POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

89

WARSZAWA – POZNAŃ 1989
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

---

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszera 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Printed in Poland

ISBN 83-01-07072-2
ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 300+90 egz. Ark. wyd. 13,25. Ark. druk. 10,5. Papier offsetowy kl. IV, 71g.
B-1. Oddano do składania w kwietniu 1987 r. Podpisano do druku w marcu 1989 r.
Druk ukończono w grudniu 1989 r. Zam. 90/89 K-8/66
SKŁAD WYKONANO W ZAKŁADACH GRAFICZNYCH im. KEN W BYDGOSZCZY
DRUK ZAKŁAD POLIGRAFII WSP W ZIELONEJ GÓRZE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

1989 Zeszyt 89

KRYSTYNA RUTKOWSKA, JURAND RYTERSKI

Gdańsk*

O pewnych zagadnieniach termosprężystości rozwiązalnych przez kwadratury

Praca dotyczy zastosowania metod teorii potencjału do wyznaczenia rozwiązania zagadnień brzegowych termosprężystości dla przypadku półprzestrzeni. Stosując aparat teorii dystrybucji wyprowadzono wzory podstawowe będące odpowiednikami wzorów Greena. Dzięki wprowadzeniu odpowiednich wektorów rozwiązań podstawowych otrzymano stąd wzory całkowe na diwergencję przemieszczenia i temperaturę. Bazując na wyprowadzonych wzorach podano rozwiązania dwóch zagadnień brzegowych dla półprzestrzeni.

Twierdzenia o istnieniu oraz metody wyznaczania przybliżonych rozwiązań dla pewnych zagadnień brzegowych termosprężystości, przy założeniu okresowej zależności od czasu, znane są dla szerokiej klasy obszarów [1, 2].

Zagadnienie efektywnego wyznaczenia rozwiązań rozpatrywane było przez W. Nowackiego w pracy [5]. Kupradze i Burczuładze w pracach [3, 4] zajmowali się problemem znalezienia rozwiązań w kwadraturach dla pewnej klasy obszarów nieograniczonych, których brzegiem jest układ płaszczyzn (zagadnienie przestrzenne) lub układ prostych (zagadnienie płaskie). Rozważali oni tam zagadnienia z następującymi warunkami brzegowymi. Na brzegu zadane są:

1) przemieszczenia i temperatura,

2) naprężenia cieplne i strumień ciepła,

3) przemieszczenia i strumień ciepła,

4) naprężenia cieplne i temperatura,

5) styczne składowe przemieszczenia, normalna **składowa** naprężenia i liniowa kombinacja temperatury z entropią,

6) normalna składowa przemieszczenia, styczne składowe naprężenia i liniowa kombinacja strumienia ciepła ze strumieniem entropii.

W pracy [3] pokazano jak można znaleźć rozwiązania zagadnień 5, 6 bazując na teorii potencjału. Autorzy pracy [3] w celu wyznaczenia rozwiązań zagadnień 5, 6 rozpatrują najpierw pomocnicze zagadnienie brzegowe dla niewiadomych funkcji skalarnych div u, u_4, do którego dochodzą przez różniczkowanie równań termosprę-

* Instytut Matematyki Politechniki Gdańskiej.

żystości przy założeniu, że równania te spełnione są również na brzegu obszaru. Rozwiązanie problemu znajdują w dalszym ciągu z odpowiednich zagadnień brzegowych dla równań Helmholza. Te same zagadnienia 5, 6 rozwiązujemy w niniejszej pracy stosując metodę opisaną w pracach [6, 7], która nie wymaga tak krępujących założeń dotyczących regularności, wystarcza nam bowiem dwukrotna różniczkowalność wektora rozwiązania, spełnienie równań termosprężystości i warunków brzegowych. Postępowanie, o którym mowa wyżej, zastosowane zostało również w pracy [8] dla wyznaczenia rozwiązań w kwadraturach pewnych zagadnień teorii sprężystości.

