odpowiednio prędkości zredukowane

$$\omega_{n1} = q_1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (26a)$$

$$\omega_{n2} = q_2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = d(v, \delta_1) / d\varphi. \quad (26b)$$

Celem skrócenia zapisu pominięto symbol argumentu (φ) wielkości nie umieszczonych pod znakiem całki.

Równanie (24) jest typowym równaniem Fredholma II-go rodzaju. Jego rozwiązanie jest kombinacją liniową

$$\omega_t = v_{\infty x} \omega_{1t} + v_{\infty y} \omega_{2t} + c \omega_{3t} + g \omega_{4t} + \omega_5 \quad (27)$$

rozwiązań równania jednorodnego

$$\omega_{3t} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi) \omega_{3t}(\psi) d\psi = 0 \quad (28)$$

z warunkiem

$$\int_0^{2\pi} \omega_{3t}(\psi) d\psi = 2\pi l$$

oraz równań niejednorodnych

$$\omega_{1t} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi) \omega_{1t}(\psi) d\psi = 2\dot{x},$$

$$\omega_{2t} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi) \omega_{2t}(\psi) d\psi = 2\dot{y}, \quad (30)$$

$$\omega_{4t} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi) \omega_{4t}(\psi) d\psi = \kappa_{n1}, \quad (31)$$

$$\omega_{5t} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \psi) \omega_{5t}(\psi) d\psi = \kappa_{n2}, \quad (32)$$

z warunkami

$$\int_0^{2\pi} \omega_{1t}(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \omega_{2t}(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \omega_{4t}(\varphi) d\varphi = 0$$

i

$$\omega_{5t}(0) = 0.$$

Rozwiązania równań (28 ÷ 32) odpowiadają kolejno

- czystemu przepływowi cyrkulacyjnemu z prędkością $v_\infty = 0$,
- bezcyrkulacyjnemu przepływowi z prędkością $v_\infty = (1, 0)$,
- bezcyrkulacyjnemu przepływowi z prędkością $v_\infty = (0, 1)$,
- bezcyrkulacyjnemu przepływowi wywołanemu standardowym rozkładem prędkości normalnych ω_{1n} symulujących zjawisko oderwania z warunkiem $v_\infty = 0$,
- przepływowi wywołanemu rozkładem prędkości normalnych ω_{2n} symulujących obecność warstwy przyściennej z narzuconym warunkiem Kutty-Żukowskiego oraz $v_\infty = 0$.

Jest faktem powszechnie znanym, że obszar oderwania charakteryzuje się nikłym gradientem uśrednionej wartości ciśnienia. Warunek ten jest spełniony, jeśli zażądać by ciśnienia w punktach oderwania A i U na obu powierzchniach płata oraz w punkcie O oderwanej linii prądu, położonym bezpośrednio nad krawędzią spływu, były jednakowe. Oznacza to spełnienie układu równań

$$\begin{cases} C_p(A; c, g) = C_p(O; c, g), \\ C_p(A; c, g) = C_p(U; c, g), \\ \Psi(A; c, g) = \Psi(O; c, g), \end{cases} \quad (33)$$

gdzie C_p jest współczynnikiem ciśnienia liczonym ze wzoru

$$C_p = 1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{v_\infty^2},$$

zaś symbolem Ψ oznaczono funkcję prądu. Do rozwiązania układu równań (33) sprowadza się stosowany przez K. Jacoba sposób obliczania współczynników c i g . Konieczna jest tu oczywiście umiejętność wyznaczania funkcji prądu oraz prędkości cieczy w dowolnym punkcie (x, y) pola przepływu.

Z twierdzenia 3 wynika, że wielkości te wyrażają się następującymi wzorami:

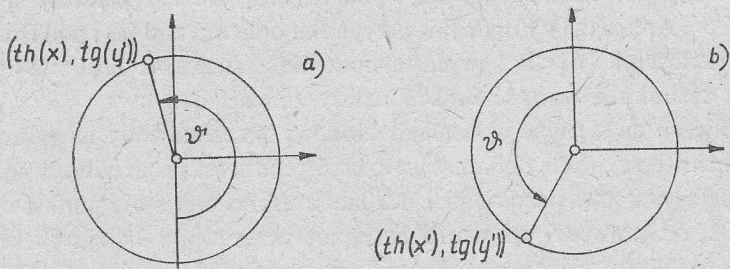
$$\begin{aligned} \Psi = & -v_{\infty y} x + v_{\infty x} y - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \omega_t(\varphi) \ln \left\{ 2 \left[\operatorname{ch} \frac{2\pi(x-\xi(\varphi))}{t} - \cos \frac{2\pi(y-\eta(\varphi))}{t} \right] \right\} d\varphi + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_n(\varphi) \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg} [\pi(y-\eta(\varphi))/t]}{\operatorname{th} [\pi(x-\xi(\varphi))/t]} d\varphi + \\ & + \sum_{i=1}^2 \frac{E_i}{2\pi} \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg} [\pi(y-y_{si})/t]}{\operatorname{th} [\pi(x-x_{si})/t]}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = & v_{\infty x} - \frac{1}{2t} \int_0^{2\pi} \frac{\omega_t(\varphi) \sin [2\pi(y-\eta(\varphi))/t] d\varphi}{\operatorname{ch} [2\pi(x-\xi(\varphi))/t] - \cos [2\pi(y-\eta(\varphi))/t]} + \\ & + \frac{1}{2t} \int_0^{2\pi} \frac{\omega_n(\varphi) \operatorname{sh} [2\pi(x-\xi(\varphi))/t] d\varphi}{\operatorname{ch} [2\pi(x-\xi(\varphi))/t] - \cos [2\pi(y-\eta(\varphi))/t]} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \frac{E_i}{2t} \frac{\operatorname{sh} [2\pi(x-x_{si})/t]}{\operatorname{ch} [2\pi(x-x_{si})/t] - \cos [2\pi(y-y_{si})/t]}, \end{aligned} \quad (35a)$$

