

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

87

WARSZAWA - POZNAŃ 1984

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with/special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA - EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WŁODZIMIERZ PROSNAK · KAZIMIERZ STELLER
ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY - CHAIRMAN) · JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1984

Printed in Poland

ISBN 83-01-05677-0

ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 300 + 90 egz.	Oddano do składania 30 XI 1983 r.
Ark. wyd. 10,25. druk. 9,5	Podpisano do druku 3 IX 1984 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g, 70 × 100	Druk ukończono we wrześniu 1984 r.
Cena zł 120,-. A-12/542.	Zamówienie nr 160/36.

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

JÓZEF ŚMIGIELSKI

Gdańsk

Indukcyjność cewki o grubym uzwojeniu i małej długości*

W pracy wyprowadzono ogólną zależność indukcyjności cewki o grubym uzwojeniu i ograniczonej długości od takich parametrów geometrycznych jak średnica wewnętrzna i zewnętrzna oraz długość. Wyniki obliczeń skonfrontowano z wynikami pomiarów.

Optymalny dobór proporcji geometrycznych i parametrów przepływomierza elektromagnetycznego wymaga znajomości charakterystyk elementów składowych. Zasadnicze znaczenie ma tu znajomość zależności indukcyjności cewki z rdzeniem otwartym od parametrów geometrycznych układu. Zagadnienie to nie zostało dotąd rozwiązane w sposób zadowalający, a nawet nie została ustalona odpowiednia zależność dla cewek o jednowarstwowym uzwojeniu bez rdzenia. Spowodowane to jest złożoną formą wchodzących w grę relacji uniemożliwiająca przeprowadzenie obliczeń w sposób analityczny [1]. Wykonuje się więc obliczenia numeryczne, a wartości parametrów określonych wymiarami cewki podawane są w formie tabelarycznej [2,3]. Nie daje to jednak możliwości stosowania tych zależności w rozważaniach ogólnych.

W dalszym ciągu zostanie omówiona procedura umożliwiająca ustalenie przybliżonej, analitycznej zależności indukcyjności cewki od jej parametrów geometrycznych. Przy jej wyprowadzeniu przyjęto uproszczenia, które jednak, jak wykazano — są dopuszczalne. Zależność ta może być wykorzystywana w rozważaniach dotyczących podobieństwa układów przy projektowaniu np. przepływomierzy elektromagnetycznych oraz pozwala na racjonalne zaplanowanie badań doświadczalnych i uogólnienie ich wyników. Wyrażenie indukcyjności w formie bezwymiarowej (zredukowanej) umożliwia przedstawienie jej zależności od parametrów geometrycznych w formie wykresów, które pozwalają na bezpośredni odczyt poszukiwanej wartości bez uciekania się do obliczeń.

Siłę elektromotoryczną E samoindukcji dla jednego zwoju określa zależność

$$E = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

gdzie Φ oznacza sprzężony z tym zwojem strumień indukcji magnetycznej zmieniający się w czasie.

* Praca wykonana w ramach planu C1 (badania własne placówki).

Zależność tę można również przedstawić w postaci

$$E = -L \frac{dI}{dt}, \quad (2)$$

gdzie I – natężenie prądu wytwarzającego pole magnetyczne, L – współczynnik samoindukcji (indukcyjność).

Z zależności (1) i (2) wynika, że:

$$L = \frac{d\Phi}{dI}. \quad (3)$$

Jeżeli cewka składa się z N zwoi, a różne ich części N_i sprzężone są odpowiednio ze strumieniem indukcji magnetycznej Φ_i , to przy połączeniu szeregowym wszystkich zwoi

$$E = \omega \sum N_i \Phi_i \quad (4)$$

oraz

$$L = \sum \frac{N_i \Phi_i}{I}, \quad (5)$$

przy czym

$$\sum N_i = N. \quad (6)$$

W równaniach (4) i (5) oraz w dalszych rozważaniach Φ oraz I oznaczają nie wartości chwilowe (tak jak w (1) i (2)), lecz skuteczne, a ω – pulsację prądu.

Oznaczając strumień indukcji magnetycznej sprzężony z uzwojeniem cewki przez

$$A = \sum N_i \Phi_i \quad (7)$$

można wyrażenie (5) przedstawić w formie

$$L = \frac{A}{I}. \quad (8)$$

Rozpatrując cewkę o grubym uzwojeniu i wymiarach przedstawionych na rysunku 1 można elementarną liczbę zwoi wyrazić w postaci

$$dN = \frac{2N}{h(D_z - D_w)} dr dz. \quad (9)$$

Element uzwojenia przenika strumień indukcji magnetycznej

$$d\Phi = \int_0^r \mu_0 H_z(r, z) 2\pi r dr, \quad (10)$$

gdzie $H_z(r, z)$ – rozkład promieniowy składowej osiowej natężenia pola magnetycznego dla wybranego z , μ_0 – przenikalność magnetyczna powietrza.

