

P O L S K A A K A D E M I A N A U K

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

88

WARSZAWA – POZNAŃ 1985

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW
MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA - EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WŁODZIMIERZ PROSNAK · KAZIMIERZ STELLER
ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY - CHAIRMAN) · JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1985

Printed in Poland

ISBN 83-01-07020-X

ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 340 + 90 egz. Ark. wyd. 13. Ark. druk. 10,875. Papier druk. sat. kl. V, 70 g. 70 × 100 cm. Oddano do składania 3 I 1985 r. Podpisano do druku 5 XI 1985 r.

Druk ukończono w listopadzie 1985 r. Zam. nr 240/107. S-7/712. Cena zł 220,-

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

JÓZEF ŚMIGIELSKI

Gdańsk

Zależność siły działającej na rdzeń w polu magnetycznym cewki od jego położenia*

Zaprezentowano i przedyskutowano ogólny opis matematyczny zależności siły magnetycznej od położenia rdzenia. Przedstawiono wyniki pomiarów i uogólniono je przez wprowadzenie odpowiednio dobranych funkcji aproksymujących, uwzględniając wpływ długości rdzenia.

Ciśnienie wywierane na powierzchnię rdzenia ferromagnetycznego w polu magnetycznym, przy równomiernym rozkładzie indukcji B , określa zależność Maxwella [1]

$$p = \frac{1}{2} B^2 \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right), \quad (1)$$

gdzie B – indukcyjność magnetyczna, μ_0 – przenikalność magnetyczna powietrza (próżni), μ – przenikalność magnetyczna materiału. Siłę magnetyczną można wyznaczyć wówczas z relacji

$$F = \frac{1}{2} \int B^2 dA \quad (2)$$

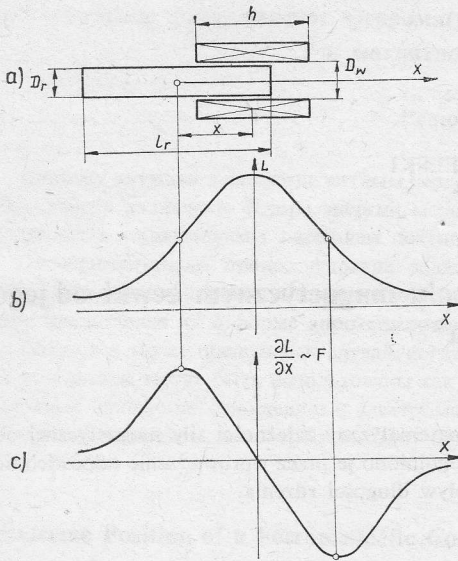
jeśli A oznacza powierzchnię.

W układzie kołowo-symetrycznym, jaki stanowi cewka z rdzeniem cylindrycznym, siła wypadkowa działająca na rdzeń jest różnicą sił działających na obie jego powierzchnie czołowe. Jest ona skierowana do środka cewki. Określa ją relacja [2]

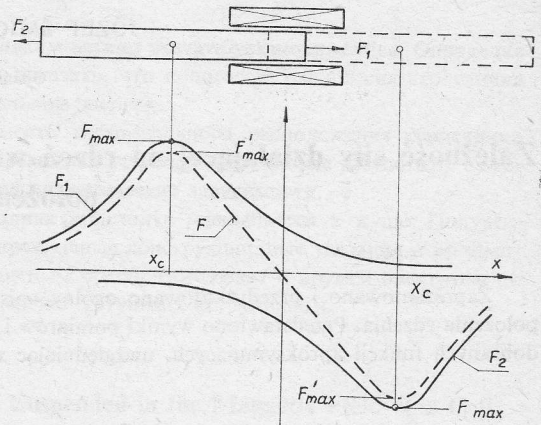
$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial x}, \quad (3)$$

gdzie I – natężenie prądu płynącego przez cewkę, L – indukcyjność cewki, x – położenie rdzenia względem cewki. Przy stałym natężeniu prądu siła ta zmienia się tak jak pochodna indukcyjności, co pokazują rysunki 1a, b i c. Pomiar sił działających na każdą z powierzchni czołowych krótkiego rdzenia nastęrcza trudności. Można jednak wydedukować ich zależność od współrzędnej x , biorąc pod uwagę rdzeń o dużej długości, którego jedna z powierzchni czołowych znajduje się w obszarze zanikającego pola magnetycznego, więc wytwarzana przez nie siła ma pomijalną wartość. Zależności działających na rdzeń

* Praca wykonana w ramach planu C1 (badania własne placówki).



Rys. 1. Zależność indukcyjności cewki oraz jej pochodnej i siły magnetycznej od położenia rdzenia



Rys. 2. Zależność sił składowych działających na końcach rdzenia i siły wypadkowej od położenia

sił składowych F_1 i F_2 od jego położenia pokazano na rysunku 2. Mają one jednakowy charakter, a reprezentują je identyczne funkcje przesunięte i obrócone względem siebie. Zależność sił od położenia można opisać funkcją Gaussa o postaci

$$F_1 = F'_{\max} e^{-\left(\frac{x-x_c}{c}\right)^2}, \quad (4a)$$

$$F_2 = -F'_{\max} e^{-\left(\frac{x+x_c}{c}\right)^2}, \quad (4b)$$

albo funkcją dyspersyjną

$$F_1 = F'_{\max} \left[1 + \left(\frac{x-x_c}{c} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (5a)$$

$$F_2 = -F'_{\max} \left[1 + \left(\frac{x+x_c}{c} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (5b)$$

gdzie x_c – współrzędna ekstremum siły składowej (por. rys. 2). Jeśli funkcja F_1 wykazywałaby asymetrię, wystarczyłaby dobra aproksymacja tylko dla $|x| < x_c$, gdyż ten przedział wykorzystywany jest praktycznie np. w przepływomierzach elektromagnetycznych, których zasadniczym elementem jest cewka z rdzeniem.

