

P O L S K A                      A K A D E M I A                      N A U K

I N S T Y T U T   M A S Z Y N   P R Z E P Ł Y W O W Y C H

**PRACE  
INSTYTUTU MASZYN  
PRZEPŁYWOWYCH**

**TRANSACTIONS  
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY**

94

GDAŃSK 1992

# PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

\*

## THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machines

### RADA REDAKCYJNA - EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI  
WŁODZIMIERZ PROSNAK · ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY - CHAIRMAN)  
JÓZEF ŚMIGIELSKI

### KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS

EDWARD ŚLIWICKI - P. O. REDAKTOR - EDITOR  
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI  
ANDRZEJ ŻABICKI

### REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN

ul. Gen. Józefa Fischera 14, 80-952 Gdańsk, skr. poczt. 621, tel. 41-12-71 wew. 141

ISSN 0079-3205

WYDAWCZA: Redakcja Wydawnictw Ciągłych IMP PAN

80-952 Gdańsk, skrytka poczt. 621, tel. 41-12-71

Skład komputerowy A. D. Kardaś

Drukarnia: Chromatografia w Rumii

GERARD KOSMAN, ANDRZEJ RUSIN

Gliwice

## Analiza naprężeń w warunkach pelzania w wirniku osiowo-promieniowym na podstawie izochronicznych krzywych pelzania

W pracy przedstawiono metodę obliczeń naprężeń i odkształceń w wirnikach osiowo-promieniowych maszyn przepływowych pracujących w wysokich temperaturach z uwzględnieniem zjawiska pelzania materiału. Przedstawiono model fizyczny i matematyczny wirnika i metodę jego rozwiązania. Podano przykładowe wyniki obliczeń.

### 1. Wprowadzenie

Analiza stanu naprężenia w tarczach wirnikowych stopni osiowych i osiowo-promieniowych maszyn przepływowych oraz metody ich projektowania ciągle stanowią temat prac badawczych [1-4]. Podczas VI Konferencji naukowo-technicznej "Technologia przepływowych maszyn wirnikowych" wygłoszono na ten temat 6 referatów [5-10].

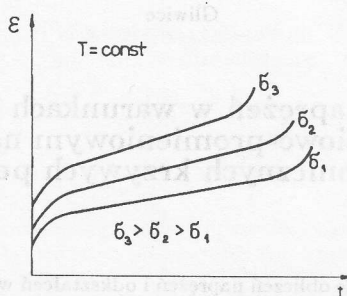
Zainteresowanie tą tematyką wynika z tego, że zespoły wirnikowe są najistotniejszym elementem maszyn przepływowych i mają decydujący wpływ na parametry pracy tych maszyn a także na ich niezawodność i trwałość.

Do wyznaczenia naprężeń i odkształceń stosuje się różne metody numeryczne. Należą do nich w szczególności metoda różnic skończonych i metoda elementów skończonych.

Zagadnienie jest bardziej skomplikowane jeżeli wirnik pracuje w wysokiej temperaturze. Analiza naprężeń z uwzględnieniem pelzania ma istotne znaczenie zarówno w procesie projektowania (dobór cech konstrukcyjnych) jak również podczas eksploatacji maszyny (trwałość wirnika) [11].

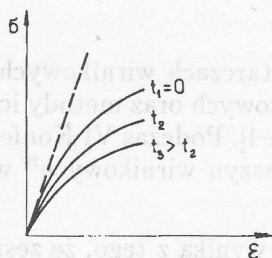
## 2. Założenia i podstawowe równania pelzania

Stan naprężeń i odkształceń wirnika opisują: równania równowagi, związki fizyczne, związki geometryczne i warunki brzegowe. W warunkach pelzania zmiane ulegają związki fizyczne, których postać matematyczną określa się na podstawie badań procesu pelzania. Wyniki tych badań przedstawia się zazwyczaj w postaci tzw. krzywych pelzania (rysunek 1) będących zależnością odkształcenia od czasu przy danym naprężeniu.



Rys. 1. Krzywe pelzania.

Często wyniki badań przedstawia się w postaci tzw. izochronicznych krzywych pelzania (rysunek 2) będących związkiem między naprężeniem i odkształceniem dla danej wartości czasu.



Rys. 2. Izochroniczne krzywe pelzania.

Liczne doświadczenia [12] potwierdzają podobieństwo izochronicznych krzywych pelzania tzn., że mogą one być otrzymywane z jednej krzywej wyjściowej przez pomnożenie jej współrzędnych przez pewien współczynnik będący funkcją czasu. W takim przypadku zależność naprężenia od odkształcenia i czasu w danej temperaturze  $T$  można przedstawić w postaci iloczynu dwóch funkcji  $\varphi(\epsilon_i, T)$  będącej funkcją odkształcenia oraz  $\psi(t, T)$  będącej funkcją czasu:

$$\sigma_i = \varphi(\epsilon_i, T)\psi(t, T). \quad (1)$$

W dalszej części pracy analizowano pelzanie wirnika osiowo-promieniowego w oparciu o izochroniczne krzywe pelzania opisane zależnością

$$\sigma_i = \epsilon_i^m \frac{1}{(a + kt)^m}, \quad (2)$$

gdzie:

$\sigma_i$  – intensywność naprężeń,  $\epsilon_i$  – intensywność odkształceń,  $t$  – czas,  $a, k, m$  – stałe materiałowe.

### 3. Metoda analizy naprężeń w wirniku osiowo-promieniowym

Dokładne wyznaczenie rozkładów naprężeń w przypadku gdy wirnik pracuje w wysokiej temperaturze, jest bardzo skomplikowane. Trudności spowodowane są pochyleniem tarczy wirnikowej (brak płaszczyzny symetrii prostopadłej do osi) oraz wzajemnym oddziaływaniem stanów naprężeń w tarczy i w łopatkach.

Poniżej przedstawiono model tarczowo-płytowy umożliwiający uwzględnienie zginania. Rozważania przeprowadzono przy założeniu zmienności stałych sprężystych ( $E, \nu$ ) w zależności od położenia. Założenie to pozwala wykorzystywać model w obliczeniach sprężystych przy uwzględnieniu zależności modułu Younga i współczynnika Poissona od temperatury ( $E = E(T), \nu = \nu(T)$ ).