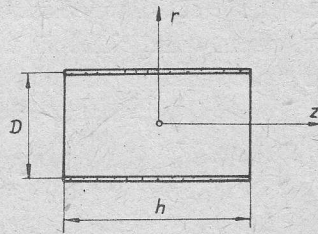
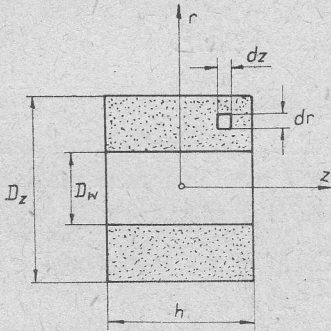
Strumień magnetyczny sprzężony z elementem uzwojenia określa wyrażenie

$$dA = \frac{2N}{h(D_z - D_w)} 2\pi\mu_0 \left[\int_0^r H_z(r, z) r dr \right] dr dz. \quad (11)$$

Całkowity strumień magnetyczny sprzężony z cewką wynosi więc

$$A = \frac{4\pi\mu_0 N}{hD_w(D_z/D_w - 1)} \int_{-h/2}^{+h/2} \int_{D_w/2}^{D_z/2} \left[\int_0^r H_z(r, z) r dr \right] dz. \quad (12)$$

Zależność (12) w najogólniejszej swojej formie ma małą przydatność praktyczną wobec nieznajomości rozkładu natężenia pola magnetycznego. Można się nią posłużyć jedynie dla szczególnych przypadków i to przyjmując pewne konieczne uproszczenia.



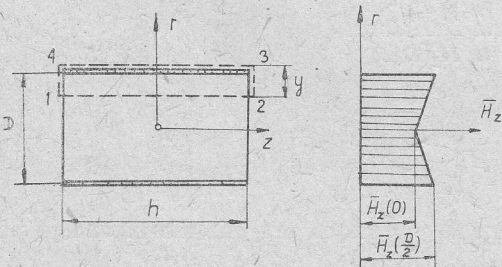
Rys. 1. Oznaczenia wymiarów cewki o grubym uzwojeniu i przyjęty układ współrzędnych

Rys. 2. Oznaczenia wymiarów cewki jednowarstwowej i przyjęty układ współrzędnych

Rozkład natężenia pola magnetycznego w osi cewki jednowarstwowej (rys. 2) określa wyrażenie [1]

$$H_z(0, z) = \frac{NI}{2h} \left[\frac{h/2+z}{\sqrt{(h/2+z)^2 + (D/2)^2}} + \frac{h/2-z}{\sqrt{(h/2-z)^2 + (D/2)^2}} \right]. \quad (13)$$

Dochodzi się do niego (por. np. [1, 4]) sumując udziały poszczególnych zwoi przy wytwarzaniu pola magnetycznego w punkcie o współrzędnej \$z\$ na osi cewki.



Rys. 3. Droga całkowania natężenia pola magnetycznego i rozkład promieniowy średniej wartości jego składowej osiowej dla cewki jednowarstwowej

Rozkładu promieniowego składowej osiowej natężenia pola magnetycznego wewnątrz cewki nie można wyznaczyć w sposób ogólny. W literaturze [1] podane jest jedynie rozwiązanie dla szczególnego przypadku pojedynczego zwoju i w jego płaszczyźnie. Ze względu na występowanie całki eliptycznej w podstawowej relacji, rozkład natężenia pola dla elementarnej cewki o średnicy zewnętrznej \$D_z\$, wewnętrznej \$D_w\$ i grubości \$dz\$ można wy-

znaczyć całkując po rozwinięciu w szereg funkcji podcałkowej. Odnosi się to jednak tylko do płaszczyzny cewki, wskutek czego nie można wyznaczyć rozkładów natężenia pola w różnych przekrojach cewki o skończonej długości. Wpływ długości cewki można ocenić biorąc pod uwagę, że oddziaływanie elementów uzwojenia o różnych współrzędnych z powinno się przyczyniać do wyrównywania rozkładu poprzecznego. Wykazuje to cewka-sonda o małej średnicy w stosunku do średnicy wewnętrznej cewki badanej. Promieniowy rozkład natężenia pola magnetycznego wewnątrz cewki można również wyznaczyć jedynie w sposób szacunkowy stosując prawo przepływu. Rozpatrując prostokątny obszar 1-2-3-4 zamykający uzwojenie (rys. 3) można napisać

$$NI = \int_1^2 H_z dz + \int_2^3 H_r dr + \int_3^4 H_z dz + \int_4^1 H_r dr. \quad (14)$$

Średnie natężenie składowej osiowej pola magnetycznego na zewnątrz cewki ma małą wartość, a zatem trzeci składnik w równaniu (14) można pominąć. Uwzględniając ten fakt oraz wprowadzając wartości średnie składowych natężenia pola magnetycznego, osiowej i promieniowej, można równanie (14) zapisać w postaci

$$NI \cong h\bar{H}_z + 2y\bar{H}_r \left(\frac{h}{2} \right), \quad (15)$$

z której wynika (por. rys. 3), że średnie natężenie \bar{H}_z składowej osiowej pola magnetycznego wewnątrz cewki maleje liniowo przy zbliżaniu się do osi zgodnie z przybliżoną, liniową relacją

$$\bar{H}_z \cong \bar{H}_z \left(\frac{D}{2} \right) - 2 \frac{y}{h} \bar{H}_r \left(\frac{h}{2} \right), \quad (16)$$

gdzie $\bar{H}_z(D/2)$ oznacza średnie natężenie pola magnetycznego na średnicy D (dla $y=0$). W rzeczywistości rozkład H_z reprezentuje krzywa gładka, którą można wyznaczyć eksperymentalnie za pomocą małej, w stosunku do wymiarów obiektu badanego, cewki sondującej. Stosunek średnich wartości składowych osiowych natężenia pola magnetycznego w osi i na średnicy D określa zależność

$$\frac{\bar{H}_z(0)}{\bar{H}_z(D/2)} = 1 - \frac{D}{h} \frac{\bar{H}_r(h/2)}{\bar{H}_z(D/2)}. \quad (17)$$

