

POLSKA AKADEMIA NAUK

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

95



GDAŃSK 1993

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machines

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH * HENRYK JARZYNA * JERZY KRZYŻANOWSKI
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ * WŁODZIMIERZ J. PROSNAK
JÓZEF ŚMIGIELSKI * ZENON ZAKRZEWSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EDITORIAL COMMITTEE

EUSTACHY S. BURKA (REDAKTOR NACZELNY – EDITOR-IN-CHIEF)
JAROSŁAW MIKIELEWICZ
EDWARD ŚLIWICKI (REDAKTOR – EXECUTIVE EDITOR) * ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych
Polskiej Akademii Nauk
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. poczt. 621,
tel. (0-58) 41-12-71 wew. 141, fax: (0-58) 41-61-44,
e-mail: tjan@imppan.imp.pg.gda.pl

ISBN 83-01-93121-1
ISSN 0079-3205

ROMUALD PUZYREWSKI, KRYSZYNA NAMIEŚNIK¹

Paraboidalno-płaszczyznowy układ współrzędnych w zastosowaniu do zadania odwrotnego dla stopni maszyny wirnikowej

W oparciu o sformułowany model hiperboliczny stopnia maszyny wirnikowej [1], w pracy przedstawiono szczególny typ układu współrzędnych, w którym opisany został taki stopień. Układ ten zbudowany jest na rodzinie paraboloid i dwu rodzinach płaszczyzn. Podano wektory bazy proponowanego układu współrzędnych oraz układ równań zachowania, prowadzący do algorytmu zadania odwrotnego typu hiperbolicznego dla stopnia.

Wykaz oznaczeń

| | | | | | |
|--------------------------------------|---|---|-------------------------------|---|--|
| $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ | - | baza wektorów podstawowych, | r_w | - | promień okręgu, z którego wychodzą paraboloidy, |
| $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ | - | baza wektorów wzajemnych, | R | - | wirnik, |
| $\vec{i}_h, \vec{i}_\phi, \vec{i}_z$ | - | baza wektorów jednostkowych, | S | - | kierownica, |
| f | - | funkcja określająca geometrię obliczeń, | $u_x(1), u_x(2),$ $u_x(3)$ | - | składowe fizyczne prędkości w układzie krzywoliniowym, |
| \vec{d} | - | wektor sił masowych, | z_w | - | współrzędna, |
| | - | tensor metryczny, | z_0 | - | współ. odpow. maks. ogranicz. stożk. |
| | - | szczelina, | x, y, z | - | współrzędne kartezjańskie, |
| | - | maksimum paraboloidy, | $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ | - | współrzędne krzywoliniowe, |
| $x^{(1)}$ | - | funkcja określająca masowe natężenie przepływu, | ρ | - | gęstość, |
| | - | ciśnienie, | Π | - | potencjał siły grawitacyjnej, |
| | | | Γ_{jk}^i | - | symbol Christoffela II-go rodzaju. |

Wstęp

Podobnie jak w stożkowo-płaszczyznowym układzie współrzędnych, opisanym [2], proponuje się rozważenie dla zadania odwrotnego stopnia maszyny wirnikowo-układu paraboloidalno-płaszczyznowego. Przekrój poprzeczny stopnia wpisano w taki układ pokazany jest na rys. 1. Jest to przykład formowania przepływu z stopień na powierzchniach rzędu drugiego (paraboloidy) oraz ograniczeń

wlotu i wylotu z palisad w formie stożków. Ograniczenia stożkowe są najczęściej spotykanymi w rozważaniach technicznych.

Cechą charakterystyczną tego układu są paraboloidy, wychodzące z okręgu o promieniu r_w i różniące się wartością położenia maksimum h wzdłuż linii o współrzędnej z_0 . Zakładając, że paraboloidy są powierzchniami prądu można wpisać w nie trzy charakterystyczne obszary, a mianowicie: kierownicę (stator) S , szczelinę (gap) G , wirnik (rotor) R . Rys. 1 pokazuje przykładowe ułożenie tych obszarów. Charakteryzuje się ono umieszczeniem łopatki wirnika przed maksimum parabol o współrzędnej z_0 .

