

P O L S K A A K A D E M I A N A U K

I N S T Y T U T M A S Z Y N P R Z E P Ł Y W O W Y C H

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS

OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

93

W A R S Z A W A - P O Z N A Ń 1992

W Y D A W N I C T W O N A U K O W E P W N

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
[STEFAN PERYCZ] · WŁODZIMIERZ PROSNAK
KAZIMIERZ STELLER · ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY · CHAIRMAN)
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER – REDAKTOR – EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszersa 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Wydawnictwo Naukowe PWN Sp. z o.o.
Warszawa 1992

Printed in Poland

ISBN 83-01-10515-1
ISSN 0079-3205

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN – ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 300+80 egz.	Oddano do składania 14 I 1991 r.
Ark. wyd. 17,5. Ark. druk. 15,625	Podpisano do druku 6 V 1992 r.
Pap. offset. kl. III, 70 g 70×100 cm.	Druk ukończono w lipcu 1992 r.
Nr zam. 158/187	

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

SŁAWOMIR JANECKI

Gdańsk

Dynamika pakietów łopatek wirnikowych turbin parowych*

Podano metodę budowy równań ruchu niejednorodnych pakietów łopatek wirnikowych, połączonych ciągłymi więzami sprężystymi. Łopatki i więzy zastąpiono dowolnymi modelami jednowymiarowymi. Równania wyprowadzono metodą Ritza. Przeprowadzono klasyfikację podstawowych zadań. Podano przykład ilustrujący ogólną metodę.

Wykaz oznaczeń

A	– obszar przekroju poprzecznego,	R	– macierz tarcia,
b	– wektor obciążeń masowych,	S	– wektor naprężenia wstępnego,
C	– tensor własności sprężystych materiału,	t	– czas,
D_λ	– macierze dysypacji ($\lambda=0, 1, 2$)	T	– tensor naprężenia,
D	– praca wewnętrznych sił dysypacji układu	u	– wektor przemieszczenia punktu materialnego łopatki,
e_i	– wersory układu współrzędnych łopatki ($i=1, 2, 3$),	U	– macierz modelu łopatki,
E	– tensor odkształcenia,	v	– wektor przemieszczenia punktu materialnego więzów,
\mathcal{E}	– energia sprężysta układu,	V	– macierz modelu więzów,
h	– wektor uogólnionych obciążeń,	W	– praca obciążeń układu,
H	– wektor uogólnionych przekrojowych sił wewnętrznych,	$x = \text{col}(x_i)$	– wektor pozycyjny punktów łopatki ($i=1, 2, 3$),
k_i	– wersory układu współrzędnych więzów ($i=1, 2, 3$),	X_i	– osie układu współrzędnych łopatki ($i=1, 2, 3$),
K_λ	– macierze sztywności ($\lambda=0, 1, 2$),	$y = \text{col}(y_i)$	– wektor pozycyjny punktów więzów ($i=1, 2, 3$),
\mathcal{K}	– energia kinetyczna układu,	Y_i	– osie układu współrzędnych więzów ($i=1, 2, 3$),
L	– długość łopatki (odcinka więzów),	Γ	– macierz podatności połączenia więzów z łopatkami,
m	– numer więzów w pakiecie,	v	– częstotliwość obciążeń wymuszających,
M	– liczba więzów w pakiecie,	Ω	– prędkość kątowa ruchu obrotowego,
M_λ	– macierze mas ($\lambda=0, 1, 2$),	Π	– macierz przejścia przez odcinek więzów,
n	– numer łopatki w pakiecie,	Ψ	– macierz funkcji bazowych,
N	– liczba łopatek w pakiecie,	ξ	– wektor funkcji współrzędnych układu,
p	– wektor obciążeń powierzchniowych,	ρ	– gęstość materiału,
P_λ	– macierze aerodynamicznych współczynników wpływu ($\lambda=0, 1, 2$),		
q	– wektor przemieszczeń uogólnionych,		

* Praca wykonana w ramach Centralnego Planu Badań Podstawowych 02.01 – „Podstawy mechaniki materiałów maszyn, konstrukcji i procesów technologicznych”, temat 2.15 – „Statyka i drgania elementów konstrukcyjnych turbozespołów energetycznych”.

Symbole:

w	- wskaźnik określający parametry więzów	$\nabla = \frac{\partial}{\partial \hat{x}}$	- gradient w płaszczyźnie przekroju poprzecznego łopatki,
$()' = \frac{\partial}{\partial t}$	- pochodna względem czasu,	$()^T$	- transpozycja macierzy,
$()' = \frac{\partial}{\partial x}$	- pochodna przestrzenna po długości łopatki,	tr	- zwiężenie macierzy,
		\otimes	- iloczyn tensorowy,
		\times	- operacja podwójnego nasunięcia.

1. Wstęp

Łopatki wirnikowe turbin parowych łączone są w wielu przypadkach różnego rodzaju więzami sprężystymi (bandaże, druty wiążące, półki). Głównym celem takiego rozwiązania konstrukcyjnego jest odstrojenie układu od drgań rezonansowych, zmniejszenie poziomu nasprężenia w łopatkach oraz odpowiednie zorganizowanie przepływu czynnika roboczego. Łopatki wraz z więzami tworzą układ mechaniczny, którego częstości i postaci drgań własnych oraz rozkłady naprężeń w jego elementach zależą od wymiarów geometrycznych, liczby łopatek i więzów oraz od sposobu i miejsca ich połączenia.

Łopatki jednego koła wirnikowego wraz z więzami mogą tworzyć jeden układ zamknięty albo być grupowane w pakiety o różnej, skończonej liczbie łopatek. Pakietyzacja powoduje znaczne podwyższenie wartości najniższych częstości drgań łopatek oraz pojawienie się częstości nowych, spowodowanych wprowadzeniem dodatkowych elementów sprężystych. Widmo częstości drgań własnych pakietu jest bogatsze od widma łopatek bez więzów. Obraz drgań komplikuje również fakt, że łopatki i odcinki więzów w pakiecie, z powodów wykonania i montażu, nie są identyczne.

Podczas projektowania części przepływowej turbin zachodzi potrzeba dostatecznie dokładnego przewidywania częstości i postaci drgań własnych oraz rozkładów naprężeń w pakietach łopatek. Dokładność obliczeń, w porównaniu z wartościami mierzonymi, zależy w zasadniczy sposób od przyjętego modelu fizycznego i matematycznego łopatek i więzów i ich połączeń oraz od stosowanych metod obliczeniowych.

Problemom drgań pakietów łopatek poświęcona jest obszerna literatura. Pierwsze prace dotyczyły pakietów złożonych z łopatek nieskręconych w stanie naturalnym, o stałych i symetrycznych przekrojach poprzecznych. Pierwotnie, w celu ułatwienia obliczeń, pakiet łopatek zastępowano modelem równoważnej łopatki pojedynczej [3, 16, 17, 27], na którą w miejscu zamocowania więzów działają odpowiednie siły i momenty reakcyjne części odciętych. Metodę tę rozszerzano na łopatki o zmiennych i skręconych profilach [10, 25, 27, 28]. W kolejnych pracach pakiet zastępowano modelem ramy złożonej z identycznych łopatek o stałych [4, 11, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 27] i zmiennych [1, 12, 26, 29, 31, 32] przekrojach.

W większości tych prac zakładano symetrię przekrojów poprzecznych łopatek, dopuszczając pokrywanie się ich środków ciężkości i sztywności. W wielu pracach analizowano wpływ różnych parametrów na widmo częstości drgań własnych. W publikacjach [20, 26] badano wpływ rozciągania, w [13, 15] – wpływ zakrzywienia więzów łączących łopatki, a w [2, 7, 8, 12] – wpływ położenia, masy i sztywności więzów oraz liczby łopatek w pakiecie. W pracy [11] uzasadniono potrzebę uwzględniania ścinania na odkształcenia bandaża, a w [9] – rozważania drgań układu złożonego z tarczy i pakietów łopatek. W pracy [24] podano w ogólnej postaci problemy drgań wieńców łopatkowych połączonych różnego rodzaju więzami w jeden układ zamknięty.

W większości cytowanych prac łopatki i więzy zastępowano odpowiednimi modelami jednowymiarowymi, jedynie w nielicznych [2, 12] posługiwano się modelami dwuwymiarowymi (płytkowymi, powłokowymi). Jest to uzasadnione tym, że przy stosowaniu modeli jednowymiarowych otrzymuje się wyniki dostatecznie dokładne dla praktyki przy niskich kosztach obliczeń.

W obliczeniach stosowano różne sposoby numeryczne. Początkowo wykorzystywano różne warianty macierzy przejścia [4, 10, 11, 14, 18, 22, 31], następnie metodę elementów skończonych [2, 12, 15, 20] i metodę numerycznego całkowania równań różniczkowych ruchu [29, 32]. Prostą i skuteczną metodą jest metoda bezpośrednia rachunku wariacyjnego [26].

Wymienione powyżej prace (oprócz [32]) dotyczą drgań pakietów złożonych z identycznych łopatek i jednakowych odcinków więzów. W rzeczywistości, na skutek błędów wykonania i montażu, występują różnice w geometrii oraz rozkładzie mas i sztywności elementów pakietów łopatkowych. Wszystko to powoduje, że obraz drgań pakietu naturalnego może różnić się znacznie od drgań pakietu idealnego.