Jeżeli

$$\bar{H}_r \left(\frac{h}{2} \right) \ll \bar{H}_z \left(\frac{D}{2} \right), \quad (18)$$

to nierównomierność rozkładu jest niewielka i w pierwszym przybliżeniu można ją pominąć, przedstawiając dla cewki jednowarstwowej równanie (12) w postaci

$$A = \frac{2\pi\mu_0 N}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \bar{H}_z(0) \left[\int_0^{D/2} r dr \right] dz. \quad (19)$$

Po uwzględnieniu (13), tj. rozkładu natężenia pola magnetycznego w osi cewki i wy-

konaniu całkowania, wyrażenie (19) przybiera postać

$$A = \frac{\pi\mu_0 N^2 ID}{8(h/D)^2} \left[\sqrt{\left(\frac{h}{D/2}\right)^2 + 1} - 1 \right] \quad (20)$$

Indukcyjność cewki jednowarstwowej zgodnie z (8) określa wówczas relacja

$$L = \frac{\pi\mu_0 N^2 D}{8(h/D)^2} \left[\sqrt{\left(\frac{h}{D/2}\right)^2 + 1} - 1 \right]. \quad (21)$$

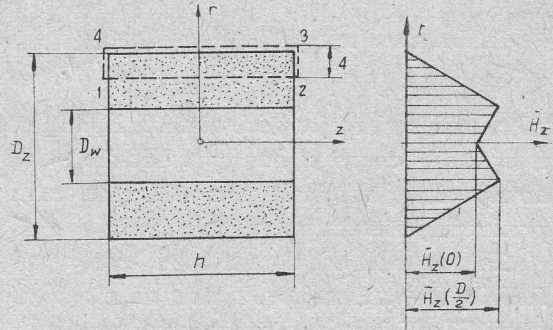
Rozkład natężenia pola magnetycznego w poprzecznym przekroju cewki o grubym uzwojeniu można również ustalić orientacyjnie na podstawie prawa przepływu. Dla linii 1-2-3-4 sprowadza się ono do równania (dla $0 \leq y \leq \frac{D_z - D_w}{2}$)

$$\frac{2NI}{D_z - D_w} y = \int_1^2 H_z dz + \int_2^3 H_r dr + \int_3^4 H_z dz + \int_4^1 H_r dr. \quad (22)$$

Zaniedbując trzeci składnik, ze względu na pomijalną wartość średniej wartości składowej osiowej natężenia pola magnetycznego na zewnątrz cewki i wprowadzając wartości średnie dochodzi się do zależności

$$h\bar{H}_z = 2 \left[\frac{NI}{D_z - D_w} - \bar{H}_r \left(\frac{h}{2} \right) \right] y, \quad (23)$$

z której wynika (por. rys. 4), że natężenie pola zmniejsza się liniowo przy wzroście pro-



Rys. 4. Droga całkowania natężenia pola magnetycznego i rozkład promieniowy średniej wartości jego składowej osiowej dla cewki o grubym uzwojeniu

mienia od $D_w/2$, osiągając wartość zerową na średnicy zewnętrznej D_z cewki. Wewnątrz cewki o grubym uzwojeniu pole magnetyczne zmienia się tak jak w cewce jednowarstwowej i określa je zależność liniowa

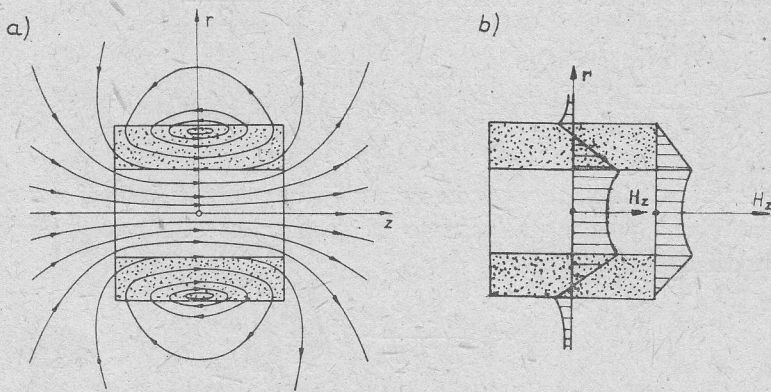
$$\bar{H}_z = \bar{H}_z \left(\frac{D_w}{2} \right) - \frac{2}{h} \left[y - \frac{D_z - D_w}{2} \right] \bar{H}_r \left(\frac{h}{2} \right). \quad (24)$$

Rzeczywisty rozkład natężenia pola reprezentuje oczywiście krzywa gładka, a równanie

(25) jest tylko pierwszym przybliżeniem. Stosunek średniej wartości składowej osiowej natężenia pola magnetycznego w osi $\bar{H}_z(0)$ i na średnicy wewnętrznej $\bar{H}_z(D_w/2)$ można wyrazić w postaci relacji

$$\frac{\bar{H}_z(0)}{\bar{H}_z(D_w/2)} = 1 - \frac{D_z - D_w}{h} \frac{\bar{H}_r(h/2)}{\bar{H}_z(D_w/2)}. \quad (25)$$

Rozkład poprzeczny natężenia pola magnetycznego dla cewki o grubym uzwojeniu i znanych wymiarach można wyznaczyć numerycznie [1]. Na rysunku 5a pokazano dla takiej cewki układ linii sił pola magnetycznego. Przybliżoną zależność składowej osiowej natężenia pola w płaszczyźnie środkowej i na końcu cewki od promienia pokazano na rysunku 5b.



