

P O L S K A      A K A D E M I A      N A U K

I N S T Y T U T   M A S Z Y N   P R Z E P Ł Y W O W Y C H

**PRACE**  
**I N S T Y T U T U   M A S Z Y N**  
**P R Z E P Ł Y W O W Y C H**

T R A N S A C T I O N S

O F   T H E   I N S T I T U T E   O F   F L U I D - F L O W   M A C H I N E R Y

93

W A R S Z A W A   -   P O Z N A Ń   1992

W Y D A W N I C T W O      N A U K O W E      P W N

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

\*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI  
STEFAN PERYCZ · WŁODZIMIERZ PROSNAK  
KAZIMIERZ STELLER · ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY · CHAIRMAN)  
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER – REDAKTOR – EDITOR  
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI  
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN  
ul. Gen. Józefa Fiszersa 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright  
by Wydawnictwo Naukowe PWN Sp. z o.o.  
Warszawa 1992

Printed in Poland

ISBN 83-01-10515-1  
ISSN 0079-3205

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN – ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 300+80 egz.	Oddano do składania 14 I 1991 r.
Ark. wyd. 17,5. Ark. druk. 15,625	Podpisano do druku 6 V 1992 r.
Pap. offset. kl. III, 70 g 70×100 cm.	Druk ukończono w lipcu 1992 r.
Nr zam. 158/187	

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

MIECZYŚLAW MISZCZUK

Lublin\*

## Studium analityczno-numeryczne płaskich przepływów cieczy lepkiej\*\*

W pracy przestudiowano nieustalony opływ cieczą lepką profilu kołowego, takiegoż profilu obracającego się ze stałą prędkością kątową wokół swej osi, a także – opływu profilu Żukowskiego.

### 1. Wprowadzenie

Jednym z godnych uwagi problemów dynamiki płynów jest niestacjonarny, lepki, nieściśliwy opływ ciała stałego. Przepływem takim rządzą równania ruchu Naviera-Stokesa, których własności uniemożliwiają znalezienie rozwiązania analitycznego. Dlatego też niezbędne jest stosowanie efektywnych, numerycznych metod rozwiązania tego zagadnienia. Metody numeryczne realizowane za pomocą współczesnych komputerów należą do tych ogólnych narzędzi badawczych, które umożliwiają otrzymanie wyników o charakterze poznawczym, uzyskanych jako rozwiązania zagadnień przepływowych, obciążonych w małym stopniu założeniami upraszczającymi. Obliczenia takie w naszych warunkach są jednak bardzo uciążliwe ze względu na brak dostępu do maszyn cyfrowych o dostatecznie dużej pamięci operacyjnej i wysokiej prędkości.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie nowych wiadomości na temat trzech przypadków przepływu cieczy lepkiej, a mianowicie przepływu wokół: 1) nieruchomego i 2) obracającego się ze stałą prędkością kątową profilu kołowego oraz 3) przepływu wokół profilu Żukowskiego. Cel ten realizowany jest poprzez:

– Przedstawienie numerycznej metody, opartej na aproksymacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia, która wydaje się efektywną dla wielu problemów mechaniki płynów, a w szczególności dla niestacjonarnych, dwuwymiarowych zagadnień przepływu cieczy lepkiej.

– Testowanie wyżej przedstawionej metody numerycznej celem wyznaczenia jej dokładności. Problemem, który dostarcza podstaw do takich studiów, jest gruntow-

\* Wydział Mechaniczny Politechniki Lubelskiej.

\*\* Praca oparta na rozprawie doktorskiej, napisanej pod kierunkiem prof. zw. dra inż. czł. rzeczywistego PAN Włodzimierza J. Prosnaka.

nie badany przepływ cieczy wokół profilu kołowego. Zakłada się, że początkowo pozostający w spoczynku w spokojnej cieczy profil impulsywnie startuje i porusza się ze stałą prędkością  $u_{\infty}$ .

– Numeryczne rozwiązanie niestacjonarnego opływu strumieniem cieczy lepkiej profilu kołowego obracającego się ze stałą prędkością kątową  $\omega$  wokół swej osi.

– Numeryczne wyznaczenie nieustalonego opływu profilu Żukowskiego strumieniem cieczy lepkiej przy zadanym, stałym kącie natarcia  $\alpha$ .

## 2. Przegląd prac pokrewnych

Problem opływu profilu kołowego cieczą lepką jest bardzo ważny ze względu na zastosowanie praktyczne i ciekawy dla badań matematycznych. Jest on często podejmowany w literaturze światowej, lecz bardzo rzadko w krajowej. Ze względu na sposób podejścia do problemu, prace te można podzielić na dwie główne klasy.

Tabela 1

Ważniejsze prace przedstawiające numeryczne rozwiązania opływu profilu kołowego cieczą lepką

Autorzy	Typ obliczeń	Zakres liczb Reynoldsa		$r_p/a$
		min.	max.	
Thom (1933)	ust.	10	20	
Allen i Southwell (1955)	ust.	0	1000	
Payne (1958)	nust.	40	100	
Kawaguti i Jain (1966)	nust.	1	100	111
Ingham (1968)	nust.	40	100	
Hamielec i Raal (1969)	ust.	1	500	10
Jain i Rao (1969)	nust.	40	200	111
Son i Hanratty (1969)	nust.	40	500	157
Takaisi (1969)	ust.	0,5	100	100
Takami i Keller (1969)	ust.	1	60	17
Thoman i Szweczyk (1969)	nust.	1	300000	18
Underwood (1969)	ust.	0,4	10	4
Dennis i Chang (1970)	ust.	5	100	39
Pruppacher, Le Clair i Hamielec (1970)	ust.	1	500	
Nieuwstadt i Keller (1973)	ust.	1	40	23
Wu i Thompson (1973)	nust.	1	120	
Panikker i Lavan (1975)	nust.	500	500	
Lin, Pepper i Lee (1976)	nust.	40	200	90
Patel (1976)	nust.	60	600	169
Daube i Ta Phouc Loc (1978)	nust.	20	300	20
Tuann i Olson (1978)	ust.	7	100	20
Fornberg (1980)	ust.	2	300	600
Ta Phouc Loc (1980)	nust.	300	1000	20
Jafroudi i Yang (1983)	ust.	0,4	40	91

ust. – przepływ ustalony, nust. – przepływ nieustalony



Tabela 2

Ważniejsze prace przedstawiające eksperymentalne wyniki opływu profilu kołowego cieczą lepką