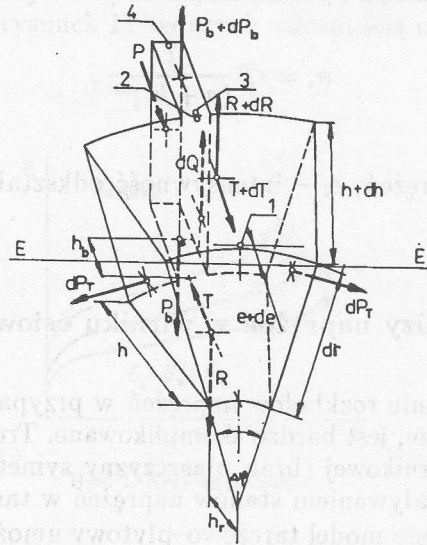
#### 3.1. Założenia modelu tarczowo-płytowego

- w tarczy przyjęto płaski stan naprężenia;
- tarcza może mieć dowolny kształt oraz może być pochylona;
- przyjmuje się promieniowe usytuowanie łopatek;
- przyjmuje się hipotezę płaskich przekrojów tzn., że przekrój cylindryczny wirnika nieobciążonego przechodzi po odkształceniu w pobocznicę stożka;
- zakłada się, że liczba łopatek jest tak duża, że można pominąć zmienność naprężeń wzdłuż obwodu;
- uwzględnia się zmienność temperatury wzdłuż promienia oraz na grubości tarczy z tym, że na grubości tarczy oraz w płaszczyźnie łopatki przyjmuje się liniowy rozkład temperatury;
- przyjmuje się liniowy rozkład naprężeń na grubości tarczy;
- na jedną stronę tarczy może działać stałe nadciśnienie liczone względem drugiej strony, co powoduje zginanie wirnika (sprzyja temu pochylenie tarczy);
- uwzględnia się naprężenia styczne wywołane tylko różnicą ciśnień.



### 3.2. Równania równowagi wirnika

(1) W celu uzyskania równań równowagi rozpatrzmy element wirnika wycięty dwoma przekrojami cylindrycznymi oddalonymi o  $dr$  i dwoma merydjalnymi oddalonymi o  $\Delta\varphi = \frac{2\Pi}{z}$  (rysunek 3).



Rys. 3. Element wirnika.

Jeżeli oznaczymy przez  $\sigma_{r_1}$  i  $\sigma_{r_2}$  naprężenia promieniowe w punktach 1 i 2, przez  $\sigma_{t_1}$ ,  $\sigma_{t_2}$  naprężenia obwodowe w tych punktach, a przez  $\sigma_3$  i  $\sigma_4$  naprężenia w łopacie w punktach 3 i 4, to siłę promieniową w tarczy  $R$  oraz w łopacie  $P_b$  możemy przedstawić w postaci [15]:

$$R = ht \left( \frac{\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2}}{2} \right) = \frac{\Pi rh}{z} (\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2}), \quad (3)$$

$$P_b = bs \frac{\sigma_3 + \sigma_4}{2}. \quad (4)$$

Wypadkową sił obwodowych możemy zapisywać jako

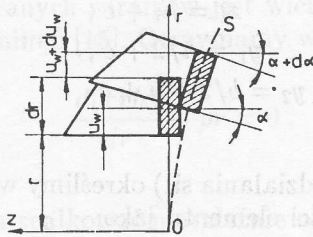
$$dK_T = \frac{2\Pi}{z} dP_T = \frac{\Pi}{z} h dr (\sigma_{t_1} + \sigma_{t_2}). \quad (5)$$

Siła odśrodkowa rozpatrywanego elementu wirnika ma postać:

$$dQ = \rho\omega^2(thdr + bsdr) = \rho\omega^2 \left( \frac{2\Pi rh}{z} + bs \right) dr. \quad (6)$$

Jeżeli  $\tau$  jest średnią wartością naprężenia ścinającego w cylindrycznej powierzchni przekroju (rysunek 3) to wartość siły  $T$  określa zależność

$$T = \frac{2\Pi r}{z} h\tau. \quad (7)$$



Rys. 4. Opis odkształceń wirnika.

Warunek równowagi sił działających w kierunku  $s$  ma postać (rysunek 4):

$$dR^s + dP_b^s - dK_T^s + dQ^s = 0. \quad (8)$$

Ponieważ kąt  $\alpha$  będący sumą kątów wstępnego pochylenia oraz pochylenia w wyniku odkształcenia wirnika jest dla tego typu wirników wielkością małą możemy przyjąć [16], że:  $dR^s = dR$ ,  $dP_b^s = dP_b$  itd. Równanie (8) możemy zatem zapisać w postaci:

$$dR + dP_b - dK_T + dQ = 0. \quad (9)$$

względniając (3)÷(5) otrzymujemy:

$$\frac{\Pi}{z} \frac{d}{dr} [rh(\sigma_{r1} + \sigma_{r2})] + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} [bs(\sigma_3 + \sigma_4)] + - \frac{\Pi}{z} h(\sigma_{t1} + \sigma_{t2}) + \rho\omega^2 \left( \frac{2\Pi rh}{z} + bs \right) = 0. \quad (10)$$

Ważnym warunkiem musi być spełniony warunek równowagi momentów względem prostej

$$(R + dR)(x_1 + dx) + (P_b + dP_b)(x_2 + dx_2)dK_T z_1 + tdr + \rho\omega^2 r \left[ \frac{2\Pi r h}{z} y_1 + b s y_2 \right] dr - P_b x_2 - R x_1 = 0, \quad (11)$$

gdzie (rysunek 3):

$$\begin{aligned} x_1 &= h_r + e, \\ x_2 &= h_b + h + e, \\ z_1 &= h_t + e, \\ y_1 &= h/2 + e, \\ y_2 &= b/2 + h + e. \end{aligned}$$