Ograniczając się w dalszych szczegółowych rozważaniach do aproksymacji funkcją Gaussa można po prostych przekształceniach wyrazić siłę wypadkową w postaci

$$F = F'_{\max} e^{-\left(\frac{x/x_c - 1}{c/x_c}\right)^2} \left[1 - e^{-\frac{4x/x_c}{(c/x_c)^2}} \right]. \quad (6)$$

Jest to funkcja z trzema parametrami, pozwalającymi na dopasowanie jej do danych pomiarowych.

Maksymalna wartość F'_{\max} siły składowej jest trudna do zmierzenia. Przy współrzędnej położenia rdzenia x_c siła wypadkowa F osiąga wartość (por. (6))

$$F_c = F'_{\max} \left[1 - e^{-\frac{4}{(c/x_c)^2}} \right]. \quad (7)$$

Ponieważ dla $x = x_c$

$$\left(\frac{dF_1}{dx} \right)_{x=x_c} = 0, \quad (8)$$

a równocześnie przy niezbyt krótkich rdzeniach (por. rys. 2)

$$\left(\frac{dF_2}{dx} \right)_{x=x_c} \cong 0, \quad (9)$$

więc można przyjąć, że współrzędna x_0 ekstremum siły wypadkowej $F = F_1 + F_2$ jest prawie identyczna ze współrzędną x_c ekstremum siły składowej

$$x_0 \cong x_c, \quad (10)$$

a zarazem jej wartość ekstremalna niewiele różni się od wartości odpowiadającej współrzędnej x_c

$$F_{\max} \cong (F_1 + F_2)_{x=x_c}. \quad (11)$$

Ostatecznie więc dochodzi się do wyrażenia

$$F/F_{\max} \cong e^{-\left(\frac{x/x_0 - 1}{c/x_0}\right)^2} \frac{1 - e^{-\frac{4x/x_0}{(c/x_0)^2}}}{1 - e^{-\frac{4}{(c/x_0)^2}}}, \quad (12)$$

którego pochodna ma postać

$$\frac{dF/F_{\max}}{d(x/x_0)} = 2(1 + x/x_0) e^{-\frac{4x/x_0}{(c/x_0)^2}} + (1 - x/x_0) \frac{e^{-\left(\frac{x/x_0 - 1}{c/x_0}\right)^2}}{1 - e^{-\frac{4}{(c/x_0)^2}}}. \quad (13)$$

W punkcie początkowym $x=0$ (13) osiąga ona wartość

$$K = \left. \frac{dF/F_{\max}}{d(x/x_0)} \right|_{x=0} = \frac{4e^{-\frac{1}{(c/x_0)^2}}}{(c/x_0)^2 \left[1 - e^{-\frac{4}{(c/x_0)^2}} \right]}. \quad (14)$$

Równanie (14) jest przestępne i można je rozwiązać np. metodą graficzną, wyznaczając c/x_0 jako funkcję pochylenia K charakterystyki magnetycznej w punkcie początkowym, które przy stałej względnej średnicy rdzenia i dla danej cewki jest tylko funkcją jego długości względnej

$$K = K(l_r/D_w), \quad (15)$$

gdzie l_r – długość rdzenia, D_w – średnica wewnętrzna cewki. Uwzględniając wyznaczone

eksperymentalnie wartości K obliczono c/x_0 , którego zależność od długości rdzenia l_r/D_w obrazuje wykres na rysunku 3, i reprezentuje zależność empiryczna

$$c/x_0 \cong 0,4 + 0,8(l_r/D_w)^{-1}. \quad (16)$$

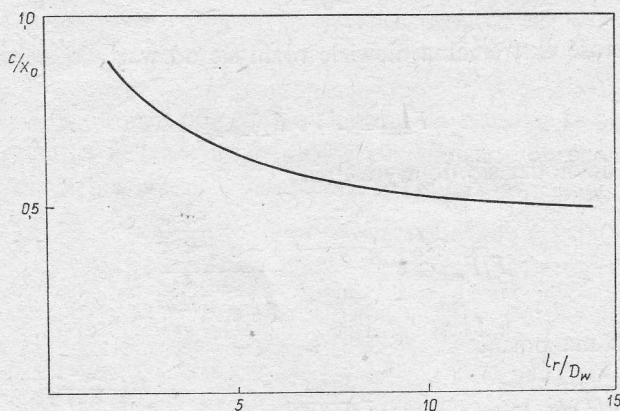
Obliczenia przeprowadzono dla $l_r/D_w > 2$, gdyż przy bardzo krótkich rdzeniach nie można przyjąć równości (10) i zależność (14) staje się niedokładna.

Występujący w równaniu (12) drugi parametr x_0 jest funkcją długości l_r/D_w rdzenia. Określa go wyrażenie podane w [3], które można uprościć do postaci przybliżonej

$$x_0/l_r \cong 0,5 - D_w/l_r(0,4 - 0,7D_w/l_r). \quad (17)$$

Uwzględnienie wyrażeń (16) i (17) w relacji (12) przekreśliłoby jej przydatność praktyczną ze względu na zbyt skomplikowaną postać, tym bardziej, że miałyby ona i tak tylko charakter przybliżony, a więc wartość jedynie opisową.