W niniejszej pracy przedstawiono ogólną metodę budowy równań i rozwiązania podstawowych zadań dynamiki pakietów, złożonych z różnych łopatek połączonych dowolną liczbą więzów sprężystych. W analizie matematycznej łopatki i więzy zastąpiono dowolnymi modelami jednowymiarowymi ośrodka ciągłego. Równania ruchu wyprowadzono posługując się metodami wariacyjnymi. Przeprowadzono klasyfikację zadań dynamiki pakietów łopatkowych. Podaną metodą zilustrowano przykładem giętnych drgań własnych pakietu złożonego z prętów o przekrojach prostokątnych.

2. Modele

Łopatki wirnikowe i łączące je więzy sprężyste są na ogół ciałami smukłymi. W opisie matematycznym drgań pakietu elementy te można zastąpić modelami jednowymiarowymi liniowymi [5]. Na ruch łopatek i odcinków więzów, traktowanych jako ciała ciągłe, nakłada się następujące więzy geometryczne:

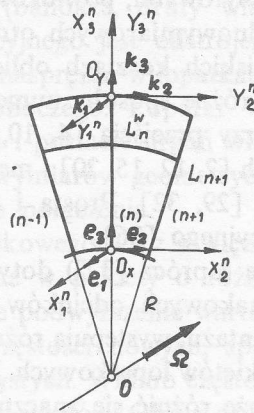
- dla n -tej łopatki pakietu

$$u_n = U_n(\hat{x}) q_n(x, t), \quad \hat{x} \in A_n, \quad x \in A_n \equiv \langle 0, L^n \rangle, \quad t \in R_+, \quad (1)$$

– dla n -tego odcinka drutu

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{V}_n(\hat{y}) \mathbf{q}_n^w(y, t), \quad \hat{y} \in A_n^w, \quad y \in A_n^w \equiv \langle 0, L_n^w \rangle \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{u}_n, (\mathbf{v}_n)$ jest wektorem przemieszczenia dowolnej cząstki łopatki (odcinka drutu), $\mathbf{U}_n, (\mathbf{V}_n)$ – znaną funkcją macierzową, określającą model łopatki (odcinka drutu), $\mathbf{q}_n, (\mathbf{q}_n^w)$ – wektor przemieszczeń uogólnionych łopatki (odcinka drutu), $\hat{x}, (\hat{y})$ – wektor pozycyjny cząstki w przekroju poprzecznym $A_n, (A_n^w)$ łopatki (odcinka drutu), $x, (y)$ – współrzędna wzdłuż długości łopatki (odcinka drutu), $L_n, (L_n^w)$ – długość łopatki (odcinka drutu) oraz t – czas. W zależności od postaci funkcji \mathbf{U}_n i \mathbf{V}_n oraz liczby współrzędnych wektorów przemieszczeń uogólnionych \mathbf{q}_n i \mathbf{q}_n^w mamy do czynienia z różnymi modelami jednowymiarowymi, liniowymi. Konkretyzacja modeli jest potrzebna w praktycznych obliczeniach. Ich wybór zależy od geometrii pakietu oraz rodzaju zadania.



Rys. 1. Szkic wycinka pakietu łopatek

Na elementy konstrukcyjne pakietu działają obciążenia masowe spowodowane ruchem obrotowym wirnika oraz obciążenia powierzchniowe wywołane przepływem czynnika roboczego przez kanały międzyłatkowe części przepływowej turbiny.

Intensywność spowodowanych ruchem obrotowym, obciążeń masowych, działających na cząstkę materialną łopatki wynosi [5]

$$\mathbf{b}_n = -2\Omega \dot{\mathbf{u}}_n - (\dot{\Omega} + \Omega^2)(\mathbf{x} + \mathbf{u}_n), \quad \mathbf{x} \in A_n \times A_n, \quad (3)$$

gdzie \mathbf{x} jest wektorem pozycyjnym punktu materialnego łopatki będącej w konfiguracji nieodkształconej,

$$\Omega = \varepsilon_{ijk} \Omega_i \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad \Omega^T = -\Omega \quad (4)$$

jest tensorem prędkości ruchu obrotowego, ε_{ijk} – symbolem permutacyjnym, Ω_i są składowymi wektora prędkości obrotowej, zaś \mathbf{e}_j są wersorami ruchomego układu współrzędnych. W przypadku ruchu obrotowego dookoła osi prostopadłej do osi łopatki (rys. 1) mamy $\Omega_1 = -\Omega, \Omega_2 = \Omega_3 = 0$ i wtedy

$$\Omega = -\Omega \mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{I}^T = -\mathbf{I}. \quad (5)$$

Obciążenia masowe działające na więzy określone wynoszą analogicznie

$$\mathbf{h}_n^w = -2\Omega\dot{\mathbf{v}}_n - (\dot{\Omega} + \Omega^2)(\mathbf{y} + \mathbf{v}_n), \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}_n^w \times \mathbf{A}_n^w, \quad (6)$$

gdzie \mathbf{y} jest wektorem pozycyjnym punktu materialnego odcinka drutu.

Przy opływie drgającej n -tej łopatki pakietu, rozkład ciśnień na jej powierzchni można przedstawić [5] związkiem

$$\mathbf{p}_n = \bar{\mathbf{p}}_n + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\mathbf{P}_0^j \mathbf{u}_j + \mathbf{P}_1^j \dot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{P}_2^j \ddot{\mathbf{u}}_j), \quad \mathbf{p} = \text{col}(p_\alpha), \quad (7)$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{p}}_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{p}}_n^k(\mathbf{x}) \exp i(v_n^k t + \varphi_n^k) \quad i = \sqrt{-1}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{A}_n \times \partial \mathbf{A}_n \quad (8)$$

jest wektorem ciśnienia działającego na łopatkę nieruchomą; $\bar{\mathbf{p}}_n^k$, v_n^k , φ_n^k są odpowiednio amplitudą, częstotliwością kątową i kątem fazowym k -tej harmonicznej rozkładu ciśnienia na n -tej łopatce pakietu. Pozostałe składniki są wynikiem wzajemnego oddziaływania drgających łopatek w przepływie. Macierze \mathbf{P}_λ^j , ($\lambda=0,1,2$) określają niezachowawcze oddziaływanie przepływu na drgającą łopatkę. Zależą one od kąta natarcia, prędkości przepływu czynnika, liczby Macha, Reynoldsa i Strouhala oraz od geometrii łopatek i palisady łopatek wirujących. Macierze te na ogół są niesymetryczne.

Działające obciążenia statyczne powodują wstępne napięcie elementów konstrukcyjnych pakietu łopatek. W związku z tym, w opisie materiału łopatek i odcinków więzów stosować będziemy następujący związek pomiędzy stanem naprężenia \mathbf{T}_n a stanem odkształcenia \mathbf{E}_n

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{S}_n + \mathbf{C}_n \times \mathbf{E}_n + \mathbf{D}_n \times \dot{\mathbf{E}}_n, \quad (9)$$

gdzie \mathbf{S}_n jest tensorem naprężeń wstępnych, \mathbf{C}_n i \mathbf{D}_n są kolejno tensorami własności sprężystych i tłumiących materiału n -tej łopatki, lub n -tego odcinka drutu.

Łopatki wirnikowe w pakiecie połączone są między sobą odcinkami więzów oraz utwierdzone w tarczy wirnikowej. Pomiędzy tymi elementami konstrukcyjnymi zachodzi wzajemne oddziaływanie w miejscach ich połączenia. Zakładamy, że na końcach odcinka drutu, znajdującego się pomiędzy dwiema łopatkami pakietu, zachodzą związki

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n^w &= \Gamma_n \mathbf{q}_n, & x &= x_m^w, y = 0 \\ \mathbf{q}_m^w &= \Gamma_{n+1} \mathbf{q}_{n+1}, & x &= x_m^w, y = L_{n,m}^w \end{aligned} \quad (10)$$

dla wektorów przemieszczeń uogólnionych; x_m^w jest współrzędną miejsca przyłączenia n -tego odcinka m -tego drutu do łopatki.

Zakładając będziemy, że punkty zamocowania odcinków danego drutu do wszystkich łopatek pakietu mają taką samą współrzędną x_m^w . Macierze Γ_n i Γ_{n+1} są macierzami podatności połączenia odcinka drutu z n -tą i $n+1$ łopatką pakietu. Ich wymiar zależy od założonych modeli łopatki i więzów oraz przyjętych hipotez fizycznych ich połączenia. Związki (10) można uogólnić biorąc pod uwagę tarcie na powierzchniach styku elementów.