Rys. 5. Układ linii sił pola magnetycznego cewki o grubym uzwojeniu (a) i promieniowe rozkłady natężenia pola magnetycznego w przekroju środkowym i na końcu cewki (b)

Ponieważ w relacji (25)

$$\bar{H}_r(h/2) \ll \bar{H}_z(D_w/2) \quad (26)$$

więc, wobec nieznanomości wartości $\bar{H}_r(h/2)$ oraz ze względu na operowanie wartościami średnimi – co już stanowi przybliżenie – można przyjąć, że rozkład poprzeczny składowej osiowej natężenia pola wewnątrz cewki jest równomierny, a jej wartość w całym przekroju jest taka jak w osi cewki.

Założenie to jest dopuszczalne biorąc pod uwagę, że wartość składowej osiowej na średnicy wewnętrznej cewki wzrasta nie więcej niż około 20% w stosunku do wartości w osi [3]. Wykazuje to sonda indukcyjna o małych wymiarach w stosunku do badanego obiektu, przy czym nierównomierność rozkładu ujawnia się praktycznie dopiero w przypadku cewki o bardzo małej wysokości $h/D_w < 1,0$, powiększając się z jej zmniejszaniem.

Wykorzystując równanie (13) można wyznaczyć rozkład natężenia pola magnetycznego w osi cewki o grubym uzwojeniu. Ogólne równanie w tym przypadku ma postać

$$H_z(0, z) = \frac{NI}{h(D_z - D_w)} \int_{D_w/2}^{D_z/2} \left[\frac{h/2 + z}{\sqrt{(h/2 + z)^2 + r^2}} + \frac{h/2 - z}{\sqrt{(h/2 - z)^2 + r^2}} \right] dr. \quad (27)$$

Po wykonaniu całkowania dochodzi się do zależności

$$H_z(0, z) = \frac{NI}{h(D_z - D_w)} \left[\left(\frac{h}{2} + z \right) \ln \frac{\frac{D_z}{h} + \sqrt{\left(\frac{D_z/2}{h/2+z} \right)^2 + 1}}{\frac{D_w}{h} + \sqrt{\left(\frac{D_w/2}{h/2+z} \right)^2 + 1}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{h}{2} - z \right) \ln \frac{\frac{D_z}{h} + \sqrt{\left(\frac{D_z/2}{h/2-z} \right)^2 + 1}}{\frac{D_w}{h} + \sqrt{\left(\frac{D_w/2}{h/2-z} \right)^2 + 1}} \right]. \quad (28)$$

W celu uzyskania bardziej dokładnych wyników dla cewek o małej długości, można uwzględnić zmiany wartości składowej osiowej natężenia pola w poprzecznym przekroju cewki. Przyjmując w pierwszym przybliżeniu, że są one liniowe, można opisać je równaniem o postaci

$$\text{dla } 0 \leq r \leq \frac{D_w}{2}$$

$$H_z(r, z) = H_z(0, z) \left[1 + 2(k-1) \frac{r}{D_w} \right], \quad (29)$$

$$\text{dla } \frac{D_w}{2} \leq r \leq \frac{D_z}{2}$$

$$H_z(r, z) = k H_z(0, z) \left[1 - 2 \frac{r - D_w/2}{D_z - D_w} \right], \quad (30)$$

przy oznaczeniu

$$k = \frac{H_z(D_w/2, z)}{H_z(0, z)}.$$

Wartości $k=1$ odpowiada równomierny rozkład składowej osiowej natężenia pola wewnątrz cewki.

Uwzględniając rozkład natężenia pola magnetycznego określony przez (29) i (30) można całkę wewnętrzną równania (12) przedstawić w postaci

$$\int_0^r H_z(r, z) r dr = H_z(0, z) \int_0^{D_w/2} \left[1 + \frac{2(k-1)}{D_w} r \right] r dr + \\ + H_z(0, z) \int_0^r \left[1 - \frac{2(r - D_w/2)}{D_z - D_w} \right] r dr. \quad (31)$$

Po przeprowadzeniu całkowania, uporządkowaniu składników i uwzględnieniu uprosz-

czeń dochodzi się ostatecznie do zależności

$$\int_0^r H_z(r, z) r dr = \frac{kH_z(0, z)}{D_z/D_w - 1} \left\{ \frac{r^2}{2} \frac{D_z}{D_w} - \frac{2}{3} \frac{r^3}{D_w} - \frac{D_w^2}{24} \left[\frac{1-k}{k} \left(\frac{D_z}{D_w} - 1 \right) + 1 \right] \right\}. \quad (32)$$

Drugie całkowanie w równaniu (12) po dokonaniu uproszczeń daje wynik

$$\int_{D_w/2}^{D_z/2} \left[\int_0^r H_z(r, z) r dr \right] dr = \frac{kD_w^2 H_z(0, z)}{96} \left(\frac{D_z}{D_w} - 1 \right) \left[\left(\frac{D_z}{D_w} \right)^2 + 2 \frac{D_z}{D_w} + 3 - 2 \frac{k-1}{k} \right]. \quad (33)$$