W podobny sposób można wyprowadzić odpowiednie zależności biorąc za punkt wyjścia funkcję (5). Lepsze odwzorowanie zapewniłyby funkcje 4-parametrowe będące



Rys. 3. Zależność parametru c/x_0 w równaniu (6) od długości względnej rdzenia

odpowiednikami (4) i (5). Miałyby one odpowiednio postać

$$F/F'_{\max} = a e^{-\left(\frac{x \pm x_c}{\alpha}\right)^2} + (1-a) e^{-\left(\frac{x \pm x_c}{\beta}\right)^2} \quad (18)$$

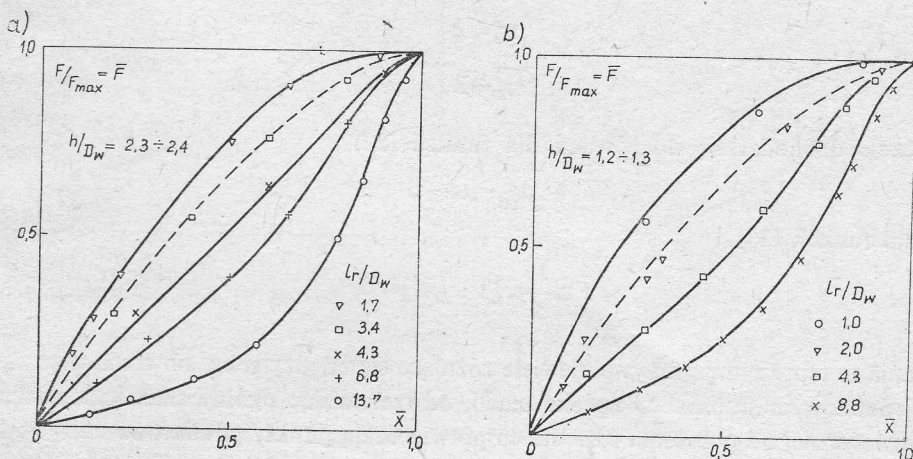
oraz

$$F/F'_{\max} = a \left[1 + \left(\frac{x \pm x_c}{\alpha} \right)^2 \right]^{-1} + (1-a) \left[1 + \left(\frac{x \pm x_c}{\beta} \right)^2 \right]^{-1},$$

gdzie a , α , β i x_c są to stałe parametry.

Można też zastosować wyrażenie będące kombinacją obu rodzajów funkcji (4) i (5). W każdym przypadku komplikowałyby to znacznie wyznaczanie wartości stałych parametrów, a po uwzględnieniu określających je funkcji aproksymujących także wyrażenie końcowe. Z tego względu zastosowanie funkcji (18) i (19) trzeba praktycznie wykluczyć.

Poprzestając na tym ogólnym opisie wchodzących w grę zależności, odwołującym się do wyjaśnień fizykalnych, uznano za bardziej racjonalne empiryczne poszukiwanie fenomenologicznych zależności określających siłę magnetyczną jako funkcję położenia rdzenia x i jego długości l_r/D_w . Pomiary przeprowadzano*) dla rdzeni o względnej średnicy $D_r/D_w \cong \cong 2/3$, gdyż jest to największa wartość jaka może być osiągnięta w elektromagnetycznych przepływomierzach pływakowych ze względów konstrukcyjnych. Ustaloną doświadczalnie zależność siły magnetycznej F od położenia x rdzenia pokazano na rysunkach 4a i b,



Rys. 4. Zależność zredukowanej siły magnetycznej od zredukowanej współrzędnej rdzenia dla rdzeni o różnej długości i cewek o różnej wysokości

w układzie współrzędnych zredukowanych

$$\bar{F} = F/F_{max}, \quad (20)$$

$$\bar{x} = x/x_0. \quad (21)$$

zaznaczając odpowiednie punkty pomiarowe. Ograniczono się przy tym tylko do niektórych wartości, aby nie zaciemniać rysunku.

Wartości bezwzględne siły magnetycznej F i współrzędnej x rdzenia można wyznaczyć przy znanych wartościach F_{max} i x_0 , których zależność od proporcji geometrycznych została ustalona i podana w [3] i [4]. Charakter krzywych jakie tworzą punkty pomiarowe na rysunkach 4a i b odpowiada w przybliżeniu pochodnym funkcji Gaussa

$$\bar{F} = K_G \bar{x} e^{-(\bar{x}/\tau_G)^2}, \quad (22)$$

albo dyspersyjnej

$$F = K_D \bar{x} [1 + (\bar{x}/\tau_D)^2]^{-2}. \quad (23)$$

Stałe K i τ można wyznaczyć z warunków, które muszą być spełnione dla $\bar{x} = 1,0$

$$(\bar{F})_{\bar{x}=1} = 1,0 \quad (24a)$$

$$(d\bar{F}/d\bar{x})_{\bar{x}=1} = 0. \quad (24b)$$

*) Pomiary wykonywała mgr inż. J. Kozubowska.

Współczynniki K w równaniach (22) i (23) określają wartość pochodnej (pochylenia) w punkcie $\bar{x}=0$ (por. (14)) i wynoszą odpowiednio

$$K_G = e^{\frac{1}{3}} \cong 1,65 \quad (25)$$

oraz

$$K_D = \frac{16}{9} \cong 1,77. \quad (26)$$

Parametr τ przyjmuje odpowiednio wartości

$$\tau_G^2 = 2 \quad (27)$$

$$\tau_D^2 = 3. \quad (28)$$

Ostatecznie dochodzi się do równań dla funkcji (22)

$$\bar{F} \cong \bar{x} e^{-\frac{1}{3}(\bar{x}^2-1)} \quad (29)$$

oraz dla funkcji (23)

$$\bar{F} \cong \frac{16}{9} \bar{x} [1 + \frac{1}{3}\bar{x}^2]^{-1}. \quad (30)$$

Równania te reprezentują krzywe niewiele różniące się między sobą, obydwie więc nadają się w jednakowym stopniu do aproksymacji, odwzorowując ogólny charakter zależności siły magnetycznej od położenia rdzenia, co potwierdzają punkty pomiarowe na rysunkach 4a i b. Funkcja (29) została przedstawiona w formie graficznej linią przerywaną na rysunkach 4a i b.