Autorzy	Zakres liczb Reynoldsa		Wielkości pomierzone i obliczone na podstawie pomiarów
	min.	max.	
Thom (1933)	3,5	240	Rozkład ciśnienia na powierzchni cylindra
Schwabe (1935)	560	735	"
Tritton (1959)	0,5	100	Współczynnik oporu
Shair, Grove, Petersen i Acrivos (1963)	50	130	Wpływ ścianek na stabilność śladu za cylindrem
Taneda (1965)	53	186	"
Acrivos, Leal, Snowden i Pan (1968)	25	160	Geometryczne wielkości ustalonych wirów za cylindrem; rozkład ciśnienia na powierzchni ciała
Dimopoulos i Hanratty (1968)	60	360	Gradienty prędkości wokół cylindra
Honji i Taneda (1969)	31	1700	Własności rozwinięcia śladu za cylindrem, a w szczególności długość pary wirów uformowanych za cylindrem w funkcji czasu
Nishioka i Sato (1974)	10	80	Rozkład prędkości w śladzie za cylindrem
Coutanceau i Bouard (1977)	10	40,5	Geometryczne wielkości wirów; rozkład prędkości wewnątrz wiru
Coutanceau i Bouard (1979)	30	5000	Warunki pojawiania się wtórnych wirów
Nagata, Minami i Murata (1979)	250	1200	Geometryczne wielkości nieustalonego śladu
Bouard i Coutanceau (1980)	40	10000	rozkład prędkości w warstwie przyściennej
			Geometryczne wielkości nieustalonej, wirowej strefy za cylindrem; rozkład prędkości na osi symetrii przepływu
Imaichi i Ohmi (1983)	100	200	Rozkład funkcji prądu, wirowości i ciśnienia

Do pierwszej klasy należy zaliczyć prace, w których stosuje się teorię warstwy przyściennej. Przedstawiają one przepływ tuż po rozpoczęciu ruchu, przed ukazaniem się śladu za przeszkodą.

Do drugiej klasy zalicza się czysto numeryczne rozwiązania pełnych równań Naviera-Stokesa, dla określonej wartości liczby Reynoldsa. W tabeli 1 przedstawione są najważniejsze prace z tego zakresu.

Eksperymentalne prace spotyka się stosunkowo rzadziej, niż obliczenia numeryczne, mimo iż stanowią one wzajemnie swe naturalne uzupełnienie. Zestawienie ważniejszych publikacji z tego zakresu podane jest w tabeli 2.

Porównanie eksperymentalnych danych i rezultatów numerycznych generalnie wykazuje zgodność dla liczb Reynoldsa do 100. Rozbieżność zaczyna się pojawiać przy większych liczbach Reynoldsa, a uwidacznia się szczególnie przy analizie wtórnych wirów.

Dodatkowym uzasadnieniem numerycznych badań opływu profilu kołowego, przedstawionych w niniejszej pracy, jest chęć wyjaśnienia natury nieustalonego pola przepływu przy liczbach Reynoldsa większych od 100.

Bardziej skomplikowany jest problem laminarnego opływu strumieniem cieczy lepkiej obracającego się profilu kołowego.

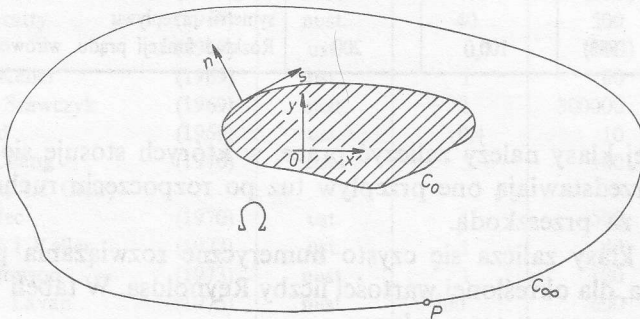
Dziwi jednak brak bardziej szczegółowych studiów w tym zakresie, na tle rozległych, opublikowanych badań opływu profilu nieobracającego się.

W niniejszej pracy zaprezentowane są rozwiązania niestacjonarnego opływu, obracającego się ze stałą prędkością kątową profilu kołowego, jednorodnym w nieskończoności strumieniem cieczy lepkiej. Przedstawione jest również rozwiązanie opływu profilu Żukowskiego cieczą lepka, przy wybranym kącie natarcia  $\alpha$ .

### 3. Sformułowanie zagadnień i metoda rozwiązania

Rozpatrzmy ruch cieczy lepkiej wokół ciała, które znajduje się początkowo w stanie spoczynku, a następnie zaczyna skokowo poruszać się ze stałą prędkością. Przyjmując, że rozważane ciało jest nieskończenie długie, o stałym polu przekroju, a ruch odbywa się w kierunku prostopadłym do jego osi – sprowadzamy problem do przestrzeni dwuwymiarowej.

Wprowadzamy układ współrzędnych związany z opływającym ciałem i rozpatrujemy podobszar  $\Omega$  nieskończonego obszaru przepływu (rys. 1). Przepływ cieczy rozważamy w tym właśnie dużym, ale skończonym podobszarze  $\Omega$ , ograniczonym konturami  $C_0$  i  $C_\infty$  (gdzie  $C_0$  – odpowiada powierzchni ciała,  $C_\infty$  – dostatecznie oddalonemu od ciała konturowi).



Rys. 1. Układ współrzędnych

Problem wyznaczenia płaskiego, nieustalonego opływu zadanego profilu  $C_0$  (rys. 1) newtonowską cieczą o stałych własnościach, przy braku sił masowych zewnętrznych, może być sprowadzony do rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych dla potencjału prądu  $\tilde{\Psi}$  i rotacji prędkości  $\zeta$ , jako zmiennych zależnych [27]. Układ tych równań we współrzędnych biegunowych

można przedstawić w postaci

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{r}} = \nu \Delta \tilde{\zeta}, \quad (1)$$

$$\tilde{\zeta} = \Delta \tilde{\Psi}.$$

Celem sformułowania zagadnienia dołączamy do tego układu równań:

– warunki brzegowe na opływającym profilu

$$\tilde{\Psi}|_{c_0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{n}} \Big|_{c_0} = \omega a, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial n^2} \Big|_{c_0} = \tilde{\zeta}|_{c_0}, \quad (2)$$

gdzie  $\tilde{n}$  – normalna do profilu,  $\tilde{s}$  – styczna do profilu,  $\omega$  – prędkość kątowna profilu,

– warunki brzegowe w dużej odległości od profilu:

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{n}} \Big|_{c_\infty} = f_1(P), \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{s}} \Big|_{c_\infty} = f_2(P), \quad \tilde{\zeta}|_{c_\infty} = 0, \quad (3)$$

gdzie  $P \in C_\infty$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  – składowe prędkości przepływu jednorodnego,

– warunki początkowe:

$$\tilde{\Psi}(\tilde{t}_0, \tilde{r}, \tilde{\theta}) = 0, \quad \tilde{\zeta}(\tilde{t}_0, \tilde{r}, \tilde{\theta}) = 0. \quad (4)$$

