P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K

INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

# PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

## TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

93

WARSZAWA – POZNAŃ 1992

W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E   P W N

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery



**REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE**

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszera 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71



Printed in Poland

ISBN 83-01-10515-1
ISSN 0079-3205

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN – ODDZIAŁ W POZNANIU

| | |
|---|---|
| Nakład 300+80 egz. | Oddano do składania 14 I 1991 r. |
| Ark. wyd. 17,5. Ark. druk. 15,625 | Podpisano do druku 6 V 1992 r. |
| Pap. offset. kl. III, 70 g 70×100 cm. | Druk ukończono w lipcu 1992 r. |
| Nr zam. 158/187 | |

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

1991 Zeszyt 93

GERARD A. DOWKONTT

Warszawa

# Jednowymiarowy, izentropowy przepływ nieustalony

## Próba nowego przedstawienia zadania

Przedmiotem rozważań jest jednowymiarowy, izentropowy przepływ nieustalony. Wprowadzenie nowej funkcji $\xi$, wyrażającej położenie płaszczyzn płynnych w przepływie względem położenia, jakie zajmowały te płaszczyzny w płynie nieruchomym, umożliwiło zastąpienie układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu i równania izentropy, opisującego jednowymiarowy izentropowy przepływ nieustalony, przez jedno równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu dla funkcji $\xi$.

## 1. Wstęp

Przedmiotem rozważań jest jednowymiarowy, izentropowy przepływ nieustalony.

Jak powszechnie przyjęto, przepływ taki jest opisywany układem równań składającym się:

– z równania ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial (\rho u)}{\partial x}, \tag{1.1}$$

– z równania ruchu (Eulera)

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{du}{dt}, \tag{1.2}$$

– z równania izentropy

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k, \tag{1.3}$$

gdzie $\rho$ – gęstość płynu będącego w ruchu, $\rho_0$ – gęstość płynu będącego w spoczynku, $u$ – prędkość płynu, $p$ – ciśnienie płynu będącego w ruchu, $p_0$ – ciśnienie płynu będącego w spoczynku, $k$ – wykładnik izentropy, $x$ – współrzędna przestrzenna, $t$ – czas.

Wielkości fizyczne $\rho$, $u$ i $p$ są funkcjami dwóch zmiennych niezależnych $x$ i $t$, tj. odpowiednio współrzędnej przestrzennej i czasu.

Pochodna czasowa $du/dt$ jest to pochodna substancjalna prędkości płynu $u$.

W dalszej części niniejszego opracowania zostanie przedstawiona pewna metodyka potraktowania równań (1.1), (1.2) i (1.3) układu opisującego jednowymiarowy, izentropowy przepływ nieustalony, umożliwiająca nowe przedstawienie tego zagadnienia.

## 2. Ustawienie zagadnienia przepływu

### 2.1. Opis modelu fizycznego

Modelem fizycznym służącym do realizacji przepływu jednowymiarowego jest prosta i nieskończenie długa rura o jednostkowym przekroju z tłokiem wewnątrz. Rura jest usytuowana równolegle do osi $x$ (patrz rys. 1). Ponad tłokiem znajduje się płyn o gęstości spoczynkowej $\rho_0$ i ciśnieniu spoczynkowym $p_0$. Poniżej tłoka jest próżnia. Położenie początkowe górnej płaszczyzny tłoka odpowiada współrzędnej $x=0$. W takim położeniu tłok jest utrzymywany przez przyłożenie odpowiedniej siły zewnętrznej, która równoważy parcie płynu.

Istotnym dla dalszej części rozważań, jest posłużenie się pojęciem płaszczyzny płynnej, które odpowiada znanemu w mechanice płynów pojęciu, występującemu ogólnie pod nazwą powierzchni płynnej.