Wobec złożonej postaci równania (29), określającego rozkład natężenia pola magnetycznego w osi cewki wielowarstwowej, trzecie całkowanie w równaniu (12) okazuje się niewykonalne. Z tego powodu przyjęto w uproszczeniu, że promieniowy rozkład składowej osiowej natężenia pola magnetycznego w osi cewki wielowarstwowej $H_z(0, z)$ reprezentuje taka sama funkcja jak dla cewki jednowarstwowej $H'_z(0, z)$, przy uwzględnieniu rzeczywistej wartości $H_z(0, 0)$ natężenia pola w środku cewki. A zatem

$$H_z(0, z) \cong H_z(0, 0) \frac{H'_z(0, z)}{H'_z(0, 0)}. \quad (34)$$

Dopuszczalność tego założenia można zweryfikować, porównując stosunki wartości natężenia pola magnetycznego w osi cewki odpowiednio w środku i na końcu dla cewek jednowarstwowej (por. (13)) i wielowarstwowej (por. (29)). Wynoszą one dla cewki jednowarstwowej

$$\frac{H'_z(0, h/2)}{H'_z(0, 0)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+(D/h)^2}{1+(\frac{1}{2}D/h)^2}} \quad (35)$$

i dla cewki wielowarstwowej

$$\frac{H_z(0, h/2)}{H_z(0, 0)} = \frac{\ln \left[\frac{D_z}{D_w} \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{4} + (h/D_z)^2}}{1 + \sqrt{\frac{1}{4} + (h/D_w)^2}} \right]}{\ln \left[\frac{D_z}{D_w} \frac{1 + \sqrt{1 + (h/D_z)^2}}{1 + \sqrt{1 + (h/D_w)^2}} \right]}. \quad (36)$$

Dla cewek o typowych proporcjach geometrycznych, tj. dla $h/D_w = 2$ i $D_z/D_w = 2$, otrzymuje się z zależności (33) i (34) (przyjmując $D = D_w$) odpowiednio wartości 0,54 i 0,58.

Uwzględniając zależność (13), z której wynika, że

$$H'_z(0, 0) = \frac{NI}{2h} [1 - (D/h)^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (37)$$

oraz wyznaczając z równania (28)

$$H_z(0, 0) = \frac{NI}{D_z - D_w} \ln \left[\frac{D_z}{D_w} \frac{1 + \sqrt{1 + (h/D_z)^2}}{1 + \sqrt{1 + (h/D_w)^2}} \right] \quad (38)$$

dla $D=D_w$, można (35) wyrazić w postaci

$$H_z(0, z) = \frac{1}{2} \frac{NI}{D_z - D_w} \sqrt{1 + \left(\frac{D_w}{h}\right)^2} \ln \left[\frac{D_z}{D_w} \frac{1 + \sqrt{1 + (h/D_z)^2}}{1 + \sqrt{1 + (h/D_w)^2}} \right] \times \\ \times \left[\frac{h/2 + z}{\sqrt{(h/2 + z)^2 + (D_w/2)^2}} + \frac{h/2 - z}{\sqrt{(h/2 - z)^2 + (D_w/2)^2}} \right]. \quad (39)$$

Uwzględniając (33) i (39) po dokonaniu uproszczeń można równanie (12), określające strumień magnetyczny sprzężony z uzwojeniem cewki, przedstawić w postaci

$$A = \frac{\pi \mu_0 N^2 I \sqrt{(h/D_w)^2 + 1}}{48} k \frac{(D_z/D_w)^2 + 2D_z/D_w + 3 - \frac{2(k-1)}{k}}{D_z/D_w - 1} \times \\ \times \ln \left[\frac{D_z}{D_w} \frac{1 + \sqrt{1 + (h/D_z)^2}}{1 + \sqrt{1 + (h/D_w)^2}} \right] \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\frac{h/2 + z}{\sqrt{(h/2 + z)^2 + (D_w/2)^2}} + \frac{h/2 - z}{\sqrt{(h/2 - z)^2 + (D_w/2)^2}} \right] dz. \quad (40)$$

Całkując ostatni czynnik równania (40) otrzymuje się wyrażenie

$$\int_{-h/2}^{+h/2} [\dots] dz = D_w [\sqrt{1 + (h/D_w)^2} - 1]. \quad (41)$$

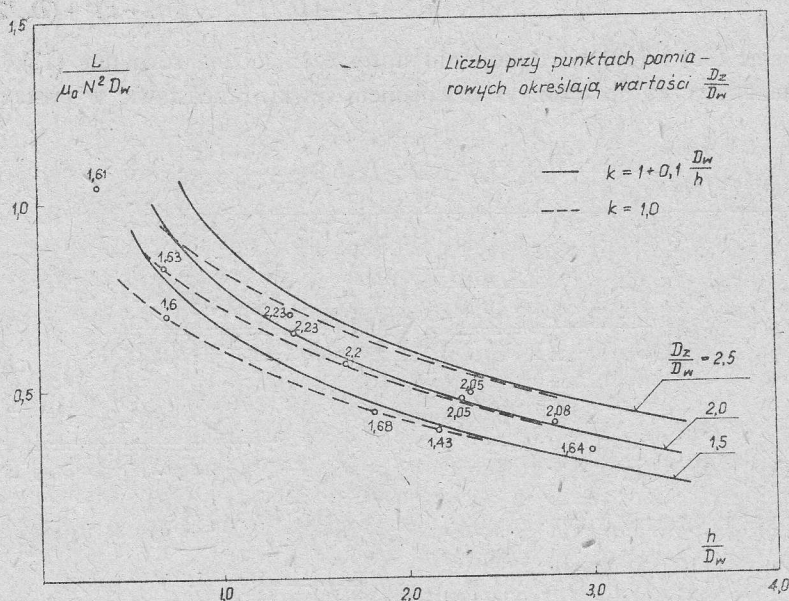
Uwzględniając (40), (41) i (8) oraz dokonując uproszczeń można ostatecznie indukcyjność cewki sprowadzoną do postaci bezwymiarowej wyrazić w postaci

