POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

89

WARSZAWA – POZNAŃ 1989
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszera 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Printed in Poland

ISBN 83-01-07072-2
ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 300+90 egz. Ark. wyd. 13,25. Ark. druk. 10,5. Papier offsetowy kl. IV, 71g.
B-1. Oddano do składania w kwietniu 1987 r. Podpisano do druku w marcu 1989 r.
Druk ukończono w grudniu 1989 r. Zam. 90/89 K-8/66
SKŁAD WYKONANO W ZAKŁADACH GRAFICZNYCH im. KEN W BYDGOSZCZY
DRUK ZAKŁAD POLIGRAFII WSP W ZIELONEJ GÓRZE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

1989 Zeszyt 89

JURAND RYTERSKI

Gdańsk*

O pewnych zagadnieniach brzegowych teorii sprężystości rozwiązalnych przez kwadratury

Na podstawie pojęcia dystrybucji wektorowej wyprowadzono podstawowe wzory całkowe dla przypadku równań ustalonych drgań sprężystych. Dobierając w odpowiedni sposób wektor rozwiązania podstawowego otrzymano stąd w szczególności wzory na divφ. Posługując się wyprowadzonymi wzorami wyznaczono rozwiązania dwóch zagadnień brzegowych dla półprzestrzeni sprężystej.

W. D. Kupradze i T. W. Burczuładze rozważali w swoich pracach pewne zagadnienie termosprężystości rozwiązalne przez kwadratury [1, 2]. W pracy [3] dotyczącej równań i przekształceń całkowych w zastosowaniu do teorii sprężystości zaproponowano rozszerzenie układu równań dla przemieszczeń przez wprowadzenie nowej niewiadomej funkcji skalarnej $\theta = \operatorname{div} u$ lub wektorowej $V = \operatorname{rot} u$. Metoda ta w przypadku ustalonego zagadnienia dynamicznego prowadzi do układu równań Helmholtza. Zastosowanie aparatu teorii dystrybucji pozwoliło w sposób stosunkowo prosty otrzymać bezpośrednio z równań przemieszczeniowych wyrażenie dylatacji przez wartości brzegowe przemieszczeń i naprężeń w postaci całek typu potencjałów.

Praca niniejsza stanowi dalszą ilustrację tej metody i rozszerzenie wyników pracy [4] na przypadek przestrzenny.

Podstawowy układ równań jest postaci

$$\boldsymbol{L}u = (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\theta + \mu\Delta u + \omega^2 u = 0, \tag{1}$$

gdzie $u = (u_1, u_2, u_3)$ jest niewiadomym wektorem przemieszczenia, a $\theta = \operatorname{div} u$. Równość (1) rozumieć będziemy w sensie uogólnionym, tzn.

$$(\boldsymbol{L}u, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_3,$$

gdzie $\mathscr{D}_3$ jest przestrzenią wektorów próbnych.

Ponieważ

$$\operatorname{grad}\theta = \Delta u + \operatorname{rot} V,$$

gdzie $V = \operatorname{rot} u$, więc zależność (1) możemy zapisać w następującej równoważnej postaci

$$(\lambda+\mu)\operatorname{rot} V + (\lambda+2\mu)\Delta u + \omega^2 u = 0. \tag{2}$$

---

* Instytut Matematyki Politechniki Gdańskiej.

Dla wektora $u \in C^2(\overline{\Omega})$ oraz $u = 0$ dla $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega'$, gdzie Ω jest obszarem ograniczonym gładką powierzchnią S, zaś $\Omega' = R^3 - \overline{\Omega}$, otrzymamy

$$Lu = (\lambda+\mu)\mathrm{grad}\theta + \mu\Delta u + \omega^2 u = \{(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\theta + \mu\Delta u + \omega^2 u\} - \\ - \left\{\mu\frac{\partial u}{\partial n} + (\lambda+\mu)\theta n\right\}\delta_S - \mu\frac{\partial}{\partial n}(u\delta_S) - (\lambda+\mu)\mathrm{grad}[(un)\delta_S], \tag{3}$$

gdzie klamra oznacza, że pochodne które tam występują rozumiane są w sensie klasycznym, $\frac{\partial}{\partial n}$ oznacza różniczkowanie w kierunku normalnej zewnętrznej.