Wielkości  $h_r, h_b, h_t$  (ramiona działania sił) określimy wykorzystując fakt liniowego rozkładu naprężeń na grubości elementu jako:

$$h_r = h/3 \frac{\sigma_{r1} + 2\sigma_{r2}}{\sigma_{r1} + \sigma_{r2}}, \quad (12)$$

$$h_t = h/3 \frac{\sigma_{t1} + 2\sigma_{t2}}{\sigma_{t1} + \sigma_{t2}}, \quad (13)$$

$$h_b = b/3 \frac{\sigma_3 + 2\sigma_4}{\sigma_3 + \sigma_4}. \quad (14)$$

Wstawiając powyższe zależności do równania (11) oraz pomijając w nim różniczki wyższych rzędów, równanie równowagi momentów możemy zapisać jako:

$$\begin{aligned} & \frac{\Pi}{z} \frac{d}{dr} \left[ rh \left( \frac{h}{3} + e \right) \sigma_{r1} + \left( \frac{2h}{3} + e \right) \sigma_{r2} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left\{ bs \left[ \left( \frac{b}{3} + h + e \right) \sigma_3 + \left( \frac{2b}{3} + h + e \right) \sigma_4 \right] \right\} + \\ & - \frac{\Pi h}{z} \left\{ \left( \frac{h}{3} + e \right) \sigma_{t1} + \left( \frac{2h}{3} + e \right) \sigma_{t2} \right\} + \\ & + \rho r \omega^2 \left\{ \frac{2\Pi r h}{z} \left( \frac{h}{2} + e \right) + bs \frac{b}{2} + h + e \right\} + \frac{2\Pi r h}{z} \tau = 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Kolejnym równaniem jest równanie równowagi sił w kierunku osiowym:



$$dT + P - dR' = 0, \quad (16)$$

gdzie:  $P$  – siła wywołana różnicą ciśnień działających na tarczę,  $R' \simeq R\alpha$  – określa wpływ sił promieniowych na naprężenia ścinające.

Uwzględniając (3) i (7) otrzymamy:

$$\frac{d(\tau rh)}{dr} + pr - \frac{\Pi}{z} \frac{d}{dr} [rh(\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2})\alpha] = 0. \quad (17)$$

Ponieważ  $\alpha$  dla rozpatrywanych wirników jest wielkością małą można człony zawierające ten czynnik pominąć [15]. Otrzymamy wówczas:

$$\frac{d(\tau rh)}{dr} + pr = 0. \quad (18)$$

Powyższe równanie można scałkować niezależnie od pozostałych:

$$\tau rh = -p \frac{r^2}{2} + C. \quad (19)$$

Stałą całkowania  $C$  wyznaczmy z warunku na brzegu zewnętrznym. W przypadku wirnika osiowego na brzeg zewnętrzny może działać siła  $A$  pochodząca od wieńca łopatkowego. Stąd stała  $C$  ma wartość:

$$C = \frac{A}{2\Pi} + \frac{pR_z^2}{2}, \quad (20)$$

a więc

$$\tau = \frac{p(R_z^2 - r^2)}{2rh} + \frac{A}{2\Pi rh}. \quad (21)$$

### 3.3. Związki fizyczne i geometryczne

Zgodnie z przyjętym założeniem, że przekrój cylindryczny wirnika nieobciążonego przechodzi po odkształceniu w pobocznicę stożka, przemieszczenie promienne dowolnego punktu możemy zapisać jako (rysunek 4):

$$u = u_0 + u_M, \quad (22)$$

gdzie:  $u_0$  – przemieszczenie w płaszczyźnie  $z = 0$  powodowane siłą odśrodkową,  $u_M = -\alpha z$  oznacza natomiast przemieszczenie promieniowe powodowane zginaniem wirnika.

Wydłużenie względne w kierunku obwodowym i promieniowym spełnia zależność

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= \frac{u}{r} = \frac{u_0 - \alpha z}{r} = \frac{1}{E_z}(\sigma_t - \nu_z \sigma_r) + \beta T, \\ \epsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{d(u_0 - \alpha z)}{dr} = \frac{1}{E_z}(\sigma_r - \nu_z \sigma_t) + \beta T.\end{aligned}\quad (23)$$

Zastępcze stałe materiałowe  $E_z$  i  $\nu_z$  są określone następująco [16,17]

$$\begin{aligned}E_z &= \frac{3\sigma_i/\epsilon_i}{2(1+\nu) + (1-2\nu)\sigma_i/E\epsilon_i}, \\ \nu_z &= \frac{1+\nu - (1-2\nu)\sigma_i/E\epsilon_i}{2(1+\nu) + (1-2\nu)\sigma_i/E\epsilon_i},\end{aligned}\quad (24)$$

gdzie

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2},$$

$\epsilon_i$  – intensywność odkształceń odpowiadająca na izochronicznej krzywej pelzania intensywności naprężeń  $\sigma_i$ , rysunek 2 i wzór (2).

Łatwo sprawdzić, że w obszarze odkształceń sprężystych (przy pominięciu pelzania)

$$\frac{\sigma_i}{E\epsilon_i} = 1$$

oraz

$$E_z = E, \quad \nu_z = \nu.$$

Po wyeliminowaniu z zależności (23) przemieszczenia  $u$  otrzymujemy <sup>1</sup>

$$E \frac{d(\beta T)}{dr} + \frac{d\sigma_t}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_r \frac{d\nu}{dr} + (\sigma_t - \sigma_r) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{E} \frac{dE}{dr} \right) + \frac{1}{r} (\sigma_r - \nu \sigma_t) = 0. \quad (25)$$

<sup>1</sup> w tym i w dalszych wzorach w celu uproszczenia zapisu stosujemy oznaczenia  $E, \nu$  w miejsce  $E_z, \nu_z$ .

Powyższe równanie możemy zapisać dla skrajnych punktów wirnika 1 i 2 (rysunek 3).

Kolejny warunek geometryczny wymaga aby odkształcenie promieniowe łopatkki u tarczy w miejscu ich połączenia były sobie równe. Odkształcenie łopatkki ma postać

$$\epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3} + \beta T_3, \quad (26)$$

Zaś odkształcenia promieniowe tarczy

$$\epsilon_{r_2} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{r_2} - \nu_2 \sigma_{t_2}) + \beta T_2. \quad (27)$$

Ponieważ  $T_2 = T_3$  otrzymamy

$$\sigma_3 = \frac{E_3}{E_2}(\sigma_{r_2} - \nu_2 \sigma_{t_2}). \quad (28)$$

Powyższy warunek zapewnia ciągłość odkształceń w punktach styku tarczy i łopatkki, natomiast kolejny zapobiega wystąpieniu w miejscu połączenia przegięcia:

$$\frac{\epsilon_4 - \epsilon_3}{b} = \frac{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}}{h}. \quad (29)$$