Układ równań (1), rządzący opływem profilu, w wyniku prostych działań, uwzględniających odwzorowanie [26] i zależności określające zmienne bezwymiarowe (rys. 2), przekształcić można do następującej postaci:

$$g(r, \eta) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{2}{Re} \Delta \zeta, \quad (5)$$

$$g(r, \eta) \zeta = \Delta \Psi,$$

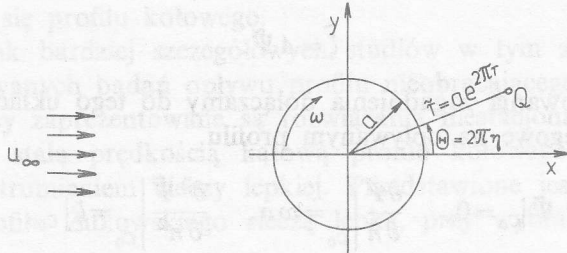
gdzie  $r, \eta$  – współrzędne bezwymiarowe (rys. 2),  $Re = \frac{2au_\infty}{\nu}$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ ,

$g(r, \eta) = 4\pi^2 e^{4\pi r}$  – dla opływu profilu kołowego,

$g(r, \eta) = 4\pi^2 e^{4\pi r} \left[ 1 + 2 \left( \frac{c}{a} \right)^2 \frac{z_1^2 - z_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} \right)^2}{(z_1^2 + z_2^2)^2} \right]$  – dla opływu profilu Żukowskiego,

$$z_1 = e^{2\pi r} \sin 2\pi \eta + \sin \tilde{\varepsilon}, \quad z_2 = e^{2\pi r} \cos 2\pi \eta - \cos \tilde{\varepsilon} + \frac{c}{a}.$$

Do rozwiązania zadania opływu profilów użyto w niniejszej pracy metodę analityczno-numeryczną opartą na zastosowaniu funkcji sklepanych [29]. Wysokiego rzędu dokładność jest tu osiągnięta dzięki zastosowaniu niejawnych



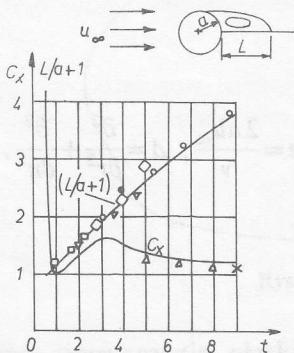
Rys. 2. Układ współrzędnych

formuł, wiążących aproksymowane wielkości w trzech kolejnych węzłach. Zastosowanie tej metody pozwala na osiągnięcie dużej dokładności obliczeń, a nie wymaga użycia maszyny cyfrowej o dużej szybkości i dużej pamięci operacyjnej. Zastosowanie sześciennych funkcji sklepanych prowadzi do trójdiagonalnej, łatwej do rozwiązania postaci równań i umożliwia łatwe spełnianie warunków brzegowych.

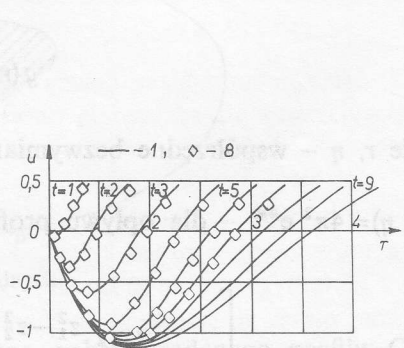
### 4. Wyniki i ich omówienie

#### 4.1. Opływ profilu kołowego

W rezultacie przeprowadzonych obliczeń znaleziono obraz przepływu wokół profilu kołowego dla liczb Reynoldsa równych 300, 550 i 1000. Ten właśnie zakres liczb  $Re$  jest – jak do tej pory – najslabiej przebadany od strony numerycznej, a istniejące rozwiązania różnią się znacznie od danych eksperymentalnych. Obliczenia przeprowadzono przy  $r_z/a = 23$  (gdzie  $r_z$  – odległość linii zewnętrznej od środka profilu kołowego).



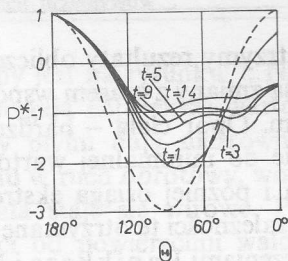
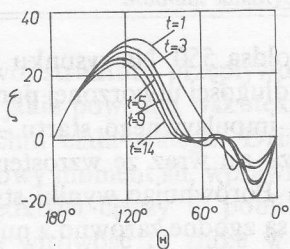
Rys. 3. Zmiany z czasem współczynnika oporu i długości utworzonej pary wirów za opływającym profilem kołowym dla  $Re = 550$



Rys. 4. Zależność od czasu rozkładu prędkości promieniowej na osi symetrii za profilem kołowym dla  $Re = 550$

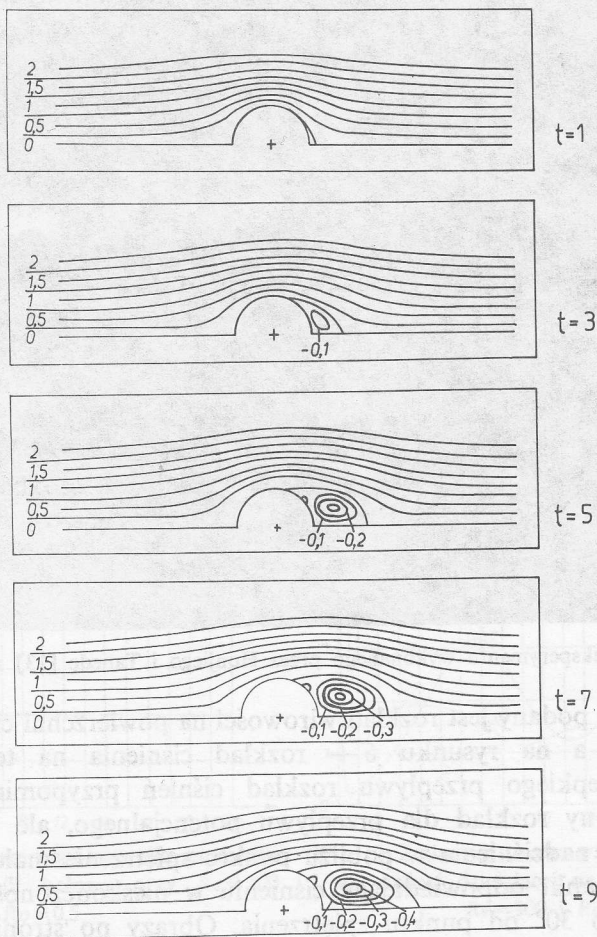
1 – wyniki własne, 2 – Schwabe ( $Re = 560$ ) [31], 3 – Thoman, Szewczyk [40], 4 – Honji, Taneda [13], 5 – Son, Hanratty ( $Re = 500$ ) [33], 6 – Panikker, Lavan ( $Re = 500$ ) [23], 7 – Patel [24], 8 – Bouard, Cautanceau [3]