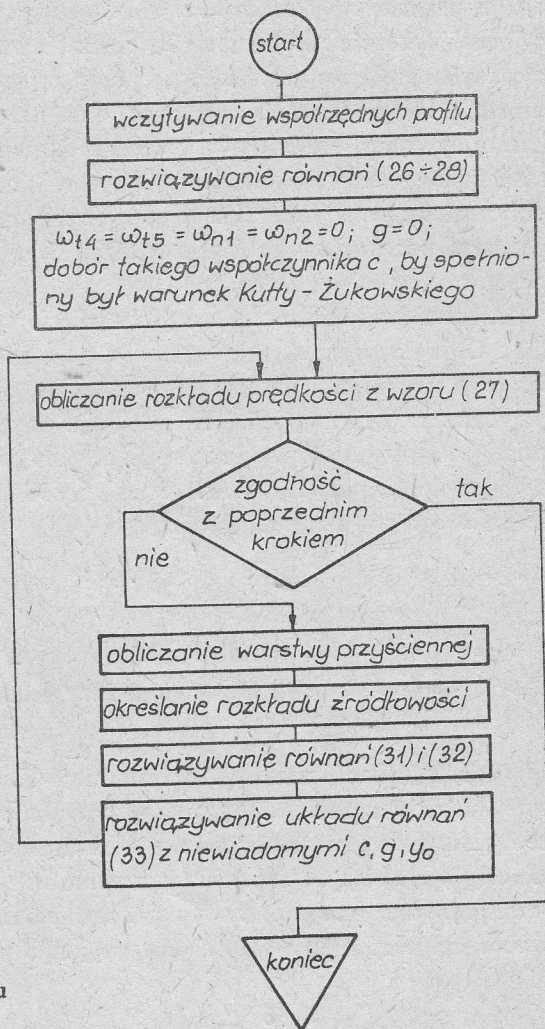
$$\begin{aligned} v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = & v_{\infty y} + \frac{1}{2t} \int_0^{2\pi} \frac{\omega_t(\varphi) \operatorname{sh} [2\pi(x-\xi(\varphi))/t] d\varphi}{\operatorname{ch} [2\pi(x-\xi(\varphi))/t] - \cos [2\pi(y-\eta(\varphi))/t]} + \\ & + \frac{1}{2t} \int_0^{2\pi} \frac{\omega_n(\varphi) \sin [2\pi(y-\eta(\varphi))/t] d\varphi}{\operatorname{ch} [2\pi(x-\xi(\varphi))/t] - \cos [2\pi(y-\eta(\varphi))/t]} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \frac{E_i}{2t} \frac{\sin [2\pi(y-y_{si})/t]}{\operatorname{ch} [2\pi(x-x_{si})/t] - \cos [2\pi(y-y_{si})/t]}, \end{aligned} \quad (35b)$$

gdzie symbolami ξ, η oznaczono współrzędne konturu profilu.

We wzorze (34) użyto symbolu $\operatorname{Arctg} (\operatorname{tg} (-)/\operatorname{th} (-))$ zamiast $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} (-)/\operatorname{th} (-))$ dla zaznaczenia, że mamy tu do czynienia z funkcją ciągłą zarówno ze względu na argu-



Rys. 4. Szkic definiujący funkcję $\theta = \text{Arctg}(tg(y')/th(x'))$ w przypadku obliczeń nad (a) i pod (b) profilem



Rys. 5. Schemat blokowy obliczeń przepływu z oderwaniem

ment umieszczony pod znakiem tg, jak i pod znakiem th. Przykładowy sposób definiowania funkcji $\vartheta = \text{Arctg}(\text{tg}(y')/\text{th}(x'))$ w przypadku obliczeń nad (a) i pod (b) powierzchnią profilu, przy założeniu $|y'| < \pi/2$ przedstawiono na rysunku 4. Jeśli $\pi/2 < |y'| < 3\pi/2$, to wynikającą z rysunku 4 wartość funkcji należy zmienić o π .

Całość obliczeń da się ująć w schemat blokowy przedstawiony na rysunku 5. W kolejnych krokach iteracyjnych oblicza się rozkład prędkości na profilu, a na jego podstawie – parametry warstwy przyściennej. K. Jacob ustala położenie punktów A i U w odległości $\approx 0,01l$ od krawędzi spływu, a następnie przesuwa w kolejnych krokach punkt oderwania A w kierunku krawędzi natarcia. Postępuje tak dopóty, dopóki wyznaczony z teorii warstwy przyściennej punkt oderwania nie okaże się położony bliżej krawędzi spływu niż punkt przyjęty do obliczeń. W przypadku opływu symetrycznego punkty A i U są przesuwane jednocześnie. Takie postępowanie gwarantuje zbieżność procesu iteracyjnego, jakkolwiek ustalanie z góry położenia punktu O nosi znamiona sztuczności. W opracowanych przez autora niniejszej pracy programach obliczeniowych przyjmuje się, po prostu, punkty oderwania wynikające z ostatnich obliczeń warstwy przyściennej, a proces iteracyjny kończy się, jeśli dwa kolejne kroki wskazują na te same lub bezpośrednio z sobą sąsiadujące punkty obliczeniowe. Dotychczas zdobyte doświadczenie wskazuje, że proces obliczeniowy jest szybkozbieżny, chociaż w przypadku tak zwanego rozerwania krótkiego pęcherza oderwaniowego (patrz rozdział 5) należy liczyć się z możliwością poważnych odstępstw od tej tendencji.