Uwzględniając podatność i tarcie w miejscu zamocowania łopatek w tarczy, warunki brzegowe utwierdzenia łopatki można określić związkiem

$$\mathbf{H}_n^0 = \mathbf{K}_0^n \mathbf{q}_n + \mathbf{R}_0^n \dot{\mathbf{q}}_n, \quad x = 0 \quad (11)$$

pomiędzy wektorem przekrojowych sił wewnętrznych \mathbf{H}_n^0 oraz wektorem przemieszczeń uogólnionych \mathbf{q}_n występujących w granicznym przekroju n -tej łopatki. \mathbf{K}_0^n i \mathbf{R}_0^n są odpowiednio macierzami sztywności i tarcia, opisującymi oddziaływanie tarczy na łopatkę w miejscu ich połączenia. Zależą one od własności materiałowych łopatki i tarczy oraz od geometrii połączenia. Macierz sztywności jest symetryczna. Dla połączenia idealnie sztywnego, izolującego łopatki od tarczy wirnikowej; mamy

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{0}, \quad x = 0. \quad (12)$$

W przypadku, kiedy pakiet łopatek jest bez bandaża, to wierzchołki łopatek są nieobciążone. Spełniony jest wówczas warunek brzegowy

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{0}, \quad x = L_n \quad (13)$$

dla przekrojowych sił wewnętrznych.

3. Podstawowe związki

Mając modele konstrukcyjne łopatek, więzów i połączeń oraz modele materiału i obciążeń, można ustalić ogólne równania ruchu pakietu łopatek. Wygodnie jest je wyprowadzić z ogólnych zasad energetycznych mechaniki ośrodków ciągłych, np. z zasady Hamiltona [5],

$$\bigwedge_{t \in <t_1, t_2>} \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{E} + \mathcal{E}_s - \mathcal{X}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta (W - D) dt \quad (14)$$

dla ciała liniowo lepko-sprężystego i wstępnie napiętego, gdzie

$$\mathcal{E} = \int_B \frac{1}{2} \mathbf{C} \times (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) dV, \quad \mathcal{E}_s = \int_B (\mathbf{S} \times \mathbf{E}) dV, \quad \mathcal{X} = \int_B \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} dV \quad (15)$$

są kolejno energią sprężystą, energią napięcia wstępnego i energią kinetyczną ciała B , natomiast δW i δD są wariacjami prac obciążeń zewnętrznych i sił wewnętrznych dysypatywnych. Dane są wzorami

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_B \rho \mathbf{b} \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial B} \mathbf{p} \delta \mathbf{u} d(\partial V), \\ \delta D &= \int_B (\mathbf{T}_D \times \delta \mathbf{E}) dV, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie $\mathbf{T}_D = \mathbf{D} \times \dot{\mathbf{E}}$ jest częścią dysypatywną tensora naprężenia.

W przypadku pakietu łopatek, złożonego ze skończonej liczby N łopatek połączonych liczbą M więzów sprężystych, energie i prace całego układu zapisujemy w postaci

$$(\mathcal{E}, \mathcal{X}, D, W) = \sum_{n=1}^N (\mathcal{E}, \mathcal{X}, D, W)_n + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M (\mathcal{E}, \mathcal{X}, D, W)_{m,n}^w. \quad (17)$$

Dla liniowych, jednowymiarowych modeli (1) i (2) energie i prace sił działających na n -tą łopatkę pakietu można przedstawić związkami [6]

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n &= \frac{1}{2} \int_0^{L_n} (\mathbf{q}_n \mathbf{K}_0^n \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_n \mathbf{K}_1^n \mathbf{q}'_n + \mathbf{q}'_n (\mathbf{K}_1^n)^T \mathbf{q}_n + \mathbf{q}'_n \mathbf{K}_2^n \mathbf{q}'_n) dx, \\ \mathcal{E}_{sn} &= \frac{1}{2} \int_0^{L_n} (\mathbf{q}_n \mathbf{K}_{0s}^n \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_n \mathbf{K}_{1s}^n \mathbf{q}'_n + \mathbf{q}'_n (\mathbf{K}_{1s}^n)^T \mathbf{q}_n + \mathbf{q}'_n \mathbf{K}_{2s}^n \mathbf{q}'_n) dx, \\ \mathcal{X}_n &= \frac{1}{2} \int_0^{L_n} \dot{\mathbf{q}}_n \mathbf{M}_0^n \dot{\mathbf{q}}_n dx, \\ \delta D_n &= \int_0^{L_0} [(\mathbf{D}_0^n \dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{D}_1^n \dot{\mathbf{q}}'_n) \delta \mathbf{q}_n + ((\mathbf{D}_1^n)^T \dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{D}_2^n \dot{\mathbf{q}}'_n) \delta \mathbf{q}'_n] dx, \\ \delta W_n &= \int_0^{L_n} (\tilde{\mathbf{h}}_n + \mathbf{h}_n) \delta \mathbf{q}_n dx + \mathbf{H}_n^0 \delta \mathbf{q}_n |_{x=0},\end{aligned}\quad (18)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{h}}_n = \int_{A_n} \rho_n \mathbf{U}_n^T \mathbf{b}_n dA, \quad \mathbf{h}_n = \int_{\partial A_n} \mathbf{U}_n^T \mathbf{p}_n d(\partial A) \quad (19)$$

są uogólnionymi obciążeniami masowymi i powierzchniowymi. Ostatni składnik we wzorze (18) dla wariacji pracy sił obciążeń określa pracę sił reakcyjnych wywołanych oddziaływaniem wirnika w miejscu ich połączenia.

Macierze sztywności \mathbf{K}_λ^n i $\mathbf{K}_{\lambda s}^n$ ($\lambda=0, 1, 2$) oraz macierz mas \mathbf{M}_0^n są zdefiniowane w pracy [5] i dane wzorami

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_0^n &= \int_{A_n} [\nabla \mathbf{U}_n^T \times \mathbf{C}_n \times (\nabla \mathbf{U}_n)^{(2,3)}] dA, \quad (\mathbf{K}_0^n)^T = \mathbf{K}_0^n, \\ \mathbf{K}_1^n &= \int_{A_n} [\nabla \mathbf{U}_n^T \times \mathbf{C}_n \times (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{U}_n)] dA, \\ \mathbf{K}_2^n &= \int_{A_n} [(\mathbf{U}_n^T \otimes \mathbf{e}_3) \times \mathbf{C}_n \times (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{U})] dA, \quad (\mathbf{K}_2^n)^T = \mathbf{K}_2^n,\end{aligned}\quad (20)$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{0s}^n &= \int_{A_n} \text{tr} [(\nabla \mathbf{U}_n^T) \mathbf{S} (\nabla \mathbf{U}_n^T)^{(1,3)}] dA, \quad (\mathbf{K}_{0s}^n)^T = \mathbf{K}_{0s}^n, \\ \mathbf{K}_{1s}^n &= \int_{A_n} \text{tr} [(\nabla \mathbf{U}_n^T) \mathbf{S} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{U}_n)] dA, \\ \mathbf{K}_{2s}^n &= \int_{A_n} \text{tr} [(\mathbf{U}_n^T \otimes \mathbf{e}_3) \mathbf{S} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{U}_n)] dA, \quad (\mathbf{K}_{2s}^n)^T = \mathbf{K}_{2s}^n.\end{aligned}\quad (21)$$

Symbolem ∇ oznaczono operację gradientu względem wektora $\hat{\mathbf{x}}$ pozycyjnego cząstki materialnej w określonym przekroju łopatki

$$\mathbf{M}_0^n = \int_{A_n} \rho_n \mathbf{U}_n^T \mathbf{U}_n dA, \quad (\mathbf{M}_0^n)^T = \mathbf{M}_0^n. \quad (22)$$

Macierze dysypacji D_1^n są określane wzorami analogicznymi do wzorów (20). Wystarczy zastąpić w nich tensor C_n tensorem D_n . W dalszym ciągu będziemy przyjmować, że wszystkie łopatki pakietu wykonane są z tego samego materiału i są opisane jednakowymi modelami.

Wykorzystując wzory określające obciążenia masowe (3) i powierzchniowe (7) i (8) oraz siły reakcyjne (11), obciążenia (19) można napisać:

$$\tilde{h}_n = \tilde{h}_n^0 + K_n^n q_n + R_n^n \dot{q}_n, \quad (23)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n^0 &= \dot{\Omega} \int_{A_n} \rho_n U_n^T I x dA - \Omega^2 \int_{A_n} \rho_n U_n^T \hat{I} x dA, \\ K_n^n &= \dot{\Omega} M_1^n - \Omega^2 M_2^n, \quad R_n^n = 2\Omega M_1^n, \\ M_\lambda^n &= \int_{A_n} \rho_n U_n^T \hat{I}^\lambda U_n dA, \quad (\lambda=0,1,2), \\ (M_\lambda^n)^T &= (-1)^\lambda M_\lambda^n \end{aligned} \quad (24)$$

oraz

$$h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_n^k e^{i\nu_k t} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (K_a^{nj} q_j + R_a^{nj} \dot{q}_j + M_a^{nj} \ddot{q}_j), \quad (25)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n^k &= \int_{\partial A_n} U_n^T \bar{p}_n^k e^{i\phi^k} d(\partial A), \\ (K_a^{nj}, R_a^{nj}, M_a^{nj}) &= \int_{\partial A_n} U_n^T (P_0^j, P_1^j, P_2^j) U_j d(\partial A). \end{aligned} \quad (26)$$