Rys. 5. Rozkład wirowości na profilu kołowym dla  $Re=550$

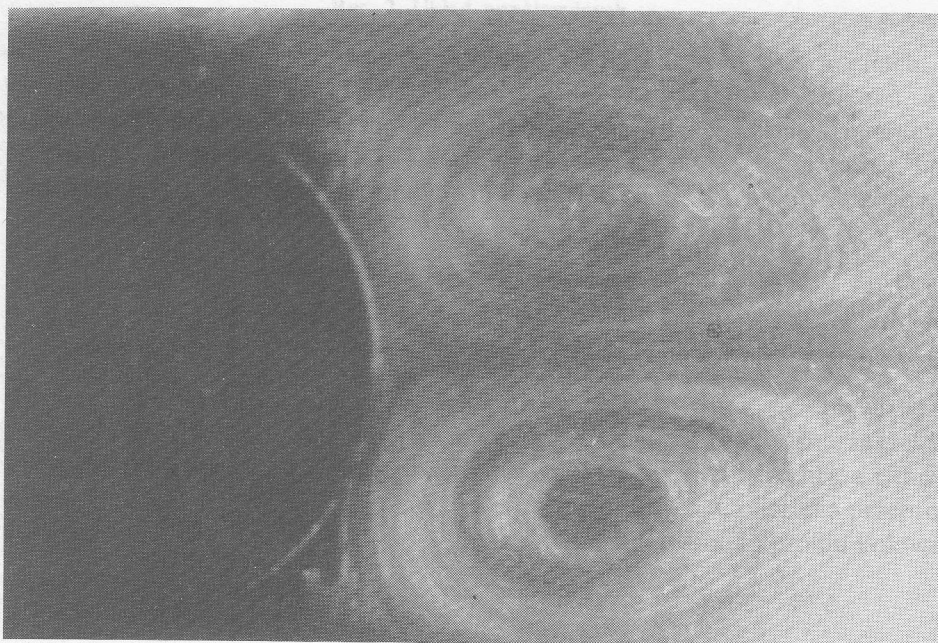
Rys. 6. Rozkład ciśnienia na profilu kołowym dla  $Re=550$   
( - - - - przepływ potencjalny)



Rys. 7. Rozwój struktury przepływu profilu kołowego dla  $Re=550$

Rozpatrzmy rezultaty obliczeń dla liczby Reynoldsa 550. Na rysunku 3 przedstawione są zmiany z czasem współczynnika oporu i długości utworzonej pary wirów za profilem. Opór ciała – bardzo wysoki w chwili impulsywnego startu – maleje gwałtownie do minimalnej wartości, która zmniejsza się wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa i później osiąga ekstremum przy  $t \cong 3,2$ . Porównując wyniki stwierdzić należy, że zależności te otrzymane w niniejszej pracy są zgodne zarówno z numerycznymi obliczeniami Panikka i Lava [23] oraz Patela [24], jak i eksperymentalnymi danymi Schwabego [31], Honjiego i Tanedę [13] oraz Bouarda Coutanceau [3].

Zmianę prędkości promieniowej na osi symetrii za profilem pokazuje rysunek 4, na którym zaznaczone są także eksperymentalne dane Bouarda i Coutanceau [3]. Zgodność wyników jest zadowalająca.



Rys. 8. Zapis eksperymentu wykonanego przez Honjiego i Tanedę [13] z chwili  $t=4,98$

Na rysunku 5 podany jest rozkład wirowości na powierzchni ciała w wybranych chwilach czasu, a na rysunku 6 – rozkład ciśnienia na tejże powierzchni. W przypadku lepkiego przepływu rozkład ciśnień przypomina – i to dość wiernie – podobny rozkład dla przepływu potencjalnego, ale tylko po stronie napływu. Jednak nadciśnienia w pobliżu punktu spiętrzenia maleją nieco wolniej, wskutek czego punkt odpowiadający ciśnieniu w nieskończoności położony jest nieco dalej niż o  $30^\circ$  od punktu spiętrzenia. Obrazy po stronie spływu różnią się natomiast w sposób istotny, a podciśnienia nie osiągają wartości maksymalnych, obliczonych dla przepływu potencjalnego. Rozkład ciśnień na całym profilu uwidacznia powstawanie oporu.

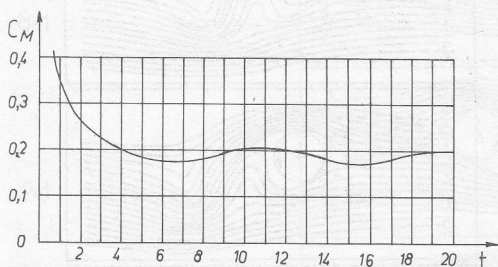
Rozwój struktury przepływu z czasem pokazany jest na rysunku 7. Naprężenia styczne, jakie powstają wskutek lepkości płynu osiągają największą wartość blisko powierzchni ciała stałego. Działając na elementy płynu dają niezrównoważony, wypadkowy moment sił, wprawiając elementy płynu w ruch obrotowy, wobec czego pole prędkości cieczy w pobliżu powierzchni ciała staje się wirowe. Po stronie napływu wirowość ta znika w niedużej odległości od powierzchni walca, a pole prędkości upodabnia się do przepływu potencjalnego. Bezpośrednio za cylindrem pojawiają się dwa symetryczne wiry, które stopniowo powiększają się.

Obraz przepływu w chwili  $t=5$  otrzymany na podstawie numerycznych obliczeń (rys. 7), jest bardzo zbliżony do fotograficznego zapisu z chwili  $t=4,98$  doświadczenia wykonanego przez Honjiego i Tanedę [13] przedstawionego na rysunku 8.

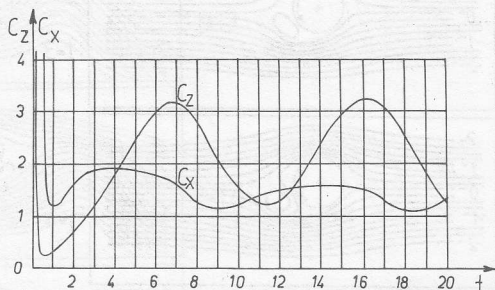
Opierając się na rezultatach numerycznych, otrzymanych dla liczb Reynoldsa 300, 550 i 1000 stwierdzić należy, że wszystkie wykazują podobny jakościowo charakter badanego przepływu. Zjawiskiem godnym uwagi, jakie obserwujemy przy wzroście liczby Reynoldsa, jest zmniejszanie obszaru pary wirów uformowanych za opływającym ciałem z jednoczesnym zwiększeniem ich intensywności.

#### 4.2. Optyw profilu kołowego obracającego się z prędkością $\omega$

Po uzyskaniu prawidłowych wyników optywu profilu kołowego przedstawionych w poprzednim punkcie i traktowanych w pewnym sensie jako test zastosowanej metody numerycznej, wykonano obliczenia optywu profilu kołowego, obracającego się wokół swej osi z pewną stałą prędkością  $\omega = \text{const}$ . Szczególną uwagę zwrócono na badanie nieustalonego śladu za opływającym profilem, współczynniki oporu, siły nośnej i momentu oraz na rozkład ciśnienia i wirowości na powierzchni profilu. Celem tych obliczeń jest określenie nieustalonego optywu profilu kołowego, któremu nadano pewną prędkość obrotową. Badania przeprowadzono dla liczb Reynoldsa 300 (przy liczbach Rossby'ego 3, 1,5, 1, 0,5, 0,25) i 600 ( $Ro=1$ ).