1. Wzory Greena

Rozważmy układ równań termosprężystości postaci:

$$\begin{gathered}\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\theta+\omega^2 u-\gamma\operatorname{grad}u_4=0,\\ \Delta u_4+\frac{i\omega}{\kappa}u_4+i\omega\eta\theta=0,\end{gathered}\tag{1}$$

gdzie $x=(x_1,x_2,x_3)$ — punkt przestrzeni euklidesowej E_3, $U=(u,u_4)$, $u=(u_1,u_2,u_3)$ — niewiadomy wektor przemieszczenia, u_4 — temperatura (przy założeniu, że $T+u_4$ jest temperaturą absolutną, a stan $u_4=0$ odnosi się do stanu, w którym naprężenia i przemieszczenia są równe zeru); $\theta=\operatorname{div}u$; λ, μ są stałymi Lamégo, ω^2 jest iloczynem gęstości ϱ i kwadratu częstości drgań, $\gamma=\alpha(3\lambda+2\mu)$, przy czym α jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej termicznej, κ — przewodnością, $\eta=\gamma T/\varrho c$, c — ciepło właściwe, i — jednostka urojona.

Zauważmy, że stosując operację dywergencji do pierwszego z równań (1), na bazie tego układu otrzymamy układ

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\Delta\theta+(\omega^2+i\omega\gamma\eta)\theta+\frac{i\gamma\omega}{\kappa}u_4=0,\\ \Delta u_4+\frac{i\omega}{\kappa}u_4+i\omega\eta\theta=0.\end{gathered}\tag{2}$$

W niniejszym punkcie równania (1) i (2) rozumieć będziemy w sensie uogólnionym, tzn. jeśli przez L, A oznaczymy operatory

$$LU=\begin{pmatrix}\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\theta+\omega^2u-\gamma\operatorname{grad}u_4\\ \Delta u_4+\frac{i\omega}{\kappa}u_4+i\omega\eta\theta\end{pmatrix},\tag{3}$$

$$AV=\begin{pmatrix}(\lambda+2\mu)\Delta\theta+(\omega^2+i\omega\gamma\eta)\theta+\frac{i\gamma\omega}{\kappa}u_4\\ \Delta u_4+\frac{i\omega}{\kappa}u_4+i\omega\eta\theta\end{pmatrix},\tag{4}$$

to

$$LU = 0 \Leftrightarrow (LU, \Phi) = 0 \qquad \forall \Phi \in D_4,$$

gdzie $(F, \Phi) := \sum_{i=1}^{4} (f_i, \varphi_1)$ dla dystrybucji $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ i wektora próbnego $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (\varphi, \varphi_4)$; $\varphi_i \in D_1$, $i = 1, 2, 3, 4$, D_1 jest przestrzenią funkcji próbnych, zaś $AV = 0 \Leftrightarrow (AV, \Psi) = 0$, $\forall \Psi \in D_2$, gdzie podobnie jak wyżej

$$(G, \Psi) := (g_1, \psi_1) + (g_2, \psi_2).$$

Załóżmy, że $u_i \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega}_1)$, $\Omega \subset E_3$, $\Omega_1 = E_3 \setminus \overline{\Omega}$ oraz $u_i = 0$ dla $x \in \Omega_1$; Ω jest obszarem ograniczonym gładką powierzchnią S.

Wówczas dla wektora $U := (u, u_4)$ otrzymamy

$$LU = \{LU\} - \begin{pmatrix} \left[\mu \dfrac{\partial u}{\partial n} + (\lambda + \mu) n \operatorname{div} u - \gamma u_4 n\right] \delta_S + \mu \dfrac{\partial}{\partial n}(u \delta_S) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}[(un)\delta_S] \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial n} + i\omega\eta (un)\delta_S + \dfrac{\partial}{\partial n}(u_1 \delta_S) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Zakładając, że θ, $u_4 \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega}_1)$ oraz θ i u_4 są równe zeru dla $x \in \Omega_1$, otrzymamy odpowiednio

$$AV = \{AV\} - \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\left[\dfrac{\partial \theta}{\partial n}\delta_S + \dfrac{\partial}{\partial n}(\theta \delta_S)\right] \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial n}\delta_S + \dfrac{\partial}{\partial n}(u_4 \delta_S) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Wzory (5), (6) są dystrybucyjnymi odpowiednikami wzorów Greena dla równań termosprężystości.