Ponieważ  $\epsilon_3 = \epsilon_{r_2}$  więc

$$\epsilon_4 = \left(1 + \frac{b}{h}\right)\epsilon_{r_2} - \frac{b}{h}\epsilon_{r_1}$$

lub

$$\begin{aligned} \sigma_4 = & \left(1 + \frac{b}{h}\right)\frac{E_4}{E_2}(\sigma_{r_2} - \nu_2 \sigma_{t_2}) - \frac{b}{h}\frac{E_4}{E_1}(\sigma_{r_1} - \nu_1 \sigma_{t_1}) + \\ & + E_4 \beta \left[ \frac{b}{h}(T_2 - T_1) - (T_4 - T_2) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

## 3.4. Końcowy układ równań

Zastępując w równaniach (10) i (15) naprężenia  $\sigma_3$  i  $\sigma_4$  odpowiednimi wyrażeniami (28) i (30) otrzymamy ostatecznie:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Pi}{z} \left[ \frac{d}{dr}(rh)(\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2}) + rh \frac{d\sigma_{r_2}}{dr} + rh \frac{d\sigma_{r_1}}{dr} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dr}(bs) \cdot \right. \\
 & \left[ \frac{E_3}{E_2}(\sigma_{r_2} - \nu_2 \sigma_{t_2}) + \left(1 + \frac{b}{h}\right) \frac{E_4}{E_2}(\sigma_{r_2} - \nu_2 \sigma_{t_2}) - \frac{b}{h} \frac{E_4}{E_1}(\sigma_{r_1} - \nu_1 \sigma_{t_1}) + \right. \\
 & \left. + \beta E_4 \left( \frac{b}{h}(T_2 - T_1) - (T_4 - T_2) \right) \right] + bs \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{E_3}{E_2} \right) (\sigma_{r_2} - \nu_2 \sigma_{t_2}) + \right. \\
 & \left. + \frac{E_3}{E_2} \left( \frac{d\sigma_{r_2}}{dr} - \nu_2 \frac{d\sigma_{t_2}}{dr} - \frac{d\nu_2}{dr} \sigma_{t_2} \right) \right] + \frac{d}{dr} \left[ \left(1 + \frac{b}{h}\right) \frac{E_4}{E_2} \right] (\sigma_{r_2} - \nu_2 \sigma_{t_2}) + \\
 & \left. + \left(1 + \frac{b}{h}\right) \frac{E_4}{E_2} \left( \frac{d\sigma_{r_2}}{dr} - \nu_2 \frac{d\sigma_{t_2}}{dr} - \sigma_{t_2} \frac{d\nu_2}{dr} \right) + \right. \\
 & \left. - \frac{d}{dr} \left( \frac{b}{h} \frac{E_4}{E_1} \right) (\sigma_{r_1} - \nu_1 \sigma_{t_1}) - \frac{b}{h} \frac{E_4}{E_1} \left( \frac{d\sigma_{r_1}}{dr} - \frac{d\nu_1}{dr} \sigma_{t_1} - \nu_1 \frac{d\sigma_{t_1}}{dr} \right) \right] + \\
 & \left. + \frac{d}{dr} \left[ E_4 \beta \left( \frac{b}{h}(T_2 - T_1) - (T_4 - T_2) \right) \right] \right\} - \frac{\Pi}{z} h(\sigma_{t_1} + \sigma_{t_2}) + \\
 & + \rho r \omega^2 \left( \frac{2\Pi rh}{z} + bs \right) = 0; \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Pi}{z} \frac{d}{dr} \left\{ rh \left[ \left( \frac{h}{3} + e \right) \sigma_{r_1} + \left( \frac{2h}{3} + e \right) \sigma_{r_2} \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left\{ bs \left[ \left( \frac{b}{3} + h + e \right) \frac{E_3}{E_2} (\sigma_{r_2} - \nu_2 \sigma_{t_2}) + \left( \frac{2b}{3} + h + e \right) \cdot \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \left( \left(1 + \frac{b}{h}\right) \frac{E_4}{E_2} (\sigma_{r_2} - \nu_2 \sigma_{t_2}) - \frac{b}{h} \frac{E_4}{E_1} (\sigma_{r_1} - \nu_1 \sigma_{t_1}) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \beta E_4 \left( \frac{b}{h}(T_2 - T_1) - (T_4 - T_2) \right) \right) \right] \right\} - \frac{\Pi h}{z} \left[ \left( \frac{h}{3} + e \right) \sigma_{t_1} + \left( \frac{2h}{3} + e \right) \sigma_{t_2} \right] + \\
 & + \rho r \omega^2 \left[ \frac{2\Pi rh}{z} \left( \frac{h}{2} + e \right) + bs \left( \frac{b}{2} + h + e \right) \right] + \frac{\Pi}{z} (R_z^2 - r^2) p + \frac{A}{z} = 0; \quad (32)
 \end{aligned}$$



$$\frac{d\sigma_{t_1}}{dr} - \nu_1 \frac{d\sigma_{r_1}}{dr} - \sigma_{r_1} \frac{d\nu_1}{dr} + (\sigma_{t_1} - \nu_1 \sigma_{r_1}) \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{E_1} \frac{dE_1}{dr} \right) + E_1 \frac{d(\beta T_1)}{dr} - \frac{1}{r} (\sigma_{r_1} - \nu_1 \sigma_{t_1}) = 0; \quad (33)$$

$$\frac{d\sigma_{t_2}}{dr} - \nu_2 \frac{d\sigma_{r_2}}{dr} - \sigma_{r_2} \frac{d\nu_2}{dr} + (\sigma_{t_2} - \nu_2 \sigma_{r_2}) \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{E_2} \frac{dE_2}{dr} \right) + E_2 \frac{d(\beta T_2)}{dr} - \frac{1}{r} (\sigma_{r_2} - \nu_2 \sigma_{t_2}) = 0; \quad (34)$$

Powyższe równania należy uzupełnić warunkami brzegowymi.

