Wojciech PIETRASZKIEWICZ

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
Gdańsk 1969

Nr arch.		Nr strony

B i u l e t y n Nr 652
Instytutu Maszyn Przepływowych
Polskiej Akademii Nauk
w Gdańsku

M A T E R I A Ł Y   S P R Ę Z Y S T E

Opracował :

W.Pietraszkiewicz

Gdańsk, czerwiec 1969 r.

Opracował	Instytut Maszyn Przepływowych P. A. N. Gdańsk	Zatwierdził
Sprawdził		

Spis rzeczy

1. Wstęp
1.1. Cel i zakres opracowania
1.2. Oznaczenia

2. Podstawowe zależności materiałów sprężystych
2.1. Definicja materiału sprężystego
2.2. Zredukowane postacie równania konstytutywnego
2.3. Równania ruchu
2.4. Warunki brzegowe

3. Pokrewne definicje i twierdzenia
3.1. Materiały hipersprężyste
3.2. Nieściśliwe materiały sprężyste
3.3. Grupy izotropii, stany nieznieksztalcone
3.4. Niektóre twierdzenia algebry i analizy funkcji tensorowych
3.5. Różniczkowanie funkcji tensorowych

4. Izotropowe materiały sprężyste
4.1. Definicja i własności podstawowe
4.2. Równania konstytutywne
4.3. Równania ruchu

5. Materiały hipersprężyste
5.1. Własności funkcji energii
5.2. Zredukowane postacie równania konstytutywnego
5.3. Grupy izotropii
5.4. Równania konstytutywne izotropowego hipersprężystego ciała stałego

6. Teoria małego gradientu przemieszczenia
6.1. Miary odkształcenia
6.2. Rozwinięcia podstawowych wielkości
6.3. Równania konstytutywne
6.4. Tensory sprężystości izotropowych sprężystych ciał stałych
6.5. Tensory sprężystości izotropowych hipersprężystych ciał stałych

7. Nałożenie deformacji sprężystych
7.1. Oznaczenia i zależności wstępne
7.2. Tensory sprężystości w konfiguracji odkształconej
7.3. Mała wstępna deformacja

Materiały sprężyste

W. Pietraszkiewicz (Gdańsk)

1. WSTĘP

1.1. Cel i zakres opracowania

Opracowanie zawiera zbiór podstawowych definicji i twierdzeń z dowodami, które pojawiają się w czysto mechanicznej teorii materiałów sprężystych, opracowanej przez Noll'a [1] i rozwijanej w pracach Truesdell'a i Noll'a [2], Gurtina [3,4], Noll'a [5] i innych. W opracowaniu w odróżnieniu od Truesdell'a [6] zwrócono szczególną uwagę na wyróżnienie najważniejszych postulatów i definicji od twierdzeń, które można udowodnić w ramach przyjętego modelu ośrodka ciągłego. Opracowanie zawiera również przejście od ogólnej nieliniowej teorii materiału sprężystego do klasycznej teorii sprężystości używanej gdy gradient wektora przemieszczenia może być uważany za wielkość małą. Dało to wyjaśnienie miejsca klasycznej teorii sprężystości w ogólnej teorii sprężystego ośrodka ciągłego, a także naturalne uogólnienia zastosowań teorii klasycznej, np. dla ciał wstępnie napiętych.

W opracowaniu główną uwagę zwrócono na różne postacie równań konstytutywnych materiału sprężystego i hipersprężystego, podano zredukowane równania konstytutywne spełniające tożsamościowo zasadę obiektywności, wyprowadzono równania ruchu w opisie Lagrange'a i Eulera. Szczegółowo rozważono klasę materiałów izotropowych.

Zawarty w opracowaniu materiał był w głównych zarysach referowany przez autora dla pracowników naukowych Instytutu Maszyn Przepływowych oraz Politechniki Gdańskiej w ramach kursu organizowanego przez PTMTS.

Przy czytaniu opracowania wymagana jest chociaż pobieżna znajomość rachunku absolutnego [2], algebry i analizy funkcji tensorowych [8] oraz podstaw mechaniki racjonalnej [2,6].

1.2. Oznaczenia

W opracowaniu konsekwentnie stosowany jest rachunek absolutny, por. Rychlewski [8], Truesdell, Noll [2], Coleman, Markowitz, Noll [13]. Podstawowe oznaczenia zgodne są z opracowaniami [2], [6].

Wektory w trójwymiarowej euklidesowej przestrzeni wektorowej $\mathcal{E}_3 \equiv \mathcal{T}_1$ oznaczono głównie $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{u} \ldots$ Tensory z euklidesowej przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p \equiv \underbrace{\mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_3}_{p \text{ razy}}$, $p \geqslant 2$ oznaczono przez $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \ldots$ Głównie będziemy mieli do czynienia z przypadkami $p=2$, czasem również $p=4$ oraz $p=6$.

Polibazę tensora $\mathbb{A} \in \mathcal{T}_p$,
$\mathbb{A} = A^{i\alpha\ldots 2}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{d}_\alpha \otimes \ldots \otimes \mathbf{g}_2$, oznaczać będziemy w skrócie $\ulcorner \mathbf{e}_i \mathbf{d}_\alpha \ldots \mathbf{g}_2 \urcorner$ gdzie $\mathbf{e}_i, \mathbf{d}_\alpha, \ldots, \mathbf{g}_2$ są bazami w $\mathcal{E}_3$.

Stosujemy w opracowaniu następujące oznaczenia na operacje dokonywane na tensorach [8] – przykłady podano dla $\mathbb{A} \in \mathcal{T}_4$ oraz $\mathbb{B} \in \mathcal{T}_2$.

1. Transpozycja, np.

$$\mathbb{A}^{\overset{1.4}{T}} \equiv A^{ijkl} \ulcorner \mathbf{g}_l\, \mathbf{g}_j\, \mathbf{g}_k\, \mathbf{g}_i \urcorner ; \quad \mathbb{B}^{T} \equiv B^{ij} \ulcorner \mathbf{g}_j\, \mathbf{g}_i \urcorner \tag{1.1}$$

2. Zwężenie, np.

$$\mathbb{A}\underset{2,3}{\big\}} \equiv A^{ijkl} \ulcorner \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_l \urcorner g_{jk} = A^{ij}{}_{j}{}^{l} \ulcorner \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_l \urcorner \tag{1.2}$$

3. Nasunięcie proste, np.

$$\mathbb{A}\mathbb{B} \equiv \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}\underset{4.5}{\big\}} = A^{ijkl} B_{l}{}^{m} \ulcorner \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_j\, \mathbf{g}_k\, \mathbf{g}_m \urcorner \tag{1.3}$$

4. Pełne nasunięcie, np.

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \equiv \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}\underset{(3.5)(4.6)}{\big\}} = A^{ijkl} B_{kl} \ulcorner \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_j \urcorner \tag{1.4}$$

Gradient funkcji tensorowej $f: \mathcal{T}_p \longrightarrow \mathcal{T}_g$, $\mathbb{B} = f(\mathbb{A})$ w $\overline{\mathbb{A}}$, oznaczamy

$$f_{,\mathbb{A}}(\overline{\mathbb{A}}) \equiv \frac{\partial f(\overline{\mathbb{A}})}{\partial \mathbb{A}} \tag{1.5}$$

Niech $h: \mathcal{T}_p \longrightarrow \mathcal{T}_q$ jest złożeniem funkcji $f: \mathcal{T}_p \longrightarrow \mathcal{T}_r$ oraz $g: \mathcal{T}_r \longrightarrow \mathcal{T}_q$, $h(\mathbb{A}) \equiv g[f(\mathbb{A})]$ Wtedy

$$h_{,\mathbb{A}} = g_{,f} \circ f_{,\mathbb{A}} \equiv g_{,f} \otimes f_{,\mathbb{A}} \underset{(q+1,q+r+1),}{\big\}} \underset{(q+2,q+r+2)}{\big\}} \dots \underset{(q+r,q+2r)}{\big\}} \tag{1.6}$$

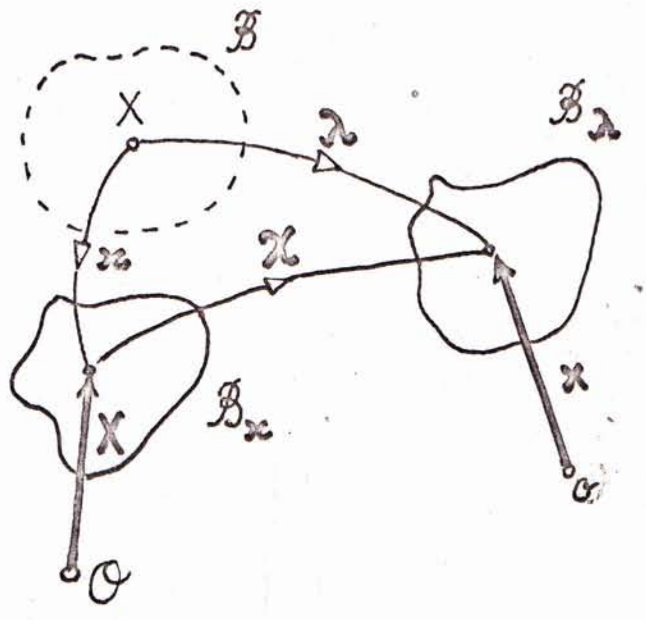
Pozostałe oznaczenia patrz [2,8].

2. PODSTAWOWE ZALEŻNOSCI MATERIAŁOW SPRĘŻYSTYCH

2.1. Definicja materiału sprężystego

Teorię mechaniczną materiału sprężystego rozpatrzymy tutaj w ramach ogólnej mechanicznej teorii materiałów prostych Nolla [1,2] .

Rozpatrzmy ciało $\mathcal{B}$ w konfiguracjach : $\varkappa$ - konfiguracja porównawcza, λ - konfiguracja aktualna (Rys.1).



Rys.1.

$$\mathbf{X} = \varkappa(\mathrm{X}) \quad , \quad \mathbf{x} = \lambda(\mathrm{X}) \tag{2.1}$$

$$\chi = \lambda \circ \overset{-1}{\varkappa} \tag{2.2}$$

Def. 1: Materiał prosty nazywamy sprężystym w cząstce X, jeżeli tensor naprężenia Cauchy´ego w cząstce X w chwili t zależy jedynie od aktualnej wartości gradientu deformacji cząstki X , t.zn. równanie konstytutywne materiału ma postać

$$T(X,t) = g_{\underset{X}{\varkappa}}(F) \tag{2.3}$$

gdzie

$$F \equiv F(X,t) \equiv \operatorname{Grad} \chi(X,t) = \chi_{,X} \tag{2.4}$$

jest gradientem deformacji cząstki X od konfiguracji porównawczej $\varkappa$ do konfiguracji aktualnej λ .

Def. 2 : Funkcję $g_{\underset{X}{\varkappa}}$ nazywamy funkcją reakcji materiału sprężystego w cząstce X .

Definicja 1 zgodna jest z ogólną definicją materiału prostego [2] przyjmując tam stałą historię gradientu deformacji $F^{(t)}(X,s) = F^{(t)}(X,0) \equiv F(X,t)$. Wtedy również funkcjonał reakcji materiału prostego przechodzi w funkcję reakcji materiału sprężystego.

Z postulowanych własności dla funkcjonału reakcji materiału prostego 2 wynikają następujące własności funkcji reakcji materiału sprężystego, traktowane jako postulaty.

Post. 1 : Funkcja reakcji $g_{\underset{X}{\varkappa}}$ spełnia zależność

$$\bigwedge_{Q \in \mathcal{O}} \bigwedge_{F \in {}^N\mathcal{T}_2} Q\, g_{\underset{X}{\varkappa}}(F)\, Q^T = g_{\underset{X}{\varkappa}}(QF) \tag{2.5}$$

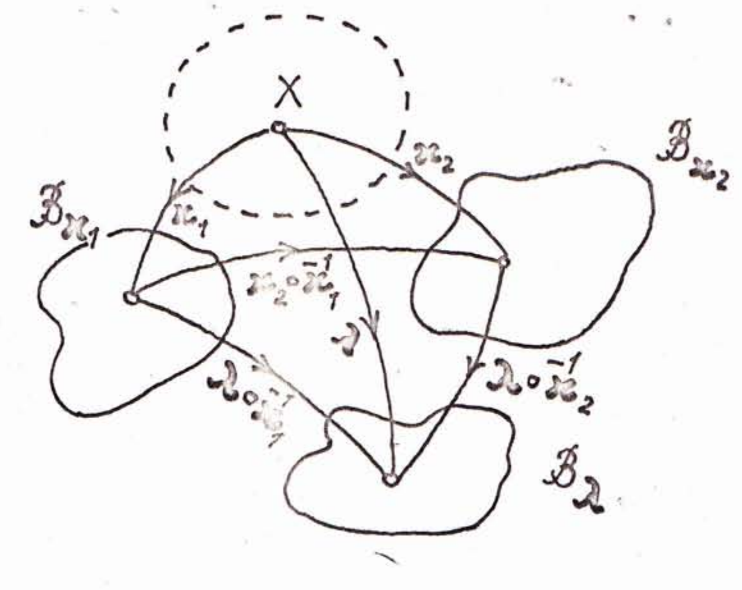
co wynika z zasady obiektywności (z postulatu obiektywności naprężeń).

Post. 2 : Funkcje reakcji $g_{\underset{X}{\varkappa_1}}$ i $g_{\underset{X}{\varkappa_2}}$ materiału sprężystego w cząstce X , wzięte względem dwu różnych konfiguracji porównawczych $\varkappa_1$ i $\varkappa_2$, związane są zależnością

$$\bigwedge_{F\in {}^{N}\mathcal{T}_2} g_{\underset{X}{\varkappa_2}}(F) = g_{\underset{X}{\varkappa_1}}(FP) \qquad (2.6)$$

gdzie $P=\frac{\partial}{\partial X_1}\{\varkappa_2\circ\varkappa_1^{-1}\}(X_1)$ - gradient deformacji od konfiguracji porównawczej $\varkappa_1$ do konfiguracji $\varkappa_2$, $F=\frac{\partial}{\partial X_2}\{\lambda\circ\varkappa_2^{-1}\}\cdot(X_2)$

Zależność (2.6) jest postulowaniem tego, że tensor naprężenia Cauchy'ego T nie zależy od konfiguracji porównawczej, względem której liczymy deformację (Rys.2).



Rys.2.

Przy badaniu materiałów sprężystych (z wyjątkiem płynów) wygodnie jest stosować konsekwentnie opis Lagrange'a, co prowadzi do konieczności używania tensorów naprężenia Pioli-Kirchhoffa [2] .

Def. 3: Pierwszym i drugim tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa nazywamy tensory związane z tensorem naprężenia Cauchy'ego następującymi zależnościami

$$
\begin{aligned}
T_{\varkappa} &= J\,T\,(\overset{-1}{F})^{T} \\
\tilde{T} &= \overset{-1}{F}\,T_{\varkappa} = J\,\overset{-1}{F}\,T\,(\overset{-1}{F})^{T} \quad .
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Tw. 1: Używając tensorów Pioli-Kirchhoffa, równanie konstytutywne materiału sprężystego można przedstawić w postaci

$$
\begin{aligned}
T_{\varkappa}(X,t) &= h_{\substack{\varkappa \\ X}}(F) \\
\tilde{T}(X,t) &= t_{\substack{\varkappa \\ X}}(F)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

gdzie funkcje reakcji $h_{\substack{\varkappa \\ X}}$ oraz $t_{\substack{\varkappa \\ X}}$ związane są z funkcją reakcji $g_{\substack{\varkappa \\ X}}$ zależnościami

$$
\begin{aligned}
h_{\substack{\varkappa \\ X}}(F) &= J\,g_{\substack{\varkappa \\ X}}(F)\,(\overset{-1}{F})^{T} \\
t_{\substack{\varkappa \\ X}}(F) &= J\,\overset{-1}{F}\,g_{\substack{\varkappa \\ X}}(F)\,(\overset{-1}{F})^{T} \quad .
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

D. Wprost z (2.7) mamy (2.8) oraz (2.9) ↯

Tw.2 : Funkcje reakcji $h_{\substack{\varkappa \\ X}}$ oraz $t_{\substack{\varkappa \\ X}}$ spełniają zależności

$$
\bigwedge_{Q\in\mathcal{O}}\ \bigwedge_{F\in {}^{N}\mathcal{T}_2}\quad
\begin{aligned}
Q\,h(F) &= h(QF) \\
t(F) &= t(QF)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

wynikające z konieczności spełnienia zasady obiektywności.