W celu otrzymania wzoru (3) należy między innymi skorzystać z równości

$$\Delta u = \{\Delta u\} - \frac{\partial u}{\partial n}\delta_S - \frac{\partial}{\partial n}(u\delta_S).$$

Występujące we wzorze (3) dystrybucje $\frac{\partial}{\partial n}(u\delta_S)$ i $\mathrm{grad}[(un)\delta_S]$ określone są następująco:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}(u\delta_S), \varphi\right) = -\left(u\delta_S, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) = -\int_S u\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS,$$

$$(\mathrm{grad}[(un)\delta_S], \varphi) = -((un)\delta_S, \mathrm{div}\varphi) = -\int_S (un)\mathrm{div}\varphi dS.$$

Wzór (3) jest odpowiednikiem drugiego wzoru Greena zapisanym w języku teorii dystrybucji. Istotne, jeśli $\varphi \in \mathscr{D}_3$, to na mocy równości

$$(Lu, \varphi) = (u, L\varphi) = \int_\Omega uL\varphi dx$$

otrzymamy

$$\int_\Omega (uL\varphi - \varphi\{Lu\})dx = \int_S \left[\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial n} + (\lambda+\mu)n\mathrm{div}\varphi\right)u - \left\{\mu\frac{\partial u}{\partial n} + (\lambda+\mu)\theta n\right\}\varphi\right]dS.$$

Uwzględniając równość

$$\int_\Omega \{\mathrm{grad}\theta\}\varphi dx = \int_S \{\theta\}n\varphi dS - \int_\Omega \{\theta\}\mathrm{div}\varphi dx$$

możemy ten ostatni wzór zapisać w następującej formie:

$$\int_\Omega [((\lambda+\mu)\mathrm{grad\,div}\varphi + \mu\Delta\varphi + \omega^2\varphi)u - (\mu\Delta u + \omega^2 u)\varphi]dx = \\ = \int_S \left[\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial n} + (\lambda+\mu)n\mathrm{div}\varphi\right)u - \mu\frac{\partial u}{\partial n}\varphi\right]dS - (\lambda+\mu)\int_\Omega \theta\mathrm{div}\varphi dx \tag{4}$$

(Klamry mogą być opuszczone z uwagi na założenie dotyczące wektora u).

Wprowadzając wektory

$$T\varphi := 2\mu\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \lambda n \operatorname{div}\varphi + \mu(n \times \operatorname{rot}\varphi),$$

$$N\varphi := \frac{\partial\varphi}{\partial n} - n \operatorname{div}\varphi + n \times \operatorname{rot}\varphi,$$

możemy równości (4) nadać ostatecznie postać

$$\int_\Omega [((\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\varphi + \mu\Delta\varphi + \omega^2\varphi)u - (\mu\Delta u + \omega^2 u)\varphi]dx =$$

$$= \int_S \left[(T\varphi - \mu N\varphi)u - \mu\frac{\partial u}{\partial n}\varphi\right]dS - (\lambda+\mu)\int_\Omega \theta \operatorname{div}\varphi\, dx = \tag{5}$$

$$= \int_S \left[(T\varphi)u - \mu\left(Nu + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\varphi\right]dS - (\lambda+\mu)\int_\Omega \theta\operatorname{div}\varphi =$$

$$= \int_S [(T\varphi)u - \varphi(Tu)]dS + (\lambda+\mu)\left[\int_S \theta n\varphi dS - \int_\Omega \theta \operatorname{div}\varphi\, dx\right],$$