Wpływ długości rdzenia l_r/D_w i parametrów geometrycznych cewki można uwzględnić przez wprowadzenie funkcji poprawkowej ψ i wówczas (przyjmując równanie (29))

$$\bar{F} = \bar{x} e^{-\frac{1}{3}(\bar{x}^2-1)} \psi(\bar{x}, l_r/D_w, h/D_w, D_z/D_w). \quad (31)$$

Wyznaczoną na podstawie wyników badań doświadczalnych, przedstawionych na rysunkach 4a i b, zależność funkcji ψ od położenia rdzenia przy różnych jego długościach l_r/D_w dla cewek o różnej wysokości h/D_w pokazano na rysunkach 5a i b. Jej aproksymacja za pomocą wielomianu, uwzględniająca charakterystyczny kształt i wartości określone warunkami

$$\psi = 1 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = 1, \quad (32a)$$

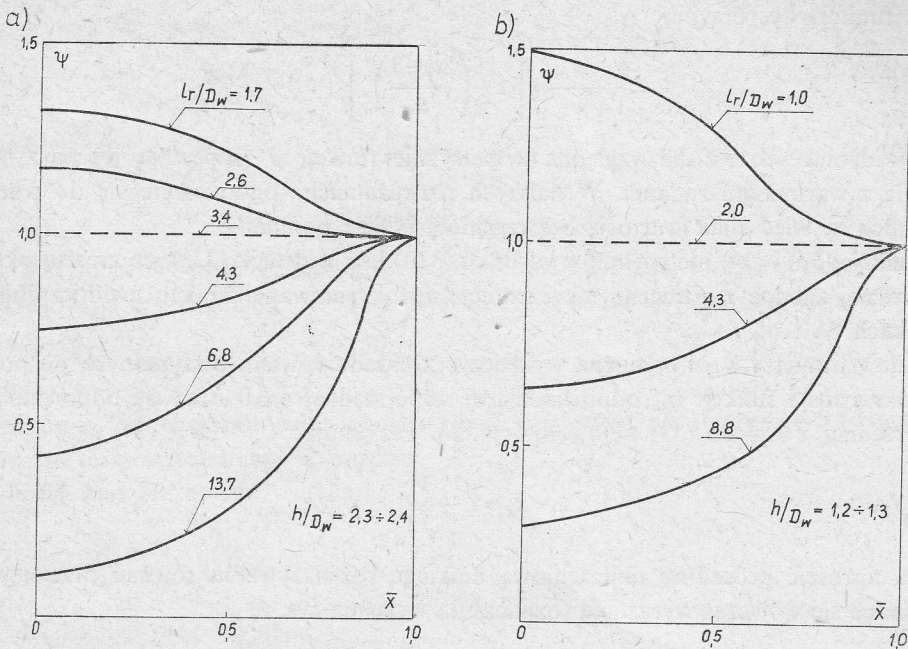
$$\frac{d\psi}{d\bar{x}} = 0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = 1, \quad (32b)$$

$$\psi = \psi_0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = 0, \quad (32c)$$

$$\frac{d\psi}{d\bar{x}} = 0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = 0, \quad (32d)$$

$$\psi = \psi_k \quad \text{dla} \quad \bar{x} = \bar{x}_k, \quad (32e)$$

wymagałaby wyznaczenie pięciu parametrów, a zatem zastosowania wielomianu czwartego



Rys. 5. Zależność wartości współczynnika korygującego ψ od położenia rdzenia przy różnych jego długościach względnych

rzędu. Zamiast warunku (32c) można uwzględnić np. współrzędne punktu przegięcia, a zatem

$$\frac{d^2\psi}{d\bar{x}^2} = 0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = \bar{x}_p. \quad (32f)$$

Warunek (32d) musiałby zostać spełniony dla funkcji ψ parzystej i ciągłej w punkcie $\bar{x} = 0$. Rezygnując z tego ostatniego wymogu można przyjąć

$$\frac{d\psi}{d\bar{x}} = 0 \quad \text{dla} \quad \bar{x} = 0. \quad (32g)$$

Trudności związane z wyznaczeniem pięciu parametrów i ich zależności od proporcji geometrycznych układu, a także konieczność posługiwania się bardzo skomplikowaną zależnością empiryczną można ominąć aproksymując ψ funkcją o odpowiedniej postaci, uwzględniającej charakterystyczny kształt uwidoczniiony na rysunkach 5a i b. Za najbardziej odpowiednie można uznać funkcje: Gaussa o postaci (4) albo dyspersyjną o postaci (5).

Po uwzględnieniu charakterystycznego kształtu krzywych pokazanych na rysunkach 5a i b oraz warunków (32) przybrałyby one postać w przypadku aproksymacji

– funkcją Gaussa

$$\frac{\psi - \psi_\infty}{1 - \psi_\infty} = e^{-\left(\frac{|\bar{x}| - 1}{\sigma}\right)^2}, \quad (33)$$

– funkcją dyspersyjną

$$\frac{\psi - \psi_\infty}{1 - \psi_\infty} = \left[1 + \left(\frac{|\bar{x}| - 1}{\sigma} \right)^2 \right]^{-1} \quad (34)$$

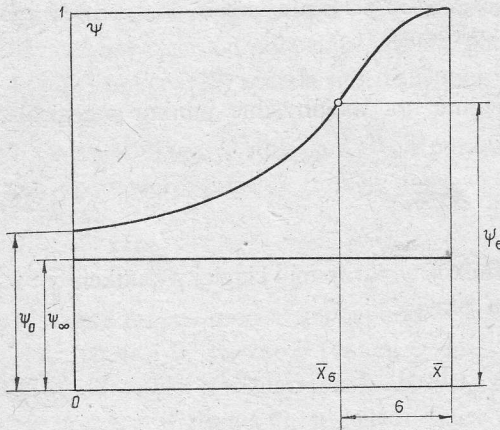
Wprowadzona wartość bezwzględna symetryzuje funkcję ψ (zapewnia jej parzystość) zgodnie z warunkami zadania. W dalszych rozważaniach ograniczono się do wartości dodatnich \bar{x} , więc znak wartości bezwzględnej będzie pomijany.