<u>D.</u> Zależność (2.5) przy (2.7) daje

$$Q g(F) Q^T = Q \jmath^{-1}(F) h(F) F^T Q^T = \jmath^{-1}(QF) h(QF) (QF)^T = g(QF)$$
$$= Q \jmath^{-1}(F) F t(F) F^T Q^T = \jmath^{-1}(QF)\, QF\, t(QF) (QF)^T$$

skąd pamiętając że $\jmath^{-1}(F) = \jmath^{-1}(QF)$

po uproszczeniach mamy (2.10).

<u>Tw. 3:</u> Funkcje reakcji $h_{\underset{X}{\varkappa_1}}$ i $h_{\underset{X}{\varkappa_2}}$ oraz $t_{\underset{X}{\varkappa_1}}$ i $t_{\underset{X}{\varkappa_2}}$ materiału sprężystego w cząstce X, wzięte względem dwu różnych konfiguracji porównawczych $\varkappa_1$ i $\varkappa_2$, związane są zależnościami

$$\bigwedge_{F, P \in {}^N\mathcal{T}_2} \quad \begin{aligned} h_{\underset{X}{\varkappa_2}}(F) &= \jmath^{-1}(P)\, h_{\underset{X}{\varkappa_1}}(FP)\, P^T \\ t_{\underset{X}{\varkappa_2}}(F) &= \jmath^{-1}(P)\, P\, t_{\underset{X}{\varkappa_1}}(FP)\, P^T \end{aligned} \qquad (2.11)$$

<u>D.</u> Zależność (2.6) przy (2.7) daje

$$T = g_{\varkappa_1}(F) = \jmath^{-1}(F)\, h_{\varkappa_2}(F)\, F^T = \jmath^{-1}(F)\, F\, t_{\varkappa_2}(F)\, F^T$$
$$= g_{\varkappa}(FP) = \jmath^{-1}(FP)\, h_{\varkappa_1}(FP)\, (FP)^T = \jmath^{-1}(FP)\, FP\, t_{\varkappa_1}(FP)\, (FP)^T$$

skąd porównując stronami, po uproszczeniach, mamy (2.11).

2.2. Zredukowane postacie równania konstytutywnego

Tw.4: Równania konstytutywne materiału sprężystego można przedstawić m.in. w następujących dwu postaciach zredukowanych

$$T = R\,g(U)\,R^T \tag{2.12}$$

$$T = R\,\xi(C)\,R^T$$

spełniających tożsamościowo zasadę obiektywności.

D. Zgodnie z twierdzeniem o rozkładzie polarnym [2]

$$\bigwedge_{F\in {}^N\mathcal{T}_2}\ \bigvee_{R\in\mathcal{R}}\ \bigvee_{U,V\in {}^S\mathcal{T}_2} F = RU = VR \tag{2.13}$$

Przyjmijmy w (1.5) $Q \equiv R^T$. Stąd $R^T g(F) R = g(R^T R U) = g(U)$ i $T \equiv g(F) = R\,g(U)\,R^T$, co dowodzi istnienia $(2.7)_1$. Odwrotnie, dla dowolnego $Q \in \mathcal{O}$, tensor QF ma jednoznaczny rozkład polarny $QF = (QR)U$. Zakładając, że $(2.12)_1$ jest spełnione dla gradientu deformacji QF mamy

$$T = g(QF) = QR\,g(U)(QR)^T = Q\left[R\,g(U)R^T\right]Q^T = Q\,g(F)\,Q^T$$

skąd wynika spełnienie (2.5), a więc i zasady obiektyw - ności, co dowodzi $(2.12)_1$.

Zależność $(2.12)_2$ wynika z $(2.12)_1$, bo $\overset{1/2}{C} = U$ i oznaczając

$$g(\overset{1/2}{C}) \equiv \xi(C) \tag{2.13}$$

mamy

$$T = R g(\overset{1/2}{C}) R^T = R \mathfrak{f}(C) R^T$$ co dowodzi $(2.12)_2$.↯

Tw.5 : Równania konstytutywne (2.8) materiału sprężystego można przedstawić m.in. w następujących dwu zredukowanych postaciach

$$T_x = R h_x(U)$$
$$\tilde{T} = t_x(C) \qquad (2.14)$$

spełniających tożsamościowo zasadę obiektywności.

D.
$$T_x = J(F) g(F) (\overset{-1}{F})^T = J(RU) R g(U) R^T (\overset{-1}{RU})^T =$$
$$= R J(U) g(U) R^T R (\overset{-1}{U})^T = R h(U)$$ – co dowodzi $(2.14)_1$.↯

$$\tilde{T} = \overset{-1}{F} T_x = (\overset{-1}{RU}) R h(U) = \overset{-1}{U} \overset{-1}{R} R h(U) = \overset{-1/2}{C} h(\overset{1/2}{C}) = t(C)$$

co dowodzi $(2.14)_2$. ↯

2.3. Równania ruchu

Równania ruchu ośrodka ciągłego mogą być wprowadzone aksjomatycznie jako postulaty.

Post. 3: Istnieje taki obserwator zwany inercjalnym, względem którego prawa ruchu ośrodka ciągłego przyjmują postać integralną,

$$\int_{\partial \mathcal{P}_\chi} \mathbf{T}\mathbf{n}\, da + \int_{\mathcal{P}_\chi} \rho \mathbf{b}\, dv = \int_{\mathcal{P}_\chi} \rho \ddot{\mathbf{x}}\, dv$$

$$\int_{\partial \mathcal{P}_\chi} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \times \mathbf{T}\mathbf{n}\, da + \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\times \rho \mathbf{b}\, dv = \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\times \rho \ddot{\mathbf{x}}\, dv \qquad (2.15)$$

lub lokalną

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \qquad (2.16)$$

Lokalna postać (2.16) praw ruchu pojawia się tutaj w sposób naturalny w opisie Eulera. Posługiwanie się opisem Lagrange'a wymaga sformułowania równań ruchu poprzez tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa.

Tw.6 : W opisie Lagrange'a lokalne prawa ruchu przyjmują postać

$$\operatorname{Div} \mathbf{T}_\kappa + \rho_\kappa \mathbf{b} = \rho_\kappa \ddot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{T}_\kappa \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{T}_\kappa^T \qquad (2.17)$$

gdzie Div oznacza operator divergencji względem miejsca $\mathbf{X}$ cząstki X w konfiguracji porównawczej κ

$$\operatorname{Div} \mathbf{T}_\kappa = \operatorname{Grad} \mathbf{T}_\kappa \Big\}_{(2.3)} \qquad (2.18)$$

D. Dokonajmy zamiany zmiennych $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ w równaniu $(2.15)_1$. Mamy następujące transformacje

$$
\begin{aligned}
\varrho &= \mathcal{J}^{-1} \varrho_{\varkappa} \\
dv &= \mathcal{J}\, dV \\
\boldsymbol{n}\, da &= \mathcal{J} (\overset{-1}{F})^{T} N\, dA
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Stosując twierdzenie Greena oraz definicję $(2.7)_1$ mamy zależność

$$
\int\limits_{\partial \mathcal{B}_{\chi}} T\boldsymbol{n}\, da = \int\limits_{\partial \mathcal{B}_{\varkappa}} T \mathcal{J} (\overset{-1}{F})^{T} N\, da = \int\limits_{\mathcal{B}_{\varkappa}} \mathrm{Div}\, T_{\varkappa}\, dV
$$

i z $(2.15)_1$ wynika, że

$$
\int\limits_{\mathcal{B}_{\varkappa}} \left(\mathrm{Div}\, T_{\varkappa} + \varrho_{\varkappa} b - \varrho_{\varkappa} \ddot{x} \right) dV = 0 \,,
$$

co dowodzi $(2.17)_1$.

Z $(2.16)_2$ oraz $(2.7)_1$ wynika

$$
\mathcal{J}^{-1} T_{\varkappa} F^{T} = \mathcal{J}^{-1} (T_{\varkappa} F^{T})^{T} = \mathcal{J}^{-1} F T_{\varkappa}^{T}
$$

co dowodzi $(2.17)_2$.

Stosowanie opisu Lagrange'a w wielu przypadkach jest znacznie wygodniejsze szczególnie dla ciał stałych. W dalszym ciągu opracowania będziemy dążyli do konsekwentnego stosowania opisu Lagrange'a, korzystając z opisu Eulera tylko w niektórych oczywistych przypadkach.

Jak wiadomo [7] każde ciało może być materialnie równomiernym (wszystkie cząstki są izomorficzne między sobą) nie będąc ciałem jednorodnym, chociaż twierdzenie odwrotne nie jest słuszne. W niniejszym opracowaniu rozpatrywać będziemy tylko ciała materialnie równomierne, które jednocześnie są jednorodnymi. Przypomnijmy tu

Def. 4: Ciało sprężyste materialnie równomierne nazywamy jednorodnym, jeżeli istnieje taka konfiguracja globalna $\varkappa$, że

$$\bigvee_{\varkappa} \bigwedge_{\wp : \mathcal{E}_3 \times R \to {}^{N}\mathcal{T}_2} h_{\underset{X_1}{\varkappa}}(\wp) = h_{\underset{X_2}{\varkappa}}(\wp) \qquad (2.20)$$

Def. 5: Konfigurację globalną z def. 4 nazywamy jednorodną.

Należy tu zauważyć, że przy przyjęciu jednorodnej konfiguracji globalnej jako konfiguracji porównawczej, równanie konstytutywne (2.8) ma postać

$$T_{\varkappa}(X,t) = h_{\varkappa}\big(F(X,t)\big) \qquad (2.21)$$

a więc postać funkcji reakcji nie zależy od cząstki, podczas gdy przy przyjęciu dowolnej niejednorodnej konfiguracji globalnej jako konfiguracji porównawczej, równanie konstytutywne (2.8) ma postać

$$T_{\varkappa}(X,t) = h_{\underset{X}{\varkappa}}\big(F(X,t)\big) \equiv h_{\varkappa}\big(F(X,t),X\big) \qquad (2.22)$$

a więc postać funkcji reakcji nadal zależy od cząstki.

Tw.7 : Pierwsze równanie ruchu materialnie równomiernego jednorodnego ciała sprężystego w opisie Lagrange'a ma postać

$$\mathbb{A} \circ \mathrm{Grad}\, \mathbb{F} \Big\}_{(2.3)} + \mathbb{q} + \varrho_{\varkappa} \mathbb{b} = \varrho_{\varkappa} \ddot{\mathbb{x}}$$

$$A_{k}{}^{K}{}_{l}{}^{L}\, x^{l}{}_{,K;L} + q_{k} + \varrho_{\varkappa} b_{k} = \varrho_{\varkappa} \ddot{x}_{k} \qquad (2.23)$$

gdzie

$$\mathbb{A} = \frac{\partial h(\mathbb{F}, \mathbb{X})}{\partial \mathbb{F}} = \frac{\partial h_{k}{}^{K}(x^{m}{}_{,M;} X^{N})}{\partial x^{L}{}_{,L}}\, \mathbb{g}^{k} \otimes \mathbb{G}_{K} \otimes \mathbb{g}^{L} \otimes \mathbb{G}_{L}$$

$$\mathbb{q} = \frac{\partial h(\mathbb{F}, \mathbb{X})}{\partial \mathbb{X}} \Big\}_{(2.3)} = q_{k} \mathbb{g}^{k} = \frac{\partial h_{k}{}^{L}}{\partial X^{L}} \mathbb{g}^{k} \qquad (2.24)$$

$$\mathrm{Grad}\, \mathbb{F} = \frac{\partial \mathbb{F}(\mathbb{X}, t)}{\partial \mathbb{X}} = x^{l}{}_{,L;K}\, \mathbb{g}_{l} \otimes \mathbb{G}^{L} \otimes \mathbb{G}^{K}$$

Przy przyjęciu jednorodnej konfiguracji globalnej jako konfiguracji porównawczej, mamy

$$\mathbb{q} \equiv 0 \;;\quad \mathbb{A} \equiv \mathbb{A}(\mathbb{F}(\mathbb{X}, t)) \qquad (2.25)$$

D. $$\mathrm{Div}\, \mathbb{T}_{\varkappa} = \mathrm{Div}\, h(\mathbb{F}(\mathbb{X}, t)) = \left[\frac{\partial h}{\partial \mathbb{F}} \circ \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}} + \frac{\partial h}{\partial \mathbb{X}}\right] \Big\}_{(2.3)}$$

$$\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}=\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial X^N}\otimes \mathbb{G}^N=\frac{\partial}{\partial X^N}\left[F^L{}_M\, \mathbf{g}_L\otimes \mathbb{G}^M\right]\otimes \mathbb{G}^N=$$

$$=\left[\frac{\partial F^L{}_M}{\partial X^N}\mathbf{g}_L\otimes \mathbb{G}^M+F^L{}_M\frac{\partial \mathbf{g}_L(x^r)}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial X^N}\otimes \mathbb{G}^M+F^L{}_M\mathbf{g}_L\otimes\frac{\partial \mathbb{G}^M(X^N)}{\partial X^N}\right]\otimes$$

$$=\left[\frac{\partial F^L{}_M}{\partial X^N}+\Gamma^L_{pr}F^p{}_M F^r{}_N-\Gamma^p_{MN}F^L{}_p\right]\mathbf{g}_L\otimes\mathbb{G}^M\otimes\mathbb{G}^N=$$

$$=x^L{}_{,M;N}\,\mathbf{g}_L\otimes\mathbb{G}^M\otimes\mathbb{G}^N\equiv x^L{}_{,M;N}\ulcorner\mathbf{g}_L\,\mathbb{G}^M\mathbb{G}^N\urcorner$$

co podstawiając do (2.17) mamy wynik (2.23) . ↯

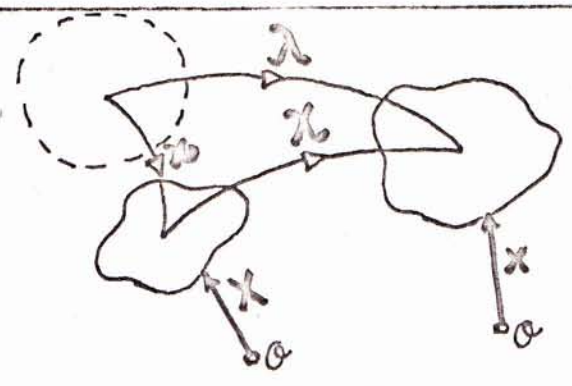
Def.6: Tensor $\mathbb{A}(\mathbb{F},\mathbb{X})$ nazywamy tensorem sprężystości materiału sprężystego.

Def. 7 : Wektor $\mathbf{q}(\mathbb{F},\mathbb{X})$ nazywamy wektorem gęstości sił wypadkowych powstałych z niejednorodności przyjętej konfiguracji porównawczej $\mathcal{X}$, na jednostkę objętości w konfiguracji porównawczej $\mathcal{X}$.

2.4. Warunki brzegowe

Podczas ruchu ciała można zadawać następujące warunki na brzegu

1, Warunek położenia brzegu.



Rys.3

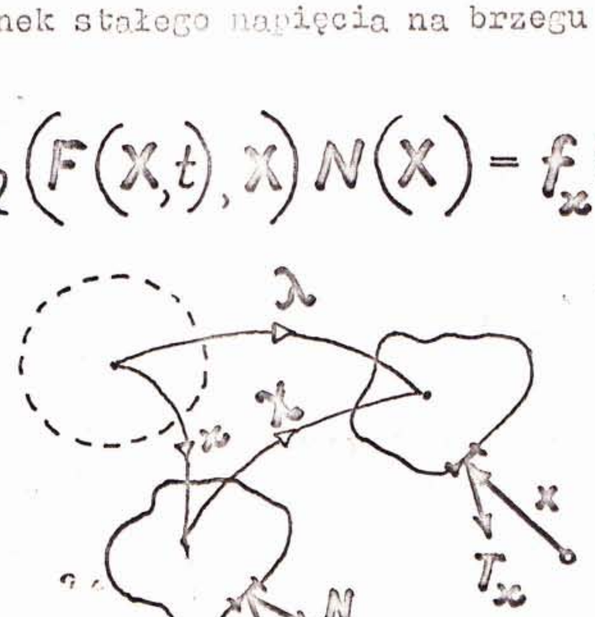
$$\bigwedge_{X\in\partial\mathcal{B}_{\varkappa}}\ \bigwedge_{t\in\mathcal{R}}\ \chi(X,t)=\varphi(X,t) \tag{2.26}$$

gdzie $\varphi(X,t)$ - z góry dana funkcja o odpowiedniej regularności.