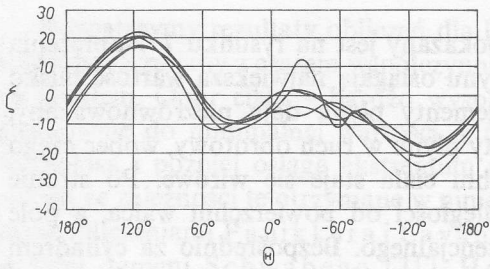
Rys. 9. Zmiany z czasem współczynnika momentu działającego na profil kołowy przy  $Re=300$  i  $Ro=0,5$



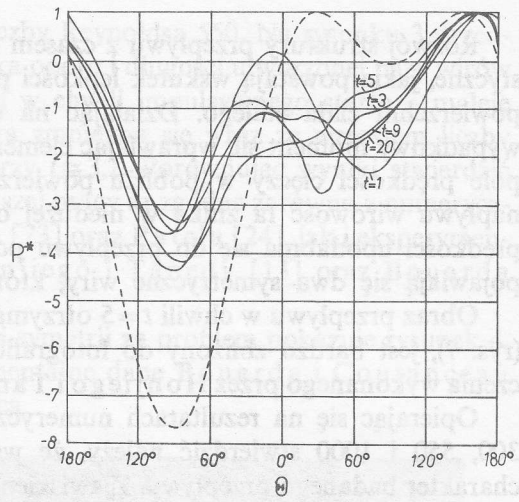
Rys. 10. Zmiany z czasem współczynników oporu i siły nośnej działającej na profil kołowy przy  $Re=300$  i  $Ro=0,5$

Jak wykazały wyniki obliczeń przepływ wokół obracającego się cylindra w początkowej fazie ma inny charakter niż optyw cylindra nieruchomego. Celem ilustracji własności takiego przepływu zaprezentowane zostaną wyniki obliczeń dla liczb  $Re=300$  i  $Ro=0,5$ .

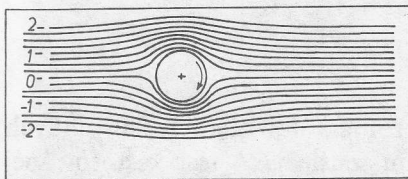




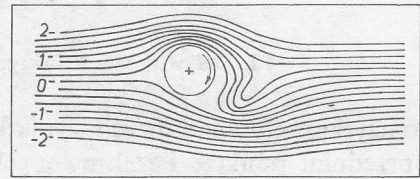
Rys. 11. Rozkład wirowości na profilu kołowym przy  $Re=300$  i  $Ro=0,5$



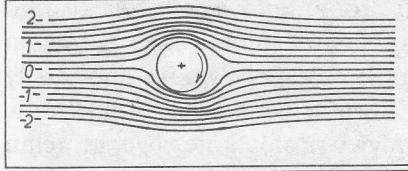
Rys. 12. Rozkład ciśnienia na profilu kołowym przy  $Re=300$  i  $Ro=0,5$



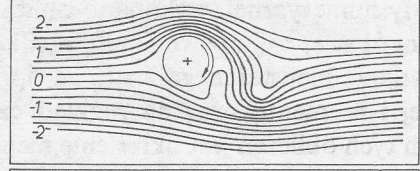
t=1



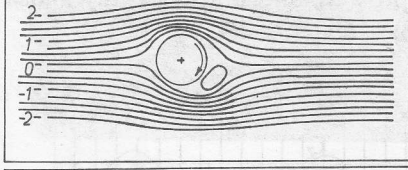
t=6



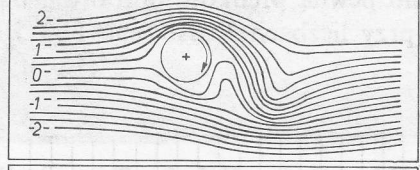
t=2



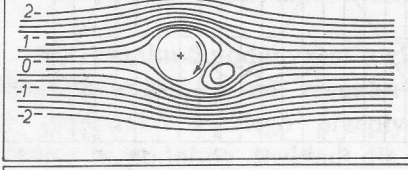
t=7



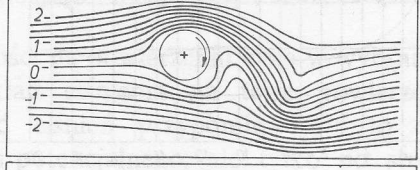
t=3



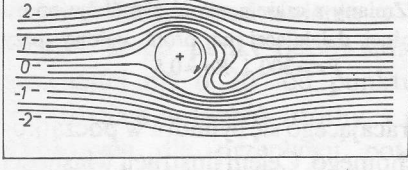
t=8



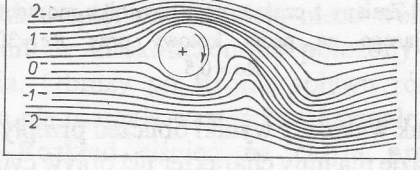
t=4



t=9



t=5



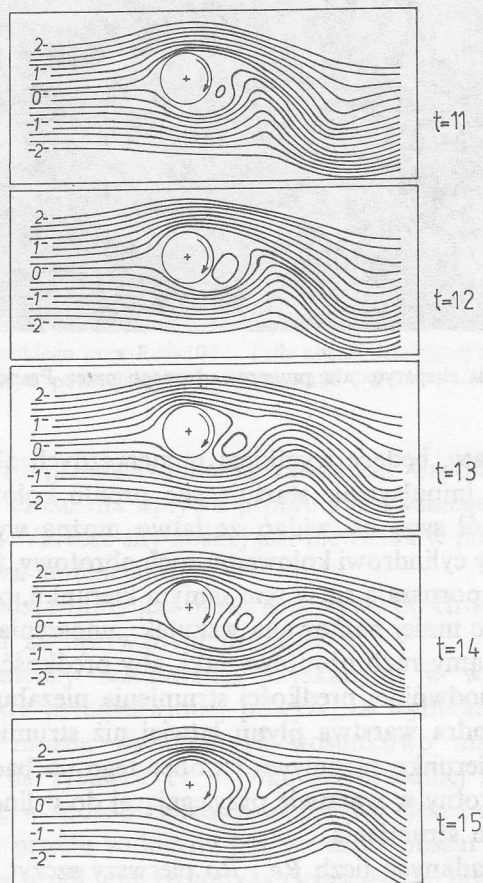
t=10



Na rysunku 9 i 10 przedstawione są zależności współczynników momentu, oporu i siły nośnej od czasu. Jak widać z rysunków, zależności te mają charakter okresowy. Ekstrema siły nośnej i momentu działającego na profil wypadają w tym samym czasie.