Istotnie, jeżeli $\Phi \in D_4$, $\psi \in D_2$, to na mocy równości

$$(LU, \Phi) = (U, L^*\Phi) \quad \text{i} \quad (AV, \psi) = (V, A^*\psi),$$

gdzie

$$L^*\Phi = \begin{pmatrix} \mu \Delta \varphi + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \varphi + \omega^2 \varphi - i\omega\eta \operatorname{grad} \varphi_4 \\ \Delta \varphi_4 + \dfrac{i\omega}{\kappa}\varphi_4 + \gamma \operatorname{div} \varphi \end{pmatrix},$$

$$A^*\Psi = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\Delta \psi_1 + (\omega^2 + i\omega\eta\gamma)\psi_1 + i\omega\eta\psi_2 \\ \Delta \psi_2 + \dfrac{i\omega}{\kappa}\psi_2 + \dfrac{i\gamma\omega}{\kappa}\psi_1 \end{pmatrix},$$

otrzymamy

$$\int_{\Omega}\Big\{[\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\theta+\omega^2 u-\gamma\operatorname{grad}u_4]\varphi+\Big[\Delta u_4+\frac{i\omega}{\kappa}u_4+i\omega\eta\theta\Big]\varphi_4- \tag{5'}$$

$$-[\mu\Delta\varphi+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\varphi+\omega^2\varphi-i\omega\eta\operatorname{grad}\varphi_4]u-$$

$$-\Big[\Delta\varphi_4+\frac{i\omega}{\kappa}\varphi_4+\gamma\operatorname{div}\varphi\Big]u_4\Big\}dx=\int_{S}\Big\{\Big[\mu\frac{\partial u}{\partial n}+(\lambda+\mu)n\theta-\gamma u_4 n\Big]\varphi+$$

$$+\Big[\frac{\partial u_4}{\partial n}+i\omega\eta(un)\Big]\varphi_4-\Big[\mu\frac{\partial\varphi}{\partial n}+(\lambda+\mu)n\operatorname{div}\varphi\Big]u-\frac{\partial\varphi_4}{\partial n}u_4\Big\}dS,$$

$$\int_{\Omega}\Big\{\Big[(\lambda+2\mu)\Delta\theta+(\omega^2+i\omega\gamma\eta)\theta+\frac{i\gamma\omega}{\kappa}u_4\Big]\psi_1+\Big[\Delta u_4+\frac{i\omega}{\kappa}u_4+i\omega\eta\theta\Big]\psi_2- \tag{6'}$$

$$-[(\lambda+2\mu)\Delta\psi_1+(\omega^2+i\omega\gamma\eta)\psi_1+i\omega\eta\psi_2]\theta-\Big[\Delta\psi_2+\frac{i\omega}{\kappa}\psi_2+\frac{i\gamma\omega}{\kappa}\psi_1\Big]u_4\Big\}dx=$$

$$=\int_{S}\Big\{\Big[(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial n}\psi_1+\frac{\partial u_4}{\partial n}\psi_2\Big]-\Big[(\lambda+2\mu)\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\theta+\frac{\partial\psi_2}{\partial n}u_4\Big]\Big\}dS.$$

Zauważmy, że jeśli Ω jest obszarem ograniczonym, to wzory (5') i (6') pozostają słuszne dla $\varphi_i\in C^2(\overline{\Omega})$, $i=1,2,3,4$ oraz $\psi_i\in C^2(\overline{\Omega})$, $i=1,2$.