Kilka słów komentarza warto poświęcić sposobowi rozwiązywania układu równań (33). Otóż dokonuje się tego traktując c i g jako uwikłane funkcje rzędnej y_0 punktu O leżącego nad krawędzią spływu profilu (rys. 3). Ich rozwikłanie wymaga w pierwszym przybliżeniu (bez uwzględnienia rozkładu prędkości symulujących warstwę przyścinną) rozwiązania kwadratowego równania algebraicznego. Dalsze przybliżenia można uzyskiwać stosując np. metodę Newtona. W ten sposób zagadnienie sprowadza się do rozwiązania nieliniowego równania algebraicznego

$$F(y_0) \equiv \Psi((x_0, y_0); c(y_0), g(y_0)) - \Psi(A; c(y_0), g(y_0)) = 0.$$

4. Przepływ między ściankami równoległymi

Przedstawione przez E. Martensena i K. v. Sengbuscha [18] dowody twierdzeń cytowanych w rozdziale 2 wskazują, że twierdzenia te zachowują swą moc, jeśli założyć, że \mathcal{B}_0 jest sumą teoriomnogościową skończonej liczby rozłącznych podobszarów $\mathcal{B}_{01}, \mathcal{B}_{02}, \dots, \mathcal{B}_{0l}$ spełniających założenia uprzednio nakładane na \mathcal{B}_0 . Oczywiście, całki po konturze pojedynczym \mathcal{C}_0 należy wówczas zastąpić sumą całek po konturach $\mathcal{C}_{01}, \mathcal{C}_{02}, \dots, \mathcal{C}_{0l}$, wobec czego równania (12) i (13) przyjmują postać

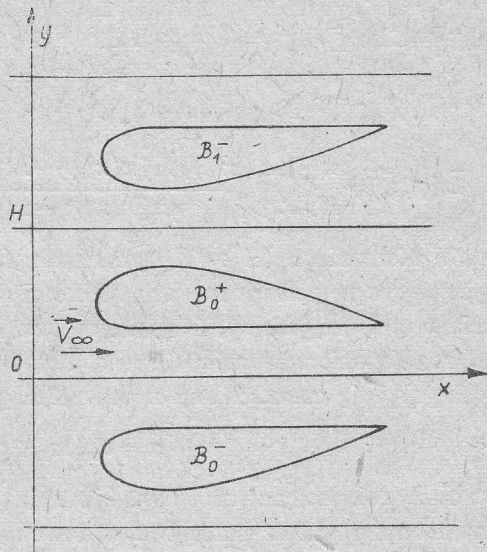
$$v_{ni} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_i} \sum_{j=1}^l \oint_{\mathcal{C}_{0j}} v_{nj} F ds = 2(\hat{n}_i, v_\infty) + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t_i} \sum_{j=1}^l \oint_{\mathcal{C}_{0j}} v_{ij} F ds \quad (36)$$

oraz

$$v_{ii} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_i} \sum_{j=1}^I \oint_{\mathcal{C}_{0j}} v_{rj} F ds = 2(\hat{\mathbf{t}}_i, \mathbf{v}_\infty) - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t_i} \sum_{j=1}^I \oint_{\mathcal{C}_{0j}} v_{nj} F ds \quad (37)$$

$$(i=1, 2, \dots, I),$$

gdzie $v_{ni}, v_{ti}, \hat{\mathbf{n}}_i, \hat{\mathbf{t}}_i$ są odpowiednio składowymi pola prędkości oraz wersorami normalnymi i stycznymi do konturu \mathcal{C}_{0i} . W szczególności twierdzenia rozdziału 2 można stosować do naprzemiennej palisady z rysunku 6. Palisadę tę uzyskuje się poprzez naprzemienne odbicia symetryczne profilu \mathcal{B}_0^+ wraz z jego uprzednimi obrazami względem prostych $y=0$ i $y=H$. Z zasady symetrii Schwarz'a wynika, że potencjał zespolony opisujący przepływ przez taką palisadę stanowi przedłużenie holomorficzne potencjału opisującego przepływ wokół profilu \mathcal{B}_0^+ umieszczonego między liniami równoległymi $y=0$ i $y=H$



Rys. 6. Palisada naprzemienna (według [21])

Oznaczmy wskaźnikami $+$, $-$ wielkości odnoszące się odpowiednio do profilu \mathcal{B}_0^+ i \mathcal{B}_0^- . Wówczas odpowiednik równania (24) zapisuje się w postaci układu równań całkowych

$$\omega_i^+ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [K^{++}(\varphi, \psi) \omega_i^+(\psi) + K^{+-}(\varphi, \psi) \omega_i^-(\psi)] d\psi = 2\dot{x}^+ v_{\infty x} + \kappa_{n1}^{++} + \kappa_{n1}^{+-} + \kappa_{n2}^{++} + \kappa_{n2}^{+-} \quad (38a)$$

oraz

$$\omega_i^- - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [K^{--}(\varphi, \psi) \omega_i^-(\psi) + K^{-+}(\varphi, \psi) \omega_i^+(\psi)] d\psi = 2\dot{x}^- v_{\infty x} + \kappa_{n1}^{--} + \kappa_{n1}^{-+} + \kappa_{n2}^{--} + \kappa_{n2}^{-+}, \quad (38b)$$

gdzie jądra całkowe oraz człony κ_n definiowane są równaniami (16), (17) i (25) z tym, że pierwszy wskaźnik odnosi się do wielkości parametryzowanej przez φ , zaś drugi do wielkości parametryzowanej przez zmienną całkowania ψ lub do współrzędnych upustu. Jeśli profil tak sparametryzować by punkt $(x^-(\varphi), y^-(\varphi))$ był obrazem punktu $(x^+(\varphi), y^+(\varphi))$ w symetrii względem osi x , to okaże się, że oba równania (38) są równoważne równaniu