Na rysunku 11 podany jest rozkład wirowości, a na rysunku 12 – rozkład ciśnienia na powierzchni profilu dla wybranych wartości czasu. Jak widać, ciśnienie nie zachowuje stałej wartości na żadnej części opływającego ciała, jak ma to miejsce przy większych liczbach Rossby'ego.

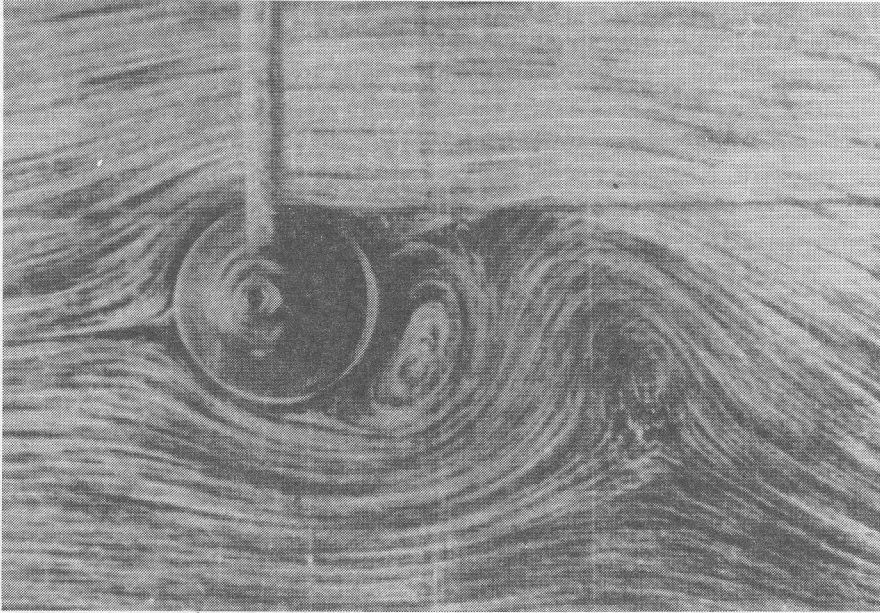
Zmiana obrazu przepływu z czasem zaprezentowana jest na rysunku 13. Za opływającym profilem tworzą się wiry, które okresowo i na przemian odrywają się to od górnej, to od dolnej części powierzchni profilu, tworząc w pewnej odległości od niego układ wirów. Wiry te oddalają się od profilu z prędkością znacznie mniejszą od prędkości napływającego strumienia  $\bar{u}$  i prędkości obwodowej profilu  $\omega_a$ . Odrywanie się wiru o cyrkulacji przeciwnej do kierunku obrotów profilu ( $t \cong 6,7$ ) zapoczątkowuje spadek siły nośnej (wzrost momentu), która maleje wraz ze wzrostem utworzonego nowego wiru o cyrkulacji zgodnej z kierunkiem obrotów



Rys. 13. Zmiana obrazu przepływu z czasem dla  $Re=300$  i  $Ro=0,5$

profilu, aż do momentu oderwania się tego wiru ( $t \cong 11,3$ ), kiedy to siła nośna zaczyna wzrastać.

Na rysunku 14 przedstawiono fotograficzny zapis eksperymentu przeprowadzonego przez Prandtla dla  $Ro = 0,5$ . Mimo, iż Prandtl nie podał liczby Reynoldsa, przy której fotografia została wykonana [11], to widać wyraźnie jakościową zgodność między nią a wynikami obliczeń, przy  $t \cong 12,5$ .



Rys. 14. Zapis eksperymentu przeprowadzonego przez Prandtla dla  $Ro = 0,5$

Analizując rezultaty, będące wynikiem numerycznych obliczeń pola przepływu lepkiej cieczy wokół impulsywnie startującego profilu kołowego, obracającego się z prędkością  $\omega$  wokół swej osi widać, że łatwo można wyciągnąć pewne ogólne wnioski. Gdy nadamy cylindrowi kołowemu ruch obrotowy, to na tej jego stronie, na której płyn i ścianka poruszają się w tym samym kierunku, przylegająca do cylindra warstwa płynu będzie mniej hamowana wskutek „unoszenia” jej przez poruszającą się ściankę. Gdy nadamy ruch obrotowy taki, aby prędkość obwodowa walca była co najmniej równa podwójnej prędkości strumienia niezaburzonego ( $Ro = 0,25$ ), to przylegająca do cylindra warstwa płynu łatwiej niż strumień zewnętrzny pokona wzrost ciśnienia w kierunku przepływu i wobec tego na badanej stronie walca nie powstanie ruch powrotny w warstwie przylegającej do cylindra, a więc również nie nastąpi tu oderwanie strumienia.

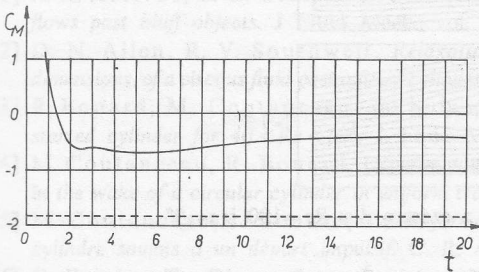
Dla wszystkich badanych liczb  $Re$  i  $Ro$  pierwszy szczyt siły nośnej pojawia się przy  $t \cong 0,2$ , a drugi zaczyna się rozwijać przy  $t \cong 0,5$ , co zgodne jest z eksperymentalnymi danymi T a n e d y [37]. Można zauważyć, że zmiany siły nośnej, momentu

i oporu z czasem są jakościowo identyczne przy różnych liczbach  $Re$  i  $Ro$ . Wywołane są one sphywaniem wirów o kolejno zmieniających się cyrkulacjach, przez co cyrkulacja dookoła profilu jest również zmienna.

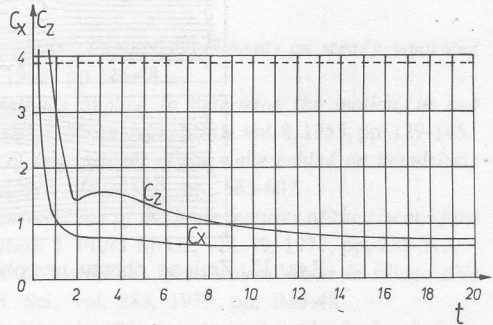
Wydaje się, że w powyższym przypadku nie istnieje ustalone rozwiązanie, lecz przepływ ma charakter periodyczny.

### 4.3. Optyw profilu Żukowskiego

Stosując tę samą technikę numeryczną co poprzednio, wykonano obliczenia optywu cieczą lepką profilu Żukowskiego, impulsywnie rozpoczynającego ruch i poruszającego się następnie ze stałą prędkością pod określonym, stałym kątem natarcia  $\alpha$ . Obliczenia przeprowadzono dla liczby  $Re = 100$  i  $\alpha = 0^\circ, 9^\circ, 18^\circ$ .