2. Warunek napięcia na brzegu.

Tutaj trudno jest zadać dowolny warunek napięcia, por. [5] . Jednak dostatecznie ogólny może być następujący warunek stałego napięcia na brzegu (Rys. 4)

$$\bigwedge_{X\in\partial\mathcal{B}_{\varkappa}} h\left(F(X,t),X\right)N(X)=f_{\varkappa}(X) \tag{2.27}$$



Rys.4.

3. Mieszane warunki na brzegu

Można również zadać warunki (2.26) na pewnej części brzegu $\partial\mathcal{B}_{\varkappa}$, podczas gdy warunki (2.27) zadać na pozostałej części brzegu.

Tak więc nasze zagadnienie brzegowe sprowadza się do wyznaczenia funkcji ruchu $\varkappa(X,t)$ z kwasiliniowego równania wektorowego (2.23), spełniającego warunki na brzegu typu 1/ - 3/ .

3. POKREWNE DEFINICJE I TWIERDZENIA

W ramach materiałów sprężystych rozpatruje się często węższe klasy materiałów, z których najczęściej używane są modele materiałów hipersprężystych oraz nieściśliwych.

3.1. Materiały hipersprężyste

Def. 8 : Materiał sprężysty nazywamy hipersprężystym, jeżeli

$$\bigvee_{\sigma:{}^N\mathcal{T}_2\to R}\ \bigwedge_{F\in{}^N\mathcal{T}_2} g(F)=\varrho F\left[\sigma_{,F}(F)\right]^T=\varrho\,\sigma_{,F}(F)F^T \quad (3.1)$$

Def.9: Funkcję $\sigma_{\varkappa}(F)$ nazywamy funkcją energii materiału hipersprężystego. X

Konieczność wprowadzenia klasy materiałów hipersprężystych wynika z ogólniejszej teorii termodynamicznej ośrodka ciągłego [2,6,12]. W szczególności Gurtin [3,4] pokazał, że aby teoria była zgodna z drugim prawem termodyna -

miki, każdy materiał sprężysty musi być materiałem prostym i hipersprężystym. Jednak w ramach czysto mechanicznej teorii materiału sprężystego badania klasy materiałów hipersprężystych może być dokonane jedynie w oparciu o definicje i postulaty wprowadzane niezależnie od dotychczasowych postulatów, co szerzej będzie omówione w osobnym rozdziale 5.

Tw. 8: Używając tensorów naprężenia Pioli-Kirchhoffa, równania konstytutywne materiału hipersprężystego może być przedstawione w postaci

$$T_x = \varrho_x \sigma_{,F}(F) \qquad (3.2)$$
$$\tilde{T} = \varrho_x \overset{-1}{F} \sigma_{,F}(F)$$

D. $$J T (\overset{-1}{F})^T = J \varrho (F) (\overset{-1}{F})^T = J \varrho \sigma_{,F}(F) F^T (\overset{-1}{F})^T = \varrho_x \sigma_{,F}(F)$$

$$\tilde{T} = \overset{-1}{F} T_x = \varrho_x \overset{-1}{F} \sigma_{,F}(F)$$

3.2. Nieściśliwe materiały sprężyste.

Model nieściśliwego materiału sprężystego często jest używany w hydrodynamice (ciecz nieściśliwa) oraz przy badaniach materiałów typu gumy. Do pełnego rozpatrzenia tej klasy modeli potrzeba jednak rozpatrzyć ogólną teorię materiałów z więzami wewnętrznymi, co zostało dopiero naszkicowane w [2] . Tu ograniczymy się tylko do faktów podstawowych.

<u>Def. 10:</u> Materiał sprężysty nazywamy <u>nieściśliwym</u>, jeżeli dopuszcza możliwość wystąpienia w nim tylko ruchów izochorycznych, t.zn.

$$\bigwedge_{X\in\mathcal{B}_{\varkappa}}\ \bigwedge_{t\in\mathcal{R}} \left|\det \mathbb{F}\right| = 1 \tag{3.3}$$

<u>Tw. 9:</u> Równanie konstytutywne nieściśliwego materiału sprężystego może być przedstawione w postaci

$$T(X,t) = -p\mathbb{1} + \mathfrak{g}_{\substack{\varkappa \\ X}}(F) \tag{3.4}$$

gdzie p - pewien nieokreślony skalar

$\mathfrak{g}_{\substack{\varkappa \\ X}}$ - funkcja reakcji materiału nieściśliwego określona na zbiorze

$$\mathcal{D} = \left\{ F \in {}^{N}\mathcal{T}_2 \ : \ \left|\det F\right| = 1 \right\} .$$

<u>D.</u> Dowód podał Noll [2] na podstawie ogólnej teorii materiałów z więzami. ↯

<u>Tw.10:</u> Używając tensorów naprężenia Pioli-Kirchhoffa, równanie konstytutywne nieściśliwego materiału sprężystego może być przedstawione również w postaci

$$\begin{aligned} T_{\varkappa} &= -p\left(F^{-1}\right)^{T} + \mathfrak{h}(F) \\ \tilde{T} &= -p\left(F^{-1}\right)\left(F^{-1}\right)^{T} + \mathfrak{t}(F) \end{aligned} \tag{3.5}$$

<u>D.</u> $$T_{\varkappa} = J\left\{-p\mathbb{1} + \mathfrak{g}(F)\right\}\left(F^{-1}\right)^{T} = -p\left(F^{-1}\right)^{T} + \mathfrak{h}(F) \equiv F\tilde{T}$$

3.3. Grupy izotropii, stany nieznieksztalcone

Symetrię materiału w konfiguracji $\varkappa$ określa grupa izotropii $g_{\varkappa}$, której definicja ma postać

Def. 11: Grupą izotropii materiału w cząstce X, zajmującej w pewnej konfiguracji $\varkappa$ położenie $\mathbf{X}=\varkappa(X)$ nazywamy zbiór

$$g_{\varkappa}=\left\{H\in\mathcal{U}:\bigwedge_{F\in{}^{N}\mathcal{T}_2} g_{\mathbf{X}}^{\varkappa}(FH)=g_{\mathbf{X}}^{\varkappa}(F)\right\} \qquad (3.6)$$

W zależności od postaci grupy izotropii mamy następujący podział materiałów sprężystych.

Def. 12: Materiał sprężysty w cząstce X nazywamy

a/ sprężystym płynem, jeżeli

$$\bigvee_{\varkappa(X)} g_{\varkappa}=\mathcal{U} \qquad (3.7)$$

b/ sprężystym ciałem stałym, jeżeli

$$\bigvee_{\varkappa(X)} g_{\varkappa}\subset\mathcal{O} \qquad (3.8)$$

c/ sprężystym płynnym kryształem w pozostałych przypadkach.

Def. 13 : Konfigurację $\varkappa$ dla której zachodzą (3.7) i (3.8) , nazywamy stanem nieznieksztalconym.

Tw. 11: Grupa izotropii $g_{\varkappa}$ sprężystego płynu nie zależy od wyboru konfiguracji $\varkappa(X)$, t.zn. dla płynu

$$\bigwedge_{x(X)} g_x = \mathcal{U} \qquad (3.9)$$

D. W mechanice ośrodka ciągłego [2] udowadnia się twierdzenie, które mówi, że przy zmianie konfiguracji (Rys.2) grupa symetrii transformuje się zgodnie z prawem

$$g_{x_2} = P g_{x_1} P^{-1} \qquad (3.10)$$

jeżeli więc u nas $g_{x_1} = \mathcal{U}$ to $\det(PHP^{-1}) = \det H = 1$ czyli również $g_{x_2} = \mathcal{U}$.

Tw. 12: Grupa izotropii g_x sprężystego ciała stałego przy zmianie konfiguracji $x_2 \circ x_1^{-1}$, takiej, że $U = Q_1^T U Q_1$ gdzie $P = \frac{\partial}{\partial X_1}\left[x_2 \circ x_1^{-1}\right](X_1) = RU$ zmienia się zgodnie z prawem

$$g_{x_2} = R g_{x_1} R^T \qquad (3.11)$$

D. Niech $Q_1 \in g_{x_1}$. Wtedy zgodnie z (3.10) $Q_2 = RUQ_1 (RU)^{-1} \in g_{x_2}$ Stąd $Q_2 RU = RUQ_1 = RQ_1 Q_1^T U Q_1$. Jednoznaczność rozkładu polarnego tensora $Q_2 RU$ wymaga by

$$Q_2 R = R Q_1 \quad , \quad U = Q_1^T U Q_1$$

Czyli

$$Q_2 = R Q_1 R^T \in g_{x_2} \, . \quad \lightning$$

3.4. Niektóre twierdzenia algebry i analizy funkcji tensorowych

Przypomnijmy tu bez dowodów niektóre twierdzenia potrzebne dalej przy rozpatrzeniu materiałów izotropowych.

Tw. 13: (Cayley -Hamiltona)

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{T}_2} A^3 = I_A A^2 - II_A A + III_A \mathbb{1} \tag{3.12}$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_A &\equiv \operatorname{tr} A \\ II_A &\equiv \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2\right] \\ III_A &\equiv \det A = \frac{1}{6}\left[(\operatorname{tr} A)^3 - 3 \operatorname{tr} A^2 \operatorname{tr} A + 2 \operatorname{tr} A^3\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

zwane są niezmiennikami głównymi tensora $A \in \mathcal{T}_2$.

Tw. 14: Gradienty niezmienników głównych tensora $A \in \mathcal{T}_2$ mają postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_A}{\partial A} &= \mathbb{1} \\ \frac{\partial II_A}{\partial A} &= I_A \mathbb{1} - A^T \\ \frac{\partial III_A}{\partial A} &= III_A (A^{-1})^T = \left[II_A \mathbb{1} - I_A A + A^2\right]^T \end{aligned} \tag{3.14}$$

Def. 13: Funkcję tensorową $f : \mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ nazywamy izotropową gdy

$$\bigwedge_{\substack{Q \in \mathcal{O} \\ B \in \mathcal{T}_2}} Q f(B) Q^T = f(Q B Q^T) \tag{3.15}$$

Def. 14: Funkcję tensorową $f: \mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathcal{R}$ nazywamy niezmiennikiem ortogonalnym gdy

$$\bigwedge_{\mathbb{Q} \in \mathcal{O}} \bigwedge_{\mathbb{B} \in \mathcal{T}_2} f(\mathbb{B}) = f\left(\mathbb{Q}\mathbb{B}\mathbb{Q}^T\right) \tag{3.16}$$

Tw. 15: Każdą izotropową funkcję tensorową $f: {}^s\mathcal{T}_2 \longrightarrow {}^s\mathcal{T}_2$ można przedstawić w postaci

$$\bigwedge_{\mathbb{B} \in {}^s\mathcal{T}_2} f(\mathbb{B}) = f_0 \mathbb{1} + f_1 \mathbb{B} + f_2 \mathbb{B}^2 \tag{3.17}$$

gdzie $f_r: {}^s\mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathcal{R}$ są niezmiennikami ortogonalnymi tensora $\mathbb{B} \in {}^s\mathcal{T}_2$.

Tw. 16: Każdy niezmiennik ortogonalny $f: {}^s\mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathcal{R}$ można przedstawić w postaci

$$f(\mathbb{A}) = \tilde{f}\left(I_{\mathbb{A}}, II_{\mathbb{A}}, III_{\mathbb{A}}\right) = \bar{f}\left(A_1, A_2, A_3\right) \tag{3.18}$$

gdzie : $\tilde{f}: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ - funkcja skalarna niezmienników głównych tensora $\mathbb{A} \in {}^s\mathcal{T}_2$

$\bar{f}: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ - funkcja skalarna wartości własnych tensora $\mathbb{A} \in {}^s\mathcal{T}_2$.

3.5. Różniczkowanie funkcji tensorowych

Tw. 17: Gradient funkcji tensorowej $f: \mathcal{T}_p \longrightarrow \mathcal{T}_q$ spełnia zależność [2]

$$\bigwedge_{\mathbb{B}\in\mathcal{T}_p} f_{,\mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} = \frac{d}{d\lambda} f(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B})\Big|_{\lambda=0} \qquad (3.19)$$

Tw. 18: Gradienty różnych funkcji tensorowych $f: \mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ można obliczyć z następujących zależności :

$$\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B} = (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}}\cdot\mathbb{B} = (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.3}{T}}\cdot\mathbb{B}$$

$$\frac{\partial \mathbb{A}^T}{\partial \mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}^T = (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}}\cdot\mathbb{B} = (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.4}{T}}\cdot\mathbb{B}$$

$$\frac{\partial \overset{-1}{\mathbb{A}}}{\partial \mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} = -\overset{-1}{\mathbb{A}}\,\mathbb{B}\,\overset{-1}{\mathbb{A}}$$

$$\frac{\partial \overset{2}{\mathbb{A}}}{\partial \mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}+\mathbb{A}\mathbb{B}\,; \quad \frac{\partial}{\partial \mathbb{A}}(\mathbb{A}\otimes\mathbb{A})\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\otimes\mathbb{A}+\mathbb{A}\otimes\mathbb{B} \qquad (3.20)$$

$$\frac{\partial \mathbb{A}^T\mathbb{A}}{\partial \mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}^T\mathbb{A}+\mathbb{A}^T\mathbb{B}\,; \quad \frac{\partial}{\partial \mathbb{A}}(\mathbb{A}^T\otimes\mathbb{A})\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}^T\otimes\mathbb{A}+\mathbb{A}^T\otimes\mathbb{B}$$

$$\frac{\partial \mathbb{A}\mathbb{A}^T}{\partial \mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}^T+\mathbb{A}\mathbb{B}^T\,; \quad \frac{\partial}{\partial \mathbb{A}}(\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}^T)\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\otimes\mathbb{A}^T+\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}^T$$

$$\frac{\partial \overset{2}{\mathbb{A}}{}^T}{\partial \mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T+\mathbb{A}^T\mathbb{B}^T\,; \quad \frac{\partial}{\partial \mathbb{A}}(\mathbb{A}^T\otimes\mathbb{A}^T)\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}^T\otimes\mathbb{A}^T+\mathbb{A}^T\otimes\mathbb{B}^T$$

$$\frac{\partial \overset{1/2}{\mathbb{A}}}{\partial \mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} = \frac{1}{2}\,\overset{-1/2}{\mathbb{A}}\,\mathbb{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{A}}\cdot(\mathbb{A}\otimes\mathbb{1})\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\otimes\mathbb{1}\,; \quad \frac{\partial}{\partial \mathbb{A}}(\mathbb{A}^T\otimes\mathbb{1})\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}^T\otimes\mathbb{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{A}}(\mathbb{1}\otimes\mathbb{A})\cdot\mathbb{B} = \mathbb{1}\otimes\mathbb{B}\,; \quad \frac{\partial}{\partial \mathbb{A}}(\mathbb{1}\otimes\mathbb{A}^T)\cdot\mathbb{B} = \mathbb{1}\otimes\mathbb{B}^T$$

D. Zgodnie z (3.19) mamy, na przykład

$$\frac{\partial A^T A}{\partial A}\cdot B = \frac{d}{d\lambda}\left\{\left(A^T+\lambda B^T\right)\left(A+\lambda B\right)\right\}\Big|_{\lambda=0} = B^T A + A^T B$$

W identyczny sposób można określić pozostałe zależności (3.20) ↯

Tw.19: Dla każdej pary tensorów $A, B \in \mathcal{T}_2$ zachodzą następujące tożsamości

$$AB = \left(A\otimes 1\right)^{\overset{2.3}{T}}\cdot B = \left(1\otimes A^T\right)^{\overset{1.4}{T}}\cdot B = \left[A\left(1\otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}}\right]\cdot B = \left[A\left(1\otimes 1\right)^{\overset{2.3}{T}}\right]\cdot B$$

$$AB^T = \left(A\otimes 1\right)^{\overset{2.4}{T}}\cdot B = \left(1\otimes A\right)^{\overset{1.3}{T}}\cdot B = \left[A\left(1\otimes 1\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]\cdot B = \left[A\left(1\otimes 1\right)^{\overset{2.4}{T}}\right]\cdot B$$

$$BA = \left(A\otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}}\cdot B = \left(1\otimes A^T\right)^{\overset{2.3}{T}}\cdot B = \left[\left(1\otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}} A^T\right]\cdot B = \left[\left(1\otimes 1\right)^{\overset{2.3}{T}} A^T\right]\cdot B \qquad (3.21)$$

$$B^T A = \left(A\otimes 1\right)^{\overset{1.3}{T}}\cdot B = \left(1\otimes A\right)^{\overset{2.4}{T}}\cdot B$$