Dla przypadku przepływu jednowymiarowego powierzchnia płynna jest płaszczyzną, usytuowaną prostopadle do osi $x$. A zatem płaszczyzna płynna jest szczególnym przypadkiem powierzchni płynnej i posiada wszystkie pozostałe jej cechy.

Przypomnijmy tu cechy płaszczyzny płynnej. Jest to płaszczyzna myślowa, wyobrażalna fizycznie, lecz mająca grubość zero i nie posiadająca masy; jest unoszona przez płyn i wraz z płynem, a tym samym nieprzenikalna dla płynu. Przenikalna natomiast dla pędu i energii.

Na płaszczyznach płynnych nie dokonują się żadne procesy energetyczne. Płaszczyzny płynne nie kumulują energii płynu ani nie oddają energii do płynu. Nie doznają też żadnych oddziaływań siłowych z przestrzeni na zewnątrz rury, ani nie oddziaływają siłowo na tę przestrzeń.

Z powyższego wynika wniosek ogólny, że ciśnienie płynu powinno być takie same po obu stronach płaszczyzny płynnej. W przepływie, płaszczyzny płynne nie tylko nie mogą się wzajemnie przenikać, lecz nawet zbliżać nieskończenie do siebie.

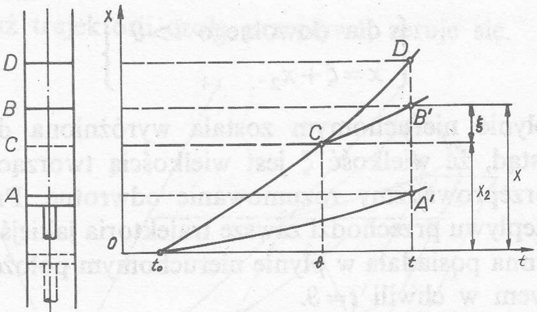
Górna płaszczyzna tłoka posiada cechy płaszczyzny płynnej z tymi modyfikacjami, które są następstwami skończonej masy tłoka i oddziaływania siłowego na tłok z zewnątrz.

### 2.2. Opis zjawiska przepływu w modelu fizycznym i na płaszczyźnie $x$, $t$

W chwili czasu $t=t_0$ tłok zaczyna się poruszać według zadanej funkcji czasu. Ruch tłoka wywoła przepływ nieustalony płynu. Przepływ ten będzie ogarniał coraz większą masę płynu w ten sposób, że granica między płynem będącym jeszcze w spoczynku a płynem będącym już w ruchu będzie przemieszczać się wzdłuż rury zawsze zgodnie ze zwrotem osi $x$, przy modelu ustawionym jak na rys. 1.

Nazwijmy tę granicę czołem przepływu, a jej prędkość – prędkością czoła przepływu lub prędkością rozprzestrzeniania się przepływu.

Przy modelu ustawionym jak na rysunku 1, prędkość czoła przepływu będzie zawsze dodatnia, niezależnie od znaku przemieszczenia tłoka.




Rys. 1. Jednowymiarowy przepływ nieustalony w modelu fizycznym i na płaszczyźnie $x$, $t$

Na płaszczyźnie $x$, $t$ linia $t_0A'$ jest trajektorią tłoka, zaś linia $t_0CD$ jest trajektorią czoła przepływu. W dowolnej chwili czasu $t>t_0$, gdy tłok znajduje się w przekroju $A$ rury, trajektoria tłoka na płaszczyźnie $x$, $t$ osiąga punkt $A'$. Dla tej samej chwili czasu, gdy czoło przepływu znajduje się w przekroju $D$ rury, trajektoria czoła przepływu osiąga punkt $D$ na płaszczyźnie $x$, $t$.

Obszar na płaszczyźnie $x$, $t$, leżący między liniami $t_0A'$ i $t_0CD$ jest obszarem przepływu. Obszar powyżej linii $t_0CD$ odpowiada płynowi będącemu w spoczynku, zaś obszar leżący poniżej linii $t_0A'$ odpowiada próżni.