2. Wzory całkowe dla wektora V

Rozważmy wektor $W_1=\begin{pmatrix}\operatorname{grad}f_1\\ g_1\end{pmatrix}$ spełniający równanie $L^*W_1=\begin{pmatrix}\operatorname{grad}\delta(x)\\ 0\end{pmatrix}$, gdzie

$$f_1=-\frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\Big[\Big(\lambda_1^2-\frac{i\omega}{\kappa}\Big)\frac{e^{i\lambda_1 r}}{r}-\Big(\lambda_2^2-\frac{i\omega}{\kappa}\Big)\frac{e^{i\lambda_2 r}}{r}\Big],$$

$$g_1=\frac{\gamma}{4\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\Big[\lambda_1^2\frac{e^{i\lambda_1 r}}{r}-\lambda_2^2\frac{e^{i\lambda_2 r}}{r}\Big],$$

$$r=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\qquad \lambda_1^2+\lambda_2^2=\frac{i\omega}{\kappa}+\frac{\omega^2}{\lambda+2\mu}+\frac{i\omega\eta\gamma}{\lambda+2\mu},\quad \lambda_1^2\lambda_2^2=\frac{i\omega^3}{\kappa(\lambda+2\mu)}.$$

Niech $\Phi\in D_4$, supp $\Phi\subset K_R$, $K_R=\{x\in E_3:|x|<R\}$, $S_\varepsilon=\{x\in E_3:|x|=\varepsilon\}$. Ponieważ **$L\Phi$ jest wektorem o składowych $L_1\Phi$, $L_2\Phi$, gdzie L_1, L_2 są operatorami różniczkowymi występującymi w wierszach macierzy (3) więc**

$$(L^*W_1,\Phi)=(W_1,L\Phi)=(\operatorname{grad}f_1,L_1\Phi)+(g_1,L_2\Phi)=-(f_1\operatorname{div}L_1\Phi)+(g_1,L_2\Phi)=$$

$$= \int_{K_R} f_1[(\lambda+2\mu)\Delta\operatorname{div}\varphi+\omega^2\operatorname{div}\varphi-\gamma\Delta\varphi_4]dx+\int_{K_R} g_1\left[\Delta\varphi_4+\frac{i\omega}{\kappa}\varphi_4+i\omega\eta\operatorname{div}\varphi\right]dx=$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon<|x|<R} f_1[(\lambda+2\mu)\Delta\operatorname{div}\varphi+\omega^2\operatorname{div}\varphi-\gamma\Delta\varphi_4]dx+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon<|x|<R} g_1\left[\Delta\varphi_4+\frac{i\omega}{\kappa}\varphi_4+i\omega\eta\operatorname{div}\varphi\right]dx=$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon<|x|<R}\left\{[\mu\Delta f_1+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}f_1+\omega^2 f_1-i\omega\eta\operatorname{grad}g_1]\varphi+\right.$$

$$\left.+\left[\Delta g_1+\frac{i\omega}{\kappa}g_1+\gamma\operatorname{div}f_1\right]\varphi_4\right\}dx+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_S+\int_{S_\varepsilon}\right)\left\{\left[\mu\frac{\partial\varphi}{\partial n}+(\lambda+\mu)n\operatorname{div}\varphi-\gamma\varphi_4 n\right]\operatorname{grad}f_1-\left[\frac{\partial\varphi_4}{\partial n}+i\omega\eta(\varphi n)\right]g_1-\right.$$

$$\left.-\left[\mu\frac{\partial\operatorname{grad}f_1}{\partial n}+(\lambda+\mu)n\operatorname{div}\operatorname{grad}f_1\right]\varphi-\frac{\partial g_1}{\partial n}\varphi_4\right\}dS=-\operatorname{div}\varphi(0).$$

A zatem, jeżeli U spełnia równanie $LU=0$ w obszarze Ω, to na mocy wzoru (5') otrzymamy:

$$\operatorname{div}u(x^0)=-\int_S\left\{\left[Tu+\lambda Nu-\gamma u_4 n\right]\operatorname{grad}f_1+\left[\frac{\partial u_4}{\partial n}+i\omega\eta(un)\right]g_1-\right.$$

$$\left.-(\lambda+2\mu)\frac{\partial\operatorname{grad}f_1}{\partial n}u-u_4\frac{\partial g_1}{\partial n}\right\}dS \quad \text{dla } x^0\in\Omega, \tag{7}$$

$$0=\int_S\left\{\left[Tu+\lambda Nu-\gamma u_4 n\right]\operatorname{grad}f_1+\left[\frac{\partial u_4}{\partial n}+i\omega\eta(un)\right]g_1-\right.$$

$$\left.-(\lambda+2\mu)\frac{\partial\operatorname{grad}f_1}{\partial n}u-u_4\frac{\partial g_1}{\partial n}\right\}dS \quad \text{dla } x^0\notin\overline{\Omega},$$

gdzie $Tu:=2\mu\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda n\operatorname{div}u+\mu(n\times\operatorname{rot}u)$,

$Nu:=\frac{\partial u}{\partial n}-n\operatorname{div}u+(n\times\operatorname{rot}u)$.