Funkcje (33) i (34) nie spełniają warunku (32d) lecz warunek (32g), co zresztą okazuje się bardziej zgodne z graficzną reprezentacją aproksymowanej funkcji uwidocznioną na rysunkach 5a i b.

Stałe parametry ψ_∞ i σ można wyznaczyć z układu równań otrzymanych po podstawieniu wartości funkcji ψ_0 odpowiadającej współrzędnej $\bar{x}=0$ oraz ψ_k odpowiadającej współrzędnej $\bar{x}=\bar{x}_k$ do (33) albo (34) (rys. 6). Przyjmując

$$\bar{x}_k = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (35)$$

można uprościć procedurę obliczeniową unikając rozwiązywania równań przestępnych. Otrzymuje się wówczas wyrażenia (oznaczenia wyjaśnia rys. 6)



Rys. 6. Wykres funkcji korygującej ψ i przyjęte oznaczenia współrzędnych punktów charakterystycznych

– dla funkcji o postaci Gaussa (33)

$$\frac{1 - \psi_0}{1 - \psi_\infty} = b(2 - b) \quad (36)$$

oraz

$$\sigma^2 = [\ln(b - 1)^{-2}]^{-1}, \quad (37)$$

– dla funkcji o postaci dyspersyjnej (34)

$$\frac{1 - \psi_0}{1 - \psi_\infty} = 2 - b \quad (38)$$

oraz

$$\sigma^2 = \frac{b-1}{2b}. \quad (39)$$

Parametr

$$b = \frac{1-\psi_0}{1-\psi_k} \quad (40)$$

może być obliczony przez podstawienie odpowiednich wartości funkcji ψ odczytywanych z wykresów na rysunkach 5a i b. Wartość σ można również wyznaczyć z wykresów na rysunkach 5a i b

$$\sigma = 1 - \bar{x}_\sigma, \quad (41)$$

przy czym \bar{x}_σ jest to współrzędna punktu odpowiadającego, jak to wynika z równań (33) i (34), wartości ψ_σ spełniającej warunki

– dla funkcji Gaussa

$$\frac{\psi_\sigma - \psi_\infty}{1 - \psi_\infty} = e^{-1}, \quad (42)$$

oraz dla funkcji dyspersyjnej

$$\frac{\psi_\sigma - \psi_\infty}{1 - \psi_\infty} = \frac{1}{2}. \quad (43)$$

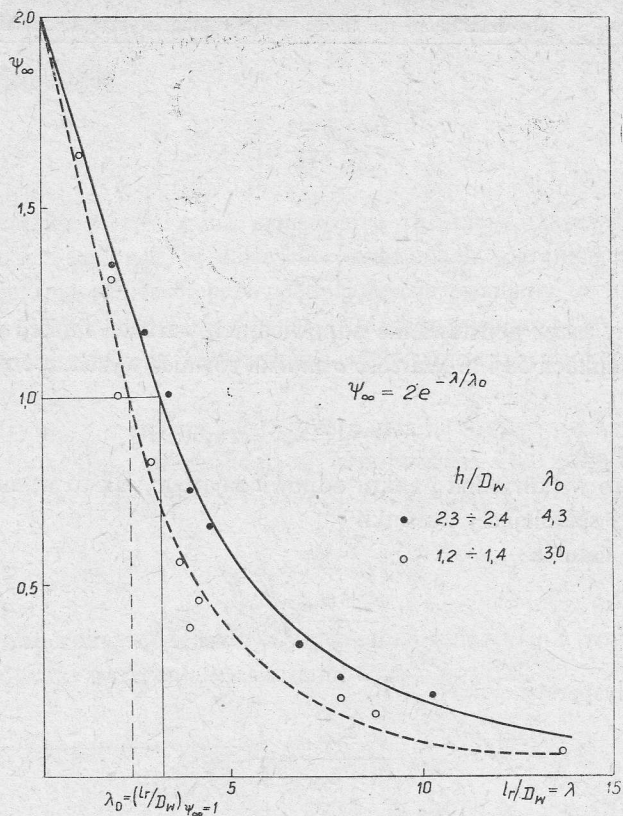
Oznaczenia wyjaśniono na rysunku 6.

Obydwie rozpatrywane funkcje aproksymujące są równoważne. O ostatecznym wyborze jednej z nich decyduje wierność odwzorowania. Jak wykazały przeprowadzone próby, lepiej aproksymuje w całym zakresie zmienności \bar{x} funkcja o postaci dyspersyjnej (43), a ponadto przyjęcie jej wymaga przeprowadzenia mniej złożonych obliczeń.