### 3.5. Warunki brzegowe

Na promieniu wewnętrznym tarczy naprężenia promieniowe przyjmują wartość zero, tzn. dla  $r = R_0$

$$\sigma_{r_1} = 0, \quad \sigma_{r_2} = 0. \quad (35)$$

Jeżeli wirnik osadzony jest na wale wówczas na obwodzie wewnętrznym istnieją naprężenia o średniej wartości  $p$  a przemieszczenia w punktach 1 i 2 są sobie równe. Uwzględniając powyższe założenia otrzymamy:

$$\frac{\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2}}{2} = p, \quad (36)$$

$$\sigma_{t_1} - \nu_1 \sigma_{r_1} = \frac{E_1}{E_2} \sigma_{t_2} - \nu_2 \sigma_{r_2} + \beta E_1 (T_2 - T_1). \quad (37)$$

W przypadku tarczy pełnej zachodzi na promieniu  $r = 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{r_1} &= \sigma_{t_1}, \\ \sigma_{r_2} &= \sigma_{t_2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Przyjęcie hipotezy płaskich przekrojów prowadzi do zerowania się wypadkowej siły promieniowej i wypadkowego momentu na obrzeżu zewnętrznym (dla  $r = R_z$ )

$$\frac{\Pi R_z h_z}{z} (\sigma_{r_{1z}} + \sigma_{r_{2z}}) + b_z s (\sigma_{3z} + \sigma_{4z}) = 0, \quad (39)$$

$$\frac{2\Pi R_z h_z}{3z} (\sigma_{r_{1z}} + 2\sigma_{r_{2z}}) + b_z s \left[ \left( h_z + \frac{b_z}{2} \right) \sigma_{3z} + \left( h_z + \frac{2b_z}{3} \right) \sigma_{4z} \right] = 0. \quad (40)$$

Wielkości z indeksem z odnoszą się do promienia zewnętrznego  $R_z$ .

W przypadku wirników osiowych wypadkowa siła promieniowa równa jest sile odśrodkowej wieńca łopatkowego  $E_1$  natomiast wypadkowy moment równy jest momentowi  $M_z$  z jakim wieńiec łopatkowy oddziałuje na tarczę wirnika.

### 3.6. Algorytm obliczeń numerycznych dla odkształceń sprężystych

Rozpatrzmy najpierw odkształcenia sprężyste z pominięciem pełzania materiału. Układ równań (31)÷(34) wraz z zależnościami (24a) oraz odpowiednimi warunkami brzegowymi (35)÷(40) rozwiązano metodą różnic skończonych. W związku z tym równania (31)÷(34) zapisano w formie różnicowej [11]

$$\begin{aligned} a_{11}\Delta\sigma_{r_1} + a_{12}\Delta\sigma_{r_2} + a_{13}\Delta\sigma_{t_1} + a_{14}\Delta\sigma_{t_2} &= b_1\Delta r, \\ a_{21}\Delta\sigma_{r_1} + a_{22}\Delta\sigma_{r_2} + a_{23}\Delta\sigma_{t_1} + a_{24}\Delta\sigma_{t_2} &= b_2\Delta r, \\ a_{31}\Delta\sigma_{r_1} + a_{32}\Delta\sigma_{r_2} + a_{33}\Delta\sigma_{t_1} + a_{34}\Delta\sigma_{t_2} &= b_3\Delta r, \\ a_{41}\Delta\sigma_{r_1} + a_{42}\Delta\sigma_{r_2} + a_{43}\Delta\sigma_{t_1} + a_{44}\Delta\sigma_{t_2} &= b_4\Delta r, \end{aligned} \quad (41)$$

gdzie

$$a_{11} = \frac{\Pi r h}{z} - \frac{b^2 s E_4}{2h E_1},$$

$$a_{12} = \frac{\Pi r h}{z} + \frac{bs}{2} \left( \frac{E_3}{E_2} + \frac{E_4}{E_2} + \frac{b E_4}{h E_2} \right),$$

$$a_{13} = \frac{b^2 s \nu_1 E_4}{2h E_1},$$

$$a_{14} = -\frac{bs \nu_2}{z} \left( \frac{E_3}{E_2} + \frac{E_4}{E_2} + \frac{b E_4}{h E_2} \right),$$

$$b_1 = \frac{\Pi}{z}(\sigma_{r_1} + \sigma_{r_2})\frac{d}{dr}(rh) + \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_{r_2} - \nu_2\sigma_{t_2})\frac{d}{dr} \left[ \left( \frac{E_3}{E_2} + \frac{E_4}{E_2} + \frac{E_4 b}{E_2 h} \right) (bs) \right] - (\sigma_{r_1} - \nu_1\sigma_{t_1})\frac{d}{dr} \left( \frac{b^2 s E_4}{4 E_1} \right) \right\} +$$

$$- \frac{bs}{2} \left\{ \frac{d\nu_2}{dr}\sigma_{t_2} \left[ \frac{E_3}{E_2} + \frac{E_4}{E_2} + \frac{b E_4}{h E_2} \right] + \frac{d\nu_1}{dr_1}\sigma_{t_1} \frac{b E_4}{h E_1} \right\} +$$

$$- \frac{\Pi h}{z}(\sigma_{t_1} + \sigma_{t_2}) + \frac{\beta}{2} \frac{d}{dr} \left\{ E_4 bs \left[ \frac{b}{h}(T_2 - T_1) - (T_4 - T_2) \right] \right\} +$$

$$+ \rho\omega^2 \left( \frac{2\Pi rh}{z} + bs \right),$$

$$a_{21} = \frac{\Pi rh}{z} \left( \frac{h}{3} + e \right) - \frac{b^2 s}{2h} \left( \frac{2b}{3} + h + e \right) \frac{E_4}{E_1},$$

$$a_{22} = \frac{\Pi}{z} rh \left( \frac{2h}{3} + e \right) + \frac{bs}{2} \left[ \left( \frac{b}{3} + h + e \right) \frac{E_3}{E_2} + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{2b}{3} + h + e \right) \left( 1 + \frac{b}{h} \right) \frac{E_4}{E_2} \right], a_{23} = \frac{\nu_1 b 2s E_4}{2h E_1} \left( \frac{2b}{3} + h + e \right),$$

$$a_{24} = -\frac{bs\nu_2}{2} \left[ \left( \frac{b}{3} + h + e \right) \frac{E_3}{E_2} + \left( \frac{2b}{3} + h + e \right) \left( 1 + \frac{b}{h} \right) \frac{E_4}{E_2} \right],$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_{r_2} - \nu_2\sigma_{t_2})\frac{d}{dr} \left[ (bs) \left( \frac{b}{3} + h + e \right) \frac{E_3}{E_2} + \right] + \right.$$

$$+ \frac{d}{dr} \left[ (bs) \left( \frac{2b}{3} + h + e \right) \right] \left[ \left( 1 + \frac{b}{h} \right) \frac{E_4}{E_2} (\sigma_{r_2} - \nu_2\sigma_{t_2}) \right.$$