### 2.3. Wprowadzenie nowej funkcji

Niniejszym wprowadzamy pojęcie funkcji $\xi$ (litera grecka ksi), która opisuje położenie płaszczyzn płynnych w przepływie, względem położenia, jakie zajmowały te płaszczyzny w płynie będącym w spoczynku.

Pojęcie funkcji $\xi$ tworzymy na podstawie następującego rozumowania, które przeprowadzamy patrząc na rysunek 1.

W płynie będącym w spoczynku możemy sobie zawsze wyobrazić dowolną liczbę płaszczyzn płynnych, zajmujących odpowiednie położenie na długości rury.

Płaszczyzny te będą pozostawały nieruchome do czasu, gdy mijane kolejno przez czoło przepływu zaczną się poruszać, unoszone przez ruchomy płyn.

Prześledźmy to zjawisko dokładniej. W tym celu, w płynie będącym w spoczynku, wyróżnijmy jedną, dowolną płaszczyznę płynną, zajmującą położenie odpowiadające przekrojowi $C$ rury. Na płaszczyźnie $x$, $t$ położeniu temu odpowiada współrzędna $x=x_2$. Ta płaszczyzna płynna będzie pozostawać nieruchomo aż do czasu $t=\vartheta$, tj. gdy dotrze do niej czoło przepływu. Wówczas zostaje ona ogarnięta przepływem i, unoszona przez płyn, zaczyna się poruszać. Trajektorią tej płaszczyzny płynnej na płaszczyźnie $x$, $t$ jest linia $CB'$.

W dowolnej chwili $t > \vartheta$, wyróżniona płaszczyzna płynna znajduje się w przekroju $B$ rury, zaś trajektoria tej płaszczyzny osiąga punkt $B'$ $(x, t)$ na płaszczyźnie $x$, $t$.

Położenie wyróżnionej płaszczyzny płynnej w przepływie, tj. w dowolnej chwili $t > \vartheta$, względem położenia, które zajmowała ta płaszczyzna w płynie nieruchomym, jest określone przez wielkość $\xi$. Zachodzi tu relacja

$$\left\{ \begin{matrix} \text{dla dowolnego } t > \vartheta \\ x = \xi + x_2 . \end{matrix} \right\} \tag{2.1}$$

Ponieważ w płynie nieruchomym została wyróżniona dowolna płaszczyzna płynna, wnosimy stąd, że wielkość $\xi$ jest wielkością tworzącą pole (intensywną).

Jako dowód przeprowadźmy rozumowanie odwrotne. Przez dowolny punkt $B'(x, t)$ obszaru przepływu przechodzi zawsze trajektoria jakiejś płaszczyzny płynnej. Ta płaszczyzna płynna posiadała w płynie nieruchomym położenie $x = x_2$, a została ogarnięta przepływem w chwili $t = \vartheta$.

Zbiór wszystkich wartości $x = x_2$ jest trajektorią czoła przepływu na płaszczyźnie $x$, $t$, a więc zbiór ten jest określony funkcją czasu $t$, wyrażającego się wzdłuż tej trajektorii parametrem $\vartheta$. A zatem relacja

$$\xi = x - x_2(\vartheta) \tag{2.2}$$

przedstawia pewną funkcję dwu zmiennych niezależnych $x$ i $t$, która każdemu punktowi obszaru przepływu przypisuje określoną wartość $\xi$, wyrażającą położenie płaszczyzny płynnej przechodzącej przez punkt $x, t$ względem położenia, jakie zajmowała ta płaszczyzna w płynie nieruchomym.

Przyjmijmy, że funkcja $\xi$ ma postać następującą:

$$\xi = \xi(x, t) . \tag{2.3}$$

Posługując się pojęciem współrzędnej Lagrange'a płaszczyzny płynnej, możemy utożsamić

$$x \equiv x(t) \tag{2.4}$$

a wówczas związek funkcji $\xi$ ze współrzędną Lagrange'a będzie następujący:

$$x(t) = \xi + x_2(\vartheta), \tag{2.5}$$

gdzie $x_2(\vartheta)$ oznacza początkowe położenie płaszczyzny płynnej.