bowiem

$$\int_S u(N\varphi)dS = \int_S \varphi(Nu)dS.$$

Podobnie wychodząc z równania (2) otrzymamy

$$\int_\Omega [((\lambda+\mu)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\varphi + (\lambda+2\mu)\Delta\varphi + \omega^2\varphi)u - ((\lambda+2\mu)\Delta u + \omega^2 u)\varphi]dx =$$

$$= \int_S \left[(T\varphi + \lambda N\varphi)u - (\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial n}\varphi\right]dS + (\lambda+\mu)\int_\Omega \operatorname{rot}\varphi \operatorname{rot} u\, dx = \tag{6}$$

$$= \int_S [(T\varphi)u - \varphi(Tu)]dS + (\lambda+\mu)\left[\int_S \varphi(n \times \operatorname{rot} u)\, dS + \int_\Omega \operatorname{rot}\varphi \operatorname{rot} u\, dx\right].$$

Postać dystrybucyjna wzoru (6) jest następująca:

$$Au := (\lambda+\mu)\operatorname{rot} V + (\lambda+2\mu)\Delta u + \omega^2 u =$$

$$= \{(\lambda+\mu)\operatorname{rot} V + (\lambda+2\mu)\Delta u + \omega^2 u\} - \left\{(\lambda+\mu)(n \times V) + (\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial n}\right\}\delta_S -$$

$$- (\lambda+\mu)\operatorname{rot}[(n \times u)\delta_S] - (\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial n}(u\delta_S).$$

Niech $u = \operatorname{grad} f$, gdzie $f = \dfrac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\dfrac{e^{ikr}}{r}$,

$r = |x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $\kappa^2 = \dfrac{\omega^2}{\lambda+2\mu}$, $\varphi \in \mathscr{D}_3$ i supp$\varphi \subset U_R$, $U_R = \{x \in E_3 : |x| < R\}$, przy czym R jest tak wielkie, aby obszar Ω leżał całkowicie wewnątrz kuli U_R, $S_\varepsilon = \{x \in E_3 : |x| = \varepsilon\}$, przy czym $\varepsilon > 0$ jest tak małe, aby sfera S_ε należała do obszaru Ω. Wówczas

$$(Au, \varphi) = (u, A\varphi) = -(f, \operatorname{div} A\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ikr}}{r}[\Delta \operatorname{div}\varphi + \kappa^2 \operatorname{div}\varphi]dx =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\varepsilon<|x|<R} \frac{e^{ikr}}{r}[\Delta \operatorname{div}\varphi + \kappa^2 \operatorname{div}\varphi]dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\Bigg[\int\limits_{\varepsilon<|x|<R}[(\lambda+2\mu)\Delta u + \omega^2 u]\varphi dx +$$

$$+\Bigg(\int\limits_{S_\varepsilon} + \int\limits_{S}\Bigg)\Bigg[\Bigg((\lambda+\mu)(n\times \operatorname{rot}\varphi) + (\lambda+2\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Bigg)u - (\lambda+2\mu)\varphi\frac{\partial u}{\partial n}\Bigg]dS\Bigg] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\iint\limits_{S_\varepsilon}\Bigg[-(\lambda+2\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial r}u + (\lambda+2\mu)\varphi\frac{\partial u}{\partial r}\Bigg]dS = \operatorname{div}\varphi(0),$$

a zatem

$$Au = -\operatorname{grad}\delta(x). \tag{7}$$

Jeśli φ spełnia równanie $A\varphi = 0$ w obszarze $\overline{\Omega}$ i $x_0 \in \Omega$, to na mocy wzorów (6), (7) otrzymamy

$$\operatorname{div}\varphi(x_0) = \iint\limits_{S}\Bigg[\Bigg((\lambda+\mu)(n\times \operatorname{rot}\varphi) + (\lambda+2\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Bigg)u - (\lambda+2\mu)\varphi\frac{\partial u}{\partial n}\Bigg]dS$$

lub

$$\operatorname{div}\varphi(x_0) = \iint\limits_{S}\Bigg[(T\varphi + \lambda N\varphi)u - (\lambda+2\mu)\varphi\frac{\partial u}{\partial n}\Bigg]dS \quad \text{gdy } x_0 \in \Omega \tag{8}$$

oraz

$$0 = \iint\limits_{S}\Bigg[(T\varphi + \lambda N\varphi)u - (\lambda+2\mu)\varphi\frac{\partial u}{\partial n}\Bigg]dS \quad \text{gdy } x_0 \in \Omega'. \tag{9}$$

