

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
I N S T Y T U T   M A S Z Y N   P R Z E P Ł Y W O W Y C H

P R A C E  
I N S T Y T U T U   M A S Z Y N  
P R Z E P Ł Y W O W Y C H

T R A N S A C T I O N S  
O F   T H E   I N S T I T U T E   O F   F L U I D - F L O W   M A C H I N E R Y

89

W A R S Z A W A - P O Z N A Ń 1989

---

P A Ń S T W O W E   W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E

**PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH**

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

\*

**THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY**

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

---

**RADA REDAKCYJNA — EDITORIAL BOARD**

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI  
STEFAN PERYCZ · WŁODZIMIERZ PROSNAK · KAZIMIERZ STELLER  
ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY — CHAIRMAN) · JÓZEF ŚMIGIELSKI

**KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS**

KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR  
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI  
ANDRZEJ ŻABICKI

**REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE**

Instytut Maszyn Przepływowych PAN  
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright  
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe  
Warszawa 1989

Printed in Poland

ISBN 83-01-07072-2  
ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 300 + 90 egz. Ark. wyd. 13,25. Ark. druk. 10,5. Papier offsetowy kl. IV, 71g.

B-1. Oddano do składania w kwietniu 1987 r. Podpisano do druku w marcu 1989 r.

Druk ukończono w grudniu 1989 r. Zam. 90/89 K-8/66

SKŁAD WYKONANO W ZAKŁADACH GRAFICZNYCH im. KEN w BYDGOSZCZY  
DRUK ZAKŁAD POLIGRAFII WSP W ZIELONEJ GÓRZE

JÓZEF ŚMIGIELSKI

Gdańsk

**Opory przepływu krótkich odcinków przewodów o stałym przekroju\***

Wyznaczono opory przepływu krótkiego odcinka przewodu o przekroju kołowym bez gradientu ciśnienia. Przy równomiernym rozkładzie prędkości na wlocie siły styczne występują tylko przy powierzchni ograniczającej. Przyjmując dla gradientu prędkości przy ścianie wyrażenie stosowane dla płaskiej płytki, ustalono zależności naprężeń stycznych, sił stycznych oraz strat ciśnienia od parametrów geometrycznych i liczby Reynoldsa.

Wyznaczono również stosunek naprężeń i sił stycznych dla różnych ośrodków. Uogólniono wyniki na kanał o przekroju pierścieniowym. Rezultaty mogą być wykorzystane przy projektowaniu różnych urządzeń przepływowych, a w szczególności elektromagnetycznych przepływomierzy pływakowych i elementów stosowanych w technice strumieniowej.

W wielu urządzeniach stosowanych w technice, takich jak elementy strumieniowe i przepływomierze pływakowe [1], występują przepływy przez krótkie odcinki przewodów, przy czym niejednokrotnie pożądana jest znajomość działającej na ściankę siły stycznej wywołanej lepkością ośrodka. Dane jakie można znaleźć w dostępnej literaturze nie nadają się jednak do bezpośredniego wykorzystania przy obliczaniu oporu tarcia na ścianie.

Przedmiotem niniejszych rozważań jest przepływ czynnika nieściśliwego przez krótki kanał o stałym, kołowym przekroju, ze szczególnym uwzględnieniem konfiguracji stosowanych w elektromagnetycznych przepływomierzach pływakowych z centralnym rdzeniem zapewniającym linearyzację wskazań [1].

Przy przepływie przez długie przewody zwykle nie uwzględnia się zwiększonych oporów tarcia na odcinku wlotowym, a stratę ciśnienia oblicza się na całej długości, tak jak dla tej części, w której przepływ jest w pełni rozwinięty, tzn. warstwa przyścienna sięga do środka przekroju. Stan taki, jak wynika z badań eksperymentalnych, jest osiągnięty dla względnej odległości od wlotu określonej zależnością

$$\frac{l_0}{D} = (0,03 \div 0,05) Re_D, \quad (1)$$

gdzie  $l_0$  — długość odcinka początkowego przewodu,  $D$  — średnica przewodu,  $Re_D$  — liczba Reynoldsa odniesiona do średnicy przewodu.

\* Praca wykonana w ramach planu C1 (badania własne placówki).