$$\omega_t - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{K}(\varphi, \psi) \omega_t(\psi) d\psi = 2\dot{x}v_{\infty x} + \bar{\kappa}_{n1} + \bar{\kappa}_{n2}, \quad (39)$$

gdzie

$$\bar{K}(\varphi, \psi) = \frac{\pi}{H} \sum_{\sigma=-1,1} \sigma \frac{\dot{y}(\varphi) \operatorname{sh} [\pi(x(\varphi) - x(\psi))/H] - \dot{x}(\varphi) \sin [\pi(y(\varphi) - \sigma y(\psi))/H]}{\operatorname{ch} [\pi(x(\varphi) - x(\psi))/H] - \cos [\pi(y(\varphi) - \sigma y(\psi))/H]}, \quad (40)$$

$$\bar{\kappa}_{ni} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{L}(\varphi, \psi) \omega_{ni}(\psi) d\psi + \frac{E_i}{2H} \sum_{\sigma=-1,1} \frac{\dot{x} \operatorname{sh} [\pi(x - x_{si})/H] + \dot{y} \sin [\pi(y - \sigma y_{si})/H]}{\operatorname{ch} [\pi(x - x_{si})/H] - \cos [\pi(y - \sigma y_{si})/H]} \quad (41)$$

$i=1, 2,$

$$\bar{L}(\varphi, \psi) = \frac{\pi}{H} \sum_{\sigma=-1,1} \frac{\dot{x}(\varphi) \operatorname{sh} [\pi(x(\varphi) - x(\psi))/H] + \dot{y}(\varphi) \sin [\pi(y(\varphi) - \sigma y(\psi))/H]}{\operatorname{ch} [\pi(x(\varphi) - x(\psi))/H] - \cos [\pi(y(\varphi) - \sigma y(\psi))/H]}. \quad (42)$$

W równaniach (39 ÷ 42) opuszczono świadomie wskaźniki $+$, $-$, gdyż wszystkie występujące w tych równaniach wielkości odnoszą się do tego samego profilu. Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że profilem tym jest \mathcal{B}_0^+ . Ze względu na znikanie składowej $v_{\infty y}$ rozwiązanie równania (39) jest kombinacją tylko czterech rozwiązań niezależnych. Posługując się oznaczeniami z poprzedniego rozdziału mamy

$$\omega_t = v_{\infty x} \omega_{1t} + c \omega_{3t} + g \omega_{4t} + \omega_5, \quad (43)$$

pozostały tok postępowania jest taki sam jak w przypadku palisady nieskończonej. Funkcja prądu oraz prędkość przepływu w dowolnym punkcie (x, y) wyrażają się następującymi wzorami:

$$\Psi = v_{\infty x} y - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \omega_t(\varphi) \ln \frac{\operatorname{ch} [\pi(x - \xi(\varphi))/H] - \cos [\pi(y - \eta(\varphi))/H]}{\operatorname{ch} [\pi(x - \xi(\varphi))/H] - \cos [\pi(y + \eta(\varphi))/H]} d\varphi +$$

$$+ \sum_{\sigma=-1,1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_n(\varphi) \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg} [0,5\pi(y - \sigma\eta(\varphi))/H]}{\operatorname{th} [0,5\pi(x - \xi(\varphi))/H]} d\varphi + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^2 \frac{E_i}{2\pi} \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg} [0,5\pi(y - \sigma y_{si})/H]}{\operatorname{th} [0,5\pi(x - x_{si})/H]} \right\}, \quad (44)$$

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_{\infty x} + \frac{1}{4H} \sum_{\sigma=-1,1} \left\{ -\sigma \int_0^{2\pi} \frac{\omega_t(\varphi) \sin [\pi(y - \sigma\eta(\varphi))/H] d\varphi}{\operatorname{ch} [\pi(x - \xi(\varphi))/H] - \cos [\pi(y - \sigma\eta(\varphi))/H]} + \right.$$

$$+ \left. \int_0^{2\pi} \frac{\omega_n(\varphi) \operatorname{sh} [\pi(x - \xi(\varphi))/H] d\varphi}{\operatorname{ch} [\pi(x - \xi(\varphi))/H] - \cos [\pi(y - \sigma\eta(\varphi))/H]} + \sum_{i=1}^2 E_i \frac{\operatorname{sh} [\pi(x - \xi(\varphi))/H]}{\operatorname{ch} [\pi(x - x_{si})/H] - \cos [\pi(y - \sigma y_{si})/H]} \right\}, \quad (45a)$$

$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{4H} \sum_{\sigma=-1, 1} \left\{ \sigma \int_0^{2\pi} \frac{\omega_r(\varphi) \operatorname{sh} [\pi(x - \xi(\varphi))/H] d\varphi}{\operatorname{ch} [\pi(x - \xi(\varphi))/H] - \cos [\pi(y - \sigma\eta(\varphi))/H]} + \int_0^{2\pi} \frac{\omega_n(\varphi) \sin [\pi(y - \sigma\eta(\varphi))/H] d\varphi}{\operatorname{ch} [\pi(x - \xi(\varphi))/H] - \cos [\pi(y - \sigma\eta(\varphi))/H]} + \sum_{i=1}^2 E_i \frac{\sin [\pi(y - \sigma y_{si})/H]}{\operatorname{ch} [\pi(x - x_{si})/H] - \cos [\pi(y - \sigma y_{si})/H]} \right\}. \quad (45b)$$

5. Wyznaczanie parametrów warstwy przyściennej

Realizacja obliczeń według schematu blokowego zaprezentowanego na rysunku 5 wymaga wyznaczenia parametrów warstwy przyściennej. Konieczne informacje można uzyskać stosując niezbyt czasochłonne metody przybliżone oparte na związkach całkowych [30]. Spośród metod, których zakres obejmuje zarówno warstwę laminarną jak i turbulentną, szczególną popularność zdobyły metody Łojciańskiego [17], Truckenbrodta [2, 29 ÷ 31], Epplera [6], Walza [32] oraz Rotty [23]. K. Jacob stosuje w swoich pracach metodę Rotty opartą na związkach całkowych Kármána i Leibsona, W. Geller posługuje się metodą Walza, natomiast autor tej pracy zdecydował się użyć metody Truckenbrodta. Pierwotna jej wersja, opublikowana już w roku 1952 [29], była później przedmiotem wielu udoskonaleń [2, 30, 31].