Wyprowadzone wzory pozostają słuszne również dla obszarów nieograniczonych jeśli $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{\varphi}$ spełniają odpowiednie warunki wypromieniowania.

Rozważmy dla przykładu następujące zagadnienie brzegowe:

W półprzestrzeni $x_3 \leqslant 0$ szukamy rozwiązania regularnego równań teorii sprężystości (1) (lub co na jedno wychodzi (2)) spełniającego na brzegu $x_3 = 0$ jeden z warunków:

1° Dane są współrzędne styczne wektora przemieszczenia i współrzędna normalna wektora naprężenia

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= g_1(x_1, x_2) \\ \varphi_2 &= g_2(x_1, x_2) \\ (T\varphi)_3 &= g_3(x_1, x_2) \end{aligned} \qquad (B_1).$$

2° Dana jest współrzędna normalna wektora przemieszczenia i współrzędne styczne wektora naprężenia

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= h_1(x_1, x_2) \\ (T\varphi)_1 &= h_2(x_1, x_2) \\ (T\varphi)_2 &= h_3(x_1, x_2) \end{aligned} \qquad (B_2).$$

Aby otrzymać rozwiązania tych zagadnień znajdujemy najpierw $\operatorname{div}\varphi(x)$.

W tym celu kładziemy w równaniu (8)

$$u = \operatorname{grad} f = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\operatorname{grad} r,$$

gdzie $r = |x-x^0| = \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3-x_3^0)^2}$, a w równaniu (9)

$$u = \operatorname{grad} f^* = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dr^*}\left(\frac{e^{ikr^*}}{r^*}\right)\operatorname{grad} r^*,$$

gdzie $r^* = |x-x^{0*}| = \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3+x_3^0)^2}$.

Otrzymamy wówczas

$$\operatorname{grad} f^*\Big|_{x_3=0} = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\left[i_1\frac{x_1-x_1^0}{r_0}+i_2\frac{x_2-x_2^0}{r_0}+i_3\frac{x_3^0}{r_0}\right],$$

gdzie i_1, i_2, i_3 oznaczają wersory osi układu, oraz

$$\operatorname{grad} f\Big|_{x_3=0} = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\left[i_1\frac{x_1-x_1^0}{r_0}+i_2\frac{x_2-x_2^0}{r_0}-i_3\frac{x_3^0}{r_0}\right]$$

i odpowiednio

$$4\pi(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x_3}\operatorname{grad} f\Big|_{x_3=0} = -\left[\frac{d^2}{dr_0^2}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)-\frac{1}{r_0}\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\right]\frac{x_3^0}{r_0}\times$$
$$\times\left(i_1\frac{x_1-x_1^0}{r_0}+i_2\frac{x_2-x_2^0}{r_0}-i_3\frac{x_3^0}{r_0}\right)+i_3\frac{1}{r_0}\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right),$$

$$4\pi(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x_3}\operatorname{grad} f^*\Big|_{x_3=0} = \left[\frac{d^2}{dr_0^2}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)-\frac{1}{r_0}\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\right]\frac{x_3^0}{r_0}\times$$
$$\times\left(i_1\frac{x_1-x_1^0}{r_0}+i_2\frac{x_2-x_2^0}{r_0}+i_3\frac{x_3^0}{r_0}\right)+i_3\frac{1}{r_0}\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right),$$

gdzie $r_0 = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + x_3^{0\,2}}$.