Rys. 15. Zmiana z czasem współczynnika momentu działającego na profil Żukowskiego przy  $Re = 100$  i  $\alpha = 9^\circ$  (--- przepływ potencjalny)



Rys. 16. Zmiana z czasem współczynników oporu i siły nośnej działającej na profil Żukowskiego przy  $Re = 100$  i  $\alpha = 9^\circ$  (--- przepływ potencjalny)

Na rysunku 15 i 16 przedstawione są zależności współczynników momentu, oporu i siły nośnej od czasu dla optywu profilu Żukowskiego pod kątem natarcia  $\alpha = 9^\circ$  i liczby  $Re = 100$ . Wartość siły nośnej jest niewielka w porównaniu z wartością wynikającą z przepływu potencjalnego.

Na rysunku 17 przedstawiony jest obraz przepływu do chwili  $t = 19$ . Widać ciągle powiększanie się śladu za optywanym profilem.

Dużą różnicę pomiędzy rezultatami, uzyskanymi w wyniku numerycznych obliczeń według metody przedstawionej powyżej, a wynikami dotyczącymi przepływu potencjalnego, można wytłumaczyć stosunkowo małą liczbą Reynoldsa ( $Re = 100$ ). Jak widać na rysunku 17 – tylko po przedniej stronie profilu optyw rzeczywisty odbywa się w sposób zbliżony do optywu cieczą doskonałą. Natomiast po stronie grzbietowej profilu widoczny jest wyraźnie obszar zastoju – dlatego też siła nośna działająca na profil umieszczony w cieczy lepkiej będzie znacznie mniejsza niż w przypadku przepływu potencjalnego, gdzie podciśnienia po stronie grzbietowej profilu osiągają duże wartości. Wyniki przedstawione powyżej są jakościowo zgodne



Opracowane programy na maszynę cyfrową można wykorzystywać do obliczeń opływu dowolnego profilu, a nie koniecznie profilu Żukowskiego. Można też zastosować je do profilu, dowolnie poruszającego się w cieczy lepkiej. Programy można również łatwo adaptować do wyznaczania opływu układu profili [28].

Przedstawione problemy – poza ich znaczeniem poznawczym – znajdują zastosowanie w teorii profilu lotniczego, teorii pomiarów termoanemometrycznych, w inżynierii chemicznej, w określeniu częstości drgań opływającego ciała, które występują na skutek okresowego pojawiania się nowych wirów za opływającym profilem, powodując zmienność reakcji hydrodynamicznych wywieranych przez płyn na ciało.

Praca wpłynęła do Redakcji w styczniu 1989 r. (po korekcie).

#### Literatura

- [1] A. A. Acrivos, L. G. Leal, D. D. Snowden, F. Pan, *Further experiments on steady separated flows past bluff objects*. J. Fluid Mech., vol. 34, 1968, pp. 25-48.
- [2] D. N. Allen, R. V. Southwell, *Relaxation methods applied to determine the motion, in two dimensions, of a viscous fluid past a fixed cylinder*. Quart. J. Mech. Appl. Math. vol. 8, 1955, pp. 129-145.
- [3] R. Bouard, M. Coutanceau, *The early stage of development of the wake behind an impulsively started cylinder for  $40 < Re < 10^4$* . J. Fluid Mech., vol. 101, 1980, pp. 583-607.
- [4] M. Coutanceau, R. Bouard, *Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation*. J. Fluid Mech., vol. 79, 1977, pp. 231-272.
- [5] M. Coutanceau, R. Bouard, *Sur la formation de tourbillons "secondaires" dans le sillage d'un cylindre soumis à un départ impulsif*. C. R. Acad. Sci., vol. 288, 1979, pp. B45-48.
- [6] O. Daube, Ta Phouc Loc, *Étude numérique d'écoulements instationnaires de fluide visqueux incompressible autour de corps profilés par une méthode combinée d'ordre  $O(h^2)$  et  $O(h^4)$* . J. Méc., vol. 17, 1978, pp. 651-678.
- [7] R. L. Daugherty, J. B. Franzini, *Fluid mechanics with engineering applications*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [8] S. C. R. Dennis, G. Z. Chang, *Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100*. J. Fluid Mech., vol. 42, 1970, pp. 471-489.
- [9] H. G. Dimopoulos, T. J. Hanratty, *Velocity gradients at the wall for flow around a cylinder for Reynolds numbers between 60 and 360*. J. Fluid Mech., vol. 33, 1968, pp. 303-319.
- [10] B. Fornberg, *A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder*. J. Fluid Mech., vol. 98, 1980, pp. 819-855.
- [11] S. Goldstein, *Modern developments in fluid dynamics*. Oxford University Press, London, 1950.
- [12] A. B. Hamielec, J. D. Raal, *Numerical studies of viscous flow around circular cylinders*. Phys. Fluids, vol. 12, 1969, pp. 11-17.
- [13] H. Honji, S. Taneda, *Unsteady flow past a circular cylinder*. J. Phys. Soc. Japan, vol. 27, 1969, pp. 1668-1677.
- [14] K. Imaichi, K. Ohmi, *Numerical processing of flow-visualization pictures – measurement of two-dimensional vortex flow*. J. Fluid Mech., vol. 129, 1983, pp. 283-311.
- [15] D. B. Ingham, *Note on the numerical solution for unsteady viscous flow past a circular cylinder*. J. Fluid Mech., vol. 31, 1968, pp. 815-818.
- [16] H. Jafroudi, H. T. Yang, *Computation of steady laminar flow over a circular cylinder with third-order boundary conditions*. J. Comp. Phys., vol. 49, 1983, pp. 181-198.
- [17] P. C. Jain, K. S. Rao, *Numerical solution of unsteady viscous incompressible fluid flow past a circular cylinder*. Phys. Fluids Suppl. II, vol. 12, 1969, pp. 57-64.