$$\frac{L}{\mu_0 N^2 D_w} = \frac{\pi}{48} [\sqrt{4(h/D_w)^2 + 1} - 1] \frac{\sqrt{(h/D_w)^2 + 1}}{(h/D_w)^2} \frac{k}{D_z/D_w - 1} \times \\ \times \left[(D_z/D_w)^2 + 2D_z/D_w + 3 - \frac{2(k-1)}{k} \right] \ln \left[\frac{D_z}{D_w} \frac{1 + \sqrt{1 + (D_w/D_z)^2 (h/D_w)^2}}{1 + \sqrt{1 + (h/D_w)^2}} \right]. \quad (42)$$

A zatem, jak się okazuje, indukcyjności cewki o ograniczonej długości i grubym uzwojeniu nawet przy poczynionych założeniach upraszczających nie można wyrazić jako iloczyn funkcji zmiennej h/D_w określającej wpływ długości oraz zmiennej D_z/D_w określającej wpływ średnicy zewnętrznej, gdyż występuje czynnik będący funkcją obu zmiennych.

Wyrażając indukcyjność w formie bezwymiarowej (42) redukuje się liczbę zmiennych do dwóch bezwymiarowych, określających proporcje geometryczne cewki. Pozwala to przedstawić indukcyjność na wykresie umożliwiającym weryfikację poczynionych założeń przez porównanie z wynikami pomiarów indukcyjności przeprowadzonymi dla różnych cewek. Wyniki obliczeń pokazano na rysunku 6 dla wartości współczynnika $k=1$, która odpowiada równomiernemu rozkładowi składowej osiowej natężenia pola

magnetycznego w poprzecznym przekroju cewki (por. rys. 4 i 5) i dla trzech wartości stosunku średnicy zewnętrznej i wewnętrznej cewek. Wykazują one dobrą zgodność zwłaszcza przy wartościach $h/D_w > 1,0$, a więc dla najczęściej stosowanych proporcji. Obserwowany rozrzut punktów pomiarowych mieści się w zakresie dokładności wykonywanych pomiarów.

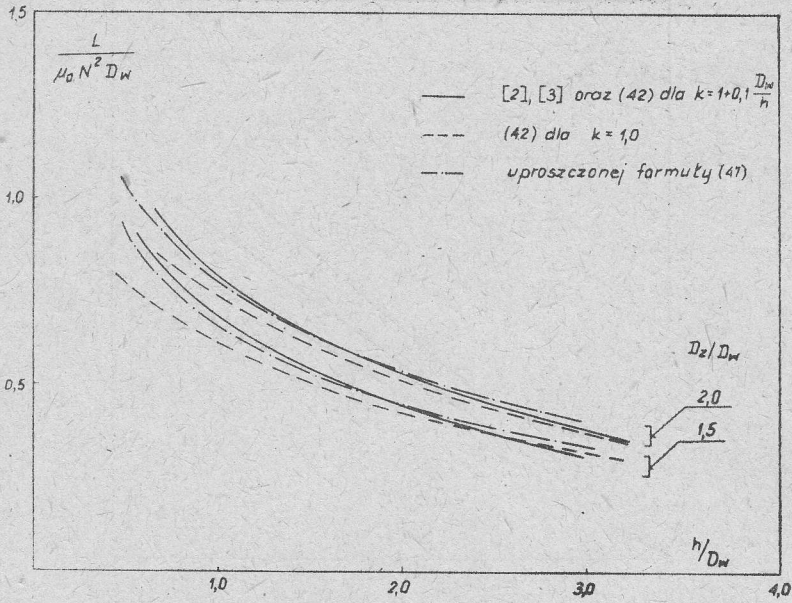


Rys. 6. Zależność indukcyjności cewki o grubym uzwojeniu od wysokości cewki obliczona z zależności (42) i punkty pomiarowe

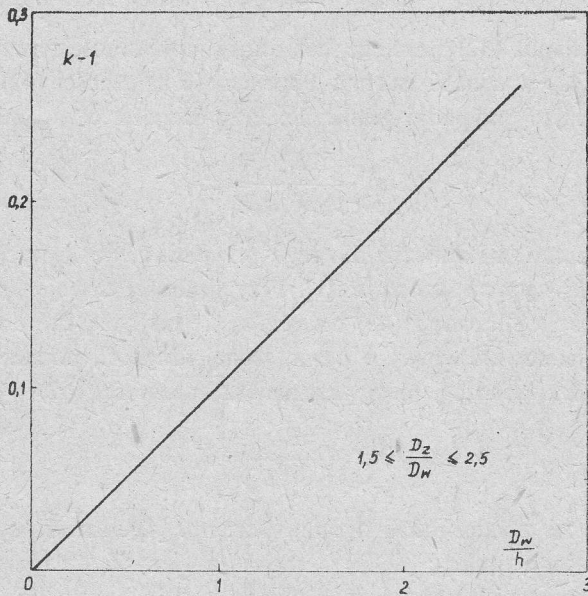
Wykres na rysunku 6 pozwala bezpośrednio odczytać z wystarczającą dokładnością wartość bezwymiarowej indukcyjności cewki bez wykonywania jakichkolwiek obliczeń, oraz porównać wyniki otrzymywane z zależności (42) z wynikami obliczeń uzyskiwanymi z formuł podanych w [2] i [3], które wymagają posługiwania się odpowiednimi tabelami albo wykresami i przeprowadzenia rachunków dla każdego indywidualnego przypadku. Wyniki te przedstawiono na rysunku 7 dla dwóch różnych wartości stosunku średnicy zewnętrznej do wewnętrznej cewki. Wartości obliczone z formuły (42) można uściślić, uwzględniając zależność wartości współczynnika k od długości cewki. Jej charakter pokazano w formie wykresu na rysunku 8, obliczając k na podstawie wyników pomiarów indukcyjności cewek o średnicy zewnętrznej zawartej w przedziale $1,5 \leq D_z/D_w \leq 2,5$. Zależność tę można aproksymować równaniem empirycznym o postaci