Biorąc wektor $W_2 = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix}$, gdzie

$$f_2 = \frac{i\omega\eta}{4\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left[\frac{e^{i\lambda_1 r}}{r}-\frac{e^{i\lambda_2 r}}{r}\right],$$

$$g_2 = -\frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left\{[(\lambda+2\mu)\lambda_1^2-\omega^2]\frac{e^{i\lambda_1 r}}{r}-[(\lambda+2\mu)\lambda_2^2-\omega^2]\frac{e^{i\lambda_2 r}}{r}\right\}.$$

W podobny sposób otrzymamy

$$\begin{aligned} u_4(x^0) = -\int_S\Big\{\Big[Tu+\lambda Nu-\gamma u_4 n\Big]\operatorname{grad} f_2 + \Big[\frac{\partial u_4}{\partial n}+i\omega\eta(un)\Big]g_2 - \\ -(\lambda+2\mu)\frac{\partial \operatorname{grad} f_2}{\partial n}u - u_4\frac{\partial g_2}{\partial n}\Big\}dS \quad \text{dla } x^0\in\Omega, \\ 0 = \int_S\Big\{\Big[Tu+\lambda Nu-\gamma u_4 n\Big]\operatorname{grad} f_2 + \Big[\frac{\partial u_4}{\partial n}+i\omega\eta(un)\Big]g_2 - \\ -(\lambda+2\mu)\frac{\partial \operatorname{grad} f_2}{\partial n}u - u_4\frac{\partial g_2}{\partial n}\Big\}dS \quad \text{dla } x^0\notin\overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{8}$$

Rozważając układ równań (2), wzory Greena (6′) i przyjmując $W_3 = \begin{pmatrix} f_3 \\ g_3 \end{pmatrix}$, gdzie

$$f_3 = -\frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left[\left(\lambda_1^2-\frac{i\omega}{\kappa}\right)\frac{e^{i\lambda_1 r}}{r}-\left(\lambda_2^2-\frac{i\omega}{\kappa}\right)\frac{e^{i\lambda_2 r}}{r}\right],$$

$$g_3 = -\frac{i\gamma\omega}{4\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left[\frac{e^{i\lambda_1 r}}{r}-\frac{e^{i\lambda_2 r}}{r}\right],$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \theta(x^0) = -\int_S\Big\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial n}f_3+\frac{\partial u_4}{\partial n}g_3-(\lambda+2\mu)\theta\frac{\partial f_3}{\partial n}-u_4\frac{\partial g_3}{\partial n}\Big\}dS \quad \text{dla } x^0\in\Omega, \\ 0 = \int_S\Big\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial n}f_3+\frac{\partial u_4}{\partial n}g_3-(\lambda+2\mu)\theta\frac{\partial f_3}{\partial n}-u_4\frac{\partial g_3}{\partial n}\Big\}dS \quad \text{dla } x^0\notin\overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{9}$$

Podobnie przyjmując $W_4 = \begin{pmatrix} f_4 \\ g_4 \end{pmatrix}$, gdzie

$$f_4 = -\frac{i\omega\eta}{4\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left[\frac{e^{i\lambda_1 r}}{r}-\frac{e^{i\lambda_2 r}}{r}\right],$$

$$g_4 = -\frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left\{[(\lambda+2\mu)\lambda_1^2-\omega^2-i\omega\eta\gamma]\frac{e^{i\lambda_1 r}}{r}-[(\lambda+2\mu)\lambda_2^2-\omega^2-i\omega\eta\gamma]\frac{e^{i\lambda_2 r}}{r}\right\},$$

otrzymamy

$$u_4(x^0) = -\iint_S \left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial n}f_4 + \frac{\partial u_4}{\partial n}g_4 - (\lambda+2\mu)\theta\frac{\partial f_4}{\partial n} - u_4\frac{\partial g_4}{\partial n}\right\}dS \quad \text{dla } x^0 \in \Omega,$$

$$0 = \iint_S \left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial n}f_4 + \frac{\partial u_4}{\partial n}g_4 - (\lambda+2\mu)\theta\frac{\partial f_4}{\partial n} - u_4\frac{\partial g_4}{\partial n}\right\}dS \quad \text{dla } x^0 \notin \overline{\Omega}$$