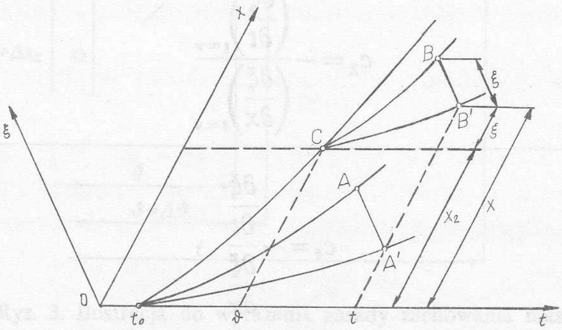
### 2.4. Niektóre właściwości funkcji $\xi$

Obrazem geometrycznym funkcji $\xi$ w układzie współrzędnych prostokątnych $x, t, \xi$ jest pewna powierzchnia (patrz rys. 2). Powierzchnia obrazująca funkcję $\xi$ przechodzi przez krzywe przestrzenne $t_0 A$ i $CB$. Powierzchnia ta przenika przez płaszczyznę $x, t$ wzdłuż linii $t_0 C$.

Trajektorie $t_0 A'$ i $CB'$ są rzutami prostokątnymi na płaszczyznę $x, t$ odpowiednio krzywych przestrzennych $t_0 A$ i $CB$. Inaczej mówiąc, krzywe przestrzenne $t_0 A$ i $CB$ są liniami przecięcia się powierzchni walcowych, prostopadłych do płaszczyzny $x, t$, przechodzących odpowiednio przez trajektorie $t_0 A'$ i $CB'$, z powierzchnią będącą obrazem geometrycznym funkcji $\xi$.

Funkcja $\xi$, wzdłuż trajektorii tłoka, wyraża się zadaną funkcją czasu, według której porusza się tłok.

Funkcja $\xi$, wzdłuż trajektorii czoła przepływu, zeruje się.




Rys. 2. Przedstawienie funkcji $\xi$ w przestrzeni $\xi, x, t$

Należy przewidywać, że ze względu na swój sens fizyczny i założenia modelowe przepływu, funkcja $\xi$ powinna być funkcją ciągłą (odpowiednio wysokiej klasy) i dostatecznie gładką w całym obszarze przepływu. Przypomnijmy, że według założeń modelowych, płaszczyzny płynne są unoszone przez poruszający się płyn absolutnie swobodnie, nie mogą się wzajemnie przenikać ani pokrywać.

Funkcja $\xi$ posiada oczywiście swoje pochodne cząstkowe $\partial\xi/\partial x$ i $\partial\xi/\partial t$; będzie mieć również swoją pochodną substancjalną

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial\xi}{\partial x}u+\frac{\partial\xi}{\partial t}. \tag{2.6}$$

Ale pochodna substancjalna funkcji $\xi$ jest równa prędkości przepływu $u$

$$\frac{d\xi}{dt}=u. \tag{2.7}$$

A zatem możemy napisać

$$u=\frac{\partial\xi}{\partial x}u+\frac{\partial\xi}{\partial t} \tag{2.8}$$

i dzięki temu wyrazić prędkość przepływu $u$ w zależności od pochodnych cząstkowych funkcji $\xi$

$$u=\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial t}}{1-\dfrac{\partial\xi}{\partial x}}. \tag{2.9}$$