Odejmując otrzymane w ten sposób równania stronami i uwzględniając warunki brzegowe oraz równość

$$(N\varphi)_3\bigg|_{x_3=0} = -\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right) = -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{\partial g_2}{\partial x_2}$$

otrzymamy

$$\operatorname{div}\varphi(x^0) = 2\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left(\lambda\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial g_2}{\partial x_2} - g_3\right)\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\frac{x_3^0}{r_0} + \right.$$

$$\left. + (\lambda + 2\mu)\left[\frac{d^2}{dr_0^2}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right) - \frac{1}{r_0}\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\right]\frac{x_3^0}{r_0}\left(g_1\frac{x_1 - x_1^0}{r_0} + g_2\frac{x_2 - x_2^0}{r_0}\right)\right\}dx_1 dx_2.$$

W przypadku zagadnienia 2° postępujemy analogicznie z tą jednak różnicą, że dodajemy równania stronami. Mamy

$$(N\varphi)_1\bigg|_{x_3=0} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}\bigg|_{x_3=0} = \frac{\partial h_1}{\partial x_1}, \qquad (N\varphi)_2\bigg|_{x_3=0} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}\bigg|_{x_3=0} = \frac{\partial h_1}{\partial x_2},$$

a zatem otrzymamy

$$\operatorname{div}\varphi(x^0) = 2\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\left(h_2 + \lambda\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right)\frac{x_1 - x_1^0}{r_0} + \left(h_3 + \lambda\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right)\frac{x_2 - x_2^0}{r_0}\right]\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right) - \right.$$

$$\left. -(\lambda + 2\mu)h_1\left[\left(\frac{d^2}{dr_0^2}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right) - \frac{1}{r_0}\frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\right)\frac{x_3^{0\,2}}{r_0} + \frac{d}{dr_0}\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\right]\frac{1}{r_0}\right\}dx_1 dx_2.$$

Mając $\operatorname{div}\varphi(x)$ łatwo już otrzymać rozwiązania interesujących nas zagadnień. W tym celu kładziemy we wzorze (5) w miejsce wektora u wektory $u_\nu = \dfrac{1}{4\pi\mu}\dfrac{e^{ik_1 r}}{r}i_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$, gdzie $\kappa_1^2 = \omega^2/\mu$ i korzystamy z zasady symetrii. Rozwiązanie zagadnienia 1° ma postać

$$\varphi_{1,2}(x^0) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r}\right)\bigg|_{x_3=0} g_{1,2}(x_1, x_2)dx_1 dx_2 -$$

$$-\frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu}\iiint\limits_{x_3<0} G_1(x, x^0)\operatorname{div}\varphi(x)dx,$$

gdzie $G_1(x, x^0) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[\dfrac{e^{ik_1 r}}{r} - \dfrac{e^{ik_1 r^*}}{r^*}\right]$,

$$\varphi_3(x^0) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\mu}\frac{e^{ik_1 r}}{r}\bigg|_{x_3=0} g_3(x_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r}\right)\bigg|_{x_3=0} g_1(x_1, x_2) - \right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r}\right)\Bigg|_{x_3=0} g_2(x_1,x_2)\Bigg]dx_1dx_2-\frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\iiint\limits_{x_3<0} G_2(x,x^0)\operatorname{div}\varphi(x)dx,$$

gdzie $G_2(x,x^0)=\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{e^{ik_1 r}}{r}+\frac{e^{ik_1 r^*}}{r^*}\right].$

W analogiczny sposób znajdujemy rozwiązanie zagadnienia 2°. Określone wyżej funkcje $\varphi_i(x^0)\,(i=1,2,3)$ stanowią pewne rozwiązanie zagadnienia 1° przy założeniu, że występujące tam całki niewłaściwe (dwu- i pięciokrotne) istnieją.