W teorii opływu drgających palisad łopatkowych przyjmuje się, że pomiędzy drganiami łopatek występuje stałe przesunięcie fazowe [23], to znaczy, że przemieszczenie j -ej łopatki daje się wyrazić przez przemieszczenie rozważanej n -tej łopatki

$$q_j = q_n e^{i(j-n)\sigma}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (27)$$

gdzie σ jest stałym kątem przesunięcia fazowego. Wtedy obciążenia powierzchniowe można przedstawić

$$h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_n^k e^{i\nu_k t} + K_a^n q_n + R_a^n \dot{q}_n + M_a^n \ddot{q}_n, \quad (28)$$

gdzie

$$(K_a^n, R_a^n, M_a^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (K_a^{nj}, R_a^{nj}, M_a^{nj}) e^{i(j-n)\sigma}. \quad (29)$$

Wykorzystując (11), (23) i (28) pracę obciążeń można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \delta W_n &= \delta \int_0^{L_n} (\tilde{h}_{on} q_n + \sum_{h=-\infty}^{\infty} h_n^h q_n e^{i\nu_h t} - \frac{1}{2} \Omega^2 q_n M_2^n q_n) dx + \int_0^{L_n} \delta q_n (\Omega M_1^n q_n + \\ &+ 2\Omega M_1^n \dot{q}_n) dx + \int_0^{L_n} \delta q_n (K_a^n q_n + R_a^n \dot{q}_n + M_a^n \ddot{q}_n) dx + \delta q_n (K_0^n q_n + R_0^n \dot{q}_n)|_{x=0}. \end{aligned} \quad (30)$$

Traktując warunki złączenia (10) jako warunki brzegowe dla odcinka więzów znajdującego się pomiędzy dwiema sąsiednimi łopatkami, z równań ruchu dla tego odcinka można wyznaczyć wektor przemieszczeń uogólnionych dowolnego jego punktu materialnego w zależności od wektorów przemieszczeń uogólnionych cząstek łopatek w miejscach dołączenia końców odcinka więzów

$$\mathbf{q}_n^w = \Pi_n(y) \mathbf{q}_n(x^w) + \Pi_{n+1}(y) \mathbf{q}_{n+1}(x^w), y \in \langle 0, L_n^w \rangle, \quad (31)$$

gdzie Π_n i Π_{n+1} są odpowiednimi macierzami zależnymi od geometrii i własności materiałowych oraz założonego modelu więzów.

W rozważaniach drgań pakietów łopatek maszyn przepływowych można przyjąć, że przemieszczenia odcinków więzów, spowodowane ruchami łopatek, wynikają z równań statyki. Założenie to jest uzasadnione tym, że częstości drgań własnych więzów są znacznie wyższe od częstości drgań pakietu [10, 27].

Energie oraz prace obciążeń działających na n -ty odcinek więzów określone są ważnymi dla łopatki wzorami analogicznymi do wzorów (18). Wykorzystując równanie (31) energie sprężyste i energię kinetyczną n -tego odcinka m -tej więzi można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{mn}^w &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=n}^{n+1} \bar{q}_{\alpha m}^w K_{mn}^{\alpha\beta} \bar{q}_{\beta m}^w, \\ \mathcal{E}_{smn}^w &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=n}^{n+1} \bar{q}_{\alpha m}^w K_{ms}^{\alpha\beta} \bar{q}_{\beta m}^w, \\ \mathcal{K}_{mn}^w &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=n}^{n+1} \dot{\bar{q}}_{\alpha m}^w M_{mn}^{\alpha\beta} \dot{\bar{q}}_{\beta m}^w, \end{aligned} \quad (32)$$

gdzie $\bar{q}_{\alpha m} = q_{\alpha}(x_m^w)$ oraz

$$\begin{aligned} K_{mn}^{\alpha\beta} &= \int_0^{L_{mn}^w} [\Pi_{\alpha}^T \check{K}_0^n \Pi_{\beta} + \Pi_{\alpha}^T \check{K}_1^n \Pi_{\beta} + (\Pi'_{\alpha})^T (\check{K}_1^n)^T \Pi_{\beta} + (\Pi'_{\alpha})^T \check{K}_2^n \Pi'_{\beta}] dy, \\ K_{ms}^{\alpha\beta} &= \int_0^{L_{mn}^w} [\Pi_{\alpha}^T \check{K}_{0s}^n \Pi_{\beta} + \Pi_{\alpha}^T \check{K}_{1s}^n \Pi'_{\beta} + (\Pi'_{\alpha})^T (\check{K}_{1s}^n)^T \Pi_{\beta} + (\Pi'_{\alpha})^T \check{K}_{2s}^n \Pi'_{\beta}] dy, \\ M_{mn}^{\alpha\beta} &= \int_0^{L_{mn}^w} \Pi_{\alpha}^T \check{M}_0^n \Pi_{\beta} dy. \end{aligned} \quad (33)$$

Macierze sztywności \check{K}_{λ}^w i $\check{K}_{s\lambda}^w$, ($\lambda=0, 1, 2$) oraz macierz mas \check{M}_0^n są określone odpowiednio wzorami (20), (21) oraz (22), w których zastąpiono U_n przez V_n oraz \mathbf{e}_3 przez \mathbf{k}_2 . Symbolem ' oznaczono różniczkowanie względem zmiennej y . Wariacja prac sił dysypatywnych w materiale odcinka więzów wynosi

$$\delta D_{mn}^w = \sum_{\alpha, \beta=n}^{n+1} \delta \bar{q}_{\alpha m}^w \check{D}_{mn}^{\alpha\beta} \bar{q}_{\beta m}^w, \quad (34)$$

gdzie

$$\mathring{D}_{mn}^{\alpha\beta} = \int_0^{L_{mn}^w} [\Pi_\alpha^T \mathring{D}_0^w \Pi_\beta + \Pi_\alpha \mathring{D}_1^w \Pi_\beta + (\Pi_\alpha^w)^T (\mathring{D}_1^w)^T \Pi_\beta + (\Pi_\alpha^w)^T \mathring{D}_2^w \Pi_\beta] dy. \quad (35)$$

Można pokazać, że występujące we wzorach (32) i (34) macierze są symetryczne,

$$(\mathring{K}_{mn}^{\alpha\beta})^T = \mathring{K}_{mn}^{\alpha\beta}, \quad (\mathring{M}_{mn}^{\alpha\beta})^T = \mathring{M}_{mn}^{\alpha\beta}, \quad (\mathring{D}_{mn}^{\alpha\beta})^T = \mathring{D}_{mn}^{\alpha\beta}. \quad (36)$$

Przy określaniu prac obciążeń zewnętrznych działających na więzy sprężyste pakietu uwzględniać będziemy jedynie obciążenia masowe pochodzące od ruchu obrotowego wirnika,

$$\mathring{h}_n^w = \mathring{h}_{0n}^w + \mathring{K}_\Omega^n \mathring{q}_n^w + \mathring{R}_\Omega^n \mathring{q}_n^w, \quad (37)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathring{h}_{0n}^w &= \Omega \int_{A_n^w} \rho_n^w \mathbf{V}_n^T \mathbf{I} y dA - \Omega^2 \int_{A_n^w} \rho_n^w \mathbf{V}_n^T \mathbf{I} y dA, \\ \mathring{K}_\Omega^n &= \Omega \mathring{M}_1^n - \Omega^2 \mathring{M}_2^n, \quad \mathring{R}_\Omega^n = 2\Omega \mathring{M}_1^n, \\ \mathring{M}_\lambda^n &= \int_{A_n^w} \rho_n^w \mathbf{V}_n^T \mathbf{I} \mathbf{V}_n dA, \quad (\lambda=0, 1, 2), \\ (\mathring{M}_\lambda^n)^T &= (-1)^\lambda \mathring{M}_\lambda^n. \end{aligned} \quad (38)$$

Stąd

$$\begin{aligned} \delta W_{mn}^w &= \sum_{\alpha=n}^{n+1} \delta \bar{q}_\alpha^m \mathring{h}_{0n}^w + \sum_{\alpha,\beta=n}^{n+1} \delta \bar{q}_{\alpha m} (\Omega \mathring{M}_{1mn}^{\alpha\beta} - \Omega^2 \mathring{M}_{2mn}^{\alpha\beta}) \bar{q}_m^\beta + \\ &+ \sum_{\alpha,\beta=n}^{n+1} \delta \bar{q}_\alpha^m (2\Omega \mathring{M}_{1mn}^{\alpha\beta}) \dot{\bar{q}}_{\beta m}, \end{aligned} \quad (39)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathring{h}_{0n}^w &= \int_0^{L_{mn}^w} \Pi_\alpha^T \mathring{h}_{0n}^w dy, \\ \mathring{M}_{\lambda mn}^{\alpha\beta} &= \int_0^{L_{mn}^w} \Pi_\alpha^T \mathring{M}_\lambda^n \Pi_\beta dy, \quad (\lambda=0, 1, 2), \\ (\mathring{M}_{\lambda mn}^{\alpha\beta})^T &= (-1)^\lambda \mathring{M}_{\lambda mn}^{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (40)$$