$$\left. \left. - \frac{b E_4}{h E_2} (\sigma_{r_1} - \nu_1\sigma_{t_1}) \right] + (bs) \left( \frac{2b}{3} + h + e \right) \right.$$

$$\left. \left[ (\sigma_{r_2} - \nu_2\sigma_{t_2})\frac{d}{dr} \left( 1 + \frac{b}{h} \right) \frac{E_4}{E_2} \right] - (\sigma_{r_1} - \nu_1\sigma_{t_1})\frac{d}{dr} \left( \frac{b}{h} \right) \frac{E_4}{E_1} \right\} +$$

$$- \frac{bs}{2} \left[ \left( \frac{b}{3} + h + e \right) \frac{E_3}{E_2} \frac{d\nu_2}{dr} \sigma_{t_2} + \left( \frac{2b}{3} + h + e \right) \left( 1 - \frac{b}{h} \right) \frac{E_4}{E_2} \frac{d\nu_2}{dr} \sigma_{t_2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{2b}{3} + h + e \right) \frac{b E_4}{h E_1} \frac{d\nu_1}{dr} \sigma_{t_1} \Big] - \frac{\Pi h}{z} \left[ \left( \frac{h}{3} + e \right) \sigma_{t_1} + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{2h}{3} + e \right) \sigma_{t_2} \right] + \frac{\beta}{2} \frac{d}{dr} \left\{ b s E_4 \left( \frac{2b}{3} + h + e \right) \left[ \frac{b}{h} (T_2 - T_1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - (T_4 - T_2) \right] \right\} + \rho \omega^2 r \left[ \frac{2 \Pi r h}{z} \left( \frac{h}{2} + e \right) + b s \left( \frac{b}{2} + h + e \right) \right] + \\
 & + \frac{\Pi}{z} (r^2 - R_z^2) p + \frac{A}{z},
 \end{aligned}$$

$$a_{31} = -\nu_1,$$

$$a_{32} = 0,$$

$$a_{33} = 1,$$

$$a_{34} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 b_3 = \sigma_{t_1} \left[ (1 + \nu_1) \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta E_1}{E_1} \right] - \sigma_{r_1} \left[ (1 + \nu_1) \frac{\Delta r}{r} - \nu_1 \frac{\Delta E_1}{E_1} - \Delta \nu_1 \right] + \\
 + E_1 \beta \Delta T_1,
 \end{aligned}$$

$$a_{41} = 0,$$

$$a_{42} = -\nu_2,$$

$$a_{43} = 0,$$

$$a_{44} = 1,$$

$$\begin{aligned}
 b_4 = \sigma_{t_2} \left[ (1 + \nu_2) \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta E_2}{E_2} \right] - \sigma_{r_2} \left[ (1 + \nu_2) \frac{\Delta r}{r} - \nu_2 \frac{\Delta E_2}{E_2} - \Delta \nu_2 \right] + \\
 - E_2 \beta \Delta T_2.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie uzyskano jako superpozycję trzech rozwiązań szczegółowych.

Pierwsze rozwiązanie szczegółowe otrzymujemy wtedy gdy jako warunek graniczny przyjmiemy:  $\sigma_{t_1}^{(1)} = \sigma_{t_2}^{(1)} = \sigma_0$  ( $\sigma_0$  - dowolnie przyjęta wartość naprężeń). Wartości  $\sigma_{r_1}^{(1)}$  oraz  $\sigma_{r_2}^{(1)}$  obliczamy w zależności od rodzaju warunków brzegowych ze związków (35)÷(40). Drugie rozwiązanie szczegółowe otrzymuje się po



podstawieniu  $\sigma_{t_1}^{(2)} = 1$ ,  $\sigma_{t_2}^{(2)} = 0$ , natomiast  $\sigma_{r_1}^{(2)}$  i  $\sigma_{r_2}^{(2)}$  określamy z zależności (35)÷(40). W tym przypadku rozwiązujemy układ bez funkcji zaburzających (tzn.  $F_1 = T_2 = T_4 = \omega = p = A = 0$ ).

W trzecim rozwiązaniu szczegółowym przyjmujemy:  $\sigma_{t_1}^{(3)} = 0$ ,  $\sigma_{t_2}^{(3)} = 1$  oraz odpowiednie  $\sigma_{r_1}^{(3)}$  i  $\sigma_{r_2}^{(3)}$ . Również i w tym przypadku układ rozwiązujemy bez funkcji zaburzających.

Poszukiwane rozwiązanie ogólne można przedstawić następująco:

$$\sigma_{rj} = \sigma_{rj}^{(1)} + k_2 \sigma_{rj}^{(2)} + k_3 \sigma_{rj}^{(3)} \quad (j = 1, 2)$$

$$\sigma_{tj} = \sigma_{tj}^{(1)} + k_2 \sigma_{tj}^{(2)} + k_3 \sigma_{tj}^{(3)}$$

$$\sigma_m = \sigma_m^{(1)} + k_2 \sigma_m^{(2)} + k_3 \sigma_m^{(3)} \quad (m = 3, 4)$$

Stale  $k_2$  i  $k_3$  oznaczają w tym przypadku stałe całkowania, które należy wyznaczyć wykorzystując warunki na brzegu zewnętrznym. Jeżeli podstawimy (42) do (39) i (40) otrzymamy układ dwu równań z niewiadomymi  $k_2$  i  $k_3$ .

### 3.7. Modelowanie odkształceń z uwzględnieniem pełzania

Do wyznaczenia naprężeń i odkształceń z uwzględnieniem pełzania materiału wykorzystamy metodę kolejnych przybliżeń oraz opisany w punkcie 3.6. algorytm numeryczny dla zagadnień sprężystych. Tok postępowania jest następujący:

- obliczamy wirnik jako ciało sprężyste, wyznaczając składowe naprężeń i odkształceń oraz intensywność naprężeń  $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}, \sigma_{i4}$ ;
- obliczamy intensywność odkształceń  $\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \epsilon_{i3}, \epsilon_{i4}$ , posługując się zależnością (2) lub rysunkiem 2;
- z zależności (24) obliczamy zastępcze stałe materiałowe  $E_z$  i  $\nu_z$ ;
- powtarzamy obliczenie wg algorytmu dla zagadnień sprężystych do momentu ustalenia się składowych naprężeń oraz  $E_z$  i  $\nu_z$ .