D. Przez sprawdzenie, n.p.

$$\left(A\otimes 1\right)^{\overset{2.3}{T}}\cdot B = A^{ij} g^{kl} \ulcorner g_i g_k g_j g_l \urcorner \otimes B^{mn} \ulcorner g_m g_n \urcorner \underset{(3.5)\,(4.6)}{\Big\}} =$$

$$= A^{ij} g^{kl} B^{mn} \cdot g_{jm} g_{ln} \ulcorner g_i g_k \urcorner =$$

$$= A^{i\,\cdot}_{\cdot\,m} B^{mk} \ulcorner g_i g_k \urcorner \equiv AB$$

Nr			Ilość stron
Nr arch.			Nr strony 29

Podobnie sprawdzić można słuszność pozostałych zależności. ◁

Tw.20: Dla każdej pary tensorów $A, B \in \mathcal{T}_2$ zachodzą następujące tożsamości

$$
\begin{aligned}
ABA &= \left(A \otimes A^T\right)^{\overset{1.4}{T}} \cdot B = \left(A \otimes A^T\right)^{\overset{2.3}{T}} \cdot B \\
A^T BA &= \left(A \otimes A\right)^{\overset{1.4}{T}} \cdot B = \left(A^T \otimes A^T\right)^{\overset{2.3}{T}} \cdot B \\
AB^T A &= \left(A \otimes A\right)^{\overset{1.3}{T}} \cdot B = \left(A \otimes A\right)^{\overset{2.4}{T}} \cdot B \\
ABA^T &= \left(A \otimes A\right)^{\overset{2.3}{T}} \cdot B = \left(A^T \otimes A^T\right)^{\overset{1.4}{T}} \cdot B \\
A^T B^T A &= \left(A \otimes A^T\right)^{\overset{1.3}{T}} \cdot B = \left(A^T \otimes A\right)^{\overset{2.4}{T}} \cdot B \\
A^T BA^T &= \left(A^T \otimes A\right)^{\overset{1.4}{T}} \cdot B = \left(A^T \otimes A\right)^{\overset{2.3}{T}} \cdot B \\
AB^T A^T &= \left(A^T \otimes A\right)^{\overset{1.3}{T}} \cdot B = \left(A \otimes A^T\right)^{\overset{2.4}{T}} \cdot B \\
A^T B^T A^T &= \left(A^T \otimes A^T\right)^{\overset{1.3}{T}} \cdot B = \left(A^T \otimes A^T\right)^{\overset{2.4}{T}} \cdot B
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

D. Przez sprawdzenie, np.

$$(A\otimes A)^{\overset{1.3}{T}}\cdot B = A^{ij}A^{kl}\ulcorner g_k\, g_j\, g_i\, g_l \urcorner \otimes B^{rs}\ulcorner g_r\, g_s \urcorner \underbrace{\}}_{(3.5)(4.6)} =$$

$$= A^{ij}A^{kl} g_{ir}\, g_{ls}\, B^{rs}\ulcorner g_k\, g_j \urcorner =$$

$$= A^{kl}B_{il}A^{ij}\ulcorner g_k\, g_j \urcorner \equiv A B^{T} A\ .$$

Podobnie sprawdzić można słuszność pozostałych zależności. §

<u>Tw. 21</u>: Dla każdej pary tensorów $A, B \in \mathcal{T}_2$ zachodzą następujące tożsamości

$$\begin{aligned}
A\otimes B &= (A\otimes 1\otimes 1)^{\overset{3.6}{T}}\cdot B = (A\otimes 1\otimes 1)^{\overset{4.5}{T}}\cdot B \\
A\otimes B^{T} &= (A\otimes 1\otimes 1)^{\overset{3.5}{T}}\cdot B = (A\otimes 1\otimes 1)^{\overset{4.6}{T}}\cdot B \\
B\otimes A &= (1\otimes A\otimes 1)^{\overset{1.6}{T}}\cdot B = (1\otimes A\otimes 1)^{\overset{2.5}{T}}\cdot B \\
B\otimes A &= (1\otimes A\otimes 1)^{\overset{1.5}{T}}\cdot B = (1\otimes A\otimes 1)^{\overset{2.6}{T}}\cdot B\ .
\end{aligned} \qquad (3.23)$$

<u>D.</u> Przez sprawdzenie, np.,

$$(A\otimes 1\otimes 1)^{\overset{3.6}{T}}\cdot B = A^{ij} g^{kl} g^{mn}\ulcorner g_i\, g_j\, g_n\, g_l\, g_m\, g_k \urcorner \otimes B^{rs}\ulcorner g_r\, g_s \urcorner \underbrace{\}}_{(5.7)(6.8)} =$$

$$= A^{ij}B^{nl}\ulcorner g_i\, g_j\, g_n\, g_l \urcorner = A\otimes B\ .$$

Podobnie sprawdzić można słuszność pozostałych zależności.

<u>Tw. 22</u>: Gradienty różnych funkcji tensorowych $f: {}^{s}\mathcal{T}_2 \longrightarrow {}^{s}\mathcal{T}_2$ mają postać

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \mathbb{A}} &= \frac{1}{2}\left[(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}}\right] \\
\frac{\partial \overset{2}{\mathbb{A}}}{\partial \mathbb{A}} &= \frac{1}{2}\left[(\mathbb{A}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbb{A}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}} + (\mathbb{A}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.4}{T}} + (\mathbb{A}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.3}{T}}\right] \\
\frac{\partial \overset{-1}{\mathbb{A}}}{\partial \mathbb{A}} &= -\frac{1}{2}\left[(\overset{-1}{\mathbb{A}}\otimes\overset{-1}{\mathbb{A}})^{\overset{1.4}{T}} + (\overset{-1}{\mathbb{A}}\otimes\overset{-1}{\mathbb{A}})^{\overset{1.3}{T}}\right] \\
\frac{\partial \overset{1/2}{\mathbb{A}}}{\partial \mathbb{A}} &= \frac{1}{4}\left[(\overset{-1/2}{\mathbb{A}}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\overset{-1/2}{\mathbb{A}}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}}\right] \\
\frac{\partial}{\partial \mathbb{A}}(\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}) &= \frac{1}{2}\left[(\mathbb{1}\otimes\mathbb{A}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.5}{T}} + (\mathbb{1}\otimes\mathbb{A}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.6}{T}} + (\mathbb{A}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{3.5}{T}} + (\mathbb{A}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{3.6}{T}}\right] \\
\frac{\partial}{\partial \mathbb{A}}(\mathbb{A}\otimes\mathbb{1}) &= \frac{1}{2}\left[(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.5}{T}} + (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.6}{T}}\right]
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

<u>D.</u> By znaleźć gradient funkcji $f(\mathbb{A})$ względem symetrycznego argumentu najpierw należy rozszerzyć zakres funkcji na całą przestrzeń $\mathcal{T}_2$, wprowadzając funkcję $\overline{f}(\mathbb{A}) \equiv f\left(\frac{1}{2}(\mathbb{A}+\mathbb{A}^T)\right)$ dla dowolnych tensorów $\mathbb{A}\in\mathcal{T}_2$. Obliczanie gradientu $\overline{f}$ w $\mathcal{T}_2$ zgodne jest z (3.19), (3.20) oraz (3.21) - (3.23). W wyniku znów zawężamy $\overline{f}$ do przestrzeni ${}^{s}\mathcal{T}_2$, kładąc $\mathbb{A}\in{}^{s}\mathcal{T}_2$. Mamy więc :

a/ $\overline{f}(\mathbb{A}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T\right)$; Korzystając z $(3.20)_1$ i $(3.20)_2$ mamy $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \mathbb{A}} = \frac{1}{2}\left[(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}}\right]$

co dowodzi $(3.24)_1$.

b/ $\overline{f}(\mathbb{A}) = \frac{1}{4}\left(\mathbb{A}^2 + \mathbb{A}^T\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{A}^T + \mathbb{A}^T\mathbb{A}^T\right)$; Korzystając z $(3.20)_4$ - $(3.20)_8$ oraz tożsamości (3.21) mamy m.in. następującą postać

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \mathbb{A}} = \frac{1}{4}\Big\{(\mathbb{A}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbb{A}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.3}{T}} + (\mathbb{A}^T\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbb{A}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.4}{T}} + (\mathbb{A}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}} + (\mathbb{A}^T\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.3}{T}} + (\mathbb{A}^T\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}} + (\mathbb{A}^T\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.4}{T}}\Big\}$$

Zawężając powyższe do $\mathbb{A} \in {}^s\mathcal{T}_2$ otrzymamy $(3.24)_2$.

c/ $\overline{f}(\mathbb{A}) = \left[\frac{1}{2}\left(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T\right)\right]^{-1}$; Korzystając z $(3.20)_3$, $(3.22)_1$ oraz $(3.24)_1$ mamy, oznaczając ${}^s\mathbb{A} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T\right)$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \mathbb{A}} = \frac{\partial\, {}^s\mathbb{A}^{-1}}{\partial\, {}^s\mathbb{A}} \circ \frac{\partial\, {}^s\mathbb{A}}{\partial \mathbb{A}} = -\left({}^s\mathbb{A}^{-1} \otimes {}^s\mathbb{A}^{-1}\right)^{\overset{2.3}{T}} \circ \frac{1}{2}\left[(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\, {}^s\!A^{-1}_{ij}\, {}^s\!A^{-1}_{kl} \ulcorner \mathbf{g}^i \mathbf{g}^k \mathbf{g}^j \mathbf{g}^l \urcorner \circ \left(g^{mp}g^{nq} + g^{mq}g^{np}\right) \ulcorner \mathbf{g}_m \mathbf{g}_n \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q \urcorner =$$

$$= -\frac{1}{2}\left({}^s\!A^{-1}_{ij}\, {}^s\!A^{-1}_{kl}\right)\left(g^{jp}g^{lq} + g^{jq}g^{lp}\right) \ulcorner \mathbf{g}_i \mathbf{g}_k \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q \urcorner =$$

$$= -\frac{1}{2}\left({}^s\!A^{-1}_{ip}\, {}^s\!A^{-1}_{kq} + {}^s\!A^{-1}_{iq}\, {}^s\!A^{-1}_{kp}\right) \ulcorner \mathbf{g}^i \mathbf{g}^k \mathbf{g}^p \mathbf{g}^q \urcorner =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left({}^s\mathbb{A}^{-1} \otimes {}^s\mathbb{A}^{-1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left({}^s\mathbb{A}^{-1} \otimes {}^s\mathbb{A}^{-1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right)$$

zawężając powyższe do $\mathbb{A} \in {}^s\mathcal{T}_2$ otrzymamy $(3.24)_3$.

d/ $\bar{f}(\mathbb{A}) = \left[\frac{1}{2}\left(\mathbb{A}+\mathbb{A}^{T}\right)\right]^{1/2}$; Korzystając z $(3.20)_8$, $(3.21)_1$ oraz $(3.24)_1$ mamy

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbb{A}} = \frac{\partial \overset{s}{\mathbb{A}}{}^{-1}}{\partial \overset{s}{\mathbb{A}}} \circ \frac{\partial \overset{s}{\mathbb{A}}}{\partial \mathbb{A}} = \frac{1}{2}\left(\overset{s}{\mathbb{A}}{}^{-1/2} \otimes \mathbb{1}\right)^{\overset{2.3}{T}} \circ \frac{1}{2}\left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\overset{s}{A}{}^{-1/2}_{ij}\, g_{kl} \ulcorner \mathbf{g}^{i}\mathbf{g}^{k}\mathbf{g}^{j}\mathbf{g}^{l} \urcorner \circ \left(g_{mp}\,g_{nq} + g_{mq}\,g_{np}\right) \ulcorner \mathbf{g}^{m}\mathbf{g}^{n}\mathbf{g}^{p}\mathbf{g}^{q} \urcorner\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\overset{s}{A}{}^{-1/2}_{ip}\, g_{kq} + \overset{s}{A}{}^{-1/2}_{iq}\, g_{kp}\right] \ulcorner \mathbf{g}^{i}\mathbf{g}^{k}\mathbf{g}^{p}\mathbf{g}^{q} \urcorner = \frac{1}{4}\left[\left(\overset{s}{\mathbb{A}}{}^{-1/2}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\overset{s}{\mathbb{A}}{}^{-1/2}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]$$

co zawężając do $\mathbb{A} \in {}^{s}\mathcal{T}_2$ otrzymamy $(3.24)_4$.

e/ $\bar{f}(\mathbb{A}) = \frac{1}{4}\left(\mathbb{A}\otimes\mathbb{A} + \mathbb{A}\otimes\mathbb{A}^{T} + \mathbb{A}^{T}\otimes\mathbb{A} + \mathbb{A}^{T}\otimes\mathbb{A}^{T}\right)$

Korzystając z $(3.20)_{4-7}$ - (3.21) mamy

$$\frac{\partial \bar{f}(\mathbb{A})}{\partial \mathbb{A}} = \frac{1}{4}\Big\{\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{A}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.5}{T}} + \left(\mathbb{A}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{3.6}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{A}^{T}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.5}{T}} + \left(\mathbb{A}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{3.5}{T}} +$$

$$+ \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{A}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.6}{T}} + \left(\mathbb{A}^{T}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{3.6}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{A}^{T}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.6}{T}} + \left(\mathbb{A}^{T}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{3.5}{T}}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\mathbb{1}\otimes\overset{s}{\mathbb{A}}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.5}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\overset{s}{\mathbb{A}}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.6}{T}} + \left(\overset{s}{\mathbb{A}}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{3.5}{T}} + \left(\overset{s}{\mathbb{A}}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{3.6}{T}}\right]$$

co zawężając do $\mathbb{A} \in {}^{s}\mathcal{T}_2$ otrzymamy $(3.24)_4$.

			ilość stron
			Nr strony 34

f/ $\bar{f}(\mathbb{A}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{A} \odot \mathbb{1} + \mathbb{A}^T \otimes \mathbb{1}\right)$ Korzystając z $(3.20)_9$, $(3.23)_{3,4}$ mamy

$$\frac{\partial \bar{f}(\mathbb{A})}{\partial \mathbb{A}} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \odot \mathbb{1}\right)^{\overset{2.5}{T}} + \left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \odot \mathbb{1}\right)^{\overset{2.6}{T}}\right]$$ co dowodzi $(3.24)_6$.

4. IZOTROPOWE MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

4.1. Definicja i własności podstawowe

Def. 15: Materiał sprężysty nazywamy izotropowym w cząstce X, jeżeli

$$\bigvee_{\varkappa(X)} g_{\varkappa} \supset \mathcal{O} \tag{4.1}$$

Def. 16: Konfigurację $\varkappa$ dla której zachodzi (4.1) nazywamy stanem niezniekształconym.

Z powyższych definicji wynikają następujące wnioski:

a/ Sprężysty płyn jest izotropowym materiałem sprężystym w każdej konfiguracji

b/ Sprężyste ciało stałe jest izotropowym materiałem sprężystym tylko w stanie niezmiekształconym

c/ Sprężysty płynny kryształ nie może być materiałem izotropowym.

Tw. 23: Funkcja reakcji $g_{\varkappa}(F)$ izotropowego materiału sprężystego, wzięta względem stanu niezniekształconego $\varkappa$ jako konfiguracji porównawczej, jest funkcją izotropową, t.zn.

$$\mathcal{O}_{g} = \mathcal{O} \tag{4.2}$$

gdzie

$$\mathcal{O}_{g} \equiv \left\{ Q \in \mathcal{O} : Q\, g(F)\, Q^{T} = g\left(Q F Q^{T}\right) \right\} \tag{4.3}$$

jest grupą symetrii funkcji reakcji g.

D. Funkcja $\mathcal{g}(\mathbb{F})$ spełnia zasadę obiektywności (2.5) oraz warunek izotropii wynikający z (3.6) i (4.2)

$$\bigwedge_{\mathbb{Q}\in\mathcal{O}} \bigwedge_{\mathbb{F}\in{}^N\mathcal{T}_2} \mathcal{g}(\mathbb{F}\mathbb{Q}) = \mathcal{g}(\mathbb{F}) \tag{4.4}$$

Ponieważ $\mathbb{Q}\in\mathcal{O} \Longrightarrow \mathbb{Q}^T\in\mathcal{O}$ rozpatrzmy dowolne tensory deformacji typu $\mathbb{Q}\mathbb{F}\in{}^N\mathcal{T}_2$, dla których warunek (4.4) ma postać

$$\bigwedge_{\mathbb{Q}=\mathcal{O}} \bigwedge_{\mathbb{F}\in{}^N\mathcal{T}_2} \mathcal{g}(\mathbb{Q}\mathbb{F}\mathbb{Q}^T) = \mathcal{g}(\mathbb{Q}\mathbb{F}) = \mathbb{Q}\mathcal{g}(\mathbb{F})\mathbb{Q}^T .$$

gdzie ostatnia równość wynikła z (2.5), a to kończy dowód.