Trajektoria czoła przepływu na płaszczyźnie $x, t$ będzie wyrażać się równaniem

$$\xi(x,t)=0, \tag{2.10}$$

zaś rzuty na płaszczyznę $x, t$ warstwic powierzchni obrazującej funkcję $\xi$ będą wyznaczone przez równanie

$$\xi(x,t)=\text{const}. \tag{2.11}$$

Odpowiadające równaniom (2.10) i (2.11) formy różniczkowe

$$c_2=-\frac{\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_{t=\nu}}{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{t=\nu}} \tag{2.12}$$

oraz

$$c_\xi=-\frac{\frac{\partial\xi}{\partial t}}{\frac{\partial\xi}{\partial x}} \tag{2.13}$$

będą odpowiednio przedstawiać prędkość $c_2$ czoła przepływu i prędkość $c_\xi$ przemieszczania się w przepływie stałych wartości funkcji $\xi$.

## 3. Wyprowadzenie pochodnych cząstkowych funkcji $\xi$

Elementarna masa płynu, znajdująca się między dwiema wyróżnionymi płaszczyznami płynnymi, pozostaje stała podczas przepływu. Według oznaczeń na rysunku 3, zasadę zachowania masy możemy zapisać następująco:

$$\Delta M=\rho_0\,\Delta x_2=\bar{\rho}(t)\cdot(x_{L2}-x_{L1}), \tag{3.1}$$

gdzie $\Delta M$ oznacza elementarną masę płynu zawartego między płaszczyznami płynnymi, zaś $\bar{\rho}(t)$ – średnią wzdłuż $x$ gęstość tego płynu, w dowolnym czasie $t>\vartheta$. Ale

$$x_{L2}=x_2+\Delta x_2+\xi_2, \tag{3.2}$$

$$x_{L1}=x_2+\xi_1, \tag{3.3}$$

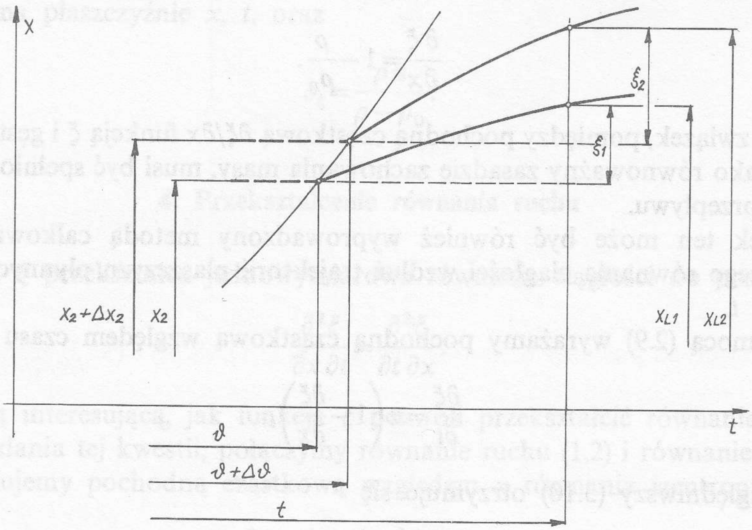
co wykorzystując w (3.1), otrzymujemy

$$\rho_0\,\Delta x_2=\bar{\rho}(t)\,[\Delta x_2+(\xi_2-\xi_1)]. \tag{3.4}$$

Stwierdźmy następnie, że

$$\xi_2-\xi_1=\overline{\frac{\partial\xi}{\partial x}}(t)\cdot(x_{L2}-x_{L1}), \tag{3.5}$$

gdzie $\overline{(\partial\xi/\partial x)}(t)$ oznacza średnią wzdłuż $x$ wartość $\partial\xi/\partial x$, między płaszczyznami płynnymi, w tym samym czasie.