Możliwe też są inne sytuacje w zależności od przesłanek technicznych projektowanego stopnia.

Obok rodzin paraboloid o przekroju jak na rys. 1, drugą rodzinę powierzchni współrzędnych stanowią płaszczyzny prostopadłe do osi z , zaś trzecią rodzinę - płaszczyzny zawierające oś z .

2. Układ współrzędnych

W tak skonstruowanym układzie współrzędnych paraboloidalno-płaszczyznowym położenie punktu w przestrzeni określone może być poprzez:

- wielkości $h = x^{(1)}$, określające paraboloidę,
- wielkości $h = x^{(2)}$, określające płaszczyznę, w której leży oś z ,
- wielkości $z = x^{(3)}$, określające płaszczyznę prostopadłą do osi z .

Reguły transformacji pomiędzy współrzędnymi $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ i współrzędnymi kartezjańskimi x, y, z będą miały postać:

$$x = \left(r_w + \frac{x^{(1)}}{z_0^2} (2z_0 - x^{(3)}) x^{(3)} \right) \cos x^{(2)}$$

$$y = \left(r_w + \frac{x^{(1)}}{z_0^2} (2z_0 - x^{(3)}) x^{(3)} \right) \sin x^{(2)}$$

$$z = x^{(3)}$$

Jak widać jest to układ współrzędnych posiadających dwa parametry: r_w oraz z_0 . Baza lokalna układu współrzędnych określona jest wektorami:

$$\vec{e}_1 = \left[\frac{x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \cos x^{(2)}, \frac{x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \sin x^{(2)}, 0 \right]$$

$$\vec{e}_2 = \left[- \left(r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \right) \sin x^{(2)}, \left(r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \right) \cos x^{(2)}, 0 \right]$$

$$\vec{e}_3 = \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \cos x^{(2)}, \frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \sin x^{(2)}, 1 \right]$$

Baza wzajemna ma postać:

$$\vec{e}^1 = \left[\frac{\cos x^{(2)}}{\frac{x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right)}, \frac{\sin x^{(2)}}{\frac{x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right)}, - \frac{\frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right)}{\frac{x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right)} \right]$$

$$\vec{e}^2 = \left[- \frac{\sin x^{(2)}}{r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right)}, \frac{\cos x^{(2)}}{r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right)}, 0 \right]$$

$$\vec{e}^3 = [0, 0, 1]$$

Baza wektorów jednostkowych wyraża się następująco:

$$\vec{i}_h = [\cos x^{(2)}, \sin x^{(2)}, 0],$$

$$\vec{i}_\phi = [-\sin x^{(2)}, \cos x^{(2)}, 0]$$

$$\vec{i}_z = \left[\frac{\cos x^{(2)} \frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right)}{\sqrt{1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \right]^2}}, \frac{\sin x^{(2)} \frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right)}{\sqrt{1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \right]^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \right]^2}} \right];$$

tensor metryczny $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ ma postać:

$$\begin{array}{ccc} \left[\frac{x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \right]^2, & 0, & \frac{2x^{(1)}x^{(3)}}{z_0^2} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \\ 0, & \left[r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \right]^2, & 0 \\ - \frac{2x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right), & 0, & 1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0} \right) \right]^2 \end{array}$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{21}^1 &= 0, & \Gamma_{31}^1 &= \frac{2}{x^{(3)}} \frac{(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0})}{(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0})}, \\
 \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{-\left(r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)\right)}{\frac{x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)}, & \Gamma_{32}^1 &= 0, \\
 \Gamma_{13}^1 &= \frac{2}{x^{(3)}} \frac{(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0})}{(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0})}, & \Gamma_{23}^1 &= 0, & \Gamma_{33}^1 &= \frac{-2x^{(1)}}{x^{(3)}z_0 \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)}, \\
 \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{\frac{x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)}{r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)}, & \Gamma_{31}^2 &= 0, \\
 \Gamma_{12}^2 &= \frac{\frac{x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)}{r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)}, & \Gamma_{22}^2 &= 0, & \Gamma_{32}^2 &= \frac{\frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)}{r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)}, \\
 \Gamma_{13}^2 &= 0, & \Gamma_{23}^2 &= \frac{\frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)}{r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)}, & \Gamma_{33}^2 &= 0, \\
 \Gamma_{11}^3 &= 0, & \Gamma_{21}^3 &= 0, & \Gamma_{31}^3 &= 0, \\
 \Gamma_{12}^3 &= 0, & \Gamma_{22}^3 &= 0, & \Gamma_{32}^3 &= 0, \\
 \Gamma_{13}^3 &= 0, & \Gamma_{23}^3 &= 0, & \Gamma_{33}^3 &= 0.
 \end{aligned}$$