Tw. 24: Tensor naprężenia Cauchy'ego izotropowego materiału sprężystego w stanie nieznieksztalconym jest tensorem kulistym, t.zn.

$$\mathbb{T}_0 \equiv \mathcal{g}_x(\mathbb{1}) = -p\,\mathbb{1} \tag{4.5}$$

gdzie

$p = const$ jest ciśnieniem hydrostatycznym.

D. Ponieważ $\mathcal{g}$ jest funkcją izotropową,

$$\mathbb{T}=\mathcal{g}(\mathbb{F}) \Longrightarrow \bigwedge_{\mathbb{F}\in{}^N\mathcal{T}_2} \mathcal{O}_{\mathbb{F}} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{T}}$$

W szczególności dla $\mathbb{F}\equiv\mathbb{1}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{1}} \equiv \mathcal{O} \Longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{T}_0} = \mathcal{O}$

Ponieważ przestrzeń $\mathcal{T}_{2,\mathcal{O}}$ tensorów o walencji 2 inwa-

D. Funkcja $\mathcal{g}(\mathbf{F})$ spełnia zasadę obiektywności (2.5) oraz warunek izotropii wynikający z (3.6) i (4.2)

$$\bigwedge_{\mathbf{Q}\in\mathcal{O}} \bigwedge_{\mathbf{F}\in {}^N\mathcal{T}_2} \mathcal{g}(\mathbf{F}\mathbf{Q}) = \mathcal{g}(\mathbf{F}) \tag{4.4}$$

Ponieważ $\mathbf{Q}\in\mathcal{O} \Longrightarrow \mathbf{Q}^T\in\mathcal{O}$ rozpatrzmy dowolne tensory deformacji typu $\mathbf{Q}\mathbf{F}\in {}^N\mathcal{T}_2$, dla których warunek (4.4) ma postać

$$\bigwedge_{\mathbf{Q}=\mathcal{O}} \bigwedge_{\mathbf{F}\in {}^N\mathcal{T}_2} \mathcal{g}(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = \mathcal{g}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q}\mathcal{g}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T .$$

gdzie ostatnia równość wynikła z (2.5), a to kończy dowód.

Tw. 24: Tensor naprężenia Cauchy'ego izotropowego materiału sprężystego w stanie nieznieksztalconym jest tensorem kulistym, t.zn.

$$\mathbf{T}_o \equiv \mathcal{g}_{\varkappa}(\mathbf{1}) = -p\mathbf{1} \tag{4.5}$$

gdzie

$p = const$ jest ciśnieniem hydrostatycznym.

D. Ponieważ $\mathcal{g}$ jest funkcją izotropową,

$$\mathbf{T} = \mathcal{g}(\mathbf{F}) \Longrightarrow \bigwedge_{\mathbf{F}\in {}^N\mathcal{T}_2} \mathcal{O}_{\mathbf{F}} \subset \mathcal{O}_{\mathbf{T}}$$

W szczególności dla $\mathbf{F}\equiv\mathbf{1}$, $\mathcal{O}_{\mathbf{1}} \equiv \mathcal{O} \Longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_o} = \mathcal{O}$

Ponieważ przestrzeń $\mathcal{T}_{2,\mathcal{O}}$ tensorów o walencji 2 inwariantnych względem pełnej grupy ortogonalnej [8] ma wymiar 1, stąd musi być (4.5).

Tw. 25: Każde dwa stany niezniekształcone $\varkappa_1$ i $\varkappa_2$ (Rys. 2) izotropowego materiału sprężystego różnić się mogą albo deformacją typu ruchu ciała sztywnego, lub deformacją typu dylatacji.

D.: Dla izotropii (3.10) daje $\bigwedge\limits_{Q \in \mathcal{O}} P Q P^{-1} \in \mathcal{O}$, co jest możliwe gdy

a/ P - tensor ortogonalny, o rozkładzie polarnym $P = R 1$ czyli $U = 1$, a to jest kryterium deformacji typu ruchu ciała sztywnego, $R Q R^{-1} \in \mathcal{O}$

b/ $P = \alpha 1$ - deformacja typu dylatacji, $\alpha 1 Q \frac{1}{\alpha} 1 = Q \in \mathcal{O}$.

4.2. Równania konstytutywne

Tw.26: Równanie konstytutywne izotropowego materiału sprężystego może być przedstawione w następujących trzech zredukowanych postaciach

$$T = g(V)$$
$$T = f(B) \qquad (4.6)$$
$$T = t(C)$$

gdzie funkcje reakcji $g_{\varkappa}$, $f_{\varkappa}$ i $t_{\varkappa}$, wzięte względem stanu niezniekształconego $\varkappa$ jako konfiguracji porównawczej, są funkcjami izotropowymi, t.zn.

$$\mathcal{O}_{g} = \mathcal{O}_{\mathfrak{z}} = \mathcal{O}_{t} = \mathcal{O} .$$

<u>D.</u> Wg $(2.12)_1$ i (4.3), przyjmując $Q \equiv R$, $F \equiv U$ mamy $T = R\, g(U)\, R^T = g(R U R^T) \equiv g(V)$

co dowodzi $(4.6)_1$.

Zgodnie z definicją (2.13)

$$\bigwedge_{\substack{B \in {}^s\mathcal{T}_2 \\ B\cdot B \geqslant 0}} g\left(\overset{1/2}{B}\right) \equiv g(V) \equiv \mathfrak{z}(B) \qquad (4.7)$$

Sprawdzimy czy $\mathfrak{z}$ jest funkcją izotropową

$$Q\, g\left(\overline{F F^T}^{1/2}\right) Q = Q\, \mathfrak{z}(F F^T)\, Q^T =$$

$$= g\left(Q \overline{F F^T}^{1/2} Q^T\right) = \mathfrak{z}\left(Q \overline{F F^T}^{1/2} Q^T Q\, \overline{F F^T}^{1/2} Q^T\right) = \mathfrak{z}\left(Q F F^T Q^T\right)$$

skąd widać że $\mathfrak{z}$ - f. izotropowa, co dowodzi $(4.6)_2$.

Odwracając $(2.9)_2$ mamy $g(F) = \mathcal{J}^{-1}(F)\, F\, t(F^T F)\, F^T$

i z (4.3)

$$Q\, g(F)\, Q^T = \mathcal{J}^{-1}(F)\, Q F\, t(F^T F)\, F^T Q^T =$$

$$= g(Q F Q^T) = \mathcal{J}^{-1}(Q F Q^T)(Q F Q^T)\, t(Q F^T Q^T Q F Q^T)\, Q F^T Q^T$$

skąd mamy $Q\, t(F^T F)\, Q^T = t(Q F^T F Q^T)$

co dowodzi $(4.6)_3$. ◆

Tw. 27: Równanie konstytutywne $(4.6)_2$ izotropowego materiału sprężystego można przedstawić w postaci

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} &= f_0 \mathbf{1} + f_1 \mathbf{B} + f_2 \mathbf{B}^2 \\
\mathbf{T} &= g_0 \mathbf{1} + g_1 \mathbf{B} + g_{-1} \mathbf{B}^{-1}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

gdzie $f_r = f_r(\mathbf{B})$, $g_r = g_r(\mathbf{B})$ zwane współczynnikami reakcji materiału sprężystego, są niezmiennikami ortogonalnymi tensora $\mathbf{B} \in {}^{s}\mathcal{T}_2$.

D. Wynika z własności (3.17) funkcji izotropowych oraz z twierdzenia Cayley-Hamiltona (3.12). ↯

Tw. 28: Współczynniki reakcji f_r oraz g_r materiału sprężystego związane są zależnościami

$$
\begin{aligned}
& g_0 = f_0 - II_{\mathbf{B}} f_2 ; \quad g_1 = f_1 + I_{\mathbf{B}} f_2 ; \quad g_{-1} = III_{\mathbf{B}} f_2 \\
& f_0 = g_0 + \frac{II_{\mathbf{B}}}{III_{\mathbf{B}}} g_{-1} ; \quad f_1 = g_1 - \frac{I_{\mathbf{B}}}{III_{\mathbf{B}}} g_{-1} ; \quad f_2 = \frac{1}{III_{\mathbf{B}}} g_{-1}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

D. Stosując twierdzenie Cayley-Hamiltona (3.12) mamy

$$
\mathbf{B}^2 = I_{\mathbf{B}} \mathbf{B} - II_{\mathbf{B}} \mathbf{1} + III_{\mathbf{B}} \mathbf{B}^{-1} \tag{4.10}
$$

co podstawiając do $(4.8)_1$ przez porównanie z $(4.8)_2$ mamy $(4.9)_1$. Rozwiązując $(4.9)_1$ względem f_r mamy $(4.9)_2$.

<u>Tw.29</u>: Równania konstytutywne $(4.6)_1$ i $(4.6)_3$ izotropowego materiału sprężystego można przedstawić w postaci

$$\mathbf{T}=k_0\mathbf{1}+k_1\mathbf{V}+k_2\mathbf{V}^2\ ;\quad \mathbf{T}=l_0\mathbf{1}+l_1\mathbf{V}+l_{-1}\mathbf{V}^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{T}}=s_0\mathbf{1}+s_1\mathbf{C}+s_2\mathbf{C}^2\ ;\quad \tilde{\mathbf{T}}=t_0\mathbf{1}+t_1\mathbf{C}+t_{-1}\mathbf{C}^{-1} \tag{4.11}$$

gdzie współczynniki reakcji k_Γ, l_Γ, s_Γ, t_Γ są niezmiennikami ortogonalnymi odpowiednio tensorów $\mathbf{V}$ lub $\mathbf{C}$.

<u>D.</u> Wynika z własności (3.17) funkcji izotropowych oraz z twierdzenia Cayley- Hamiltona (3.12). ϟ

<u>Tw.30</u> : Współczynniki reakcji t_Γ oraz g_Γ materiału sprężystego związane są zależnościami

$$\begin{aligned} t_0 &= \sqrt{III_{\mathbf{C}}}\, g_1 - \frac{I_{\mathbf{C}}}{\sqrt{III_{\mathbf{C}}}}\, g_{-1} \\ t_1 &= \frac{1}{\sqrt{III_{\mathbf{C}}}}\, g_1 \\ t_{-1} &= \sqrt{III_{\mathbf{C}}}\, g_0 + \frac{II_{\mathbf{C}}}{\sqrt{III_{\mathbf{C}}}}\, g_{-1} \ . \end{aligned} \tag{4.12}$$

<u>D.</u> Stosując $(2.7)_2$ oraz $(4.8)_2$ i $(4.11)_4$ mamy

$$\tilde{\mathbf{T}}=J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{F}^{-1})^T=\sqrt{III_{\mathbf{C}}}\,\mathbf{F}^{-1}\left[g_0\mathbf{1}+g_1\mathbf{B}+g_{-1}\mathbf{B}^{-1}\right](\mathbf{F}^{-1})^T \tag{4.13}$$

ale

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}^{-1})^T=(\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{-1}=\mathbf{C}^{-1}$$

$$F^{-1} B (F^{-1})^T = R^{-1} V^{-1} V V V^{-1} R = 1$$

$$F^{-1} B^{-1} (F^{-1})^T = F^{-1} (R C R^T)^{-1} (F^{-1})^T = U^{-1} R^{-1} R C^{-1} R^{-1} R U^{-1} = U^{-1} C^{-1} U^{-1} = C^{-2}$$

$$III_C \, C^{-2} = C - I_C \, 1 + II_C \, C^{-1}$$ - z twierdzenia Cayley-Hamiltona

co podstawiając do (4.13) i porównując z $(4.11)_4$ mamy (4.12).

Należy tu wyraźnie podkreślić, że definicja izotropii (4.1) jest inwariantną względem zmiany konfiguracji po - równawczej, t.zn. jeżeli istnieje chociaż jedna konfiguracja porównawcza, że $\mathcal{G}_{\varkappa} \supset \mathcal{O}$ to materiał pozostanie izotropowym niezależnie od tego jak on będzie deformowany. Jed - nakże postać równania konstytutywnego izotropowego materiału sprężystego jest zależna od wyboru konfiguracji porównawczej i ma szczególnie prostą postać (4.8) lub (4.11) gdy za konfigurację porównawczą przyjmiemy szczególnie wybrane konfiguracje - stany nieodkształcone. Jeżeli więc za konfi - gurację porównawczą przyjmiemy konfigurację zniekształconą, to funkcja reakcji $\mathcal{G}$ materiału izotropowego nie będzie funkcją izotropową i zależności (4.8) lub (4.11) nie są słuszne, chociaż sam materiał nadal pozostaje izotropowy. W naszej terminologii niesłuszne jest więc twierdzenie, że izotropowy materiał sprężysty po odkształceniu traci swą pierwotną izotropię, lecz słuszne jest jedynie spostrzeżenie, że przy dowolnej deformacji od stanu nieznieksztalconego konfiguracja aktualna może nie być już stanem niezniekształconym. Dalej z reguły będziemy zakładali, o ile nie będzie to wyraźnie określone, że przy badaniu ciała izotropowego konfiguracja porównawcza jest stanem niezniekształconym.

4.3. Równania ruchu

Tw. 31: Pierwsze równanie ruchu izotropowego ciała sprężystego w opisie Eulera ma postać

$$\underbrace{\mathbb{F}\circ \operatorname{grad}\mathbb{B}}_{(2.3)} + \varrho \mathbf{b} = \varrho \ddot{\mathbf{x}}$$

$$F^{km}{}_{pq}\, B^{pq}{}_{,m} + \varrho b^{k} = \varrho \ddot{x}^{k} \tag{4.14}$$

gdzie

$$\mathbb{F} \equiv \frac{\partial \xi(\mathbb{B})}{\partial \mathbb{B}} = f_1 \cdot \frac{1}{2}\left[(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}}\right] + f_2 \cdot \frac{1}{2}\left[(\mathbb{B}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbb{B}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}} + \right.$$

$$\left. + (\mathbb{B}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.4}{T}} + (\mathbb{B}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.3}{T}}\right] + \sum_{r=0}^{2} \mathbb{B}^{r} \otimes \left[\frac{\partial f_r}{\partial I_{\mathbb{B}}}\mathbb{1} + \frac{\partial f_r}{\partial II_{\mathbb{B}}}\left(I_{\mathbb{B}}\mathbb{1} - \mathbb{B}\right) + \frac{\partial f_r}{\partial III_{\mathbb{B}}}\, III_{\mathbb{B}}\, \mathbb{B}^{-1}\right] \tag{4.15}$$

$$\operatorname{grad}\mathbb{B} = \left[(\mathbb{F}^{T}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbb{F}\otimes\mathbb{1})^{\overset{2.4}{T}}\right] \circ \left(\operatorname{Grad}\mathbb{F}\circ\mathbb{F}^{-1}\right) =$$

$$= B^{pq}{}_{,m} \ulcorner \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q \mathbf{g}^{m} \urcorner = \tag{4.16}$$

$$= X^{N}{}_{,m}\, g^{KM}\left[x^{q}{}_{,K}\, x^{p}{}_{,M;N} + x^{p}{}_{,K}\, x^{q}{}_{,M;N}\right] \ulcorner \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q \mathbf{g}^{m} \urcorner$$

D.

$$\operatorname{div}\mathbb{T} = \underbrace{\operatorname{grad}\xi\left(\mathbb{B}(\mathbf{x},t)\right)}_{(2.3)} = \underbrace{\frac{\partial \xi(\mathbb{B})}{\partial \mathbb{B}} \circ \operatorname{grad}\mathbb{B}(\mathbf{x},t)}_{(2.3)}$$

Tensory $T, B \in {}^{s}\mathcal{T}_2$, czyli $\mathfrak{f} : {}^{s}\mathcal{T}_2 \longrightarrow {}^{s}\mathcal{T}_2$

Korzystając z zależności $(3.24)_1$, $(3.24)_2$, $(3.14)_3$ dla gradientów funkcji tensorowych określonych na ${}^{s}\mathcal{T}_2$, gra - dient izotropowej funkcji $\mathfrak{f}(B)$ wg $(4.8)_1$ przyjmie postać (4.15).