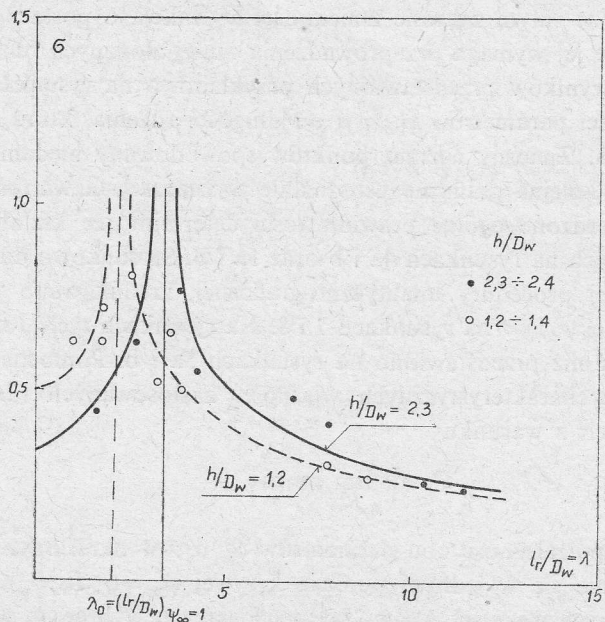
Na podstawie wyników przedstawionych przykładowo na rysunkach 5a i b można wyznaczyć zależności parametrów ψ_∞ i σ od długości rdzenia, które obrazują wykresy na rysunkach 7 i 8. Znaczny rozrzut punktów spowodowany błędami przypadkowymi zredukowano przez kolejne graficzne uśrednianie wyznaczanych wartości $F/F_{\max} = \bar{F}$ i ψ uwzględniając stwierdzone ogólne prawidłowości determinujące kształt rozpatrywanych zależności widocznych na rysunkach 4a i b oraz 5a i b. Stosunkowo duże błędy, wynikające z zastosowanej procedury analityczno-graficznej, zredukowano przez uśrednienie obliczonych wartości ψ_∞ i σ na rysunkach 7 i 8. Na rysunkach tych uwzględniono więcej wyników pomiarów niż przedstawiono na rysunkach 5a i b. Pomocne okazało się przy tym uwzględnienie charakterystycznych własności zastosowanych funkcji aproksymujących, wynikających z warunku

$$\lim_{\psi_\infty \rightarrow 1} \sigma = \infty.$$

Determinuje on współzależność obu parametrów ψ_∞ i σ w określonym punkcie λ_0 oraz implikuje przecinanie się w jednym punkcie krzywej $\psi_\infty = \psi_\infty(l_r/D_w)$ z krzywymi $\psi = \psi(l_r/D_w)$ dla różnych wartości $\psi = \psi_k$, odpowiadających wybranym wartościom współrzędnej \bar{x}_k . Odpowiednia wartość $(l_r/D_w)_{\psi_0=1} = \lambda_0$ może zostać odczytana bezpośrednio



Rys. 7. Zależność parametru ψ_{∞} od długości względnej rdzenia.



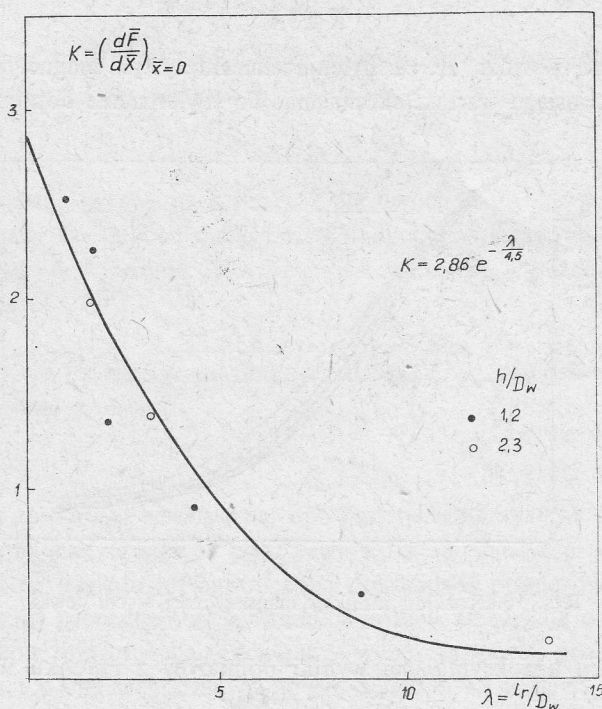
Rys. 8. Zależność parametru σ w równaniu (40) od długości względnej rdzenia.

z wykresu na rysunkach 5a i b, co umożliwia wykrycie błędów przypadkowych i obliczeniowych.

Nie udało się stwierdzić wpływu średnicy zewnętrznej cewki D_z/D_w , której względne wartości zresztą zmieniały się tylko w przedziale $1,5 \leq D_z/D_w \leq 2,0$.

Wzrost wysokości cewki h/D_w od wartości $h/D_w = 1,2$ do $2,3$ spowodował zmiany parametru $\psi_\infty = \psi_\infty(l_r/D_w, h/D_w)$ uwidocznione na rysunku 8 różnie zaznaczonymi punktami. Ograniczony zakres pomiarów pozwala na ustalenie tego wpływu jedynie analitycznie.

Ustalenie funkcji aproksymującej zależność ψ_∞ od długości rdzenia wymaga znajomości wartości $(\psi_\infty)_{l_r/D_w=0}$. Można ją oszacować rozpatrując pochylenie K charakterystyk magnetycznych w punkcie początkowym $\bar{x}=0$. Zależność tę, ustaloną na podstawie przeprowadzonych pomiarów, których wyniki uwidoczniono na rysunkach 4a i b przedstawia krzywa na rysunku 9. Zredukowaną siłą magnetyczną działającą na rdzeń o długości



Rys. 9. Zależność pochylenia charakterystyki magnetycznej w punkcie początkowym od długości względnej rdzenia

podążającej do zera można określić na podstawie zależności o postaci (por. (2))

$$\lim_{l_r/D_w=0} \bar{F} = -\frac{d(\bar{B}^2)}{dx}, \quad (44)$$

gdzie \bar{B} oznacza wielkość zredukowaną B/B_{\max} .