Podstawą metody jest równanie różniczkowe Leibsona, które rządzi liniową miarą straty energii δ_3 . W przypadku przepływu nieściśliwego zapisuje się ono w postaci

$$\frac{d\delta_3}{ds} + 3 \frac{\delta_3}{U} \frac{dU}{ds} = \frac{\varepsilon}{\rho U^3}, \quad (46)$$

gdzie U – prędkość styczna do profilu w przepływie potencjalnym, s – współrzędna krzywoliniowa mierzona wzdłuż konturu profilu, ε – energia rozpraszana w obszarze warstwy przyściennej.

Dalsze rozważania wymagają wprowadzenia parametrów kształtu H_{12} , H_{32} i H określonych wzorami

$$H_{12} = \delta_1 / \delta_2, \quad (47a)$$

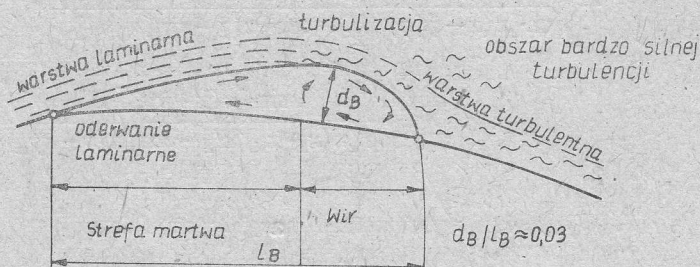
$$H_{32} = \delta_3 / \delta_2, \quad (47b)$$

$$\frac{dH}{H} = \frac{dH_{32}}{(H_{12} - 1)H_{32}}, \quad (48)$$

oraz liczb Reynoldsa $Re_1 = U\delta_1/\nu$, $Re_2 = U\delta_2/\nu$ i $Re_3 = U\delta_3/\nu$, gdzie δ_1 i δ_2 są odpowiednio liniowymi miarami straty wydatku i pędu.

Dość kontrowersyjne kryteria dotyczące takich zjawisk jak turbulizacja, oderwanie czy utworzenie pęcherza oderwaniowego nie są z reguły przypisane do konkretnej metody obliczeniowej. Zagadnienia te będą przedmiotem dalszych rozważań.

Wyznaczenie punktu oderwania laminarnego nie nastęrcza trudności. Oderwanie to następuje w miejscu, gdzie znika lokalny współczynnik tarcia. Podobne kryterium stosuje się zwykle w przypadku warstwy turbulentnej, chociaż tym razem stanowi ono już tylko przybliżenie rzeczywistego stanu rzeczy [6, 25].



Rys. 7. Typowy laminarny pęcherz oderwaniowy (według [14])

Oderwana warstwa turbulentna nie powraca z reguły do powierzchni płata, tworząc ślad aerodynamiczny symulowany w omawianej metodzie standardowym rozkładem prędkości normalnych do konturu płata. Odmienne przedstawia się sytuacja w przypadku warstwy laminarnej, która po oderwaniu może w pewnych warunkach powrócić do powierzchni opływanego ciała tworząc tak zwany laminarny pęcherz oderwaniowy (rys. 7). Kryteria dotyczące powstawania i długości pęcherza oderwaniowego mają zazwyczaj charakter empiryczny. Według Crabtree'go [4] z powstaniem pęcherza oderwaniowego należy się liczyć, gdy liczba Reynoldsa Re_1 spełnia w punkcie oderwania laminarnego warunek

$$Re_1 \leq 2600 \div 2800. \quad (49)$$

Jeśli nierówność (49) nie jest spełniona, to w punkcie tym mamy do czynienia z turbulizacją naturalną warstwy przyściennej.

Korzystając z wyników doświadczalnych M. Gastera [7], K. Jacob [14] uzyskał półempiryczny wzór na długość pęcherza oderwaniowego λ w postaci

$$\lambda = 0,12 (U_\infty / U_{LS}) Re_{2LS} \delta_{2LS} / (-P)^{1,6}, \quad (50)$$

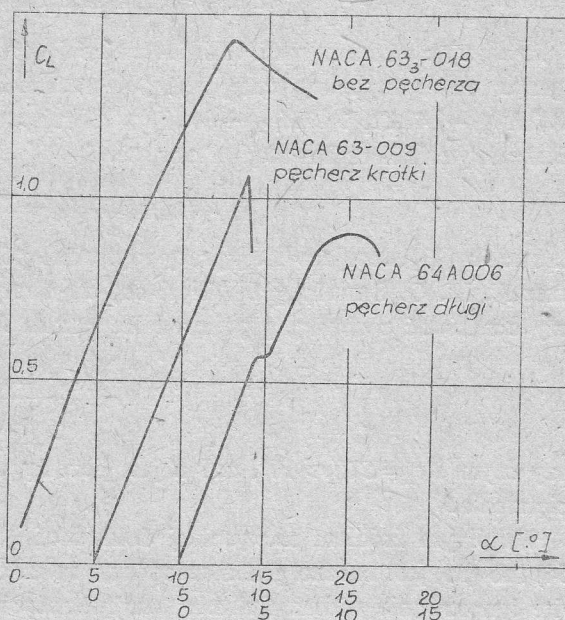
gdzie LS jest indeksem odnoszącym się do punktu oderwania laminarnego, wielkość $P = (\delta_{2LS}^2 / \nu) (\Delta U / \Delta s)$ nosi nazwę parametru Gastera, zaś $(\Delta U / \Delta s)$ jest średnim gradientem prędkości w obszarze pęcherza oderwaniowego.