Następnie mamy, korzystając z $(3.20)_6$, $(3.21)_2$ oraz $(3.21)_3$

$$\operatorname{grad} B(x,t) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(F F^T\right) = \frac{\partial}{\partial F}\left(F F^T\right) \circ \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial F}\left(F F^T\right) \circ \left(\frac{\partial F}{\partial X} \circ \frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$= \left[\left(F^T \otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(F \otimes 1\right)^{\overset{2.4}{T}}\right] \circ \left(\operatorname{Grad} F \circ \overset{-1}{F}\right) \; ; \qquad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial F}\left(F F^T\right) = F^k{}_K g^{mn} \lceil g_n g_k g_m G^K \rceil + F^k{}_K g^{mn} \lceil g_k g_n g_m G^K \rceil = \left[F^r{}_K g^{mk} + F^k{}_K g^{mr}\right] \lceil g_k g_r g_m G^K \rceil$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F^L{}_{M;N} \lceil g_L G^M G^N \rceil \circ \overset{-1}{F}{}^K{}_n \lceil G_K g^n \rceil = F^L{}_{M;N} \overset{-1}{F}{}^N{}_n \lceil g_L G^M g^n \rceil$$

$$\operatorname{grad} B = \left[F^r{}_K g^{mk} + F^k{}_K g^{mr}\right] F^l{}_{M;N} \overset{-1}{F}{}^N{}_n g_{ml} g^{KN} \lceil g_k g_r g^n \rceil =$$

$$= \overset{-1}{F}{}^N{}_n g^{KM} \left[F^r{}_K F^k{}_{M;N} + F^k{}_K F^r{}_{M;N}\right] \lceil g_k g_r g^n \rceil \equiv B^{kr}{}_{,n} \lceil g_k g_r g^n \rceil$$

co kończy dowód. ♯

Tw. 32: Pierwsze równanie ruchu izotropowego ciała sprę - żystego w opisie Lagrange'a ma postać

$$\left[\mathbf{F}\left\{\mathbf{G}\circ\left[\left(\mathbf{F}\circ\mathbf{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}+\left(\mathbf{F}\overset{T}{\otimes}\mathbf{1}\right)^{\overset{2.3}{T}}\right]\right\}+\left(t(\mathbf{C})\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{1.4}{T}}\right]\circ\left.\mathrm{Grad}\,\mathbf{F}\right\}_{(2.3)}+\rho_x\mathbf{b}=\rho_x\ddot{\mathbf{x}}$$

$$2x^k_{,K}\,x^m_{,M}\,G^{KLMN}g_{ml}\,x^l_{,L;N}+t^{KL}x^k_{,K;L}+\rho_x b^k=\rho_x\ddot{x}^k \qquad (4.18)$$

gdzie

$$\mathbf{G}=\frac{\partial t(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}}=t_1\cdot\frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{1.4}{T}}+\left(\mathbf{1}\circ\mathbf{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]-t_{-1}\cdot\frac{1}{2}\left[\left(\overset{-1}{\mathbf{C}}\circ\overset{-1}{\mathbf{C}}\right)^{\overset{1.4}{T}}+\left(\overset{-1}{\mathbf{C}}\otimes\overset{-1}{\mathbf{C}}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]+$$

$$+\sum_{r=1}^{1}\mathbf{C}^r\otimes\left[\frac{\partial t_r}{\partial I_C}\mathbf{1}+\frac{\partial t_r}{\partial II_C}\left(I_C\mathbf{1}-\mathbf{C}\right)+\frac{\partial t_r}{\partial III_C}III_C\overset{-1}{\mathbf{C}}\right] \qquad (4.19)$$

D. Zgodnie z (2.18) i $(2.7)_2$ mamy

$$\mathrm{Div}\left(\mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}}\right)=\frac{\partial}{\partial\mathbf{F}}\left(\mathbf{F}t(\mathbf{C})\right)\circ\left.\mathrm{Grad}\,\mathbf{F}\right\}_{(2.3)} \qquad (4.20)$$

ale wg (3.19), $(3.21)_3$, $(3.20)_5$ oraz $(3.21)_1$ i $(3.24)_4$

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{F}}\left(\mathbf{F}t(\mathbf{C})\right)\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}t(\mathbf{C})+\mathbf{F}\frac{\partial t}{\partial\mathbf{F}}\cdot\mathbf{B}=$$

$$=\left\{\left(t(\mathbf{C})\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{1.4}{T}}+\mathbf{F}t_{,C}(\mathbf{C})\circ\left[\left(\mathbf{F}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}+\left(\overset{T}{\mathbf{F}}\circ\mathbf{1}\right)^{\overset{2.3}{T}}\right]\right\}\cdot\mathbf{B}$$

(4.21)

$$\overset{1.3}{\overset{T}{(\mathbf{F}\otimes\mathbf{1})}} + \overset{2.3}{\overset{T}{(\overset{T}{\mathbf{F}}\otimes\mathbf{1})}} = \left(F^{r}{}_{R}\, g_{P}{}^{Q} + F^{r}{}_{P}\, g_{R}{}^{Q}\right) \ulcorner \mathbf{G}^{P}\mathbf{G}^{R}\mathbf{g}_{r}\mathbf{G}_{Q} \urcorner$$

$$\mathrm{Div}(\mathbf{F}\widetilde{\mathbf{T}}) = F^{k}{}_{K} G^{KLMN}\left(F^{r}{}_{R}\, g_{P}{}^{Q} + F^{r}{}_{P}\, g_{R}{}^{Q}\right) \ulcorner \mathbf{g}_{k}\mathbf{G}_{L}\mathbf{G}_{M}\mathbf{G}_{N} \urcorner \circ \ulcorner \mathbf{G}^{P}\mathbf{G}^{R}\mathbf{g}_{r}\mathbf{G}_{Q} \urcorner \circ F^{l}{}_{T;S} \ulcorner \mathbf{g}_{l}\mathbf{G}^{T}\mathbf{G}^{S} \urcorner \Big\}_{(2.3)}$$

$$+ t^{KL} g^{MN} \ulcorner \mathbf{G}_{N}\mathbf{G}_{L}\mathbf{G}_{M}\mathbf{G}_{K} \urcorner \circ F^{k}{}_{R;S} \ulcorner \mathbf{g}_{k}\mathbf{G}^{R}\mathbf{G}^{S} \urcorner \Big\}_{(2.3)} =$$

$$= \left(2F^{k}{}_{K} F^{r}{}_{M} G^{KLMN} F^{l}{}_{N;L}\, g_{rl} + t^{KL} F^{k}{}_{K;L}\right) \mathbf{g}_{k}$$

co dowodzi (4.18).

Tensory $\widetilde{\mathbf{T}}, \mathbf{C} \in {}^{S}\mathcal{T}_{2}$ czyli $t: {}^{S}\mathcal{T}_{2} \longrightarrow {}^{S}\mathcal{T}_{2}$. Korzystając z zależności $(3.24)_{1}$, $(3.24)_{3}$ oraz (3.14) dla gradientów funkcji tensorowych określonych na ${}^{S}\mathcal{T}_{2}$, gradient izotropowej funkcji tensorowej $t(\mathbf{C})$ wg $(4.11)_{4}$ przyjmie postać (4.19). ↯

5. MATERIAŁY HIPERSPRĘŻYSTE

5.1. Własności funkcji energii

Klasę materiałów hipersprężystych wyróżnia się z klasy materiałów sprężystych postulując istnienie funkcji energii $\sigma(\mathbf{F})$ takiej, że równanie konstytutywne materiału hipersprężystego przyjmuje postać (3.1). Konieczność wprowadzenia funkcji $\sigma(\mathbf{F})$ wynika z rozważań termodynamicznych, a więc w ramach czysto mechanicznej teorii materiałów, nie można udowodnić istnienia funkcji energii ani wyprowadzić jej własności. Podobnie jak dla funkcji reakcji $\mathfrak{g}(\mathbf{F})$, własności funkcji energii $\sigma(\mathbf{F})$ wprowadzimy do mechanicznej teorii materiału sprężystego jako postulaty, wynikające z postulatów teorii termodynamicznej.

Post. 4: Energia wewnętrzna $\varepsilon = \sigma(\mathbf{F})$ materiału hipersprężystego jest wielkością obiektywną t.zn. funkcja $\sigma(\mathbf{F})$ spełnia zależność

$$\bigwedge_{\mathbf{Q}\in\mathcal{O}} \bigwedge_{\mathbf{F}\in\overset{N}{\mathcal{T}_2}} \sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{Q}\mathbf{F}) \tag{5.1}$$

Post.5: Funkcje energii $\sigma_{\underset{X}{\varkappa_1}}(\mathbf{F})$ oraz $\sigma_{\underset{X}{\varkappa_2}}(\mathbf{F})$ materiału hipersprężystego w cząstce X, wzięte względem dwu różnych konfiguracji porównawczych $\varkappa_1$ i $\varkappa_2$, związane są zależnością (por. /2.6/ oraz Rys. 2)

$$\bigwedge_{\mathbf{F}\in\overset{N}{\mathcal{T}_2}} \sigma_{\underset{X}{\varkappa_2}}(\mathbf{F}) = \sigma_{\underset{X}{\varkappa_1}}(\mathbf{F}\mathbf{P}) \tag{5.2}$$

Postulat 5 jest postulowaniem tego, że energia wewnętrzna $\mathcal{E}$ nie zależy od konfiguracji porównawczej, względem której liczymy deformację.

Tw. 33: Funkcja energii $\sigma(\mathbf{F})$ spełnia zależność

$$\bigwedge_{\mathbf{Q}\in\mathcal{O}} \sigma(\mathbf{1}) = \sigma(\mathbf{Q}) \tag{5.3}$$

D. Wynika to wprost z (5.1), po podstawieniu tam $\mathbf{F}=\mathbf{1}$. ↯

Tw. 34: Funkcję energii $\sigma(\mathbf{F})$ materiału hipersprę - żystego można przedstawić m.in. w następujących dwu posta - ciach zredukowanych

$$\sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{U}) = \varepsilon(\mathbf{C}) \tag{5.4}$$

spełniających tożsamościowo zasadę objektywności (5.1).

D. Zgodnie z $(2.13)_1$ $\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U}$. Niech w (5.1) $\mathbf{Q}\equiv\mathbf{R}^T$. Wtedy $\sigma(\mathbf{F})=\sigma(\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U})=\sigma(\mathbf{U})=\sigma(\mathbf{C}^{1/2})\equiv\varepsilon(\mathbf{C})$ co dowodzi istnienia postaci (5.4). Odwrotnie, załóżmy że (5.4) jest słuszne. Ponieważ jednoznaczny rozkład tensora deformacji $\mathbf{Q}\mathbf{F}=(\mathbf{Q}\mathbf{R})\mathbf{U}$ mamy $\sigma(\mathbf{U})=\sigma(\mathbf{Q}\mathbf{F})=\sigma(\mathbf{F})$, czyli (5.1).

5.2. Zredukowane postaci równania konstytutywnego.

Tw. 35: Równanie konstytutywne materiału hipersprężystego można przedstawić m.in. w następujących dwu postaciach zredukowanych

$$T=\frac{1}{\rho}F\left[\sigma_{,U}(U)\overset{-1}{U}+\overset{-1}{U}\sigma_{,U}(U)\right]F^{T}$$

$$T=2\varrho F\tau_{,C}(C)F^{T} \tag{5.5}$$

spełniających tożsamościowo zasadę obiektywności.

D. Korzystając z przedstawienia $(5.4)_1$ mamy

$$\sigma_{,F}(U)=\sigma_{,U}(U)\circ\left(U_{,C}\circ C_{,F}\right) \tag{5.6}$$

Dla funkcji określonych na ${}^{S}\mathcal{T}_2$ mamy, używając $(3.24)_4$,

$$\sigma_{,U}(U)\equiv\Sigma=\Sigma^{AB}\ulcorner G_A G_B\urcorner\ ,\quad \Sigma=\Sigma^{T}$$

$$U_{,C}\equiv\frac{\partial \overset{1/2}{C}}{\partial C}=\frac{1}{4}\left[\left(\overset{-1}{U}\otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}}+\left(\overset{-1}{U}\otimes 1\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]=\frac{1}{4}\left[\overset{-1}{U}{}^{KM}g^{LN}+\overset{-1}{U}{}^{KN}g^{LN}\right]G_K G_L G_M G_N$$

$$U_{,C}\circ C_{,F}=\frac{1}{4}\left[\left(\overset{-1}{U}\otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}}+\left(\overset{-1}{U}\otimes 1\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]\circ\left[\left(F\otimes 1\right)^{\overset{1.3}{T}}+\left(F^{T}\otimes 1\right)^{\overset{2.3}{T}}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\overset{-1}{U}{}^{KM}g^{LN}+\overset{-1}{U}{}^{KN}g^{LM}\right]\left[F^{r}_{\ R}\,g^{Q}_{\ P}+F^{r}_{\ P}\,g^{Q}_{\ R}\right]g^{P}_{\ M}\,g^{R}_{\ N}\ulcorner G_K G_L g_r G_Q\urcorner=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\overset{-1}{U}{}^{KQ}F^{rL}+\overset{-1}{U}{}^{KR}F^{r}_{\ R}\,g^{LQ}\right]\ulcorner G_K\, G_L\, G_r\, G_Q\urcorner$$

$$\sigma_{,F}(U)=\frac{1}{2}\Sigma^{AB}\left(\overset{-1}{U}{}^{KQ}F^{rL}+\overset{-1}{U}{}^{KR}F^{r}_{\ R}\,g^{LQ}\right)g_{AK}\,g_{BL}\ulcorner g_r\, G_Q\urcorner=$$

$$=\frac{1}{2}F^{r}_{\ R}\left(\Sigma^{R}_{\ K}\overset{-1}{U}{}^{K}_{\ Q}+\overset{-1}{U}{}^{R}_{\ K}\Sigma^{K}_{\ Q}\right)\ulcorner g_r G^{Q}\urcorner\equiv\frac{1}{2}F\left[\sigma_{,U}(U)\overset{-1}{U}+\overset{-1}{U}\sigma_{,U}(U)\right]$$

co dowodzi $(5.5)_1$.

$$\tau_{,F}(\mathbb{C})=\tau_{,c}(\mathbb{C})\circ\mathbb{C}_{,F}=\Theta^{AB}\left(F^r{}_R g_P{}^Q+F^r{}_P g_R{}^Q\right)g_A{}^P g_B{}^R\ulcorner g_r G_Q\urcorner=$$
$$=2F^r{}_P\Theta^P{}_Q\ulcorner g_r G^Q\urcorner=2F\tau_{,c}(\mathbb{C}).$$

co dowodzi $(5.5)_2$. Z

Zależności (5.5) są oczywiście zawarte w postaciach zredukowanych (2.12) materiału sprężystego, przy czym mamy tu

$$\begin{aligned}&g(\mathbb{U})=\varrho\frac{1}{2}\left[\mathbb{U}\sigma_{,\mathbb{U}}(\mathbb{U})+\sigma_{,\mathbb{U}}(\mathbb{U})\mathbb{U}\right]\\&\mathfrak{f}(\mathbb{C})=2\varrho\,\mathbb{C}^{1/2}\tau_{,c}(\mathbb{C})\,\mathbb{C}^{1/2}\end{aligned}\tag{5.7}$$

co wynika z rozłożenia $\mathbb{F}=\mathbb{R}\mathbb{U}$ w (5.5) i porównaniu z (2.12).

Tw. 36 : Używając tensorów naprężenia Pioli-Kirchhoffa, równanie konstytutywne materiału hipersprężystego można przedstawić m.in. w następujących dwu postaciach zredukowanych

$$\begin{aligned}&T_{\varkappa}=2\varrho_{\varkappa}F\tau_{,c}(\mathbb{C})\\&\widetilde{T}=2\varrho_{\varkappa}\tau_{,c}(\mathbb{C})\end{aligned}\tag{5.8}$$

spełniających tożsamościowo zasadę obiektywności.

D. : Zgodnie z (2.7) i $(5.5)_2$ mamy

$$T_{\varkappa}=\mathcal{J}T(\overset{-1}{F})^T=\mathcal{J}\cdot 2\varrho F\tau_{,c}(\mathbb{C})F^T(\overset{-1}{F})^T=2\varrho_{\varkappa}F\tau_{,c}(\mathbb{C})$$

$$\widetilde{T}=\overset{-1}{F}T_{\varkappa}=2\varrho_{\varkappa}\overset{-1}{F}F\tau_{,c}(\mathbb{C})=2\varrho_{\varkappa}\tau_{,c}(\mathbb{C})$$

co dowodzi (5.8) .

5.3. Grupy izotropii

Zdefiniowana zależnością (3.6) grupa izotropii materiału sprężystego $g_{\varkappa}$ wyróżniała wszystkie te konfiguracje, które są nierozróżnialne od konfiguracji $\varkappa$ w eksperymencie polegającym na pomiarze naprężeń. Dla materiału hipersprężystego funkcją podstawową jest funkcja energii $\sigma_{\varkappa}$, a nie funkcja reakcji $\mathfrak{f}_{\varkappa}$, musimy więc grupy izotropii wyrazić poprzez funkcję energii $\sigma_{\varkappa}$.