$$k = 1 + 0,1 \frac{D_w}{h} \quad (43)$$

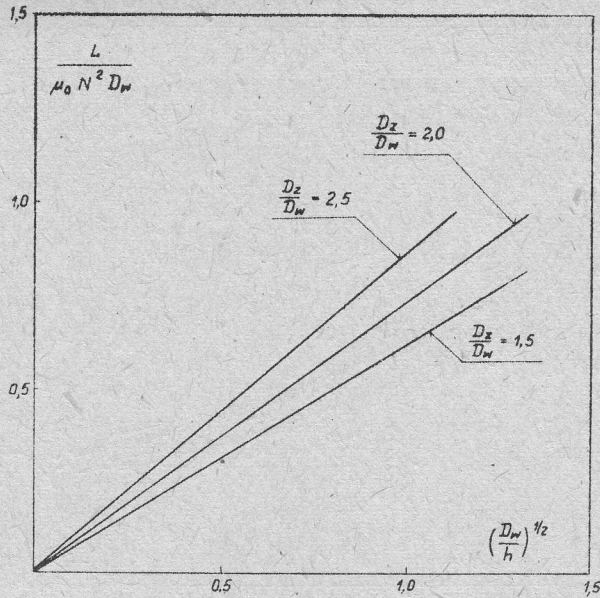
Wyniki obliczeń indukcyjności po uwzględnieniu (43) przedstawiono również na rysunkach 6 i 7.



Rys. 7. Porównanie zredukowanej indukcyjności cewki obliczonej różnymi metodami i za pomocą formuły przybliżonej (47)



Rys. 8. Zależność współczynnika k z równania (42) od długości cewki



Rys. 9. Zależność zredukowanej indukcyjności cewki od jej długości

Biorąc pod uwagę, że przy $D_z/D_w > 1$ składnik

$$\frac{2(k-1)}{k} \ll \left(\frac{D_z}{D_w}\right)^2 + 2\frac{D_z}{D_w} + 3 \quad (44)$$

i można go w równaniu (42) pominąć bez straty dokładności, uwzględnienie (43) nie komplikuje relacji (42) w sposób istotny. Poprawność zależności (42) można zweryfikować dodatkowo badając przypadki graniczne. Przy długości cewki malejącej do zera

$$\lim_{h/D_w \rightarrow 0} \frac{L}{\mu_0 N^2 D_w} = \infty, \quad (45)$$

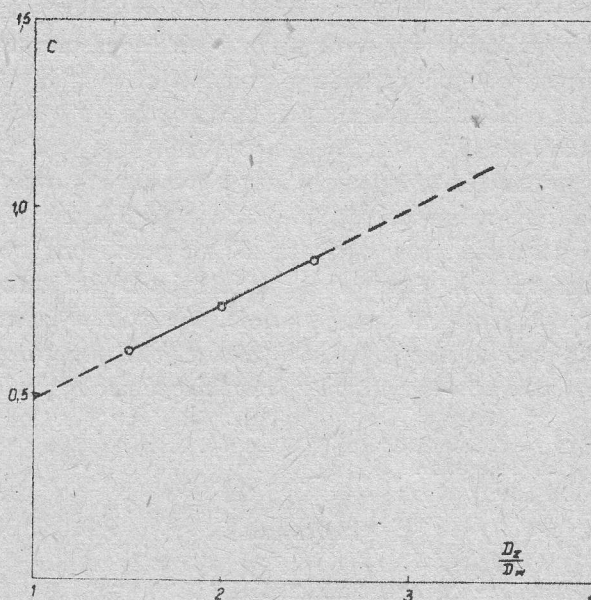
co jest zgodne z rezultatami obliczeń dla tego przypadku, do których dochodzi się wykorzystując zależność wyprowadzoną w [1]. Przy grubości uzwojenia malejącej do zera wartości indukcyjności obliczone z (42) nie różnią się od tych, które otrzymuje się z zależności dla cewki jednowarstwowej o ograniczonej długości, podanej w [4].

Przy długości cewki rosnącej nieograniczenie z zależności (42) wynika, że

$$\lim_{h/D_w \rightarrow \infty} \frac{L}{\mu_0 N^2 D_w} = 0, \quad (46)$$

co pozostaje w zgodzie z zależnością ogólną (por. np. [4]). Przedstawiając indukcyjność zredukowaną cewki jako funkcję $(D_w/h)^{1/2}$ można stwierdzić, że reprezentuje ją rodzina linii prostych przechodzących przez środek układu z D_z/D_w występującym jako parametr (rys. 9). Zależność tę określa równanie

$$\frac{L}{\mu_0 N^2 D_w} \cong c \left(\frac{D_w}{h}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (47)$$



Rys. 10. Zależność współczynnika c z równania (47) od względnej średnicy zewnętrznej cewki

przy czym współczynnik c zmienia się ze średnicą zewnętrzną cewki D_z/D_w tak, jak to pokazano na rysunku 10; można go więc aproksymować funkcją

$$c \cong 0,25 \left(1 + \frac{D_z}{D_w} \right). \quad (48)$$

W ten sposób, upraszczając zależność (42), bez jakichkolwiek arbitralnych dodatkowych założeń, można zidentyfikować wpływ wysokości cewki i jej średnicy zewnętrznej, z pozostawieniem możliwości oceny popełnionego w ten sposób błędu.