Rys. 3. Ilustracja do wyrażenia zasady zachowania masy

Również tu wykorzystując (3.2) i (3.3), po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$\xi_2-\xi_1=\frac{\overline{\frac{\partial\xi}{\partial x}}(t)}{1-\overline{\frac{\partial\xi}{\partial x}}(t)}\,\Delta x_2. \tag{3.6}$$

Po podstawieniu (3.6) do (3.4) i wykonaniu dalszych przekształceń, dochodzimy do następującej równości:

$$\frac{\bar\rho(t)}{\rho_0}=1-\overline{\frac{\partial\xi}{\partial x}}(t). \tag{3.7}$$

Ponieważ

$$\lim_{\Delta x_2\to 0}\bar\rho(t)=\rho(t), \tag{3.8}$$

$$\lim_{\Delta x_2\to 0}\overline{\frac{\partial\xi}{\partial x}}(t)=\frac{\partial\xi}{\partial x}(t), \tag{3.9}$$

zaś płaszczyzny płynne zostały wybrane dowolnie, otrzymujemy następujący ogólny wzór

$$\frac{\rho}{\rho_0}=1-\frac{\partial\xi}{\partial x}, \tag{3.10}$$

skąd ostatecznie

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=1-\frac{\rho}{\rho_0}. \tag{3.11}$$

Jest to związek, pomiędzy pochodną cząstkową $\partial\xi/\partial x$ funkcją $\xi$ i gęstością płynu $\rho$, który, jako równoważny zasadzie zachowania masy, musi być spełniony w całym obszarze przepływu.

Związek ten może być również wyprowadzony metodą całkowania jednowymiarowego równania ciągłości wzdłuż trajektorii płaszczyzn płynnych na płaszczyźnie $x$, $t$.

Za pomocą (2.9) wyrażamy pochodną cząstkową względem czasu funkcji $\xi$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}=u\left(1-\frac{\partial \xi}{\partial x}\right), \tag{3.12}$$

gdzie uwzględniwszy (3.10) otrzymuje się

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{\rho}{\rho_0}u. \tag{3.13}$$

Jeżeli według (3.11) i (3.13) napiszemy drugie pochodne mieszane funkcji $\xi$, to otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right), \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho}{\rho_0}u\right). \tag{3.15}$$

Ponieważ drugie pochodne mieszane funkcji $\xi$ muszą być sobie równe, więc możemy porównać prawe strony (3.14) i (3.15), co daje związek

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho}{\rho_0}u\right) \tag{3.16}$$

będący jednowymiarowym równaniem ciągłości.

Stąd wniosek, że równość drugich pochodnych mieszanych funkcji $\xi$ gwarantuje nam zachowanie równania ciągłości w obszarze przepływu.

Zatem funkcja $\xi$ musi być funkcją ciągłą odpowiednio wysokiej klasy w całym obszarze przepływu.

Za pomocą (3.11) i (3.13) możemy wyrazić prędkość czoła przepływu (2.12) i prędkość przemieszczania się w przepływie stałych wartości funkcji $\xi$ (2.13) jak następuje:

$$c_2=\frac{\rho_2 u_2}{\rho_2-\rho_0}, \tag{3.17}$$

gdzie $u_2$ i $\rho_2$ są odpowiednio prędkością $u$ i gęstością płynu $\rho$ wzdłuż trajektorii czoła przepływu na płaszczyźnie $x$, $t$, oraz

$$c_\xi = \frac{\rho u}{\rho - \rho_0}. \tag{3.18}$$

## 4. Przekształcenie równania ruchu

Funkcja $\xi$ przekształca jednowymiarowe równanie ciągłości do postaci

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \, \partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \, \partial x}. \tag{4.1}$$

Jest kwestią interesującą, jak funkcja $\xi$ pozwoli przekształcić równanie ruchu?