Przedstawioną procedurę ujęto schematycznie na rysunku 5. Procedurę tę stosuje się dla wybranych wartości czasu  $t$ .

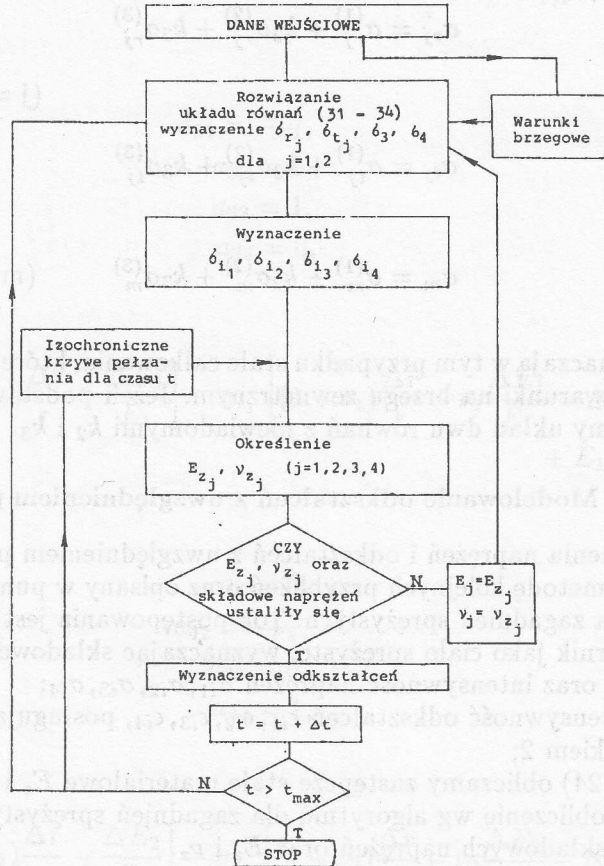
## 4. Rozkłady naprężeń w wirniku osiowo-promieniowym w stanie sprężystym i w warunkach pełzania

Przedstawiony w poprzednim punkcie algorytm obliczeń zastosowano do wyznaczenia naprężeń w równomiernie nagrzanym ( $T=600$  C) wirniku osiowo-promieniowym.

Postać konstrukcyjną wirnika pokazano na rysunku 6. Obliczenia szczegółowe wykonano dla następujących danych liczbowych:

$R_0 = 0,025$  m,  $R_1 = 0,040$  m,  $R_2 = 0,097$  m,  $R_z = 0,205$  m,  $h_0 = 0,06$  m,  $h_1 = 0,024$  m,  $h_z = 0,005$  m,  $r_{k1} = 0,09$  m,  $r_{k2} = 0,07$  m.

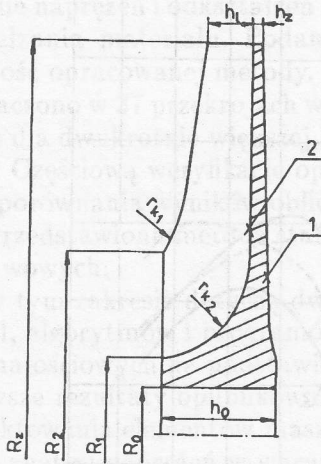
Współczynniki funkcji (2):  $m = 0,285$ ,  $a = 8,779 \cdot 10^{-12}$ ,  $k = 3,9610 \cdot 10^{-14}$ . Przyjęto że wirnik posiada  $z = 16$  łopatek o grubości  $s = 0,0025$  m. Gęstość materiału  $\rho = 7800$  kg/m, prędkość kątowna  $\omega = 837$  1/s.



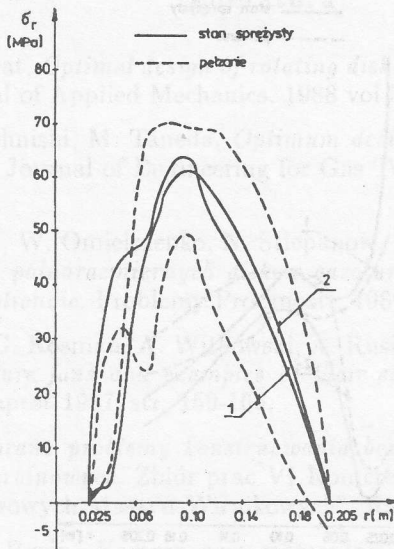
Rys. 5. Uproszczony schemat blokowy obliczeń wirnika osiowo-promieniowego w warunkach pełzania z wykorzystaniem izochronicznych krzywych pełzania.

Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 7–9. Porównano rozkład naprężeń w stanie sprężystym i w warunkach pełzania po 1000 h. Na rysunkach podane kolejno rozkład naprężeń promieniowych (rysunek 7), obwodowych (rysunek 8) zredukowanych (rysunek 9). Przebieg naprężeń zredukowanych wskazuje na bardzo istotne obniżenie naprężeń maksymalnych w warunkach pełzania. Mniejsze

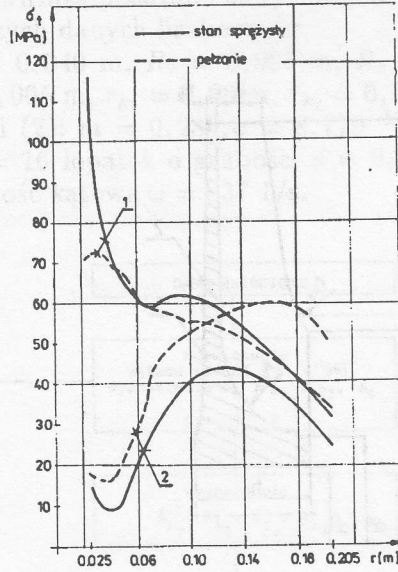
oraz również efekt zginania wirnika.



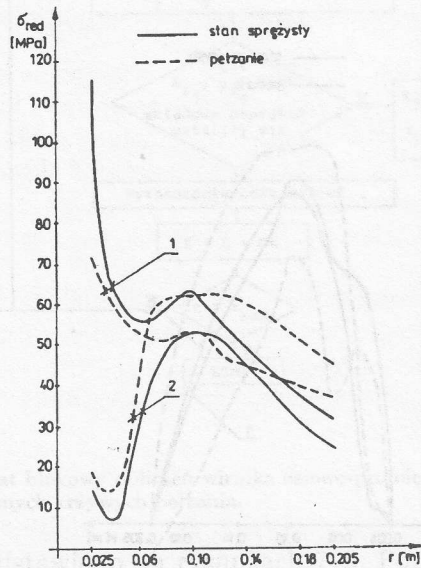
Rys. 6. Analizowany wirnik osiowo-promieniowy.