Za prędkość  $\bar{u}$ , stanowiącą podstawę przy obliczaniu  $Re_D$ , przyjmuje się średnią wynikającą z relacji

$$\int_0^{D/2} u 2\pi r dr = \bar{u} \frac{\pi}{4} D^2. \quad (2)$$

Przepływ laminarny przez przewód o przekroju kołowym można rozwiązać w sposób ogólny za pomocą równania Naviera–Stokesa. Po przekroczeniu liczby Reynoldsa

$$Re_D \cong (2,3 \div 100) 10^3 \quad (3)$$

(przy czym niższa wartość odnosi się do ostrych krawędzi na wlocie, a wyższa do wlotu zaokrąglonego), przepływ ma charakter turbulentny.

Opyry przepływu rozwiniętego określa się z zależności

$$\Delta p = f \frac{l}{D} \frac{\rho \bar{u}^2}{2}. \quad (4)$$

Wartość współczynnika oporu  $f$  wyznacza się z zakresu obrazującego ustaloną doświadczalnie zależność

$$f = f\left(Re, \frac{e}{D}\right). \quad (5)$$

Parametr  $e/D$  określa względną chropowatość powierzchni przewodu, która ma wpływ na opory przepływu turbulentnego.

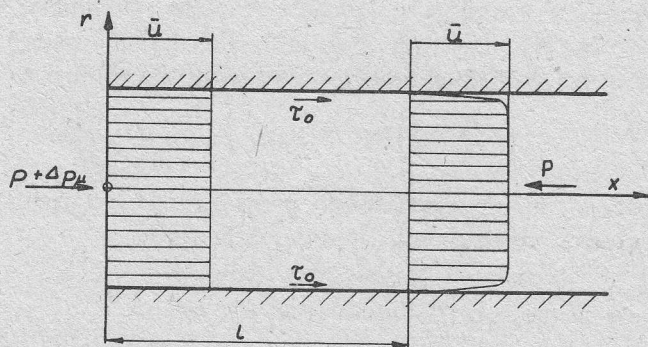
Dla przepływu laminarnego współczynnik oporu określa zależność

$$f = \frac{64}{Re_D}. \quad (6)$$

Z warunku równowagi sił działających na płyn zawarty w odcinku przewodu o długości  $l$  wynika związek (rys. 1)

$$\pi D l \tau_0 = \Delta p \frac{\pi}{4} D^2, \quad (7)$$

gdzie  $\tau_0$  — napężenie styczne na ścianie,  $\Delta p$  — różnica ciśnień na odcinku  $l$ .



Rys. 1. Rozpatrywany model przepływu na odcinku wlotowym przez kanał o przekroju kołowym

Napężenie styczne wywołane lepkością czynnika określa również zależność

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0}, \quad (8)$$

gdzie  $\mu$  — współczynnik lepkości,  $y$  — współrzędna w kierunku prostopadłym do ścianki.

Ciśnienie w całym poprzecznym przekroju przewodu zachowuje stałą wartość. Prędkość na ściance ma wartość zerową i wzrasta z odległością  $y$  aż do osiągnięcia wartości granicznej. Obszar, w którym ujawniają się siły lepkości określa się jako warstwę przyścienną. Teoria warstwy przyściennej dostarcza informacji, potwierdzonych eksperymentami, o rozkładzie prędkości dla różnych przypadków przepływu. Najbardziej wyczerpująco został zbadany przepływ wzdłuż płaskiej płytki. Uzyskane wyniki mogą być wykorzystane przy wyznaczaniu oporów tarcia w przypadku krótkiego odcinka przewodu o stałym przekroju kołowym (bez gradientu ciśnienia), wobec braku danych w postaci przydatnej do obliczeń technicznych odnoszących się bezpośrednio do tej konfiguracji.

Podobnie jak w przypadku przepływu przez przewód o przekroju kołowym, opływ płaskiej płytki może mieć charakter laminarny albo turbulentny. Na odcinku wlotowym jednak warstwa przyścienna jest zawsze laminarna [2] i przechodzi w turbulentną dopiero po przekroczeniu krytycznej wartości liczby Reynoldsa odniesionej do odległości od krawędzi płytki [2]

$$(Re_x)_{kr} = (3 \div 5) \cdot 10^5. \quad (9)$$

Są to wartości orientacyjne odpowiadające warunkom najczęściej spotykanym w technice, ale  $(Re_x)_{kr}$  może dochodzić nawet do  $3 \cdot 10^6$  przy bardzo niskim stopniu turbulencji.