4. Ogólne równania ruchu

Mając podstawowe związki dla każdej łopatki i każdego odcinka więzów pakietu można wyprowadzić ogólne równania ruchu dla całego pakietu. W tym celu zastosujemy metodę Ritz'a wykorzystując wariacyjną zasadę Hamiltona (14). Aproxymować będziemy wektory przemieszczeń uogólnionych łopatki ciągami minimalizacyjnymi

$$\mathbf{q}^n = \Psi_n(x) \xi^n(t), \quad (41)$$

gdzie

$$\Psi_n = \text{diag} (\Psi_r^n)^T \quad (r=1, 2, \dots, R) \quad (42)$$

są macierzami zadanych funkcji bazowych ψ_{rs}^n , ($s=1, 2, \dots, \delta$), tworzących ciągi zupełne funkcji liniowo niezależnych i spełniających geometryczne warunki brzegowe. Aby uchronić się przed niestatecznością numeryczną procesu Ritz'a, funkcje bazowe winny być ortogonalne [30]. Symbolem ξ^n oznaczono we wzorze (41) wektory nieznanych funkcji czasu, spełniające warunki $\delta \xi^n = 0$ końcach przedziału $\langle t_1, t_2 \rangle$. Podstawiając (41) do związków (18) i (30), określających energie i prace obciążeń dla n -tej łopatki, mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &= \frac{1}{2} \xi^n K_{nn} \xi^n, & \mathcal{E}_{sn} &= \frac{1}{2} \xi^n K_{snn} \xi^n, \\ \mathcal{X}_n &= \frac{1}{2} \xi^n M_{0nn} \xi^n, & \delta D_n &= \delta \xi^n D_{nn} \xi^n, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\delta W_n = \delta \xi^n \{ h_n^* + K_{nn}^* \xi^n + R_{nn}^* \xi^n + M_{nn}^* \xi^n \},$$

gdzie

$$K_{nn} = \int_0^{L_n} [\psi_n^T K_0^n \psi_n + \psi_n^T K_1^n \psi_n' + (\psi_n')^T (K_1^n)^T \psi_n + (\psi_n')^T K_2^n \psi_n'] dx,$$

$$K_{snn} = \int_0^{L_n} [\psi_n^T K_{0s}^n \psi_n + \psi_n^T K_{s1}^n \psi_n' + (\psi_n')^T (K_{s1}^n)^T \psi_n + (\psi_n')^T K_{s2}^n \psi_n'] dx, \quad (44)$$

$$M_{0nn} = \int_0^{L_n} \psi_n^T M_0^n \psi_n dx,$$

$$D_{nn} = \int_0^{L_n} [\psi_n^T D_0^n \psi_n + \psi_n^T D_1^n \psi_n' + (\psi_n')^T (D_1^n)^T \psi_n + (\psi_n')^T D_2^n \psi_n'] dx,$$

oraz

$$h_n^* = \int_0^{L_n} \psi_n^T \bar{h}_{0n} dx + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{L_n} \psi_n^T \bar{h}_n^k dx \right] e^{iv^k t},$$

$$K_{nn}^* = \Omega \int_0^{L_n} \psi_n^T M_1^n \psi_n dx - \Omega^2 \int_0^{L_n} \psi_n^T M_2^n \psi_n dx + \int_0^{L_n} \psi_n^T K_a^n \psi_n dx + \psi_n^T K_0^n \psi_n |_{x=0}, \quad (45)$$

$$R_{nn}^* = 2 \Omega \int_0^{L_n} \psi_n^T M_1^n \psi_n dx + \int_0^{L_n} \psi_n^T R_a^n \psi_n dx + \psi_n^T R_0^n \psi_n |_{x=0},$$

$$M_{nn}^* = \int_0^{L_n} \psi_n^T M_a^T \psi_n dx.$$

Można pokazać, że macierze występujące we wzorach (43) na energie są symetryczne

$$(K_n^n)^T = K_{nn}, \quad (M_{0nn})^T = M_{0nn}, \quad (D_{nn})^T = D_{nn} \quad (46)$$

natomiast macierze występujące we wzorze na pracę obciążeń zewnętrznych (43) są dowolne.

Analogicznie, na podstawie wzorów (32), (34) i (39), otrzymujemy dla odcinka więzów

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^w &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=n}^{n+1} \xi^\alpha \tilde{K}_{\alpha\beta}^m \xi^\beta, \quad \xi_{smn}^w = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=n}^{n+1} \xi^\alpha \tilde{K}_{s\alpha\beta}^m \xi^\beta, \\ \mathcal{X}_{mn}^w &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=n}^{n+1} \xi^\alpha \tilde{M}_{\alpha\beta}^m \xi^\beta, \quad \delta D_{mn}^w = \sum_{\alpha, \beta=n}^{n+1} \delta \xi^\alpha \tilde{D}_{\alpha\beta}^m \xi^\beta, \\ \delta W_{mn}^w &= \sum_{\alpha=n}^{n+1} \delta \xi^\alpha \tilde{h}_\alpha^{*m} + \sum_{\alpha, \beta=n}^{n+1} \delta \xi^\alpha \tilde{K}_{\alpha\beta}^{*m} \xi^\beta + \sum_{\alpha, \beta=n}^{n+1} \delta \xi^\alpha \tilde{R}_{\alpha\beta}^{*m} \xi^\beta, \end{aligned} \quad (47)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\alpha\beta}^m &= \Psi_{\alpha m}^T \tilde{K}_{mn}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta m}, & \tilde{K}_{s\alpha\beta}^m &= \Psi_{\alpha m}^T \tilde{K}_{smn}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta m}, \\ \tilde{M}_{\alpha\beta}^m &= \Psi_{\alpha m}^T \tilde{M}_{mn}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta m}, & \tilde{D}_{\alpha\beta}^m &= \Psi_{\alpha m}^T \tilde{D}_{mn}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta m}, \\ \tilde{h}_\alpha^{*m} &= \Psi_{\alpha m}^T \tilde{h}_{0n}^\alpha, & \tilde{R}_{\alpha\beta}^{*m} &= 2\Omega \Psi_{\alpha m}^T \tilde{M}_{1mn}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta m}, \\ \tilde{K}_{\alpha\beta}^{*m} &= \Omega \Psi_{\alpha m}^T \tilde{M}_{1mn}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta m} - \Omega^2 \Psi_{\alpha m}^T \tilde{M}_{2mn}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta m}, \\ & \Psi_\alpha^m = \Psi_\alpha(x_m^w). \end{aligned} \quad (48)$$

Mając energie i prace sił dla każdej łopatkki i każdego odcinka więzów pakietu łopatek można, zgodnie ze wzorem (17), określić energie i prace sił dla całego pakietu. Wprowadzając wektor

$$\xi = \text{col}(\xi^n) \quad n=1, 2, \dots, N \quad (49)$$

złożony z wektorów funkcji nieznanych każdej łopatkki, energie dla całego układu można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \xi K \xi, & \mathcal{E}_s &= \frac{1}{2} \xi K_s \xi, \\ \mathcal{X} &= \frac{1}{2} \xi M \xi, & \delta D &= \delta \xi D \xi, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\delta W = \delta \xi f + \delta \xi K^* \xi + \delta \xi R^* \xi + \delta \xi M^* \xi,$$

gdzie

$$\begin{aligned} f = \text{col}(f_n), \quad f_n &= \begin{cases} h_n^* + \tilde{h}_n^* & \text{dla } n=1 \text{ i } n=N \\ h_n^* + 2\tilde{h}_n^* & \text{dla } n=2, \dots, N-1 \end{cases} \\ K^* = (K_{rs}^*), \quad K_{rs}^* &= \begin{cases} K_{rr}^* + \tilde{K}_{rr}^* & \text{dla } r=1 \text{ lub } N \\ K_{rr}^* + 2\tilde{K}_{rr}^* & \text{dla } r=2, 3, \dots, N-1 \\ \tilde{K}_{r,r+1}^* & \text{dla } r=1, 2, \dots, N-1 \\ \tilde{K}_{s+1,s}^* & \text{dla } s=1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{dla pozostałych wskaźników} \end{cases} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\tilde{h}_n^* = \sum_{m=1}^M \tilde{h}_n^{*m}, \quad \tilde{K}_{rs}^* = \sum_{m=1}^M \tilde{K}_{rs}^{*m}, \quad R_{rs}^* = \sum_{m=1}^M \tilde{R}_{rs}^{*m},$$

$$M^* = \text{diag}(M_{nn}^*), \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Struktura pozostałych macierzy K , K_s , D , R^* , M jest taka sama jak struktura macierzy K^* . Macierze występujące we wzorach (50), określających energie, są symetryczne,

$$K^T = K, \quad K_s^T = K_s, \quad M^T = M, \quad D^T = D. \quad (52)$$

Stosując zasadę Hamiltona (14) do związków (50), otrzymujemy ogólne równania ruchu pakietu o skończonej liczbie łopatek różniących się wymiarami geometrycznymi

$$\bar{M} \ddot{\xi} + \bar{D} \dot{\xi} + \bar{K} \xi = f, \quad (53)$$

gdzie

$$\bar{M} = M - M^*, \quad \bar{K} = K + K_s - K^*, \quad \bar{D} = D - R^*. \quad (54)$$

W ogólnym przypadku powyższe macierze są dowolne z powodu niezachowawczych oddziaływań aerodynamicznych i sił Coriolisa.