Uwagi końcowe

Przede wszystkim zauważmy, że wzory (5) i (6) stanowią różne formy zapisu wzoru Greena

$$\int\limits_{\Omega}\big[\big((\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\varphi+\mu\Delta\varphi+\omega^2\varphi\big)u-\big((\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}u+\mu\Delta u+\omega^2 u\big)\varphi\big]dx=$$

$$=\int\limits_{S}[(T\varphi)u-\varphi(Tu)]dS,$$

który w teorii sprężystości nazywa się wzorem Bettiego. Jeśli we wzorze tym w miejsce wektora u podstawiać będziemy kolejno wektory $\Gamma^\nu=\Gamma^\nu(y-x,\omega)\,(\nu=1,2,3)$ będące kolumnami macierzy rozwiązań podstawowych Kupradzego $\Gamma(y-x,\omega)$ (patrz [5] str. 34), to otrzymamy wzory na przemieszczenia

$$2\varphi_\nu(x)=\int\limits_{S}[\Gamma^\nu(y-x,\omega)T\varphi(y)-\varphi(y)T\Gamma^\nu(y-x,\omega)]dS_y \qquad (\nu=1,2,3), \tag{10}$$

przy $x\in\Omega$ (w przypadku zagadnień statyki nazywa się je wzorami Somigliany).

Kładąc natomiast $u=\frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)}\operatorname{grad}\frac{e^{ikr}}{r}$, gdzie $r=|y-x|$, $\kappa^2=\frac{\omega^2}{\lambda+2\mu}$ otrzymamy wzór (8) wyrażający $\operatorname{div}\varphi(x)$ w obszarze Ω przez wartości brzegowe przemieszczeń i naprężeń w postaci całek typu potencjałów. Wreszcie jeśli w miejsce wektora u podstawiać będziemy kolejno wektory

$$u_\nu=\frac{1}{2\pi\mu}\frac{e^{ik_1 r}}{r}i_\nu \qquad (\nu=1,2,3),$$

gdzie $\kappa_1^2=\omega^2/\mu$, to otrzymamy wzory na przemieszczenia, które jak wynika z naszych rozważan są postaci

$$2\varphi_\nu(x)=\int\limits_{S}[u_\nu T\varphi(y)-\varphi(y)Tu_\nu]dS_y+(\lambda+\mu)\int\limits_{\Omega}\varphi(y)\operatorname{grad}\operatorname{div}u_\nu dy \quad (\nu=1,2,3), \tag{11}$$

przy $x\in\Omega$, bowiem jak łatwo sprawdzić

$$\int\limits_{\Omega}\varphi(y)\operatorname{grad}\operatorname{div}u_\nu dy=\int\limits_{S}n\varphi(y)\operatorname{div}u_\nu dS_y-\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\varphi(y)\operatorname{div}u_\nu dy,$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza rozwiązanie regularne równań przemieszczeniowych.

Wzory Kupradzego (10) i wzory (8), (11) są równoważne. Istotnie jeśli zachodzą równości (10), to $\operatorname{div}\varphi(x)$ wyraża się wzorem (8) co jest oczywistym wnioskiem wynikającym z teorii dystrybucji. Można również sprawdzić, że

$$\frac{\partial\Gamma^1}{\partial x_1}+\frac{\partial\Gamma^2}{\partial x_2}+\frac{\partial\Gamma^3}{\partial x_3}=\frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)}\operatorname{grad}\frac{e^{ik|x|}}{|x|},$$

gdzie $\Gamma^\nu=\Gamma^\nu(x,\omega)(\nu=1,2,3)$ są wektorami—kolumnami macierzy Kupradzego $\Gamma(x,\omega)$. Stąd wniosek, że wzory (8) na dylatację można otrzymać z równości $\operatorname{div}\varphi(x)=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3}$ w wyniku wyrażenia występujących tu pochodnych $\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\nu}$ $(\nu=1,2,3)$ przez różniczkowanie wzorów (10). Porównując prawe strony wzorów (10) i (11) stwierdzamy, że ich różnica wynosi

$$\frac{1}{\kappa_1^2}\iint\limits_S\left[(T\varphi)\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}-e^{ikr}}{r}-\varphi\left(T\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}-e^{ikr}}{r}\right)\right]dS_y-$$

$$-(\lambda+\mu)\int\limits_\Omega\varphi\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\left(\frac{e^{ik_1r}}{r}\right)dy.$$