Inną formułę, opartą na badaniu płatów hydrodynamicznych zaproponowali T. T. Huang i D. E. Hannan [9]. Według tych ostatnich autorów

$$\lambda = \begin{cases} \frac{350\delta_{2LS}}{\log_{10} Re_{2LS}}, & \text{gdy } Re_{2LS} \geq 300, \\ \frac{300}{Re_{2LS}} \frac{350\delta_{2LS}}{\log_{10} Re_{2LS}}, & \text{gdy } Re_{2LS} < 300. \end{cases} \quad (51)$$

Formuła ta była z powodzeniem stosowana przy wyznaczaniu opływu płatów hydrodynamicznych i to zadecydowało o jej wyborze do opisywanego tutaj algorytmu.

Pęcherze oderwaniowe klasyfikowane bywają zwykle jako „długie” lub „krótkie”, zależnie od tego, czy wywierają czy też nie wywierają istotnego wpływu na średni rozkład ciśnienia na powierzchni płata [10]. Rozmiar pęcherza krótkiego jest zwykle rzędu 100 grubości warstwy przyściennej i nie rośnie dopóty, dopóki nie zostanie osiągnięty krytyczny kąt natarcia, przy którym pęcherz gwałtownie się „rozrywa”, w rezultacie czego formuje się obszar silnego oderwania sięgający często poza krawędź spływu [1]. Dług pęcherza oderwaniowy jest niewielki tylko przy małych kątach natarcia. W miarę narastania kąta natarcia rośnie stopniowo rozmiar pęcherza i jego wpływ na rozkład ciśnienia-



Rys. 8. Wpływ pęcherza oderwaniowego na przebieg współczynnika siły nośnej profilu (według [1])

Odzwierciedleniem tych zjawisk jest zmiana współczynnika siły nośnej, która różnie przebiega zależnie od tego, czy mamy do czynienia z pęcherzem krótkim, długim, czy też z brakiem oderwania laminarnego (rys. 8). Według kryterium Owena-Klanfera [19], krótkiego pęcherza oderwaniowego należy oczekiwać jeśli $Re_{2LS} > 550$, natomiast długiego — przy $Re_{2LS} < 450$.

Metoda zaproponowana przez K. Jacoba nie pozwala na uwzględnienie wpływu długiego pęcherza oderwaniowego na średni rozkład ciśnienia. Rozerwanie krótkiego pęcherza oderwaniowego utożsamia się z powstaniem obszaru oderwania sięgającego poza

krawędź spływu. Przyjmuje się w tym celu kryterium Gastera [7] głoszące, że przy $125 < Re_{2LS} < 350$ rozerwanie pęcherza oderwaniego zachodzi z chwilą, gdy parametr P staje się mniejszy od swej wartości krytycznej

$$P_{cr} = -0,0012(Re_{2LS} - 125) - 0,09. \quad (52)$$

Z rezultatów Gastera wynika również (por. T. T. Huang, F. B. Peterson [10]), że turbulizacja oderwanej warstwy przyściennej zachodzi w odległości $130 \div 180 \delta_{2LS}$ od punktu oderwania w przypadku długiego pęcherza oderwanego oraz w obszarze przylgnięcia, w przypadku pęcherza krótkiego. Fluktuacje ciśnienia są w tym obszarze nadzwyczaj silne i przewyższają 3 do 4 razy fluktuacje towarzyszące turbulizacji naturalnej (bez pęcherza oderwanego) [9].

Sposób wyznaczania punktu turbulizacji naturalnej budzi wciąż wiele kontrowersji. Wiadomo, że turbulizacji naturalnej nie należy oczekiwać wcześniej niż osiągnięty zostanie punkt równowagi obojętnej wynikający z teorii Tollmienna-Schlichtinga (por. np. [24]). Dość proste kryterium półempiryczne znaleźć można w monografii A. Walza [32]. Głosi ono, że z równowagą obojętną mamy do czynienia w punkcie, gdzie

$$\ln Re_2 \approx 2,42 + 24,2(H_{32} - 1,572). \quad (53)$$

Analizując różne wyniki doświadczalne i teoretyczne R. Eppler [6] zauważył, że logarytm naturalny z krytycznej liczby Reynoldsa Re_{2cr} jest z reguły zawarty w przedziale $(34,2H_{32} - 47,81, 34,2H_{32} - 46,78)$. Kierując się tym spostrzeżeniem zaproponował własne kryterium turbulizacji w postaci:

$$Re_{2cr} = 18,4H_{32} - 21,74. \quad (54)$$

K. Jacob [13] stosuje w swej pracy kryterium półempiryczne Michela w wersji podanej przez A. M. O. Smitha [26]. Głosi on, że utraty stabilności warstwy przyściennej należy oczekiwać z chwilą, gdy liczba Reynoldsa Re_2 przekroczy wartość

$$Re_{2cr} = 1,174 \left(1 + \frac{22,4}{Re_S} \right) Re_S^{0,46}, \quad (55)$$

przy czym $Re_S = SU/\nu > 10^5$, zaś S jest liczoną wzdłuż konturu odległością od punktu spiętrzenia.