5. Zadania dynamiczne pakietu łopatek

Macierze mas, dysypacji i sztywności oraz wektor sił, spowodowane działaniem obciążeń masowych i powierzchniowych, mają następującą budowę:

$$M^* = M_a^*, \quad R^* = R_\delta^* + R_\beta^* + R_a^*, \quad K^* = K_\delta^* + K_\beta^* + K_a \quad (55)$$

oraz

$$f = f_s + \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{iv_k t}. \quad (56)$$

Litery 0 , Ω , a wskazują na pochodzenie macierzy składowych, które są spowodowane zamocowaniem, ruchem obrotowym układu i oddziaływaniem aerodynamicznym.

W zależności od postaci działających obciążeń aerodynamicznych można wyróżnić szereg zadań szczegółowych ważnych z punktu widzenia zastosowań w dynamice pakietów łopatkowych.

5.1. Statyka

Jedynymi obciążeniami są obciążenia spowodowane jednostajnym ruchem obrotowym i stałym naporem czynnika roboczego na pakiet. Wtedy mamy

$$\bar{K} \xi_s = f_s, \quad (57)$$

gdzie

$$\bar{K} = K + K_s - K_\beta^* - K_\delta^*, \quad f_s = f_\Omega^0 + f_a^0. \quad (58)$$

Równanie statyki jest równaniem nieliniowym z powodu występowania w macierzy sztywności niezerowego tensora naprężenia S . Służą one do wyznaczenia przemieszczeń i naprężeń statycznych elementów pakietu łopatek.

5.2. Drgania własne

Pomijając obciążenia powierzchniowe i oddziaływanie dysypatywne zamocowania łopatek w wirniku, otrzymujemy równanie

$$\bar{M} \ddot{\xi} + \bar{K} \xi = 0 \quad (59)$$

opisujące drgania własne pakietu, gdzie

$$\bar{M} = M, \quad \bar{K} = K + K_S - K_D^* - K_\delta^*. \quad (60)$$

Równanie (59) jest sprzężone jednostronnie z równaniem statyki (57). Macierz sztywności zależy od naprężeń statycznych. Drgania są zatem opisane na stanie napiętym pakietu obciążonego statycznie.

Napisane powyżej równanie umożliwia wyznaczenie częstości i postaci drgań własnych niejednorodnego pakietu łopatek, a w dalszej kolejności – także naprężeń względnych. Wspomniane obliczenia dostarczają informacji o możliwości występowania współbrzmienia drgań pakietu ze zmiennymi obciążeniami wymuszającymi oraz o miejscach występowania wzrostu naprężeń. Na drodze odpowiedniego doboru geometrii elementów pakietu można zapewnić bezpieczniejszą pracę układu.

5.3. Drgania wymuszone

Uwzględniając tłumienie aerodynamiczne i obciążenia powierzchniowe, periodycznie zmienne, mamy

$$\bar{M} \ddot{\xi} + \bar{D} \dot{\xi} + \bar{K} \xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{i\nu_k t}, \quad (61)$$

gdzie

$$\bar{D} = D - R_\delta^* - R_a^*. \quad (62)$$

Macierze mas i sztywności są takie same jak w przypadku poprzednim. Powyższe równanie daje podstawę do wyznaczenia przemieszczeń i naprężeń dynamicznych w funkcji częstości drgań. W obecnym stanie wiedzy o obciążeniach palisad łopatkowych dokładne określenie wspomnianych wielkości napotyka poważne trudności. Wyznacza się je jedynie posługując się uproszczonymi modelami obciążeń.

5.4. Drgania samowzbudne bez oderwania przepływu

W przypadku występowania jedynie obciążeń niezachowawczych otrzymujemy równanie

$$\bar{M} \ddot{\xi} + \bar{D} \dot{\xi} + \bar{K} \xi = 0, \quad (63)$$

gdzie

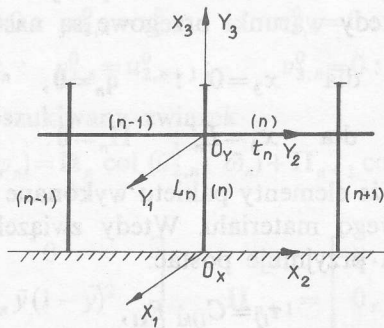
$$\bar{M} = M - M_a^*, \quad \bar{D} = D - R_\delta^* - R_D^* - R_a^*, \quad \bar{K} = K + K_S - K_\delta^* - K_D^* - K_a^* \quad (64)$$

są macierzami zespolonymi. Powyższe równanie ruchu daje podstawę do wy-

znaczenia prędkości krytycznej przepływu, przy której inicjowana jest niestateczność drgań niejednorodnego pakietu łopatek. Odpowiadającą jej częstość drgań nazywa się częstością krytyczną. Wyznaczenie wspomnianych wielkości wymaga dokładnej znajomości drgań łopatek oraz kątów przesunięcia fazowego pomiędzy różnymi ich ruchami. Stąd w obliczeniach istnieje potrzeba uwzględnienia sił żyroskopowych, wpływających istotnie na wartości kątów przesunięć fazowych. Sprzężenie ruchów łopatek pakietu w rozważanym przypadku komplikuje się. Odbywa się ono poprzez więzy sprężyste oraz przez przepływający czynnik roboczy. Pojawienie się flutteru, niestateczności drgań spowodowanej przepływem, stanowi poważne zagrożenie dla niezawodności pracy pakietów. W tym przypadku łopatki drgają z częstościami bliskimi częstościom pierwszych postaci drgań własnych. Dlatego stosunkowo słabe siły gazodynamiczne mogą prowadzić do szybkiego narastania naprężeń i zniszczenia pakietu.

6. Przykład

W celu ilustracji przedstawionej metodyki podamy algorytm dla giętych drgań własnych niewirującego pakietu z jedną więzią, złożonego z N prętów nieskręconych i posiadających bisymetryczne przekroje poprzeczne (rys. 2). Przy powyższym



Rys. 2. Szkic pakietu płaskiego z jedną więzią

założeniu łopatki i odcinki więzi zginane będą w płaszczyźnie pakietu. Dla uproszczenia rozważań przyjmujemy, że wszystkie łopatki opisane są takimi samymi modelami. Podobne założenie czynimy dla odcinków więzi. Pomijając rozciąganie i ścinanie dla każdej łopatki pakietu przyjmujemy

$$\mathbf{q}_n = \text{col}(u_2^0, \omega_1), \quad \mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}, \quad (65)$$

gdzie u_2^0 jest ugięciem osi łopatki, natomiast $\omega_1 = -\partial u_2^0 / \partial x_3$ jest jej kątem zgięcia.

Dla odcinka więzi sprężystej przyjmujemy

$$\mathbf{q}_n^w = \text{col}(v_2^0, v_3^0, \varphi_1), \quad \mathbf{V}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -y_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (66)$$

gdzie v_2^0 – przemieszczenie wzdłużne, v_3^0 – ugięcie osi odcinka więzi oraz $\varphi_1 = \partial v_3^0 / \partial y_2$ jest jej kątem zgięcia. Model połączenia końców wszystkich odcinków więzi z łopatkami jest jednakowy. Przyjmujemy

$$\text{dla } y_2 = 0 \text{ i } x_3 = x_3^w : \quad \mathbf{q}_n^w = \Gamma_n \mathbf{q}_n, \quad (67)$$

$$\text{dla } y_2 = t_n \text{ i } x_3 = x_3^w : \quad \mathbf{q}_n^w = \Gamma_{n+1} \mathbf{q}_{n+1},$$

gdzie

$$\Gamma_n = \Gamma_{n+1} = \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (68)$$

zaś γ jest współczynnikiem podatności połączenia.

Zakładamy, że łopatki pakietu zamocowane są sztywno w podstawie, a ich drugi koniec jest swobodny. Wtedy warunki brzegowe są następujące:

$$\begin{aligned} \text{dla } x_3 = 0 : \quad \mathbf{q}_n &= \mathbf{0}, \\ \text{dla } x_3 = L_n : \quad \mathbf{H}_n &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (69)$$

Przyjmujemy wreszcie, że elementy pakietu wykonane są z liniowo-sprężystego, jednorodnego i izotropowego materiału. Wtedy związek pomiędzy składowymi naprężenia i odkształcenia przyjmuje postać:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}, \quad (70)$$

gdzie

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (71)$$

oznacza elementy tensora stałych materiałowych, zaś λ i μ są stałymi materiałowymi Lamego.

Wykorzystując związki (20) i (22) dla założonych modeli, otrzymujemy dla n -tej łopatki pakietu:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0^n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu A \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_1^n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu A & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_2^n &= \begin{bmatrix} \mu A & 0 \\ 0 & EJ \end{bmatrix}, & \mathbf{M}_0^n &= \rho \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (72)$$

oraz dla n -tego odcinka więzi:

$$\begin{aligned} \overset{\sim}{\mathbf{K}}_0^n &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \mu A^w \end{bmatrix}, & \overset{\sim}{\mathbf{K}}_1^n &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & -\mu A^w, & 0 \end{bmatrix}, \\ \overset{\sim}{\mathbf{K}}_2^n &= \begin{bmatrix} E A^w, & 0, & 0 \\ 0, & \mu A^w, & 0 \\ 0, & 0, & E J^w \end{bmatrix}, & \overset{\sim}{\mathbf{M}}_0^n &= \rho \begin{bmatrix} A^w, & 0, & 0 \\ 0, & A^w, & 0 \\ 0, & 0, & J^w \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (73)$$

gdzie A i J są odpowiednio polem i momentem bezwładności powierzchni przekroju poprzecznego n -tej łopatki i n -tego odcinka więzi pakietu, natomiast $E = \lambda + 2\mu$.