Def. 17 : Zbiór

$$g_{\varkappa}^{T} \equiv \left\{ H \in \mathcal{U} : \bigwedge_{F \in {}^{N}\mathcal{T}_2} \sigma_{\varkappa}(F) = \sigma_{\varkappa}(FH) + \sigma_{\varkappa}(\mathbb{1}) - \sigma_{\varkappa}(H) \right\} \tag{5.9}$$

nazywamy grupą izotropii naprężeń w cząstce X.

Tw. 37: Grupa izotropii naprężeń pokrywa się z grupą izotropii materiału, t.zn.

$$g_{\varkappa}^{T} = g_{\varkappa} \tag{5.10}$$

D.: Niech $H \in g_{\varkappa}$. Korzystając z (3.6) oraz (3.1) widać, że H spełnia równanie różniczkowe w $\mathcal{T}_2$

$$\sigma_{,F}(F) = \sigma_{,F}(FH)\,H^{T} \tag{5.11}$$

lub wyraźniej pisząc

$$\left.\frac{\partial \sigma(K)}{\partial K}\right|_{K=F} = \left.\frac{\partial \sigma(K)}{\partial K}\right|_{K=FH} H^{T}$$

Rozwiązanie ogólne tego równania w $\mathcal{T}_2$ ma postać [2]

$$\sigma(F) = \sigma(FH) + \psi(H)$$

gdzie ψ - dowolna funkcja H, którą tu można wyznaczyć z warunku brzegowego przy $F=1$, mianowicie

$$\psi(H)=\sigma(1)-\sigma(H)$$

skąd wynika, że H spełnia (5.9), czyli $H\in g_x^T$. Odwrotnie, niech $H\in g_x^T$. Biorąc gradient $\frac{\partial}{\partial F}$ z obu stron (5.9) mamy

$$\frac{\partial\sigma(F)}{\partial F}=\frac{\partial}{\partial F}\sigma(FH)=\left.\frac{\partial\sigma(K)}{\partial K}\right|_{K=FH}\circ\frac{\partial}{\partial F}(FH)$$

ale

$$\frac{\partial}{\partial F}(FH)\cdot B=\left.\frac{d}{d\lambda}\left\{(F+\lambda B)H\right\}\right|_{\lambda=0}=BH=\left(H\otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}}\cdot B$$

$$\left.\frac{\partial\sigma(K)}{\partial K}\right|_{K=FH}\equiv S$$

$$\frac{\partial\sigma(F)}{\partial F}=S^{mn}\left\lceil g_m g_n\right\rceil\circ H^{ij}g^{ki}\left\lceil g_l g_j g_k g_i\right\rceil=S^{mn}H^{ij}g^{kl}g_{ml}g_{nj}\left\lceil g_k g_i\right\rceil=$$

$$=S^k{}_jH^{ij}\left\lceil g_k g_i\right\rceil=SH^T$$

czyli H spełnia (5.11), a więc $H\in g_x$. ↯

Def. 18: Zbiór

$$g_{x}^{\varepsilon} \equiv \left\{ H \in \mathcal{U} : \sigma_{x}(F) = \sigma_{x}(FH) \right\} \qquad (5.12)$$

nazywamy grupą izotropii energii w cząstce X .

Jest to też pewien zbiór wyróżniający wszystkie te konfiguracje, które są nierozróżnialne od konfiguracji x w eksperymencie polegającym na pomiarze energii.

Tw. 37: Zbiór g_{x}^{ε} jest podgrupą grupy unimodularnej

$$g_{x}^{\varepsilon} \subset \mathcal{U} \qquad (5.13)$$

D.: Udowodnijmy, że g_{x}^{ε} jest grupą, co łatwo zauważyć bo

a/ $1 \in g_{x}^{\varepsilon}$

b/ Dla tensora deformacji $F\overset{-1}{H}$ zachodzi

$\sigma(F\overset{-1}{H}) = \sigma(H)$, czyli porównując z (5.12)

$H \in g_{x}^{\varepsilon} \Longrightarrow \overset{-1}{H} \in g_{x}^{\varepsilon}$

c/ $\sigma(F\overset{1}{H}\overset{2}{H}) = \sigma(F\overset{1}{H}) = \sigma(F)$ czyli

$$(\overset{1}{H} \in g_{x}^{\varepsilon}) \wedge (\overset{2}{H} \in g_{x}^{\varepsilon}) \Longrightarrow \overset{1}{H}\overset{2}{H} \in g_{x}^{\varepsilon}$$

a więc g_{x}^{ε} jest grupą, i z (5.12) mamy (5.13) . ↯

Tw. 38: Przy zmianie konfiguracji grupa g_{x}^{ε} transformuje się zgodnie z prawem (Rys. 2).

$$g_{x_2}^{\varepsilon} = P g_{x_1}^{\varepsilon} \overset{-1}{P} \qquad (5.14)$$

D.: Niech $H \in g^{\varepsilon}_{x_1}$. Pisząc (5.12) dla tensora deformacji FP otrzymamy

$$\bigwedge_{F \in {}^N\mathcal{T}_2} \sigma_{x_1}(FP) = \sigma_{x_1}(FPH)$$

Transformując σ_{x_1} do σ_{x_2} zgodnie z (5.2) mamy

$$\bigwedge_{F \in {}^N\mathcal{T}_2} \sigma_{x_2}(F) = \sigma_{x_2}(FPHP^{-1})$$

a to znaczy, że $PHP^{-1} \in g^{\varepsilon}_{x_2}$

Tw. 39 : Jeżeli grupy g^{T}_{x} i g^{ε}_{x} pokrywają się w pewnej konfiguracji x, to pokrywają się one również w dowolnej konfiguracji, t.zn.

$$\left(\bigvee_{x_1(X)} g^{T}_{x_1} = g^{\varepsilon}_{x_1}\right) \Longrightarrow \left(\bigwedge_{x(X)} g^{T}_{x} = g^{\varepsilon}_{x}\right) \qquad (5.15)$$

D. Wynika to z identyczności transformacji (3.10) i (5.14) obu grup izotropii. ↯

Tw. 40: Dla materiału hipersprężystego

$$g^{\varepsilon}_{x} \subset g^{T}_{x} \qquad (5.16)$$

D.:Niech $H \in g^{\varepsilon}_{x}$, wtedy zachodzi (5.12) dla każdego F, w szczególności dla $F = 1$, czyli dla $H \in g^{\varepsilon}_{x}$ zachodzi $\sigma(1) = \sigma(H)$ i porównując z (5.9) widać, że $H \in g^{T}_{x}$. ↯

Tw. 41 : Dla materiału hipersprężystego

$$g_{\varkappa}^{T} \cap \mathcal{O} = g_{\varkappa}^{\varepsilon} \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}_{\sigma} \qquad (5.17)$$

D.: Niech $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$ oraz $\mathbf{Q} \in g_{\varkappa}^{T}$. Wtedy wg (5.9) i (5.3) mamy

$$\bigwedge_{\mathbf{F} \in {}^{N}\mathcal{T}_2} \sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{F}\mathbf{Q}) + \sigma(\mathbf{1}) - \sigma(\mathbf{Q}) = \sigma(\mathbf{F}\mathbf{Q})$$

czyli $\mathbf{Q} \in g_{\varkappa}^{\varepsilon}$ i pisząc powyższą zależność przy $\mathbf{Q}^{T} \in g_{\varkappa}^{\varepsilon}$ dla gradientu deformacji $\mathbf{Q}\mathbf{F} \in {}^{N}\mathcal{T}_2$ i korzystając z zasady objektywności (5.1) mamy

$$\bigwedge_{\mathbf{F} \in {}^{N}\mathcal{T}_2} \sigma(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^{T}) = \sigma(\mathbf{F})$$

czyli rzeczywiście $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_{\sigma}$.

Odwrotnie, niech tensor ortogonalny $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_{\sigma}$, t.zn.

$$\bigwedge_{\mathbf{F} \in {}^{N}\mathcal{T}_2} \sigma(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^{T}) = \sigma(\mathbf{F})$$

Pisząc zasadę obiektywności (5.1) dla gradientu deformacji $\mathbf{F}\mathbf{Q}^{T} \in {}^{N}\mathcal{T}_2$ i porównując z powyższym otrzymamy

$$\bigwedge_{\mathbf{F} \in {}^{N}\mathcal{T}_2} \sigma(\mathbf{F}\mathbf{Q}^{T}) = \sigma(\mathbf{F})$$

a to znaczy, że $\mathbf{Q} \in g_{\varkappa}^{\varepsilon} \cap \mathcal{O}$ i wg (5.3) $\mathbf{Q} \in g_{\varkappa}^{T} \cap \mathcal{O}$.

Tw. 42: Dla hiperspreżystego ciała stałego

$$g_{\varkappa}^{T} = g_{\varkappa}^{\varepsilon} = \mathcal{O}_{\sigma} \qquad (5.18).$$

D.: Z definicji ciała stałego $g_{\varkappa}^{T} \subset \mathcal{O}$ i z (5.16), (5.17) wynika (5.18). ↯

Można również udowodnić [2], że dla płynów $g_{\varkappa}^{T} = g_{\varkappa}^{\varepsilon}$ co wskazuje, że przypadek $g_{\varkappa}^{T} \neq g_{\varkappa}^{\varepsilon}$ może zdarzyć się tylko dla hipersprężystych płynnych kryształów, gdyż

$$g_{\varkappa}^{T} \neq g_{\varkappa}^{\varepsilon} \Longleftrightarrow \bigvee_{H \in g_{\varkappa}^{T}} \sigma(H) \neq (1)$$

zgodnie z (5.3) taka deformacja nie może być ortogonalna. Może więc dla hipersprężystych płynnych kryształów zaistnieć taka sytuacja, że istnieje deformacja nierozróżnialna w eksperymencie polegającym na pomiarze naprężeń, lecz po dokonaniu której energia wewnętrzna zmieni się.

W dalszym ciągu zajmiemy się wyłącznie ciałami stałymi.

5.4. Równania konstytutywne izotropowego hipersprężystego ciała stałego.

Definicja materiału izotropowego (4.1) określona została w terminach funkcji reakcji materiału g. Dla izotropowego materiału hipersprężystego należy określić izotropię w terminach funkcji energii.

Tw. 43 : Materiał hipersprężysty jest izotropowym w cząstce X wtedy i tylko wtedy gdy

$$\bigvee_{x(X)} g_x^{\varepsilon} \supset \mathcal{O} \qquad (5.19)$$

D.: Zgodnie z (5.17) oraz (4.1), (5.9) i (5.10) dla izotropii $g_x^{T} \supset \mathcal{O} \Longrightarrow g_x^{\varepsilon} \supset \mathcal{O}$, gdyż części ortogonalne tych obu grup muszą być takie same.

Tw. 44: Funkcja energii izotropowego hipersprężystego ciała stałego, wzięta względem stanu nieznie̜kształconego, jest niezmiennikiem ortogonalnym, t.zn.

$$\bigwedge_{\mathbf{Q} \in \mathcal{O}} \bigwedge_{\mathbf{F} \in {}^{N}\mathcal{T}} \sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) \qquad (5.20)$$

D.: Warunek objektywności (5.1) dla gradientu deformacji $\mathbf{F}\mathbf{Q}^T$ ma postać

$$\bigwedge_{\mathbf{Q} \in \mathcal{O}} \bigwedge_{\mathbf{F} \in {}^{N}\mathcal{T}_2} \sigma(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = \sigma(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T)$$

a warunek izotropii (5.19) , pamiętając, że $\mathbf{Q} \in g_x^{\varepsilon} \Longrightarrow \mathbf{Q}^T \in g_x^{\varepsilon}$, zgodnie z (5.12), przyjmie postać

$$\bigwedge_{\mathbf{Q} \in \mathcal{O}} \bigwedge_{\mathbf{F} \in {}^{N}\mathcal{T}_2} \sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T)$$

co porównując mamy wynik (5.20). ↯

Tw. 45: Funkcja energii izotropowego hipersprężystego ciała stałego wzięta względem stanu nieznieksztalconego jako konfiguracji porównawczej może być przedstawiona m.in w następujących zredukowanych postaciach

$$\sigma(\mathbb{F})=\sigma(\mathbb{U})=\sigma(\mathbb{V})=\tau(\mathbb{B})=\tau(\mathbb{C}) \qquad (5.21)$$

gdzie σ i τ są niezmiennikami ortogonalnymi swych argumentów.

D.: Ze zredukowanej postaci (5.4) wynikają postacie $(5.21)_2$ oraz $(5.21)_5$. Z (5.20) oraz (3.18) mamy

$$\sigma(\mathbb{U})=\sigma(I_{\mathbb{U}}, II_{\mathbb{U}}, III_{\mathbb{U}})=\sigma(I_{\mathbb{V}}, II_{\mathbb{V}}, III_{\mathbb{V}})\equiv\sigma(\mathbb{V})$$

bo przecież $I_{\mathbb{U}}=I_{\mathbb{V}}$; $II_{\mathbb{U}}=II_{\mathbb{V}}$; $III_{\mathbb{U}}=III_{\mathbb{V}}$.

Podobnie postać $(5.21)_4$ wynika z $(5.21)_5$. Pokażmy, że $\tau(\mathbb{C})\equiv\sigma(\mathbb{C}^{1/2})$ jest niezmiennikiem ortogonalnym, korzystając z niezmiennika σ.

$$\sigma(\mathbb{C}^{1/2})=\sigma(\mathbb{Q}\mathbb{C}^{1/2}\mathbb{Q}^T)=\tau(\mathbb{C})=\tau(\mathbb{Q}\mathbb{C}^{1/2}\mathbb{Q}^T\mathbb{Q}\mathbb{C}^{1/2}\mathbb{Q}^T)=\tau(\mathbb{Q}\mathbb{C}\mathbb{Q}^T)$$

skąd τ - niezmiennik ortogonalny. ↯

Tw. 46: Równanie konstytutywne izotropowego hipersprężys - tego ciała stałego może być przedstawione m.in. w następujących trzech postaciach zredukowanych

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \varrho\sigma_{,\mathbb{V}}(\mathbb{V})\mathbb{V} \\ \mathbb{T} &= 2\varrho\,\tau_{,\mathbb{B}}(\mathbb{B})\mathbb{B} \qquad (5.22) \\ \tilde{\mathbb{T}} &= 2\varrho_{\varkappa}\,\tau_{,\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

gdzie funkcje energii σ i τ, wzięte względem stanu niezniekształconego jako konfiguracji porównawczej, są niezmiennikami ortogonalnymi swych argumentów.