Dla zbadania tej kwestii, połączymy równanie ruchu (1.2) i równanie izentropy (1.3). Znajdujemy pochodną cząstkową względem $x$ równania izentropy (1.3)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \tag{4.2}$$

Wprowadzając znane oznaczenie

$$k \frac{p_0}{\rho_0} = c_0^2, \tag{4.3}$$

gdzie $c_0$ jest prędkością dźwięku w płynie nieruchomym i pamiętając, że zgodnie z przyjętą symboliką

$$c_0^2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} = c^2, \tag{4.4}$$

otrzymujemy w miejsce (4.2)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}. \tag{4.5}$$

To wyrażenie podstawiamy do równania ruchu (1.2)

$$c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{du}{dt}. \tag{4.6}$$

Stąd, po podzieleniu stronami przez $\rho_0$, otrzymujemy

$$c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{du}{dt}. \tag{4.7}$$

W ten sposób przygotowane równanie, równoważne równaniom (1.2) i (1.3), przekształcamy dalej za pomocą funkcji $\xi$. W celu skrócenia zapisu, przyjmujemy oznaczenia Monge'a pochodnych cząstkowych funkcji $\xi$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi}{\partial x}=p, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}=q,\\
&\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=\frac{\partial p}{\partial x}=r,\\
&\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial t}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial t\,\partial x}=\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial q}{\partial x}=s,\\
&\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=\frac{\partial q}{\partial t}=t.
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Według przyjętych powyżej oznaczeń, wyrażenia (2.9), (3.10) i (3.13) przyjmą postać

$$u=\frac{q}{1-p}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=1-p, \tag{4.10}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}u=q. \tag{4.11}$$

Pochodna substancjalna prędkości $u$ (4.9) wyrazi się następująco:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\frac{dq}{dt}(1-p)-q\frac{d(1-p)}{dt}}{(1-p)^2} \tag{4.12}$$

lub

$$\frac{du}{dt}=\frac{\frac{dq}{dt}-u\frac{d(1-p)}{dt}}{1-p} \tag{4.13}$$

po podzieleniu licznika i mianownika prawej strony (4.12) przez $(1-p)$.
Ale

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial q}{\partial x}u+\frac{\partial q}{\partial t}, \tag{4.14}$$

$$\frac{d(1-p)}{dt}=\frac{\partial(1-p)}{\partial x}u+\frac{\partial(1-p)}{\partial t}, \tag{4.15}$$

bo pochodne czasowe $dq/dt$ i $d(1-p)/dt$ są pochodnymi substancjalnymi. Drugą z nich (4.15) możemy zapisać w postaci

$$\frac{d(1-p)}{dt}=-\left(\frac{\partial p}{\partial x}u+\frac{\partial p}{\partial t}\right). \tag{4.16}$$

W równaniach (4.14) i (4.16) stosujemy oznaczenia Monge'a (4.8); zgodnie z tym

$$\frac{dq}{dt}=s\cdot u+t, \tag{4.17}$$

$$\frac{d(1-p)}{dt}=-(r\cdot u+s). \tag{4.18}$$

Podstawiamy (4.17) i (4.18) do (4.13)

$$\frac{du}{dt}=\frac{s\cdot u+t+u(r\cdot u+s)}{1-p}, \tag{4.19}$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{du}{dt}=\frac{r\cdot u^2+2u\cdot s+t}{1-p}. \tag{4.20}$$

Według (4.10) i (4.8)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)=\frac{\partial(1-p)}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}=-r. \tag{4.21}$$

Podstawiając teraz (4.20) i (4.21) do równania (4.7) dostajemy

$$-c^2\cdot r=-(1-p)\frac{r\cdot u^2+2u\cdot s+t}{1-p}, \tag{4.22}$$

a stąd

$$c^2\cdot r=r\cdot u^2+2u\cdot s+t \tag{4.23}$$

i ostatecznie, jako rezultat przekształceń, otrzymujemy równanie

$$(u^2-c^2)\cdot r+2u\cdot s+t=0. \tag{4.24}$$

Jest to równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu, z jedną funkcją niewiadomą $\xi$.