Korzystając z równań ruchu n -tego odcinka więzi oraz z warunków połączenia tego odcinka z sąsiadami łopatkami, uzależnimy przemieszczenia tego odcinka od przemieszczeń łopatek w miejscu ich złączenia.

Dla pakietów łopatek turbin parowych przemieszczenia odcinka więzi można wyznaczyć z dostateczną dokładnością z równań statyki [27]. W tym celu należy rozwiązać równania

$$(v_2^0)^{\text{II}} = 0, \quad (v_3^0)^{\text{IV}} = 0 \quad (74)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} \text{dla } y=0: & \quad v_{2,n}^0 = u_{2,n}^0; & \quad v_{3,n}^0 = 0: & \quad \varphi_n = \gamma \omega_n \\ \text{dla } y=t_n: & \quad v_{2,n}^0 = u_{2,n+1}^0; & \quad v_{3,n}^0 = 0: & \quad \varphi_n = \gamma \omega_{n+1}. \end{aligned} \quad (75)$$

Stąd otrzymujemy poszukiwany związek

$$\text{col}(v_{2,n}^0, v_{3,n}^0, \varphi_n) = \Pi_n \text{col}(\bar{u}_{2,n}^0, \bar{\omega}_n) + \Pi_{n+1} \text{col}(\bar{u}_{2,n+1}^0, \bar{\omega}_{n+1}), \quad (76)$$

gdzie

$$\Pi_n = \begin{bmatrix} 1 - \bar{y}, & 0 \\ 0, & \gamma t_n \bar{y} (1 - \bar{y})^2 \\ 0, & \gamma (1 - 4\bar{y} + 3\bar{y}^2) \end{bmatrix}, \quad \Pi_{n+1} = \begin{bmatrix} y, & 0 \\ 0, & -\gamma t_n \bar{y}^2 (1 - \bar{y}) \\ 0, & -\gamma \bar{y} (2 - 3\bar{y}) \end{bmatrix} \quad (77)$$

oraz $\bar{U}^0 = u^0(x_3^w)$, $\bar{\omega} = \omega(x_3^w)$, $\bar{y} = \frac{y_2}{t_n}$.

Teraz ze wzorów (33) określamy macierze sztywności i mas występujące w równaniach określających energię sprężystą i kinetyczną n -tego odcinka więzi. Zakładając, że odcinki więzi mają stały przekrój poprzeczny, po wykonaniu niezbędnych działań otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \overset{\sim}{\mathbf{K}}^{n,n} &= \begin{bmatrix} E A^w / t_n, & 0 \\ 0, & 4\gamma^2 E J^w / t_n \end{bmatrix}, & \overset{\sim}{\mathbf{K}}^{n+1,n+1} &= \overset{\sim}{\mathbf{K}}^{n,n}, \\ \overset{\sim}{\mathbf{K}}^{n,n+1} &= \begin{bmatrix} -E A^w / t_n, & 0 \\ 0, & 2\gamma^2 E J^w / t_n \end{bmatrix}, & \overset{\sim}{\mathbf{K}}^{n+1,n} &= \overset{\sim}{\mathbf{K}}^{n,n+1}, \end{aligned} \quad (78)$$

oraz

$$\begin{aligned} \bar{M}^{n,n} &= \rho \begin{bmatrix} \frac{1}{3} A^w t_n, & 0 \\ 0, & \frac{1}{30} \gamma^2 A^w t_n^3 + \frac{2}{15} \gamma^2 J^w t_n \end{bmatrix}, \\ \bar{M}^{n,n+1} &= \rho \begin{bmatrix} \frac{1}{6} A^w t_n, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{140} \gamma^2 A^w t_n^3 - \frac{1}{30} \gamma^2 J^w t_n \end{bmatrix}, \quad \bar{M}^{n+1,n} = \bar{M}^{n,n+1}, \\ \bar{M}^{n+1,n+1} &= \rho \begin{bmatrix} \frac{1}{2} A^w t_n, & 0 \\ 0, & \frac{1}{150} \gamma^2 A^w t_n^3 + \frac{2}{15} \gamma^2 J^w t_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (79)$$

W celu przeprowadzenia dyskretyzacji numerycznej metodą Ritza należy wybrać odpowiednie funkcje bazowe, aproksymujące składowe wektora przemieszczeń uogólnionych n -tej łopatki pakietu. W rozważanym przypadku za funkcje bazowe można przyjąć funkcje własne z zadania drgań giętnych belki wspornikowej o stałym przekroju poprzecznym,

$$\begin{aligned} \psi_{1s}^n &= \frac{1}{2} (1 - \alpha_s) e^{\lambda_s \zeta} + \frac{1}{2} (1 + \alpha_s) e^{-\lambda_s \zeta} - \cos \lambda_s \zeta + \alpha_s \operatorname{sh} \lambda_s \zeta, \\ \psi_{2s}^n &= \frac{1}{2} (1 - \alpha_s) e^{\lambda_s \zeta} - \frac{1}{2} (1 + \alpha_s) e^{-\lambda_s \zeta} + \sin \lambda_s \zeta + \alpha_s \operatorname{ch} \lambda_s \zeta, \end{aligned} \quad (80)$$

gdzie

$$\alpha_s = \frac{1 + 2 e^{-\lambda_s} \cos \lambda_s + e^{-2 \lambda_s}}{1 + 2 e^{-\lambda_s} \sin \lambda_s - e^{-2 \lambda_s}}, \quad \zeta = \frac{x_3}{L}. \quad (81)$$

Natomiast liczby λ_s są pierwiastkami równania $\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + 1 = 0$. Funkcje bazowe tworzą macierz $\Psi_n = \operatorname{diag}(\Psi_\alpha^n)^T$, ($\alpha = 1, 2$), gdzie $\Psi_\alpha^n = \operatorname{col}(\Psi_{\alpha s}^n)$.

Możemy teraz obliczyć z zależności (44) i (48) macierze sztywności i mas występujące we wzorach (43) i (47) dla energii sprężystej i kinetycznej n -tej łopatki i n -tego odcinka więzi pakietu. Następnie możemy zbudować macierz sztywności i macierz mas całego układu, posługując się schematem (51). Z uwagi na żmudne wyliczenia nie podajemy końcowych ich wyrażeń.

Dla założonych modeli i przedstawionego schematu postępowania został zbudowany program komputerowy liczenia częstości drgań własnych niejednorodnych pakietów łopatek. W celu weryfikacji metodyki wykonano szereg wariantów obliczeń [7] i pomiarów doświadczalnych [8] drgań pakietów złożonych z płaskowników połączonych drutem lutowanym. Między innymi badano wpływ niejednorodności konstrukcyjnej układu (różne pręty, różne odstępy pomiędzy prętami) na częstości drgań własnych pakietu. Wyniki tych analiz zestawiono w tabelach.

W tabeli 1 porównano wyniki obliczeń i pomiarów pakietów złożonych z płaskowników o jednakowych wymiarach; $L = 0,25$ m, $a \times h = 0,0354 \times 0,0045$ m, wykonanych ze stali o stałych materiałowych: $E = 2,16 \cdot 10^5$ MPa, $\rho = 7,75 \cdot 10^3$ Ns²/m⁴. W wierszu pierwszym tabeli analizowano pakiet złożony z $N = 5$ prętów, w którym odstęp pomiędzy pierwszymi czterema prętami był jednakowy i wynosił $t = 0,04$ m, a odstęp między prętym czwartym i ostatnim był równy $t = 0,08$ m. W dwu kolejnych wierszach rozważano pakiety złożone z $N = 5$ i $N = 6$ prętów odległych od siebie o $t = 0,04$ m. We wszystkich przypadkach pręty połączone były drutem

o średnicy $d=0,0079$ m przyłutowanym w odległości $x^*/L=0,8$ od miejsca utwierdzenia prętów.

W tabeli 2 podano wyniki obliczeń i pomiarów dwu pakietów złożonych z $N=2$ prętów, połączonych drutem o średnicy $d=0,006$ m przyłutowanym w odległości $x^*/L=0,8$ od miejsca utwierdzenia prętów. Odstęp pomiędzy prętami wynosił $t=0,04$ m. W pierwszym przypadku jeden pręt miał kształt klina o wymiarach $L=0,25$ m, $a \times h=0,0354 \times 0,0045$ m – w miejscu zamocowania oraz $a \times h=0,025 \times 0,0045$ m – u wierzchołka, natomiast drugi pręt miał kształt prostopadłościanu o wymiarach $L=0,25$ m, $a \times h=0,0354 \times 0,0045$ m. W drugim przypadku pakiet składał się z jednakowych płaskowników o wymiarach: $L=0,25$ m, $a \times h=0,0354 \times 0,0045$ m. Inne wyniki zostały zamieszczone w [7].