Na krótkim odcinku przewodu grubość warstwy przyściennej jest bardzo mała w stosunku do średnicy, można więc przyjąć, że w prawie całym przekroju prędkość ma stałą wartość  $\bar{u}$ , a siły lepkości ujawniają się tylko w pobliżu ścianki ograniczającej (rys. 1).

Rozwiązanie Blasiusa, uściślone później przez Howartha [2], uzyskane dla płaskiej płytki prowadzi do relacji określającej normalny gradient prędkości na ściance w postaci

$$\left( \frac{du}{dy} \right)_0 = c \bar{u} \sqrt{\frac{\bar{u} \rho}{\mu x}}, \quad (10)$$

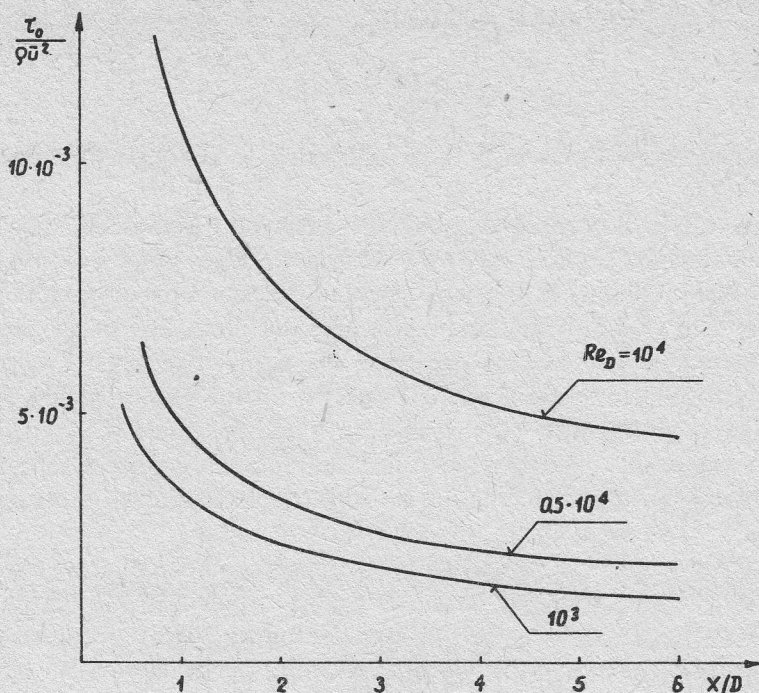
przy czym stały współczynnik ma wartość

$$c = 0,332. \quad (11)$$

Uwzględniając (8) i (10) napężenie styczne  $\tau_0$  na ściance można określić w formie bezwymiarowej zależnością

$$\frac{\tau_0}{\rho \bar{u}^2} = c \left( \frac{D}{x} \right)^{1/2} Re_D^{-1/2}, \quad (12)$$

której przebieg graficzny pokazano na rysunku 2 dla  $c = 0,332$ .



Rys. 2. Zależność naprężeń stycznych na ścianie od odległości i liczby Reynoldsa

Porównując naprężenia styczne  $\tau_0$  na ścianie dla przepływu na krótkich odcinkach przewodu, określone gradientem ciśnienia (10) i dla przepływu rozwiniętego, laminarnego przy rozkładzie prędkości

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{D/2}\right)^2, \quad (13)$$

gdzie  $r$  — współrzędna promieniowa, dochodzi się przy  $\bar{u} = 1/2 u_{\max}$  do zależności

$$\frac{\tau_0}{(\tau_0)_{\text{rozv}}} = \frac{(du/dy)_0}{(du/dy)_{0, \text{rozv}}} = \frac{c}{8} \left(\frac{D}{x}\right)^{1/2} Re_D^{1/2}, \quad (14)$$

która traci sens przy  $x$  rosnącym nieograniczenie, gdyż zależność (10) odnosi się tylko do odcinka początkowego.

Stosunek sił stycznych działających na odcinku wlotowym i na takiej samej długości przewodu w przepływie rozwiniętym określa podobna zależność

$$\frac{\int_0^l \tau_0 dx}{(\tau_0)_{\text{rozv}} l} = \frac{c}{3} \left(\frac{D}{l}\right)^{1/2} Re_D^{1/2}, \quad (15)$$

z której wynika, że przyjęcie wartości gradientu prędkości na ścianie, odpowiadającego przepływowi rozwiniętemu, prowadzi dla krótkich odcinków do zaniżonych wartości sił (rys. 2).