Uwaga: Wyprowadzone wzory pozostają słuszne również dla obszarów nieograniczonych, jeśli rozwiązania spełniają odpowiednie warunki wypromieniowania. W interesujących nas zagadnieniach powierzchnia S jest płaszczyzną $x_3 = 0$, powstaje zatem problem zbieżności całek.

Przyjmując dodatnie części urojone parametrów λ_1, λ_2 możemy zagwarantować zbieżność całek, jeśli tylko wartości brzegowe funkcji u, θ i ich pochodnych są ograniczone.

3. Rozwiązanie pewnych zagadnień dla półprzestrzeni

W obszarze $x_3 \leqslant 0$ szukamy regularnego rozwiązania układu (1) spełniającego na brzegu jeden z następujących warunków

I $u_1 = h_1(x_1, x_2)$, $u_2 = h_2(x_1, x_2)$, $(Tu)_3 = h_3(x_1, x_2)$, $u_4 = h_4(x_1, x_2)$,

II $u_3 = l_1(x_1, x_2)$, $(Tu)_1 = l_2(x_1, x_2)$, $(Tu)_2 = l_3(x_1, x_2)$, $\dfrac{\partial u_4}{\partial n} = l_4(x_1, x_2)$,

gdzie $h_i(x_1, x_2)$, $l_i = (x_1, x_2)$, $i = 1, 2, 3, 4$ zadane funkcje na $x_3 = 0$. Aby otrzymać rozwiązania tych zagadnień znajdujemy najpierw $\operatorname{div} u(x)$ i $u_4(x)$.

Rozwiązanie zagadnienia I

W tym celu kładziemy w równaniu (7_1)

$$f_1 = f_1(r), \quad g_1 = g_1(r),$$

gdzie $r = \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3-x_3^0)^2}$, a w równaniu (7_2)

$$f_1 = f_1(r^*), \quad g_1 = g_1(r^*)$$

gdzie $r^* = \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3+x_3^0)^2}$.

Dla skrócenia pisma założmy $f_1(r^*) = f_1^*$, $g_1(r^*) = g_1^*$.

Otrzymamy wówczas

$$\operatorname{grad} f_1\Big|_{x_3=0} = \frac{df_1}{dr}\Big|_{r=r_0}\left(\frac{x_1-x_1^0}{r_0}i_1 + \frac{x_2-x_2^0}{r_0}i_2 - \frac{x_3^0}{r_0}i_3\right),$$

$$\operatorname{grad} f_1^*\Big|_{x_3=0} = \frac{df_1}{dr}\Big|_{r=r_0}\left(\frac{x_1-x_1^0}{r_0}i_1 + \frac{x_2-x_2^0}{r_0}i_2 + \frac{x_3^0}{r_0}i_3\right),$$

$$r_0 = r|_{x_3=0} = r^*|_{x_3=0}$$

i odpowiednio

$$\left.\frac{\partial \operatorname{grad} f_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = -\frac{x_3^0}{r_0}\left(\frac{d^2 f_1}{dr_0^2} - \frac{1}{r_0}\frac{df_1}{dr_0}\right)\bar{r}_0 + \frac{1}{r_0}\frac{df_1}{dr_0} i_3,$$

$$\left.\frac{\partial \operatorname{grad} f_1^*}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = \frac{x_3^0}{r_0}\left(\frac{d^2 f_1}{dr_0^2} - \frac{1}{r_0}\frac{df_1}{dr_0}\right)\bar{r}_0^* + \frac{1}{r_0}\frac{df_1}{dr_0} i_3,$$