Współczynniki w tym równaniu są funkcjami pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji $\xi$; według (4.4), (4.9), (4.10) i (4.8) mamy

$$u^2-c^2=\left(\frac{q}{1-p}\right)^2-c_0^2\cdot(1-p)^{k-1}, \tag{4.25}$$

$$2u=\frac{2q}{1-p}. \tag{4.26}$$

Zgodnie z [2], możemy dojść do wniosku, że wyprowadzone równanie jest szczególnym przypadkiem równania quasi-liniowego, w którym wyraz wolny nie występuje.

Zapiszmy wyprowadzone równanie (4.24) w pełnej postaci, podstawiając w miejsce $r$, $s$ i $t$ odpowiednie symbole pochodnych cząstkowych funkcji $\xi$

$$(u^2-c^2)\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+2u\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0 \tag{4.27}$$

i stwierdźmy, że przekształcenie, za pomocą funkcji $\xi$ układu równań (1.1), (1.2) i (1.3), pozwoliło uzyskać układ równoważny składający się z równań (4.1) i (4.27).

Ponieważ (4.1) jest automatycznie spełnione dla funkcji dostatecznie regularnych, więc równanie (4.27) pozostaje tym, które opisuje jednowymiarowy, izentropowy przepływ nieustalony.

Dzieląc równanie (4.27) przez $c^2$, otrzymujemy postać

$$\left[\left(\frac{u}{c}\right)^2-1\right]\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+2\,\frac{u}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial t}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0 \tag{4.28}$$

dogodną do dyskusji wpływu wielkości stosunku $u/c$ na możliwość uproszczeń równania (4.27). W tym miejscu zauważmy tylko, że jeżeli

$$\frac{u}{c}\to 0 \text{ i } c\to c_0,$$

to równanie (4.28) redukuje się do równania falowego.

## 5. Podsumowanie

Wprowadzenie pojęcia funkcji $\xi$, wyrażającej położenie płaszczyzn płynnych w przepływie względem położenia, jakie zajmowały te płaszczyzny w płynie nieruchomym, umożliwiło zastąpienie układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu i równania izentropy, opisującego jednowymiarowy, izentropowy przepływ nieustalony, przez jedno równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu dla funkcji $\xi$.

Równanie to (4.27) otwiera nowe możliwości badania jednowymiarowych przepływów nieustalonych.

W związku z tym, staje się możliwe teraz nowe przedstawienie zadania wyznaczenia jednowymiarowego, izentropowego przepływu nieustalonego.

Zadanie to polega na rozwiązaniu równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu dla niewiadomej funkcji $\xi$, celem wyznaczenia tej funkcji przy określonych warunkach brzegowych.

Praca wpłynęła do Redakcji w grudniu 1989 r. (po korekcie).

### Literatura

[1] W. J. Prosnak, Mechanika płynów. PWN. Warszawa 1971.
[2] J. N. Sneddon, Równania różniczkowe cząstkowe. PWN, Warszawa 1962.

## A One-Dimensional, Isentropic Unsteady Flow

### An Attempt of a New Approach


Summary

The subject of consideration is a one-dimensional isentropic unsteady flow.The introduction of a new $\xi$ function expressing the position of the liquid planes in the flow, with respect to the position, which was occuped by these planes in motionless fluid made it possible to substitute the system of two partial differential equations of the first order and the equation of isentrope describing one-dimensional isentropic unsteady flow by one partial differential equation of the second order for the $\xi$ function. This equation opens new possibilities of one-dimensional unsteady flows examination.


## Одномерное, изоэнтропическое нестационарное течение

### Попытка новой постановки задачи


Резюме

Предметом обсуждений является одномерное, изоэнтропическое, нестационарное течение. Введение новой фукции $\xi$, выражающей положение жидких плоскостей в течении, относительно положения, которое занимали эти плоскости в неподвижном газе, сделало возможным замену системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и уравнения адиабаты, изобразующего одномерное, изоэнтропическое, нестационарное течение, одном дифферанциальном уравнением в частных производных второго порядка для функции $\xi$. Это уравнение открывает новые возможности изучения одномерных, нестационарных течений.