Ustalone zależności można uogólnić na kanał pierścieniowy (rys. 3), uwzględnia-



jąc zamiast średnicy przewodu  $D$  jego średnicę hydrauliczną  $D_h$  określoną zależnością

$$D_h = D \left( 1 - \frac{d}{D} \right). \quad (16)$$

Siłę styczną  $W_\mu$ , działającą na ściankę zewnętrzną w konfiguracji przedstawionej na rysunku 3, określa relacja

$$W_\mu = \int_0^l \pi D \tau_0 dx = 2\pi c \mu \bar{u} D \frac{(l/D)^{1/2}}{(1-d/D)^{1/2}} Re_{D_h}^{1/2}. \quad (17)$$

Można ją wyrazić w formie bezwymiarowej w postaci

$$\frac{W_\mu}{\mu \bar{u} D} = 2\pi c \frac{(l/D)^{1/2}}{(1-d/D)^{1/2}} Re_{D_h}^{1/2}, \quad (18)$$

albo, po dokonaniu podstawienia

$$\bar{u} = \frac{\dot{m}}{\rho A}, \quad (19)$$

gdzie  $\dot{m}$  — masowe natężenie przepływu,  $A$  — przekrój kanału ( $A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ ),

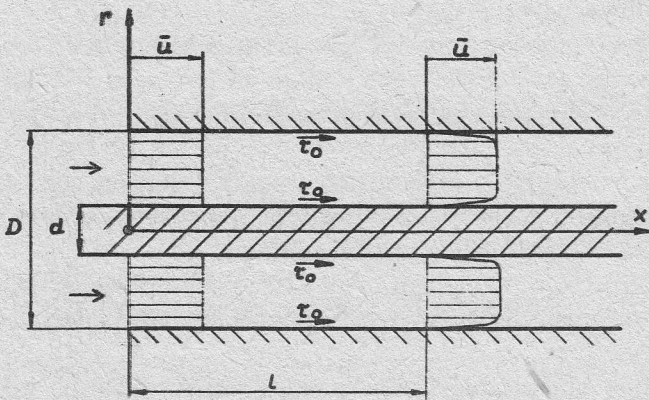
w formie alternatywnej

$$\frac{W_\mu \rho D}{\mu \dot{m}} = 8c \frac{(l/D)^{1/2}}{(1-d/D)^{1/2}} \frac{Re_{D_h}^{1/2}}{1 - (d/D)^2}. \quad (20)$$

Spadek ciśnienia  $\Delta p_\mu$  spowodowany naprężeniami stycznymi na ściankach w kanale pierścieniowym o długości  $l$  określa zależność

$$\Delta p_\mu \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \int_0^l \tau_0 \pi (D + d) dx \quad (21)$$

przy założeniu, że naprężenia styczne  $\tau_0$  na obu ściankach są jednakowe. Można go również wyrazić za pomocą siły  $W_\mu$  działającej na ściankę zewnętrzną (plywak przepływomierza) w postaci



Rys. 3. Rozpatrywany model przepływu na odcinku wlotowym przez kanał o przekroju pierścieniowym

czywistej wartości siły  $W_\mu$  w warunkach założonych wymagałoby przeprowadzenia specjalnych badań. Może to ułatwić opracowana nowa wersja przepływomierza pływakowego z osią poziomą [5], która jednak nadaje się tylko do pomiarów w cieczach.

Przedstawiony sposób wyznaczania oporów na krótkich odcinkach przewodów wymaga przeprowadzania bardzo prostych obliczeń. Spotykane w literaturze prezentacje zagadnienia warstwy przyściennej mają charakter bardziej ogólny. Uwzględniają one warstwy przyścienne o grubości wywierającej wpływ na rozkład prędkości w całym przekroju, co ma miejsce w przewodach długich. Dla tych przypadków szczególnie duże wartości oporów na odcinku początkowym nie mają istotnego wpływu na opór całkowity. W pracy poprzestano na wykorzystaniu wyników analizy przepływu laminarnego w warstwie przyściennej na płaskiej płytce przedstawionych przez Blasiusa z poprawkami Howartha pomijając późniejsze prace (przytoczone w wykazie literatury uzupełniającej), stanowiące próby dalszych uściśleń i uogólnień, gdyż nie doprowadziły one do ustalenia zależności charakteryzujących rozkład prędkości w warstwie przyściennej w formie nadającej się do praktycznego wykorzystywania.