Tabela 1

Niejednorodność podziałki pakietu

$$\frac{X}{L}=0,8, \quad d=7,9$$

N	Częstości $\frac{\text{Pomierzone}}{\text{Obliczone}}$ [Hz]		
	f_1	f_2	f_3
5	109,1	538,8	651,4
	—	—	—
5	111,8	539,8	661,2
	113,9	546,8	700,1
	112,3	539,8	663,7
6	114,1	544,5	703,1

Tabela 2

Niejednorodność łopatek pakietu

$$\frac{X}{L}=0,8, \quad d=6, \quad t=40$$

N	Częstości $\frac{\text{Pomierzone}}{\text{Obliczone}}$ [Hz]			
	f_1	f_2	f_3	f_4
2	108,6	456,8	560,2	990,8
	107,1	453,1	558,7	982,8
2	105,1	448,9	543,9	971,0
	102,9	444,8	541,9	962,2

Z przeglądu wyników można wnosić o przydatności przedstawionej metodyki do obliczenia częstości drgań własnych pakietów posiadających niejednorodności konstrukcyjne.

7. Uwagi końcowe

1. W obliczeniach drgań łopatek wirnikowych przyjmuje się model jednowymiarowy, który jest określony składowymi przemieszczenia,

$$u_\alpha = u_\alpha^0 - \varepsilon_{\alpha\beta} \bar{x}_\beta \omega_3, \quad (82)$$

$$u_3 = u_3^0 + \varepsilon_{\alpha\beta} \omega_\alpha x_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta} \gamma_\alpha \chi_\beta + \omega_3' \varphi$$

oraz transformacją współrzędnych układu globalnego ($0x$) i układu lokalnego ($0x_0$), związanego z głównymi osiami bezwładności każdego przekroju łopatki skręconej w stanie naturalnym o kąt ϑ_0 ,

$$\mathbf{x} = \text{col}(x_k), \quad \mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_0, & -\sin \vartheta_0, & 0 \\ \sin \vartheta_0, & \cos \vartheta_0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

gdzie u_k^0 , ($k=1, 2, 3$) są składowymi przemieszczenia osi, ω_k są kątami obrotu przekrojów poprzecznych łopatki, γ_α – kątami odkształcenia postaciowego oraz χ_β i φ – funkcjami zgięcia i skręcania. Podobny model można przyjąć dla elementów pakietów łopatek.

2. Dla wielu modeli wektor przemieszczeń uogólnionych q^n łopatki można wyrazić poprzez wektor uogólniony przekrojowych sił wewnętrznych H^n . Ze względów numerycznych siły wewnętrzne wygodnie jest wtedy aproksymować ciągami minimalizującymi postaci [5]

$$H^n = \Phi^n(x) \xi^n(t), \quad (84)$$

gdzie Φ jest macierzą odpowiednich funkcji bazowych dla składowych sił wewnętrznych. Postępowanie takie polepsza dokładność i zbieżność obliczeń numerycznych.

Praca wpłynęła do Redakcji w lutym 1988 r.

Literatura

- [1] Belohradsky H. J., *Ansätze zur Berechnung der Biege- und Torsionseigenfrequenzen von formschlüssig paketierten Dampfturbinenschaufeln*. Schiffstechnik 28, 1981.
- [2] Bernante R., Macchi A., Magneschi P., *Effect of packeting on turbine blades vibrations*. Proc. Int. Conf. Rotor Dynamic Problems in Power Plants, Rome 1982.
- [3] Biezano C. B., Grammel R., *Technische Dynamik*, J. Springer, Berlin 1939.
- [4] Deak A. L., Baird R. D., *A procedure for calculating the packet frequencies of steam turbine exhaust blades*. J. Eng. for Power 4, 1963.
- [5] Janecki S., *Dynamika wolnośnośnych łopatek wirnikowych ostatnich stopni turbin parowych*. Zesz. Nauk. IMP – PAN, nr 105/1010/80, Gdańsk 1980.
- [6] Janecki S., *Funkcja Lagrange'a i zasada Hamiltona dla liniowych, jednowymiarowych układów ciągłych poddanych działaniu obciążeń niezachowawczych*. Prace IMP, z. 79, 1980.
- [7] Janecki S., *Drgania swobodne niejednorodnych pakietów łopatek wirnikowych maszyn przepływowych*. Zesz. Nauk. Pol. Rzesz., Mechanika 12, 1985.
- [8] Kopeć K., *Doświadczalne badania drgań własnych pakietu płaskich modeli łopatek*. Oprac. Inst. Techniki Ciepłej 4862, Łódź 1984.
- [9] Lee – Tzong Chen, Dugundji J., *Investigation of the vibration characteristics of shrouded bladed disk rotor stages*. J. Aircraft 17, 7, 1980.
- [10] Łączkowski R., *Metoda macierzowa obliczania giętych drgań własnych łopatek silnie skrzyżonych*. Arch. Bud. Maszyn 1, 1967.
- [11] Mohitono Shiga, *Natural frequencies of axial vibration of turbine buckets for high pressure stage*. Bull. ISME, 16, 101, 1973.
- [12] Nagarajan P., Alvar R. S., *A three dimensional approach to blade packet vibrations*. Sound and Vibration, 95 (3), 1984.
- [13] Petyt M., Fleischer C., *Free vibration of a curved beam*. Sound and Vibration 18, 1, 1971.
- [14] Prohl M. A., *A method for calculating the vibration frequencies and stresses of a bladed group of turbine buckets*. Tr. ASME 80, 1958.
- [15] Salama A. L., Petyt M., *Dynamic response of packets of blades by the finite element method*. ASME Paper 77 – DET – 78, 1978.
- [16] Smith D. M., *Vibration of turbine blades in packets*, Prac. 7-th Int. Congress of Applied Mechanics, London 1949.

- [17] Stodola A., *Steam and gas turbines*. Peter Smith, New York, 1945.
- [18] Stüwing D., *Zur Berechnung der Eigenfrequenzen von Schaufelpaketen axialer Turbomaschinen*. Maschinenbautechnik 17, 9, 1968.
- [19] Thomas H. J., *Zur Schwingungstilgung bei Schaufelpaketen thermischer Turbomaschinen*. Konstruktion 25, 1, 1973.
- [20] Thomas J., Belek H. T., *Free vibration of blade packets*. J. Mech. Eng. Sc. 19, 1, 1977.
- [21] Tuncel O., Bueckner H. F., Koplik B., *An application of diakoptics in the determination of turbine bucket frequencies by the use of perturbations*. J. Eng. for Industry 1969.
- [22] Weaver F. L., Prohl M. A., *High-frequency vibration of steam-turbine buckets*. Trans ASME, 1, 1958.
- [23] Whitehead D. S., *Force and moment coefficients for vibrating aerofoils in cascade*. ARC R & M 3254, 1962.
- [24] Wen-hu Huang, *Free and forced vibration of closely coupled turbomachinery blades*. AIAA Journal, 19, 7, 1981.
- [25] Arkadev D. A., Karpin E. B., *Rasčet častot aksialnych kolebanij paketov lopatok s uzlami po bandažu*. Energomašinstroenie 3, 1978.
- [26] Vorob'ev Ju. S., Medvedev N. G., *Issledovanie kolebanij paketov s konečnym čislom rabočich lopatok*. Problemy pročnosti 3, 1976.
- [27] Levin A. V., *Rabočie lopatki i diski parovych turbin*. Moskva 1953.
- [28] Levin A. B., Šur S. S., *Krutil'nye kolebanija rabočich lopatok svjazannyh v paket*. Energomašinstroenie 8, 1961.
- [29] Listvinskaja L. Ch., *Rasčet vibracionnyh charakteristik paketa zakručennyh lopatok*. Problemy pročnosti 11, 1975.
- [30] Michlin S. G., *Ob ustojčivosti metoda Ritca*. DAN SSSR, 1, 1960.
- [31] Petrovski B., *Obščij metod rasčeta sobstvennyh častot paketov lopatok*. Trudy CKTI 122, 1974.
- [32] Žuravleva A. M., Petrov E. P., *Rasčet sobstvennyh kolebanij paketov turbinnnyh lopatok s učetom različija ich charakteristik*. Dinamika i pročnost' mašin 30, 1979.

Dynamics of Steam Turbine Runner Blade Cascades

Summary

A general method of forming equations of motion of nonuniform packets consisting of runner blades and any number of connecting continuous elastic joints of various type has been presented. In the mathematical analysis the blades and sections of joints are replaced by arbitrary one-dimensional continuous medium models. Flexibility of joints, rotational motion of the system and aerodynamic interactions are taken into account.

Equations of motion are developed using the Ritz variation method and the Hamilton principle. Blade packet dynamics problems have been classified. The presented method is illustrated by an example of transverse free vibrations of a packet consisting of rectangular cross-section rods. Results of numerical calculations are compared with the experimental ones.

Динамика пакетов рабочих лопаток паровых турбин

Резюме

В работе представлен общий метод построения уравнений движения неоднородных пакетов, состоящих из рабочих лопаток соединённых произвольным числом, различного рода, сплошных упругих связей. В математическом анализе лопатки и отрезки связей замещаются произвольными