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = -\frac{x_3^0}{r_0}\frac{dg_1}{dr_0},$$

gdzie

$$\bar{r}_0 = \frac{x_1 - x_1^0}{r_0} i_1 + \frac{x_2 - x_2^0}{r_0} i_2 - \frac{x_3^0}{r_0} i_3,$$

$$\bar{r}_0^* = \frac{x_1 - x_1^0}{r_0} i_1 + \frac{x_2 - x_2^0}{r_0} i_2 + \frac{x_3^0}{r_0} i_3.$$

Równania otrzymane z równań (7_1) i (7_2) po podstawieniu wyżej podanych wyrażeń odejmujemy stronami. Po uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymujemy

$$\operatorname{div} u(x^0) = 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[h_3 - \lambda\left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right) - \gamma h_4 \right] \frac{df_1}{dr_0} - \right.$$

$$\left. -(\lambda + 2\mu)\left[\left(h_1 \frac{x_1 - x_1^0}{r_0} + h_2 \frac{x_2 - x_2^0}{r_0}\right)\left(\frac{d^2 f_1}{dr_0^2} - \frac{1}{r_0}\frac{df_1}{dr_0}\right) - \frac{dg_1}{dr_0} h_4\right]\frac{x_3^0}{r_0}\right\} dx_1 dx_2. \tag{10}$$

Kładąc w równaniu (8_1) $f_2 = f_2(r)$, $g_2 = g_2(r)$, zaś w (8_2) $f_2 = f_2(r^*)$, $g_2 = g_2(r^*)$ i postępując analogicznie jak w celu otrzymania dywergencji, mamy

$$u_4(x^0) = 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[h_3 - \lambda\left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right) - \gamma h_4 \right] \frac{df_2}{dr_0}\frac{x_3^0}{r_0} - \right.$$

$$\left. -(\lambda + 2\mu)\left[\left(\frac{d^2 f_2}{dr_0^2} - \frac{1}{r_0}\frac{df_2}{dr_0}\right)\left(h_1 \frac{x_1 - x_1^0}{r_0} + h_2 \frac{x_2 - x_2^0}{r_0}\right) - \frac{dg_2}{dr_0} h_4\right]\frac{x_3^0}{r_0}\right\} dx_1 dx_2. \tag{11}$$

Aby obliczyć u_1, u_2 rzutujemy równanie (1) na osie x_1, x_2 i dochodzimy do granicznych zagadnień Dirichleta dla równania Helmholza:

$$\Delta u_i + \frac{\omega^2}{\mu} u_i = F_i(x_1, x_2, x_3), \qquad u_i|_{x_3=0} = h_i(x_1, x_2) \qquad (i = 1, 2),$$

gdzie $F_i(x_1, x_2, x_3) = -\dfrac{\lambda + \mu}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} u) + \dfrac{\gamma}{\mu}\dfrac{\partial u_4}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2)$ są znanymi już funkcjami.

Rzutując zaś równanie (1) na oś x_3, dochodzimy do zagadnienia Neumanna dla równania Helmholza

$$\Delta u_3 + \frac{\omega^2}{\mu} u_3 = F_3(x_1, x_2, x_3), \qquad \left.\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = \operatorname{div} u\Big|_{x_3=0} - \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right),$$

gdzie F_3 — dana funkcja

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_3}(\operatorname{div} u) + \frac{\gamma}{\mu}\frac{\partial u_4}{\partial x_3}.$$

Rozwiązanie zagadnienia II

Rozwiązanie zagadnienia II otrzymujemy podobnie, z tą różnicą, że równania (7_1) i (7_2) dodajemy stronami

$$\operatorname{div} u(x^0) = 2\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\left(l_2+\lambda\frac{\partial l_1}{\partial x_1}\right)\frac{x_1-x_1^0}{r_0}+\left(l_3+\lambda\frac{\partial l_1}{\partial x_2}\right)\frac{x_2-x_2^0}{r_0}\right]\frac{df_1}{dr_0}+\right.$$
$$\left.+(l_4+i\omega\eta l_1)g_1-(\lambda+2\mu)l_1\left[\left(\frac{x_3^0}{r_0}\right)^2\left(\frac{d^2f_1}{dr_0^2}-\frac{1}{r_0}\frac{df_1}{dr_0}\right)+\frac{1}{r_0}\frac{df_1}{dr_0}\right]\right\}dx_1dx_2, \tag{12}$$