Praca wpłynęła do Redakcji w marcu 1984 r.

#### Literatura cytowana

- [1] J. Śmigieński, *Elektromagnetyczne, pływakowe przetworniki wydatku i ciśnienia*. PWN, Warszawa—Poznań 1980.
- [2] H. Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*. Verl. G. Braun, Kralruhe 1958.
- [3] J. Śmigieński, *Wyznaczanie charakterystycznych parametrów pływakowego przepływomierza elektromagnetycznego na zasadzie podobieństwa*. Prace IMP, z. 88, 1985.
- [4] J. Śmigieński, *Charakterystyka hydrodynamiczna elektromagnetycznego przepływomierza pływakowego*. Prace IMP, z. 89, 1986.
- [5] J. Śmigieński, *Licznik energii cieplnej*. Zgł. pat. nr P-251 006.

#### Literatura uzupełniająca

1. I. Nikuradse, *Laminare Reibungsschichten an der längs angeströmten Platte*. Monogr. Zentr. für Wiss. Berichtswesen, Berlin 1942.
2. L. Schiller, *Die Entwicklung der laminaren Grenzschichtverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen (Mit einem Anhang über den Druckverlust turbulenter Strömung beim Eintritt in ein Rohr)*. ZAMM, 2, S. 96, 1922.
3. L. Schiller, *Experimentelle Feststellungen zum Turbulenzproblem*. Phys. Zeitschr., XXIII, S. 14, 1922.
4. B. Punnis, *Zur Berechnung der laminaren Einlaufströmung im Rohr*. Diss., Göttingen, 1947.
5. L. Prnadtl, *Zur Berechnung der Grenzschichten*. ZAMM, 18, 1938, Gesammelte Abhandlungen, v. II, S. 663, Springer Verlag, Berlin 1961.
6. Th. v. Karman, *Über Oberflächenreibung von Flüssigkeiten*. Collected Works v. II, Butterworth, London 1956.
7. *Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung*. Braunschweig 1955.
8. W. Szablewski, *Berechnung der turbulenter Strömung längs der ebenen Platte*. ZAMM, 31, 10, S. 309, 1951.
9. W. Szablewski, *Berechnung turbulenter Strömung im Rohr auf der Grundlage der Mischungshypothese*. ZAMM, 31, 4-5, S. 131, 1951.
10. W. Szablewski, *Zur Theorie der laminaren Unterschicht turbulenter Grenzschichtströmung*. ZAMM, 38, 1-2, S. 1, 1958.



11. K. Nickel, *Eine einfache Abschätzung für Grenzschichten*. Ing. Arch., **31**, S. 85, 1961.
12. W. Szablewski, *Der Einlauf einer turbulenten Rohrströmung*. Ing. Arch., **XXI**, S. 323, 1953.
13. N. Scholz, *Berechnung des laminaren und turbulenten Druckabfalls im Rohreinlauf*. Chem. Ing. Tech., **32**, 5, S. 404, 1960.

## Сопротивление течения через короткие участки проводов постоянного сечения

### Резюме

Определено сопротивление течения через короткий участок провода круглого сечения без градиента давления. При равномерном распределении скорости на входе тангенциальные силы действуют только при ограничивающей поверхности. Принимая для градиента скорости при стенке выражение применяемое для плоской пластинки, устанавливаются зависимости тангенциальных натяжений, тангенциальных сил и потерь давления от геометрических параметров и от числа Рейнольдса.

Определено также отношение натяжений и тангенциальных сил для различных сред. Результаты обобщены на случай канала кольцеобразного сечения. Результаты могут быть использованы для проектирования различных проточных устройств а в особенности электромагнитных поплавковых расходомеров и элементов применяемых в струйной технике.

## The Flow Resistance of Short Constant Cross-Section Conduits

### Summary

The fluid-flow resistance of short conduits of circular cross-section without a pressure gradient has been evaluated. Tangential shearing forces acting on the wall have been determined under assumption of the velocity gradient being the same as that corresponding to the flat plate.

Relations showing the dependence of tangential stresses, forces and pressure losses on the geometric parameters and the Reynolds number have been established. The ratios of stresses and shearing forces for different media have been determined as well.

The results, which have been generalized for annular channels, may be applied in design procedures of different flow devices, and particularly of electromagnetic float flowmeters and fluidic elements.