Zależność indukcyjności od wysokości cewki odpowiadającą relacjom (47) i (48) przedstawiono na rysunku 7. Jak widać, uzyskuje się dobrą zgodność z wynikami bardziej dokładnych i skomplikowanych obliczeń, co potwierdza dopuszczalność zastosowanej aproksymacji. Zależność (42) (a także w uproszczeniu (47) i (48)) uwidacznia wpływ najważniejszych parametrów geometrycznych cewki na jej indukcyjność. Znajomość jego okazuje się bardzo istotna zarówno z punktu widzenia wykorzystania wyników pomiarów przeprowadzonych na wybranych obiektach do wyznaczania indukcyjności cewek o zmiennych wymiarach i proporcjach geometrycznych, jak też przy uogólnieniu wyników pomiarów, których zakres z konieczności musi być ograniczony. Ponadto, jak wykazały badania [5], indukcyjność cewki z rdzeniem otwartym jest proporcjonalna do indukcyjności cewki bez rdzenia. Znajomość tej ostatniej ułatwia poszukiwanie zależności ogólnych, określających charakterystyki magnetyczne układów stosowanych w pływakowych przepływomierzach elektromagnetycznych i pozwala na zredukowanie do niezbędnego minimum zakresu badań doświadczalnych.

Zależność (42) (albo (47)) może okazać się również przydatna przy stosowaniu do przepływomierzy elektromagnetycznych zasady podobieństwa i w procedurach optymalizacji.

zacyjnych. Dalsze wyniki pomiarów przeprowadzonych z większą dokładnością mogą stanowić dodatkową weryfikację przyjętych uproszczeń. Mogą one też wskazać na konieczność uwzględnienia pewnych czynników pominiętych w pierwszym przybliżeniu, takich jak nieliniowość rozkładu natężenia pola magnetycznego wewnątrz cewki i wewnątrz uzwojenia, a także różnicy w rozkładzie natężenia pola wzdłuż osi cewki jednowarstwowej i o grubym uzwojeniu, zwłaszcza przy nietypowych proporcjach geometrycznych cewek. Przedstawione zależności (ściśła, a nawet przybliżona) dają jednak wyniki zgodne z rezultatami pomiarów, przy odchyleniach nie przekraczających wielkości przeciętnych błędów pomiarowych. Operowanie indukcyjnością zredukowaną umożliwia ponadto bezpośredni odczyt poszukiwanej wartości wprost z wykresu dla danych proporcji geometrycznych oraz wykorzystywanie wyników pomiarów przeprowadzonych dla cewek o różnych wymiarach do weryfikacji zależności ogólnych i porównywanie ich ściśłości.

Praca wpłynęła do Redakcji w listopadzie 1982 r.

Literatura

- [1] R. Duřand, *Magnetostatique*, Masson, Paris 1963.
- [2] P. K. Kalantarov, L. A. Cejtlin, *Rasczot induktiwnostiej*. Energiya, Leningrad 1970.
- [3] F. X. Eder, *Moderne Messmethoden des Physik*, T. III, DVW, Berlin 1972.
- [4] K. Simonyi, *Grundgesetze des elektromagnetischen Feldes*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963.
- [5] J. Śmigielski, *Elektromagnetyczne pływakowe przetworniki wydatku i ciśnienia*. PWN, Warszawa 1980.

Индуктивность катушки с грубой намоткой и малой длины

Резюме

В работе выведена общая зависимость индуктивности катушки с грубой намоткой и ограниченной длины от внутреннего и внешнего диаметров и от длины. Зависимость выведена с учетом линейного уменьшения напряженности магнитного поля вдоль оси катушки. Общая зависимость приведена к более простой приближенной форме, облегчающей ее практическое применение в проектировании катушек.

Результаты расчетов, полученные используя выведенную зависимость, сравнено с доступными результатами измерений, констатируя удовлетворительную сходимость.

Представленная зависимость позволяет рационально обобщать результаты экспериментальных исследований с целью установления зависимости индуктивности катушек от их геометрических параметров, а также проектирования электромагнитных поплавковых расходомеров по принципу подобия и их оптимизации.

Inductance of a Short Multilayer Coil

Summary

The general dependence of inductance of a coil on its inner and outer diameter ratio and on the length has been derived. The linear radial distribution of the magnetic field intensity as well as its non-uniform axial distribution have been taken into account. Expressing the inductance in nondimensional

form made it possible to reduce the number of variables by two and display the dependence on geometrical parameters in a simple diagram. The general relation has been simplified to an approximate form suitable for practical use in the process of coil design. The results of computations have been compared with measurement results, indicating a satisfactory agreement.

The relation derived makes possible rational generalizations of experimental results and particularly estimation of the inductance dependence on geometric parameters of the coil. The relation may be useful for optimum design of electromagnetic float-flowmeters based on the principle of similarity.