- [18] M. Kawaguti, P. C. Jain, *Numerical study of a viscous fluid flow past a circular cylinder*. J. Phys. Soc. Japan, vol. 21, 1966, pp. 2055-2062.
- [19] C. L. Lin, D. W. Pepper, S. C. Lee, *Numerical Methods for separated flow solutions around a circular cylinder*. AIAA J., vol. 14, 1976, pp. 900-907.
- [20] H. Nagata, K. Minami, Y. Murata, *Initial flow past an impulsively started circular cylinder*. Bull. JSME, vol. 22, 1979, pp. 512-520.
- [21] F. Nieuwstadt, H. B. Keller, *Viscous flow past circular cylinders*. Comp. Fluids, vol. 1, 1973, pp. 59-71.
- [22] M. Nishioka, H. Sato, *Measurements of velocity distributions in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers*. J. Fluid Mech., vol. 65, 1974, pp. 97-112.
- [23] P. K. G. Panikker, Z. Lavan, *Flow past impulsively started bodies using Green's functions*. J. Comp. Phys., vol. 18, 1975, pp. 46-65.
- [24] V. A. Patel, *Time dependent solutions of the viscous incompressible flow past a circular cylinder by the method of series truncation*. Comp. Fluids, vol. 4, pp. 13-27.
- [25] R. B. Payne, *Calculations of unsteady viscous flow past a circular cylinder*. J. Fluid Mech., vol. 4, 1958, pp. 81-86.
- [26] W. J. Prosnak, *Mechanika płynów*. PWN, Warszawa 1970.
- [27] W. J. Prosnak, *Równania mechaniki płynów i ich formy uproszczone*. Zesz. Nauk. IMP PAN, nr 111/1037/1981.
- [28] W. J. Prosnak, *Teoria układu profilów lotniczych*. Ossolineum, Wrocław 1981.
- [29] W. J. Prosnak, *Metody rozwiązywania zagadnień różniczkowych zwyczajnych*. Zesz. Nauk. IMP PAN, nr 201/1147/1985.
- [30] H. R. Pruppacher, B. P. Le Clair, A. E. Hamielec, *Some relations between drag and flow pattern of viscous flow past a sphere and a cylinder at low intermediate Reynolds numbers*. J. Fluid Mech., vol. 44, 1970, pp. 781-790.
- [31] M. Schwabe, *Über Druckermittlung in der nichtstationären ebenen Strömung*. Ing. Arch., Bd. 6, 1935, s. 34-50.
- [32] F. H. Shair, A. S. Grove, E. E. Petersen, A. Acrivos, *The effect of confining walls on the stability of the steady wake behind a circular cylinder*. J. Fluid Mech., vol. 17, 1963, pp. 546-550.
- [33] J. S. Son, T. J. Hanratty, *Numerical solution for the flow around a cylinder at Reynolds number of 40,200 and 500*. J. Fluid Mech., vol. 35, 1969, pp. 369-386.
- [34] Y. Takaisi, *Numerical studies of a viscous liquid past a circular cylinder*. Phys. Fluids Suppl. II, vol. 12, 1969, pp. 86-87.
- [35] H. Takami, H. B. Keller, *Steady two-dimensional viscous flow of an incompressible fluid past a circular cylinder*. Phys. Fluids Suppl. II, vol. 12, 1969, pp. 51-56.
- [36] S. Taneda, *Experimental investigation of vortex streets*. J. Phys. Soc. Japan, vol. 20, 1965, pp. 1714-1721.
- [37] S. Taneda, *The development of the lift of an impulsively started elliptic cylinder at incidence*. J. Phys. Soc. Japan, vol. 33, 1972, pp. 1706-1711.
- [38] Ta Phouc Loc, *Numerical analysis of unsteady secondary vortices generated by an impulsively started circular cylinder*. J. Fluid Mech. vol. 100, 1980, pp. 111-128.
- [39] A. Thom, *The flow past circular cylinders at low speeds*. Proc. Roy. Soc. London, vol. A141, 1933, pp. 651-669.
- [40] D. C. Thoman, R. A. Szewczyk, *Time-dependent viscous flow over a circular cylinder*. Phys. Fluids Suppl. II, vol. 12, 1969, pp. 76-86.
- [41] D. J. Tritton, *Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers*. J. Fluid Mech., vol. 6, 1959, pp. 547-567.
- [42] S. Y. Tuann, M. D. Olson, *Numerical studies of the flow around a circular cylinder by a finite element method*. Comp. Fluids, vol. 6, 1978, pp. 219-240.
- [43] R. L. Underwood, *Calculation of incompressible flow past a circular cylinder at moderate Reynolds numbers*. J. Fluid Mech., vol. 37, 1969, pp. 95-114.
- [44] J. C. Wu, J. F. Thompson, *Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using an integro-differential formulation*. Comp. Fluids, 1, 1973, pp. 197-215.

## An Analytical-Numerical Study of the Two-Dimensional Viscous Fluid Flow

### Summary

The mechanism of creation of vortices behind impulsively started bodies, over the range of Reynolds numbers from 100 to 1000, is analysed in this paper. An analytical-numerical-solution to the Navier-Stokes equations is developed for the unsteady laminar viscous incompressible flow past circular and Joukovski profiles. For two-dimensional flows a spline-alternating-direction-implicit (SADI) method is applied. The transient period from the abrupt start of the body to some later time (at which the flow may be steady or periodic) is studied using streamlines, pressure and vorticity distributions on the body surface, as well as drag, lift and moment coefficients. Results obtained for unsteady flow around a circular profile coincide with experimental data and other numerical or semi-analytical results.

### Аналитическо-численный анализ плоских течений вязкой жидкости

#### Резюме

В работе представлен анализ механизма возникновения вихрей за резко начинающими движение телами, для чисел Рейнольдса 100-1000.

Представлено аналитическо-численное решение уравнений Навье-Стокса для нестационарного, лиминарного обтекания вязкой жидкостью кругового профиля и профиля Жуковского. Для двухмерных течений применен метод SADI.

Временный период от резкого старта тела до некоторого позднейшего момента (в котором течение может быть стационарным или периодическим) анализирован при помощи линий тока, распределения давления и вихренности на поверхности тела, коэффициентов сопротивления, несущей силы и момента.

Результаты, полученные для нестационарного обтекания кругового профиля согласны с экспериментальными данными и другими численными и полуаналитическими результатами.

$\mu$	dynamic viscosity (2.17)	$\rho$	mass per volume
$\Delta H$	phase change enthalpy (2.18)	$\rho_0$	heat flux density
$\lambda$	thermal conductivity	$\sigma$	coefficient combination (2.48)
$\Delta h$	specific enthalpy	$\tau$	geometrical factor (2.17)
$\lambda_{cl}$	Knudsen number (2.60)	$\tau_{cl}$	condensation coefficient
$l$	free path of a molecule	$\tau_{cl}$	surface tension
$m$	mass of a molecule	$\tau_{cl}$	starved velocity distribution function
$p$	static pressure	$\tau_{cl}$	derivative angle
$R = \rho_0 l$	radius-gas constant	$\tau_{cl}$	streamline coefficient of mass rate reduction
$r$	radial coordinate	$\tau_{cl}$	energy flux density
$T$	absolute temperature	$\tau_{cl}$	meridional angle
$t$	time (for auxiliary variable)	$\tau_{cl}$	auxiliary expansion II (2.18)
$U = U_0$	averaged velocity ratio (2.36)	$\tau_{cl}$	(2.6)
$U$	bulk velocity		
$v$	specific volume		
$W$	molecular velocity		

\* Praca wykonana w ramach Centralnego Programu Badań Podstawowych nr 01.14 na Wydziale Inżynierii Przemysłowej, kierownik: J. Prokocim, kierownik zespołu: W. Prokocim.