Typową zależność indukcji magnetycznej B w osi cewki jako funkcję odległości od środka, obliczoną według [4] i przedstawioną na rysunku 10, można dla wartości \bar{x} bliskich

zera aproksymować relacją

$$\bar{B} \cong e^{-0,9\bar{x}^2} \quad (45)$$

(zaznaczoną na rysunku 10 linią kreskowaną).

Pochodną siły magnetycznej określa wyrażenie

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(\lim_{l_r/D_w=0} \bar{F} \right) = 2 \left(\bar{B} \frac{d^2\bar{B}}{d\bar{x}^2} + \frac{d\bar{B}}{d\bar{x}} \right), \quad (46)$$

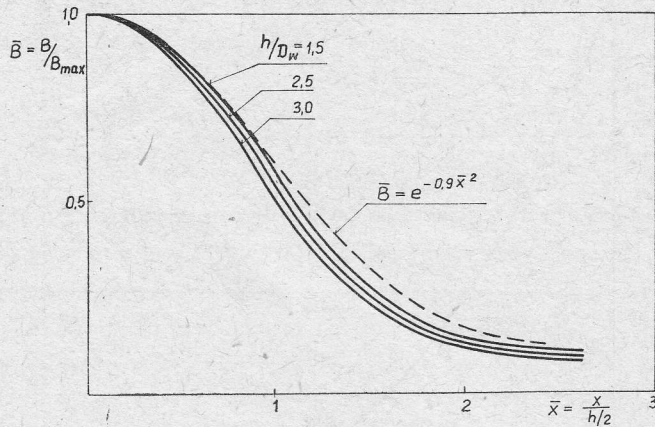
które w punkcie $\bar{x}=0$ przy $(d\bar{B}/d\bar{x})_{\bar{x}=0}=0$ przyjmuje wartość

$$K = 2\bar{B} \frac{d^2\bar{B}}{d\bar{x}^2}. \quad (47)$$

Uwzględniając (45) otrzymuje się ostatecznie wynik (z pominięciem znaku ujemnego)

$$K \cong 3,6. \quad (48)$$

Z tych rozważań wynika, że pochYLENIE charakterystyk magnetycznych przy l_r/D_w zdużAJĄCYM DO ZERA OSIĄGA WARTOŚĆ SKOŃCZONĄ. To stwierdzenie dopomaga w znalezieniu



Rys. 10. Rozkład indukcji magnetycznej w osi cewki

odpowiedniej funkcji aproksymującej wyniki pomiarów z rysunku 9. Ma ono postać

$$\frac{d\bar{F}}{d\bar{x}} \cong 2,86e^{-\frac{l_r/D_w}{4,5}} \quad (49)$$

Wartość K określona przez (48) różni się od tej, która występuje w równaniu (49) uwzględniającym dane pomiarowe, ze względu na przyjętą aproksymację (45).

Uwzględniając (31) oraz (34) można wyznaczyć pochodną zredukowanej siły magnetycznej. Ma ona postać

$$\frac{d\bar{F}}{d\bar{x}} = e^{-\frac{1}{2}(\bar{x}^2-1)} \left\{ (1-2\bar{x}^2) \left[\psi_\infty + \frac{1-\psi_\infty}{1-\left(\frac{\bar{x}-1}{\sigma}\right)^2} \right] - \frac{2/\sigma^2 \cdot \bar{x}(\bar{x}-1)}{\left[1+\left(\frac{\bar{x}-1}{\sigma}\right)^2 \right]} \right\}. \quad (50)$$

W punkcie początkowym dla $\bar{x}=0$ pochodna przyjmuje wartość

$$K = \left(\frac{d\bar{F}}{d\bar{x}} \right)_{\bar{x}=0} = e^{1/2} \left[\psi_{\infty} + \frac{1 - \psi_{\infty}}{1 + 1/\sigma^2} \right]. \quad (51)$$

Po podstawieniu wartości $(\sigma)_{l_r/D_w=0}$ odczytanej z wykresów na rysunku 8 oraz wartości K z wykresu na rysunku 9 można wyznaczyć ψ_{∞} z relacji

$$\psi_{\infty} = K e^{-1/2} (1 + \sigma^2) - 1, \quad (52)$$

otrzymując wartości skończone dla $h/D_w = 2,3$ oraz $1,2$ wynoszące odpowiednio $\psi_{\infty} = 1,92$ oraz $2,0$. Stanowi to wskazówkę umożliwiającą dobór jako funkcji aproksymującej wyrażenia

$$\psi_{\infty} = (\psi_{\infty})_{l_r/D_w=0} \cdot e^{-\frac{l_r/D_w}{\lambda_0 + 1}}. \quad (53)$$

Pominięto tu wpływ wysokości cewki h/D_w na wartość współczynnika $(\psi_{\infty})_{l_r/D_w=0}$, dla którego można przyjąć stałą wartość

$$(\psi_{\infty})_{l_r/D_w=0} = 2,0. \quad (54)$$

Funkcję tę reprezentują krzywe na rysunku 7 dla dwóch różnych wartości h/D_w , od których zależy parametr λ_0 . Wobec małej liczby danych pomiarowych określono go przez interpolację liniową w przedziale $1,2 \leq h/D_w \leq 2,4$ w formie wyrażenia

$$\lambda_0 \cong 1,2h/D_w + 0,7. \quad (55)$$

Parametr σ , którego zależność od długości rdzenia l_r/D_w przedstawiono na rysunku 9, można aproksymować funkcją

$$\sigma = |l_r/D_w - \lambda_0|^{-1}. \quad (56)$$

Wprowadzone zależności empiryczne, opisujące charakterystykę magnetyczną otwartego rdzenia ferromagnetycznego w polu cewki, określają jedynie wartości przybliżone siły magnetycznej ze względu na ograniczoną dokładność pomiarów oraz zastosowanej graficzno-analitycznej procedury opracowania wyników. Pozwalają one jednak na uogólnienie tych wyników, umożliwiając racjonalny wybór proporcji geometrycznych układu cewki z rdzeniem i ocenę wchodzących w grę wartości sił magnetycznych.