$$u_4(x^0) = -2\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\left(l_2+\lambda\frac{\partial l_1}{\partial x_1}\right)\frac{x_1-x_1^0}{r_0}+\left(l_3+\lambda\frac{\partial l_1}{\partial x_2}\right)\frac{x_2-x_2^0}{r_0}\right]\frac{df_2}{dr_0}+\right.$$
$$\left.+(l_4+i\omega\eta l_1)g_2-(\lambda+2\mu)l_1\left[\left(\frac{x_3^0}{r_0}\right)^2\left(\frac{d^2f_2}{dr_0^2}-\frac{1}{r_0}\frac{df_2}{dr_0}\right)+\frac{1}{r_0}\frac{df_2}{dr_0}\right]\right\}dx_1dx_2. \tag{13}$$

Na zakończenie warto podkreślić, że wszystkie odpowiednio zmienione uwagi zawarte pod koniec pracy [8] pozostają w mocy. Fakt, iż dylatacja wyraża się w sposób stosunkowo prosty w postaci całek typu potencjałów, zważywszy na dość skomplikowaną postać macierzy $\Gamma(x, \omega, \gamma)$ rozwiązań podstawowych równań termosprężystości (patrz [1] str. 39), jest dość nieoczekiwany.

Wystarczy wspomnieć, że autorzy pracy [3] nie zwrócili na niego uwagi przy rozwiązywaniu zagadnień 5, 6.

Praca wpłynęła do Redakcji w maju 1984 (po korekcie)

Literatura

[1] W. D. Kupradze i in., *Triechmiernyje zadaczi matiematiczeskoj tieorii uprugosti*. Tbilisi 1986.

[2] W. D. Kupradze, W. W. Burczuładze, *Granicznyje zadaczi tiermouprugosti*. Diffieriencjalnyje Urawnienja, tom V, No 1, Mińsk 1969.

[3] W. D. Kupradze, T. W. Burczuładze, *Niekotoryje zadaczi tiermouprugosti rieszajemyje w kwadraturach I*. Diffieriencjalnyje Urawnienja, tom V, No 10, Mińsk 1969.

[4] W. D. Kupradze, T. W. Burczuładze, *Niekotoryje zadaczi tiermouprugosti rieszajemyje w kwadraturach II*. Diffieriencjalnyje Urawnienja, tom V, No 11, Mińsk 1969.

[5] W. Nowacki, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1966.

[6] J. Ryterski, *Równania i przekształcenia całkowe w zastosowaniu do zagadnień teorii sprężystości*, Prace IMP, z. 59, 1972.

[7] J. Ryterski, *Solutions of certain plane problems of stationary vibrations of elastic body.* Prace IMP, z. 86, 1983.

[8] J. Ryterski, *O pewnych zagadnieniach brzegowych teorii sprężystości rozwiązalnych przez kwadratury.* Prace IMP, 89, 1986.

О некоторых проблемах термоупругости прешаемых квадратурами

Резюме

Работа касается применения методов теории потенциала для определения решения краевых проблем термоупругости для случая полупространства. Применяя аппарат теории распределения выводятся фундаментальные формулы являющиеся эквивалентными формулам Грина. Благодария введению соответственных векторов основных решений получены отсюда интегральные формулы на дивергенцию перемещения и температуры. Опираясь на выведенных формулах представляются решения двух краевых проблем для полупространства.

Some Thermoelasticity Problems Solvable by Quadratures

Summary

The paper concerns application of methods of the potential theory to solution of boundary problems of thermoelasticity for a half-space. Basic relations, corresponding to the Green's formulae, have been derived based on the distribution theory methods. Use of appropriate vectors of basic solutions has led to integral formulae describing the displacement divergence and the temperature. Solutions of two boundary problems for a half-space, based on the formulae derived, have been given.