Oznaczając przez κ_ε kulę o środku x i promieniu ε, a przez S_ε jej powierzchnię zorientowaną do wnętrza, mamy przy uwzględnieniu wzoru (8) ciąg równości

$$(\lambda+\mu)\int\limits_\Omega\varphi(y)\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}}{r}dy=\lim_{\varepsilon/0+}(\lambda+\mu)\int\limits_{\Omega-\kappa_\varepsilon}\varphi(y)\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}}{r}dy=$$

$$=\frac{1}{\kappa_1^2}\iint\limits_S\left[(T\varphi)\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}}{r}-\varphi(y)\left(T\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}}{r}\right)\right]dS_y+$$

$$+\lim_{\varepsilon/0+}\frac{1}{\kappa_1^2}\iint\limits_{S_\varepsilon}\left[(T\varphi)\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}}{r}-\varphi(y)\left(T\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}}{r}\right)\right]dS_y=$$

$$=\frac{1}{\kappa_1^2}\iint\limits_S\left[(T\varphi)\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}}{r}-\varphi(y)\left(T\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}}{r}\right)\right]dS_y+\frac{4\pi(\lambda+2\mu)}{\kappa_1^2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\operatorname{div}\varphi=$$

$$=\frac{1}{\kappa_1^2}\iint\limits_S\left[(T\varphi)\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}-e^{ikr}}{r}-\varphi(y)\left(T\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{e^{ik_1r}-e^{ikr}}{r}\right)\right]dS_y.$$

A zatem wartości prawych stron wzorów (10) i (11) są identyczne.

Praca wpłynęła do Redakcji w maju 1984 (po korekcie).

Literatura

[1] W. D. Kupradze, T. W. Burczuładze, *Niekotoryje zadaczi tiermouprugosti rieszajemyje w kwadraturach*. Diffieriencjalnyje Urawnienja T. V. No 10, 1969.

[2] W. D. Kupradze, T. W. Burczuładze, *Niekotoryje zadaczi tiermouprugosti rieszajemyje w kwadraturach*. Diffieriencjalnyje Urawnienja T. V, No 11, 1969.

[3] J. Ryterski, *Równania i przekształcenia całkowe w zastosowaniu do zagadnień teorii sprężystości*. Prace IMP, z. 59, 1972.

[4] J. Ryterski, *Solutions of certain plane problems of stationary vibrations of elastic body*. Prace IMP, z. 86, 183.

[5] W. D. Kupradze i in., *Triechmiernyje zadaczi matiematiczeskoj tieorii uprugosti*. Tbilisi 1968.

[6] W. Kecs, P. P. Teodorescu, *Wwjedienje w tieoriu obobszczennych funkcij s priłożeniami w tiechnikie*. Moskwa 1978.

О некоторых краевых проблемах теории упругости, решаемых квадратурами

Резюме

На основе понятия векторного распределения выводятся фундаментальные интегральные формулы для случая уравнений установившихся упругих колебаний. Подбирая соответствующим способом вектор основного решения, получаются отсюда в особенности формулы на divφ. Пользуясь выведенными формулами определяются решения двух краевых проблем для упругого полупространства.

Some Boundary Problems of the Elasticity Theory Solvable by Quadratures

Summary

Basic integral relations have been derived for equations of steady-state elastic vibrations based on the notion of vector distribution. In particular, formulae for div φ have bee obtained owing to appropriate choice of the basic solution vector. The formulae derived have been used to solve two boundary problems for an elastic half-space.