Wspólnym źródłem niewysokiej dokładności kryteriów półempirycznych w rodzaju (54) lub (55) jest bardzo grubo szacowana zależność od profilu prędkości, jak też całkowite ignorowanie widma fluktuacji turbulentnych w przepływie swobodnym. Pod tym względem o wiele bardziej obiecująca jest metoda oparta na pracach A. M. O. Smitha i współpracowników [16]. Badając rozwiązania równania Orra-Sommerfelda, autorzy ci wyznaczają współczynniki przestrzennego wzmocnienia zaburzeń w funkcji liczby Reynoldsa Re_1 oraz częstości zaburzającej ω . O turbulizacji decyduje przekroczenie wartości krytycznej przez tak zwany kumulacyjny współczynnik wzmocnienia przestrzennego liczony ze wzoru

$$A(s) = \exp \left\{ - \int_{s_N/L}^{s/L} \left(\frac{\alpha_i \delta_1}{Re_1} \right) \left(\frac{U_\infty L}{\nu} \right) \left(\frac{U}{U_\infty} \right) d \left(\frac{s'}{L} \right) \right\}, \quad (56)$$

gdzie s, s' oznaczają współrzędne krzywoliniowe punktów na konturze ciała opływającego, s_N – współrzędną krzywoliniową punktu stabilności obojętnej, L – charakterystyczny rozmiar opływającego ciała, $\left(\frac{\alpha_1 \delta_1}{Re_1}\right)$ – parametr wzmocnienia, odpowiadający fali Tollmienna-Schlichtinga o częstości ω_i , U_∞ – prędkość w przepływie niezaburzonym, U – prędkość styczną do konturu w punkcie s' . Jeśli widmo zaburzeń nie jest znane, to bierze się pod uwagę tylko częstość najbardziej wzmocnianą. Przy ostrożnych szacowaniach przyjmuje się wartość krytyczną $A_{cr} \approx e^{10}$ dla tuneli o niskim poziomie wibracji i turbulencji swobodnej, oraz $A_{cr} \approx e^7$ dla tuneli o sporych wibracjach i turbulencji swobodnej [10]. Korzystanie z wzoru (54) wymaga – ściśle biorąc – analizy stabilności profilu prędkości w każdym punkcie obliczeniowym. Tak właśnie postępuje się w pracy [16]. Zadanie ogromnie się upraszcza, jeśli rzeczywisty profil prędkości zastąpi się profilem, dla którego już uprzednio wyznaczono wartości współczynnika wzmocnienia. W praktyce wykorzystuje się w tym celu rodzinę samopodobnych profili Hartree'go (por. np [10]). Istnieje szereg przyczyn, dla których metody tej nie można traktować jako niezawodnej (założenie o czysto przestrzennym narastaniu zaburzeń, trudność prawidłowej oceny krytycznej wartości kumulacyjnego współczynnika wzmocnienia, w końcu zastępowanie realistycznego profilu prędkości profilem Hartree'go), niemniej jej przewaga nad typowymi kryteriami półempirycznymi w rodzaju (54) czy też (55) jest coraz bardziej doceniana.

6. Uwagi końcowe

Pozytywne wyniki uzyskiwane dotąd przez K. Jacoba [11 ÷ 15], W. Gellera [8] i D. Steinbacha [27] skłaniają do optymizmu również w przypadku metody będącej dalszym rozwinięciem wcześniejszych koncepcji. Z drugiej strony należy mieć na uwadze, że:

- do metody tej stosują się ograniczenia wynikające z przybliżenia Prandtla (grubość warstwy przyściennej musi być znacznie mniejsza od podziałki palisady lub odległości profilu od ścianki),
- istotnym brakiem metody jest nieuwzględnianie zmiany rozkładu ciśnienia spowodowanej długim pęcherzem oderwaniowym,
- właściwa ocena poprawności uzyskiwanych wyników będzie możliwa dopiero po weryfikacji doświadczalnej.

Praca wpłynęła do Redakcji w kwietniu 1983 r.

Literatura

- [1] A. J. Alexander, *An investigation of the relationship between flow separation and cavitation*, CAVITATION – a Conference arranged by the Fluid Machinery Group of the Inst. Mech. Eng., Heriot Watt University, Edinburgh 1974, Mech. Eng. Publ. Ltd 1974, pp. 1 - 8.
- [2] J. C. Bhatia, E. Truckenbrodt, *A simple quadrature method for computing laminar boundary layers*. Acta Mechanica, vol. 14, 1972, pp. 239 - 250.