3. Równania zachowania

Dla algorytmu zadania odwrotnego sformułowanego w [1] przyjmuje się następujące założenia upraszczające postać równań zachowania:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} &= 0 && \text{(przepływ stacjonarny),} \\
 \frac{\partial}{\partial x^{(2)}} &= 0 && \text{(przepływ osiowo - symetryczny),} \\
 F_x^{(d)}(1) &= 0 && \text{(brak sił masowych w kierunku } x^{(1)}\text{),} \\
 \vec{F}_{(d)} &\neq 0 && \text{(wektor sił masowych zawiera naprężenia styczne).} \\
 u_x(1) &= 0 && \text{(składowa normalna prędkości} \\
 &&& \text{do powierzchni paraboloidalnych).}
 \end{aligned}$$

Dla powyżej sformułowanych założeń upraszczających zgodnie z algorytmem przedstawionym w [1], równania zachowania będą miały następującą postać:

a) równanie zachowania masy:

$$\frac{\rho \left[r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right) \right] \frac{x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)}{\sqrt{1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0} \left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right) \right]^2}} u_x(3) = m(x^{(1)}),$$

b) równanie zachowania ilości ruchu:

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho u_x(2)^2}{r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0}\left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)} - \frac{\rho u_x(3)^2 \frac{2x^{(1)}}{z_0^2}}{1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)\right]^2} = \\ & -\frac{2x^{(1)}}{z_0}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right) \frac{\partial \Pi}{\partial x^{(3)}} - \frac{1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)\right]^2 \frac{\partial p}{\partial x^{(1)}}}{\frac{x^{(3)}}{z_0}\left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)} \\ & + \frac{2x^{(1)}}{z_0}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right) \frac{\partial p}{\partial x^{(3)}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\rho u_x(3)}{\sqrt{1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)\right]^2}} \left[\frac{\partial u_x(2)}{\partial x^{(3)}} + \frac{2x^{(1)}}{z_0}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right) u_x(2) \right] = \rho F_x^{(d)}(2)$$

$$\frac{\rho u_x(3)}{\sqrt{1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)\right]^2}} \left[\frac{\partial u_x(2)}{\partial x^{(3)}} + \frac{4x^{(1)^2}}{z_0^3}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right) u_x(3) \right] = \rho F_x^{(d)}(3)$$

$$\begin{aligned} & + \rho \sqrt{1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)\right]^2} \frac{\partial \Pi}{\partial x^{(3)}} + \\ & \sqrt{1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)\right]^2} \frac{2x^{(1)}}{z_0}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right) \frac{\partial p}{\frac{x^{(3)}}{z_0}\left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right) \partial x^{(1)}} \\ & - \sqrt{1 + \left[\frac{2x^{(1)}}{z_0}\left(1 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)\right]^2} \frac{\partial p}{\partial x^{(3)}} \end{aligned}$$

4. Charakterystyki zadania odwrotnego

Jak pokazano w [1] równania zachowania tworzą układ hiperboliczny o dwu rodzinach charakterystyk:

rodzina : $x^{(1)} = \text{const}$

II rodzina :

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial x^{(3)}} = - \frac{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^{(3)}}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}} \frac{\partial f}{\partial x^{(3)}}}.$$

Dla funkcji:

$$f = r_w + \frac{x^{(1)}x^{(3)}}{z_0} \left(2 - \frac{x^{(3)}}{z_0}\right)$$

II rodzina sprowadza się do równania:

$$h = \frac{z_0^3}{z(2z_0 - z)} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{z_w}{z_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \right]} - \left(\frac{z_w}{z_0} - \frac{z}{z_0}\right) - \ln \frac{z_0 - z_w}{z_0 - z}$$

we współrzędnych $h = x^{(1)}$, $z = x^{(3)}$ oraz wzoru:

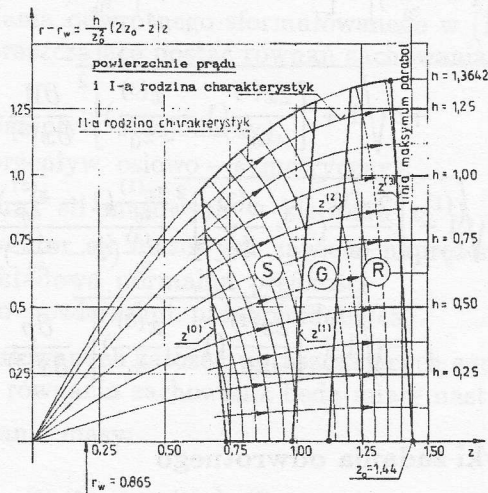
$$r = r_w + z_0 \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{z_w}{z_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \right]} - \left(\frac{z_w}{z_0} - \frac{z}{z_0}\right) - \ln \frac{z_0 - z_w}{z_0 - z}$$

we współrzędnych fizycznych (r, z) .

Na rys. 1 pokazano obraz dwóch rodzin charakterystyk dla wybranych parametrów ostatniego stopnia, tak jak w [2].

5. Opis geometrii stopnia

Opis geometrii stopnia zawiera szereg dowolnych parametrów określających poszczególne obszary.



Rys. 1.

Dla sytuacji przedstawionej na rys.1 obszar kierownicy (S) zawarty jest pomiędzy:

- ograniczeniem cylindrycznym $h = 0$,
- ograniczeniem paraboloidalnym $h = 1,3642m$,
- ograniczeniem stożkowym $z^{(0)} = 0,73 - 0,1(r - r_w)$,
- ograniczeniem stożkowym $z^{(1)} = 0,98 + 0,0755(r - r_w)$.

Obszar szczeliny (G) określony jest przez:

- ograniczenie cylindryczne $h = 0$,
- ograniczenie paraboloidalne $h = 1,3642m$,
- ograniczenie stożkowe $z^{(1)} = 0,98 + 0,0755(r - r_w)$,
- ograniczenie stożkowe $z^{(2)} = 1,12 + 0,0666(r - r_w)$.

Obszar wirnika (R) opisany jest:

- ograniczeniem cylindrycznym $h = 0$,
- ograniczeniem paraboloidalnym $h = 1,3642m$,
- ograniczeniem stożkowym $z^{(2)} = 1,12 + 0,0666(r - r_w)$,
- ograniczeniem stożkowym $z^{(3)} = 1,44 - 0,0588(r - r_w)$.

Opis ten jest jedynie przykładem możliwych ograniczeń geometrycznych poszczególnych obszarów.

6. Wnioski

Paraboloidalno-płaszczyznowy układ współrzędnych umożliwia analityczne opisanie przepływu osiowo-symetrycznego w stopniu maszyny wirnikowej. Podana powyżej postać równań zachowania stanowi układ rozwiązywalny metodą charakterystyk, określonych analitycznie.

Literatura

- [1] R. Puzyrewski, *Hiperboliczny model stopnia maszyny wirnikowej (zadanie odwrotne)*. Materiały X Krajowej Konferencji Mechaniki Płynów, Gdańsk-Sarnówek, 1992.
- [2] R. Puzyrewski R., J. Pozorski, *On a System of Conical Coordinates*. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technics Sciences, vol. 40, No 3, 1992.
- [3] R. Puzyrewski, J. Pozorski, *Stream Surfaces of Inviscid Conical Flow Model for Turbine Stage*. Archiwum Budowy Maszyn, (przekazane do Redakcji).

Application of Parabolic-Surface Coordinate System to the Inverse Problem in Fluid-Flow Machinery Stage

Summary

Hyperbolic model of turbomachinery stage, as it has been formulated in [1], was applied for a particular type of coordinate system. The coordinate system is based on the family of paraboloidal surfaces and two families of planes. The basic vectors and conservations equations have been formulated. It leads to the algorithm of the hyperbolic type of the flow in turbomachinery stage.