Rys. 7. Rozkład naprężeń promieniowych w stanie sprężystym i w warunkach pełzania w wirniku osiowo-promieniowym (oznaczenia punktów wg rys. 6).



Rys. 8. Rozkład naprężeń obwodowych  $\sigma_t$  w stanie sprężystym i w warunkach pełzania w wirniku osiowo-promieniowym (oznaczenia punktów wg rys. 6).



Rys. 9. Rozkład naprężeń zredukowanych w wirniku osiowo-promieniowym w stanie sprężystym i w warunkach pełzania.



## 5. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda i opracowany na jej podstawie algorytm obliczeniowy umożliwia wyznaczenie naprężeń i odkształceń w wirnikach osiowo-promieniowych z uwzględnieniem pełzania materiału. Podany przykład obliczeniowy ilustruje praktyczną przydatność opracowanej metody.

Naprężenia wyznaczono w 37 przekrojach wirnika (tzn. przyjęto  $\Delta r = 0,005$  m). Obliczenia wykonane dla dwukrotnie większej liczby przekrojów dały praktycznie takie same rezultaty. Częściową weryfikację opracowanego algorytmu przeprowadzono na podstawie porównania wyników obliczeń numerycznych i analitycznych dla płaskiej tarczy. Przedstawiona metoda stanowi fragment systemu oceny trwałości maszyn przepływowych.

Dalsze badania w tym zakresie dotyczą dwóch zagadnień:

- opracowania metod, algorytmów i programów obliczeniowych do analizy zagadnień wytrzymałościowych na podstawie koncepcji metody elementów skończonych. Pierwsze rezultaty opublikowano w [13];
- optymalnego projektowania elementów maszyn wirnikowych.

Opracowane metody analizy naprężeń w warunkach pełzania w połączeniu z matematycznymi metodami optymalizacji wykorzystuje się do projektowania elementów maszyn wirnikowych [14].

Praca wpłynęła do Redakcji w listopadzie 1989 r.

## Literatura

- [1] M. Berger, I. Porat, *Optimal design of rotating disk for kinetic energy storage*. Trans. of ASME Journal of Applied Mechanics. 1988 vol 55, str. 164-170.
- [2] T. Hatton, H. Ohnishi, M. Taneda, *Optimum design technique for rotating wheels*. Trans. of ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. 1988 vol. 110, str. 41-44.
- [3] L. Miekierdician, W. Omielczenko, N. Stiepanow, A. Skljareski, M. Tumarkin, *Metodika ispytania polnorazmiernych diskow gazoturbinnych dwigatielej na elektrodrowliczeskom stienie*. Problemy Procznosti, 1989 nr 2, str. 113-115.
- [4] T. Chmielniak, G. Kosman, A. Witkowski, A. Rusin, *Basic constructional problems of high-temperature fans and examples of their solution*. 8th Conference of Fluid Machinery. Budapest 1987, str. 159-166.
- [5] M. Łagosz, *Wybrane problemy konstruowania bezpiecznych zespołów wirnikowych silników turbinowych*. Zbiór prac VI Konferencji naukowo-technicznej "Technologia Przepływowych Maszyn Wirnikowych", Rzeszów 1988, str. 55-61.
- [6] G. Kosman, A. Rusin, *Kompensacja momentów gnących w jednostrumieniowych wirnikach maszyn promieniowych*; ibid str. 70-77.
- [7] I. Nowotarski, *Obliczenia tarcz turbin z uwzględnieniem odkształceń termo-sprężysto-plastycznych*; ibid str. 184-190.

- [8] H. Kopecki, J. Smykla, *Stan naprężenia i odkształcenia w wirnikach sprężarek w ujęciu metody elementów skończonych*; *ibid* str. 191-197.
- [9] M. Janowski, *Metoda różnic skończonych w analizie wytrzymałościowej tarcz wirnikowych pod kątem wykorzystania PC*; *ibid* str. 198-204.
- [10] J. Zacharzewski, *Analiza stanu naprężenia w wirujących dyskach z materiału nieliniowego*; *ibid* str. 205-209.
- [11] A. Rusin, *Dobór cech konstrukcyjnych wirników stopni osiowych i osiowo-promieniowych z uwzględnieniem pełzania materiału*. Praca doktorska. Gliwice 1987.
- [12] N. N. Malinin, I. Rżysko, *Mechanika Materiałów*. PWN Warszawa, 1981.
- [13] A. Rusin, *Modelowanie pełzania wirujących tarcz metodą elementów skończonych*. "Modelowanie w Mechanice", PTMTiS, Wisła 1989.
- [14] T. Chmielniak, G. Kosman, A. Rusin, *Wytrzymałościowe kształtowanie elementów maszyn poddanych działaniu wysokich temperatur i zmiennych obciążeń*. Praca naukowo-badawcza CPBP nr 02. 18, Gliwice 1989.
- [15] W. Traupel, *Thermische Turbomaschinen*. Springer-Verlag, 1968.
- [16] I. Domianjuszko, J. Birger, *Rascziety na procznost wraszczajuszczichsja diskow*. Moskwa 1978.
- [17] G. Kosman, A. Rusin, *Termowytrzymałość maszyn przepływowch cz.II. Zagadnienia plastyczności i pełzania*. Skrypt Pol. Śl. Gliwice 1990.

## The Analysis of Stresses in Axial-Radial Rotor under Creep Based on Isochronic Creep Curves

### Summary

A method of strain and stress calculation in radial rotors of flow machines, operating at high temperatures, is presented. The creep effects have been therefore considered. The physical and mathematical models of the rotor together with solving method are proposed. Exemplary results of calculations are also included.

## Анализ напряжений с учетом ползучести в осево-радиальных колесах на основе изохронических кривых ползучести

### Резюме

В статье представлен метод определения напряжений и деформации в осево-радиальных колесах турбомашин работающих в высоких температурах. В расчетах принято во внимание ползучесть материала. Представлено физическую и математическую модель колеса и метод решения основных уравнений установившейся ползучести диска осево-радиального колеса. Указан пример расчета напряжений в колесе.