Badania przeprowadzono przy zasilaniu cewki prądem o stałym natężeniu. Uzyskane rezultaty mogą stanowić punkt wyjścia do wyznaczenia siły magnetycznej przy innym sposobie zasilania, ale wymaga to uwzględnienia wartości stosunku reaktancji i rezystancji konkretnej cewki. Odnosi się to oczywiście do przypadku zasilania prądem przemiennym stosowanym w elektromagnetycznych przepływomierzach pływakowych. Wyniki pomiarów i zależności uogólniające przedstawiono jako funkcje wielkości bezwymiarowych, gdyż do układu cewki z rdzeniem stosuje się zasadę podobieństwa. Odnoszą się one zarówno do rdzeni cylindrycznych pełnych jak też i wykonanych w formie rurek cienkościennych, o ile tylko nie następuje nasycenie magnetyczne materiału.

Jak wspomniano poprzednio, ograniczono się do stałej średnicy względnej rdzenia $D_r/D_w = 2/3$, odpowiadającej maksymalnej wartości jaka ze względów konstrukcyjnych

może wchodzić w grę dla układów stosowanych w elektromagnetycznych przepływomierzach pływakowych. Przedstawiony opis zależności siły magnetycznej wywieranej na rdzeń w polu cewki wyjaśnia jej formę przez odwołanie się do charakteru rozkładu indukcji magnetycznej wzdłuż osi cewki.

Uzasadniony został również wpływ długości rdzenia i ustalono pewne ogólne prawidłowości w sposób fenomenologiczny, gdyż ich uzyskanie jako rozwiązania równania pola elektromagnetycznego z bardzo skomplikowanymi warunkami brzegowymi jest nieosiągalne. Wyniki pomiarów zostały uogólnione w formie prostych zależności empirycznych odwzorowujących ilościowo w zadowalający sposób zależność siły magnetycznej od długości rdzenia z uwzględnieniem wpływu wysokości cewki. Mogą one być wykorzystywane przy projektowaniu cewek z ferromagnetycznym rdzeniem otwartym. Porównanie i stwierdzenie zgodności wartości charakterystycznych wyznaczonych w sposób niezależny za pomocą różnych pomiarów i formuł stanowi sprawdzian poprawności zastosowanej procedury i dopuszczalności przyjętych założeń upraszczających, umożliwiając zarazem wprowadzenie koniecznych korekt.

Praca wpłynęła do Redakcji w listopadzie 1983 r.

Literatura

- [1] K. Simonyi, *Grundgesetze des elektromagnetischen Feldes*. Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1963.
- [2] V. Gourishankar, *Electromechanical Energy Conversion*. Int. Textbook Comp., Scranton 1966.
- [3] J. Śmigieński, *Ekstremalne położenie rdzenia otwartego zawieszzonego w polu magnetycznym cewki*. Prace IMP, z. 88, 1985.
- [4] J. Śmigieński, *Charakterystyka magnetyczna cewki z ferromagnetycznym rdzeniem otwartym*. Prace IMP, z. 88, 1985.

Зависимость силы действующей на сердечник в магнитном поле катушки от его расположения

Резюме

Представлено и обсуждено общее математическое описание зависимости магнитной силы действующей на ферромагнитный сердечник в поле катушки от его расположения.

Соответствующие общие зависимости из-за своей сложной формы, а при этом ограниченной точности отображения, оказываются практически мало пригодными. Полученные результаты измерения магнитной силы в функции расположения сердечника, представленные в системе редуцированных координат, обобщены аппроксимируя их функцией отображающей основной характер кривых и вводя поправочный сомножитель. Благодаря соответственному подбору формы аппроксимирующей функции оказалось возможным ограничение числа постоянных параметров до двух, когда в случае аппроксимации многочленом для избежания похожих отклонений необходимо было бы учитывать 4 - 5 постоянных параметров и многочлен соответственно высокого порядка.

Представлен способ определения значений параметров на основе данных из измерений. Определена также их зависимость от длины сердечника. С учета на трудность вероятного определения,

из-за ограниченной точности измерений, влияние высоты катушки не учтено только в ограниченном диапазоне.

Представленное обобщенное описание зависимости силы действующей на ферромагнитный сердечник в поле катушки может оказаться пригодным для рационального выбора пропорций поплавковых электромагнитных расходомеров.

Dependence of the Force Exerted on a Core in the Magnetic Field of a Coil on Its Position

Summary

The general mathematical model of the magnetic force acting on a ferromagnetic core in the field of a coil is presented.

Corresponding general relations are, however, involved, providing only a limited degree of accuracy and hence are not very useful. The experimental results of measurements displayed in a system of reduced coordinates have been generalized by introducing properly chosen approximating functions.

This procedure made is possible to reduce the number of parameters to only two instead of 4–5 necessary with an approximation by a polynomial of proper order.

The procedure for evaluation of parameter values has been outlined. Their dependence on the core length has been estimated while the minor influence of the coil outer diameter and height has been neglected. The presented generalized description of the magnetic force acting on a core may be applied to rational design of electromagnetic float-flowmeters.