- [3] G. Birkhoff, E. H. Zarantonello, *Jets, wakes, and cavities*. Academic Press Inc., New York 1957.
- [4] L. F. Crabtree, *The formation of regions of separated flow on wing surfaces*. ARC Rep. + Mem., No. 3122, 1959 (cyt. za [14]).
- [5] N. Curle, *The laminar boundary layer equations*. Clarendon Press, Oxford 1962.
- [6] R. Eppler, *Praktische Berechnung laminarer und turbulenter Absaug-Grenzschichten*. Ing. Arch., Bd. 32, H. 4, 1963, S. 222 - 245.
- [7] M. Gaster, *The structure and behaviour of laminar separation bubbles*. AGARD Conf. Proc. 4, Separated Flow, Part 2, Rhode-Saint Genese, May 1966 (cyt. za [14]).
- [8] W. Geller, *Calculation of the turning angle of two-dimensional incompressible cascade flow*. AIAA Journ., vol. 14, no. 3, March 1976, pp. 297 - 298.
- [9] T. T. Huang, D. E. Hannan, *Pressure fluctuations in the region of flow transition*. David W. Taylor Naval Ship Research and Development Center, Report 4723, 1976 (cyt. za [10]).
- [10] T. T. Huang, F. B. Peterson, *Influence of viscous effects on model/full-scale cavitation scaling*. J. Ship. Res., vol. 20, no. 4, December 1976, pp. 215 - 223.
- [11] K. Jacob, *Berechnung der Potentialströmung um Profile mit Absaugung und Ausblasen*. Ing. Arch., Bd. 32, H. 1, 1963, S. 51 - 65.
- [12] K. Jacob, *Berechnung der abgelösten inkompressiblen Strömung um Tragflügelprofile und Bestimmung des maximalen Auftriebs*. Z. Flugwiss., Bd. 17, 1969, S. 221.
- [13] K. Jacob, *Weiterentwicklung eines Verfahrens zur Berechnung der abgelösten Profilströmung mit besonderer Berücksichtigung des Profilwiderstandes*. Deutsche Luft- und Raumfahrt - Forschungsbericht 76 - 36, 1976.
- [14] K. Jacob, *Über den Einfluss von Ablöseblasen auf den Auftrieb von Tragflügelprofilen*. Deutsche Luft- und Raumfahrt - Forschungsbericht 77 - 34, 1977.
- [15] K. Jacob, *A method for prediction of subsonic flow around airfoil systems with separation*. EURO-MECH Colloquium-129, „Computation of flows around systems of airfoils”, Varna 1980.
- [16] N. A. Jaffe, T. T. Okamura, A. M. O. Smith, *Determination of spatial amplification factors and their application to predicting transition*. AIAA Journ., vol. 8, no. 2, February 1970, pp. 301 - 307.
- [17] L. G. Lojcianskij, *Miechanika židkosti i gaza*. GITTL, Moskwa 1957.
- [18] E. Martensen, K. von Sengbusch, *Über die Randkomponenten ebener harmonischer Vektorfelder*. Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 5, 1960, pp. 46 - 75.
- [19] P. R. Owen, L. Klaffer, *On the laminar boundary-layer separation from the leading edge of a thin aerofoil*. Aero. Res. Council, Current Paper 220, October 1953 (cyt. za [1]).
- [20] W. J. Prosnak, *Mechanika plynów*. PWN, Warszawa 1970.
- [21] W. J. Prosnak, *On a method of computing the plane steady flow situated between straight parallel lines*. Bull. Ac. Pol. Sci., Sér. Sci. Tech., Vol. XX, No. 4, 1972, s. 1 - 10.
- [22] W. J. Prosnak, *Teoria układu profilów lotniczych*. Ossolineum, Wrocław - Warszawa 1981.
- [23] J. C. Rotta, *FORTRAN IV-Rechenprogramm für Grenzschichten bei kompressiblen ebenen und achsensymmetrischen Strömungen*. Deutsche Luft- und Raumfahrt - Forschungsbericht 71 - 51, 1971.
- [24] H. Schlichting, *Entstehung der Turbulenz*. Handbuch der Physik, Bd. VIII/1, Springer Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1959.
- [25] R. L. Simpson, *A review of some phenomena in turbulent flow separation*. Trans. ASME, J. Fl. Eng., vol. 103, December 1981, pp. 520 - 532.
- [26] A. M. O. Smith, *Remarks on fluid mechanics of the stall*. AGARD-Lecture Series No. 4, „Aircraft Stalling and Buffet”, VKI Brüssel, April 1975 (cyt. za [13]).
- [27] D. Steinbach, *Berechnung der Strömung mit Ablösung für Profile und Profilsysteme in Bodennähe oder in geschlossenen Kanälen*. Z. Flugwiss. Weltraumforsch., Bd. 2, 1978, S. 293.
- [28] M. Strojnowski, *The potential flow with separation around an arbitrary system of profiles*. EURO-MECH Colloquium-129, „Computation of flows around systems of airfoils”, Varna 1980.
- [29] E. Truckenbrodt, *Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung*. Ing. Arch., Bd. 20, 1952, S. 211 - 228.

- [30] E. Truckenbrodt, *Neuere Erkenntnisse über die Berechnung von Strömungsgrenzschichten mittels einfacher Quadraturformeln*. Ing. Arch., Bd. 43, H. 1, 1973, S. 9, H. 2/3, 1974, S. 136.
- [31] E. Truckenbrodt, *Strömungsmechanik*. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg 1968.
- [32] A. Walz, *Boundary layers of flow and temperature*. Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts 1969.

**Несжимаемое обтекание профиля помещенного в прямолинейной
решетке а также между параллельными стенками с учетом
некоторых явлений происходящих в пограничном слое**

Резюме

Развитый К. Якобом [11 - 15] метод расчета распределения скоростей вокруг конечных систем профилей в течении с отрывом приспособлен к прямолинейным решеткам. Для этой цели непосредственно использована теория гармонических векторных полей (см.: Э. Мартенсен и К. Ф. Зенгбуш [18]). В качестве особого случая рассмотрена напеременная решетка, выступающая в проблеме обтекания крыла между параллельными стенками (рис. 6). Представлен ряд полуэмпирических критериев, служащих определению длинных и коротких срывных пузырей, а также точки натуральной турбулизации. Весь расчетный метод представлен в виде блочной схемы (рис. 5). Предусматривается, что численная реализация отдельных расчетных блоков, как и экспериментальная проверка алгоритма, будут предметом отдельных отчетов.

**Incompressible Flow Round an Airfoil in a Straight-line Cascade and Between Parallel Walls,
with Some Phenomena in the Boundary Layer Taken into Consideration**

Summary

The method as developed by K. Jacob [11 - 15] of calculating velocity distributions for separated flow round finite systems of airfoils has been adapted for straight-line blade cascades. To this end use was made directly of the theory of harmonic vector fields (see: E. Martensen and K. v. Sengbusch [18]). An alternating blade cascade as appearing in the problem of flow round an airfoil between parallel walls (fig. 6) was considered as a particular case. A number of semiempirical criteria used to define the long and short separation bubbles and the point of natural transition is presented. A flow chart (fig. 5) of the calculation method is shown. The particulars of the respective numerical calculation units as well as the experimental verification of the algorithm shall be discussed separately.