D. Podstawiając $(5.21)_3$ do $(3.1)_2$ mamy

$$T = \varrho\left[\frac{\partial}{\partial F}\sigma(V)\right] F^T .$$

Ale

$$\frac{\partial\sigma(V)}{\partial F} \equiv \frac{\partial}{\partial F}\left(\overset{1/2}{F F^T}\right) = \frac{\partial\sigma(V)}{\partial V}\circ\left(\frac{\partial \overset{1/2}{B}}{\partial B}\circ\frac{\partial(F F^T)}{\partial F}\right)$$

Korzystając z (4.17) oraz $(3.24)_4$ mamy

$$\frac{\partial\sigma(V)}{\partial V} \equiv \Sigma = \Sigma^{kl}\, \ulcorner g_k g_l \urcorner \quad ; \quad \Sigma = \Sigma^T$$

$$\frac{\partial \overset{1/2}{B}}{\partial B}\circ\frac{\partial(F F^T)}{\partial F} = \frac{1}{4}\left[\left(\overset{-1}{V}\otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\overset{-1}{V}\otimes 1\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]\circ\left[\left(F^T\otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(F\otimes 1\right)^{\overset{2.4}{T}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\overset{-1}{V}{}^i{}_p g^k{}_q + \overset{-1}{V}{}^i{}_q g^k{}_p\right]\left[F^r{}_K g^{ml} + F^l{}_K g^{mr}\right] g^p_l\, g^q_r\, \ulcorner g_i g_k g_m G^K \urcorner =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overset{-1}{V}{}^{im} F^r{}_K g^k{}_r + \overset{-1}{V}{}^i{}_r F^r{}_K g^{km}\right)\ulcorner g_i g_k g_m G^K \urcorner$$

$$\frac{\partial\sigma(V)}{\partial V}\circ\frac{\partial V}{\partial F} = \frac{1}{2}\Sigma^{jl}\left(\overset{-1}{V}{}^{im}F^r{}_K g^k{}_r + \overset{-1}{V}{}^i{}_r F^r{}_K g^{km}\right) g_{ji}\, g_{lk}\, \ulcorner g_m G^K \urcorner \overset{(5.23)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overset{-1}{V}{}^{im}\Sigma_{ir} + \Sigma_i{}^m \overset{-1}{V}{}^i{}_r\right) F^r{}_K\, \ulcorner g_r G^K \urcorner \equiv \frac{1}{2}\left(\overset{-1}{V}\sigma_{,V}(V) + \sigma_{,V}(V)\overset{-1}{V}\right) F$$

Dotychczas skorzystaliśmy z faktu, że $\sigma(F)$ jest postaci $\sigma(V)$. Wykorzystajmy, że $\sigma(V)$ jest niezmiennikiem ortogonalnym

$$\overset{-1}{\mathbb{V}}\frac{\partial\sigma}{\partial\mathbb{V}}=\overset{-1}{\mathbb{V}}\left\{\frac{\partial\sigma}{\partial I_{\mathbb{V}}}\mathbb{1}+\frac{\partial\sigma}{\partial II_{\mathbb{V}}}\left(I_{\mathbb{V}}\mathbb{1}-\mathbb{V}\right)+\frac{\partial\sigma}{\partial III_{\mathbb{V}}}III_{\mathbb{V}}\overset{-1}{\mathbb{V}}\right\}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\mathbb{V}}\overset{-1}{\mathbb{V}}=\left\{\frac{\partial\sigma}{\partial I_{\mathbb{V}}}\mathbb{1}+\frac{\partial\sigma}{\partial II_{\mathbb{V}}}\left(I_{\mathbb{V}}\mathbb{1}-\mathbb{V}\right)+\frac{\partial\sigma}{\partial III_{\mathbb{V}}}III_{\mathbb{V}}\overset{-1}{\mathbb{V}}\right\}\overset{-1}{\mathbb{V}}$$

skąd wynika, że

$$\overset{-1}{\mathbb{V}}\sigma_{,\mathbb{V}}(\mathbb{V})=\sigma_{,\mathbb{V}}(\mathbb{V})\overset{-1}{\mathbb{V}}$$

co podstawiając do (5.23) mamy

$$\frac{\partial\sigma(\mathbb{V})}{\partial\mathbb{V}}=\sigma_{,\mathbb{V}}(\mathbb{V})\overset{-1}{\mathbb{V}}\mathbb{F}$$

skąd

$$\mathbb{T}=\varrho\sigma_{,\mathbb{V}}(\mathbb{V})\overset{-1}{\mathbb{V}}\mathbb{F}\mathbb{F}^{T}=\varrho\sigma_{,\mathbb{V}}(\mathbb{V})\overset{-1}{\mathbb{V}}\overset{2}{\mathbb{V}}=\varrho\sigma_{,\mathbb{V}}(\mathbb{V})\mathbb{V}$$

co dowodzi $(5.22)_1$.

By otrzymać $(5.22)_2$ podstawmy $(5.21)_4$ do $(3.1)_2$

$$\frac{\partial\tau(\mathbb{B})}{\partial\mathbb{F}}\equiv\frac{\partial\tau(\mathbb{F}\mathbb{F}^{T})}{\partial\mathbb{F}}=\frac{\partial\tau(\mathbb{B})}{\partial\mathbb{B}}\circ\frac{\partial(\mathbb{F}\mathbb{F}^{T})}{\partial\mathbb{F}}=\mathbb{H}\circ\left[\overset{1.4}{\underset{T}{\left(\mathbb{F}^{T}\otimes\mathbb{1}\right)}}+\overset{2.4}{\underset{T}{\left(\mathbb{F}\otimes\mathbb{1}\right)}}\right]=$$

$$=\mathbb{H}_{kr}\left(F^{r}{}_{K}g^{mk}+F^{k}{}_{K}g^{mr}\right)\ulcorner\mathbf{g}_{m}\mathbf{G}^{K}\urcorner=\left(\mathbb{H}^{m}{}_{r}F^{r}{}_{K}+\mathbb{H}_{k}{}^{m}F^{k}{}_{K}\right)\ulcorner\mathbf{g}_{m}\mathbf{G}^{K}\urcorner=$$

$$=2\tau_{,\mathbb{B}}(\mathbb{B})\mathbb{F}$$

co podstawiając do $(3.1)_2$ mamy

$$\mathbb{T}=\varrho\cdot2\tau_{,\mathbb{B}}(\mathbb{B})\mathbb{F}\mathbb{F}^{T}\equiv2\varrho\tau_{,\mathbb{B}}(\mathbb{B})\mathbb{B}$$ – co dowodzi $(5.22)_2$.

Postać $(5.22)_3$ jest oczywista na podstawie $(5.8)_2$ oraz

oraz $(5.21)_5$.

Tw. 47: Współczynniki reakcji f_r, g_r oraz t_r izotropowego hipersprężystego ciała stałego związane są z funkcją energii następującymi zależnościami

$$f_0 = 2\varrho\, III_B \frac{\partial \varepsilon}{\partial III_B} \qquad g_0 = 2\varrho\left(II_B \frac{\partial \varepsilon}{\partial II_B} + III_B \frac{\partial \varepsilon}{\partial III_B}\right)$$

$$f_1 = 2\varrho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial I_B} + I_B \frac{\partial \varepsilon}{\partial II_B}\right) \qquad g_1 = 2\varrho \frac{\partial \varepsilon}{\partial I_B} \tag{5.24}$$

$$f_2 = -2\varrho \frac{\partial \varepsilon}{\partial II_B} \qquad g_{-1} = -2\varrho\, III_B \frac{\partial \varepsilon}{\partial II_B}$$

$$t_0 = 2\varrho_\varkappa\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial I_C} + I_C \frac{\partial \varepsilon}{\partial II_C}\right)$$

$$t_1 = -2\varrho_\varkappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial II_C} \tag{5.25}$$

$$t_{-1} = 2\varrho_\varkappa\, III_C \frac{\partial \varepsilon}{\partial III_C}$$

D. Zgodnie z $(5.22)_2$ mamy

$$T = 2\varrho\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial I_B}\mathbf{1} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial II_B}\left(I_B \mathbf{1} - B\right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial III_B} III_B B^{-1}\right] B =$$

$$= 2\varrho\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial III_B} III_B \mathbf{1} + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial I_B} + I_B \frac{\partial \varepsilon}{\partial II_B}\right) B - \frac{\partial \varepsilon}{\partial II_B} B^2\right]$$

co porównując z (4.8) otrzymamy $(5.24)_1$.

Stosując zależności $(4.9)_1$ otrzymamy $(5.24)_2$.
Zgodnie z $(5.22)_3$ mamy

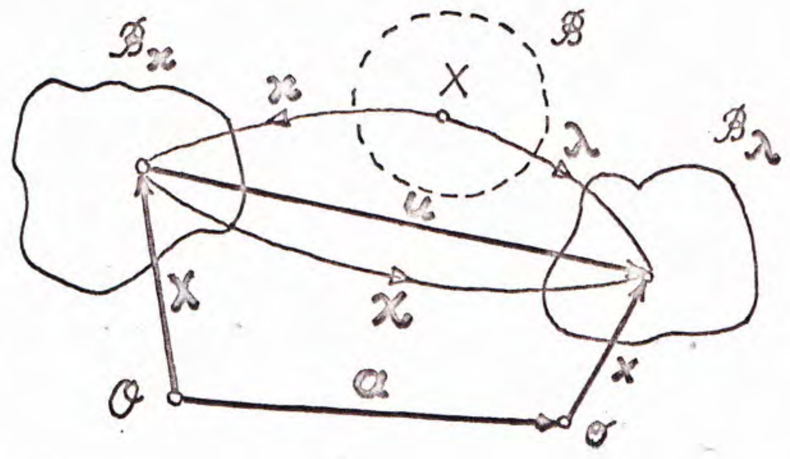
$$\tilde{T}=2\rho_{x}\left[\frac{\partial\tau}{\partial I_c}1+\frac{\partial\tau}{\partial II_c}\left(I_c 1-C\right)-\frac{\partial\tau}{\partial III_c}III_c \overset{-1}{C}\right]$$

co porównując z $(4.11)_4$ otrzymamy (5.25). ↯

6. TEORIA MAŁEGO GRADIENTU PRZEMIESZCZENIA

6.1. Miary odkształcenia

W obliczeniach inżynierskich często stosuje się różne teorie przybliżone oparte na założeniach upraszczających o małości pewnych wielkości. Przedstawimy tu często stosowaną teorię, w której za wielkość małą przyjęto gradient wektorowego pola przemieszczeń.



Rys.5.

Przypomnijmy tutaj niektóre podstawowe definicje.

Def. 19: Pola wektorowe

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}(\mathbf{X},t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t) - \mathbf{X} + \mathbf{a} = U^K \mathbf{G}_K$$

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{x} - \overset{-1}{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{a} = u^k \mathbf{g}_k$$

nazywamy wektorami przemieszczenia odpowiednio w opisie Lagrange'a lub Eulera.

Def. 20: Pola tensorowe

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{X},t) \equiv \operatorname{Grad} \mathbf{U}(\mathbf{X},t) = U^K{}_{,L} \ulcorner \mathbf{G}_K \mathbf{G}^L \urcorner$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{x},t) \equiv \operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = u^k{}_{,l} \ulcorner \mathbf{g}_k \mathbf{g}^l \urcorner \qquad (6.1)$$

nazywamy gradientami wektorów przemieszczenia odpowiednio w opisie Lagrange´a i Eulera.

Def. 21 : Pola tensorowe

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{X},t)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}+\mathbf{H}^T+\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)$$
$$\mathbf{e}=\mathbf{e}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{h}+\mathbf{h}^T-\mathbf{h}^T\mathbf{h}\right) \tag{6.2}$$

nazywamy tensorami odkształcenia Greena- St.Venanta odpowiednio w opisie Lagrange´a i Eulera.

Tensory $\mathbf{H}$ i $\mathbf{h}$ mogą również stanowić podstawową miarę deformacji, gdyż związane sa z tensorem $\mathbf{F}$ zależ - nościami

$$\mathbf{F}=\mathbf{1}+\mathbf{H} \quad ; \quad \mathbf{F}^{-1}=\mathbf{1}-\mathbf{h} \tag{6.3}$$

Natomiast tensory $\mathbf{E}$ i $\mathbf{e}$ określają stan odkształcenia ciała tylko z dokładnością do obrotu i związane są z tensorami odkształcenia Cauchy - Greena zależnościami

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}-\mathbf{1}\right) \quad ; \quad \mathbf{e}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{1}-\mathbf{B}^{-1}\right) \tag{6.4}$$

Def. 22: Pola tensorowe

$$\tilde{\mathbf{E}}\equiv\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}+\mathbf{H}^T\right)$$
$$\tilde{\mathbf{R}}\equiv\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}-\mathbf{H}^T\right)$$

nazywamy odpowiednio tensorami małych odkształceń i małych obrotów w opisie Lagrange´a.

Dalej będziemy korzystali wyłącznie z opisu Lagrange´a.

Należy zauważyć, że tensory $\mathbf{H}$ i $\mathbf{E}$ w konfiguracji porównawczej $\boldsymbol{\varkappa}$ przyjmują wartość $\mathbf{0}$ i właśnie ten fakt czyni je szczególnie użytecznymi przy rozważaniach prowadzonych w opisie Lagrange'a.

<u>Tw. 48</u>: Niezmienniki główne tensorów $\mathbf{C}$ i $\mathbf{E}$ związane następującymi zależnościami

$$I_{\mathbf{C}} = 2I_{\mathbf{E}} + 3 \qquad 2I_{\mathbf{E}} = I_{\mathbf{C}} - 3$$

$$\underline{II}_{\mathbf{C}} = 4\underline{II}_{\mathbf{E}} + 4I_{\mathbf{E}} + 3 \qquad 4\underline{II}_{\mathbf{E}} = \underline{II}_{\mathbf{C}} - 2I_{\mathbf{C}} + 3$$

$$\underline{III}_{\mathbf{C}} = 8\underline{III}_{\mathbf{E}} + 4\underline{II}_{\mathbf{E}} + 2I_{\mathbf{E}} + 1 \qquad 8\underline{III}_{\mathbf{E}} = \underline{III}_{\mathbf{C}} - \underline{II}_{\mathbf{C}} + I_{\mathbf{C}} - 1$$

<u>D.</u>:

$$I_{\mathbf{C}} = tr\,\mathbf{C} = tr\left(2\mathbf{E}+\mathbf{1}\right) = 2tr\,\mathbf{E} + tr\,\mathbf{1} = 2I_{\mathbf{E}} + 3$$

$$\underline{II}_{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}\left[\left(tr\,\mathbf{C}\right)^2 - tr\,\mathbf{C}^2\right] = \frac{1}{2}\left[\left(2I_{\mathbf{E}}+3\right)^2 - tr\left(4\mathbf{E}^2+4\mathbf{E}+\mathbf{1}\right)\right] = 4\underline{II}_{\mathbf{E}} + 4I_{\mathbf{E}} +$$

$$\underline{III}_{\mathbf{C}} = \frac{1}{6}\left[\left(tr\,\mathbf{C}\right)^3 - 3tr\,\mathbf{C}\,tr\,\mathbf{C}^2 + 2tr\,\mathbf{C}^3\right] = \frac{1}{6}\left[\left(2I_{\mathbf{E}}+3\right)^3 - 3\left(2I_{\mathbf{E}}+3\right)\left(4I_{\mathbf{E}^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 4I_{\mathbf{E}} + 3\right) + 2\left(8I_{\mathbf{E}^3} + 12I_{\mathbf{E}^2} + 6I_{\mathbf{E}} + 3\right)\right] = 8\underline{III}_{\mathbf{E}} + 4\underline{II}_{\mathbf{E}} + 2I_{\mathbf{E}} + 1$$

co dowodzi $(6.5)_1$. Zależności $(6.5.)_2$ otrzymamy rozwiązując układ $(6.5)_1$.

6.2. Rozwinięcia podstawowych wielkości.

Dotychczas w poprzednich rozdziałach występowały funkcje zmiennej F która była przyjęta za podstawową miarę deformacji. Wszystkie te funkcje mogą teraz być przetransformowane używając H jako zmiennej niezależnej. Zakładając analityczność wszystkich funkcji tensorowych względem H, można rozwijać je w szeregi tensorowe, zachowując człony 1-go, 2-go ..... rzędu względem H. Otrzymamy w ten sposób przybliżone teorie małego gradientu przemieszczenia.

Procedurę tę przedstawimy tutaj w nieco innej postaci. Fakt, że H jest małe można wprowadzić w sposób jawny mnożąc gradient przemieszczenia przez mały parametr $\varepsilon>0$ i traktując wszystkie występujące funkcje $f(H)$ jako funkcje analityczne parametru ε, czyli $\hat{f}(\varepsilon)$. Rozwijając te funkcje w szeregi Madaurina w otoczeniu $\varepsilon=0$ otrzymamy analogiczne do rozwinięć tensorowych wyniki.

Zależność wyjściowa $(6.3)_1$ przyjmie więc postać

$$F=\hat{F}(\varepsilon)=1+\varepsilon H \tag{6.6}$$

Tw. 48: Słuszne są następujące rozwinięcia

$$\begin{aligned}
C&=1+\varepsilon\, 2\tilde{E}+\varepsilon^2 H^T H\\
C^{-1}&=1+\varepsilon\left(-2\tilde{E}\right)+\varepsilon^2\left(4\tilde{E}^2-H^T H\right)+O\left(\varepsilon^3\right)\\
U&=1+\varepsilon\tilde{E}+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}H^T H-\frac{1}{2}\tilde{E}^2\right)+O\left(\varepsilon^3\right)\\
E&=\varepsilon\tilde{E}+\varepsilon^3\cdot\frac{1}{2}H^T H\\
R&=1+\varepsilon\tilde{R}+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}H^T H^T-\frac{1}{2}\tilde{E}^2\right)+O\left(\varepsilon^3\right)\\
R&=1+\varepsilon\left(-\tilde{R}\right)+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}HH-\frac{1}{2}\tilde{E}^2\right)+O\left(\varepsilon^3\right)
\end{aligned}\tag{6.7}$$

D. Zależności powyższe uzyskamy przez wymnażanie i dobieranie współczynników przy ε^n.

$$\mathbf{C}=\left(\mathbf{1}+\varepsilon \mathbf{H}^T\right)\left(\mathbf{1}+\varepsilon \mathbf{H}\right)=\mathbf{1}+\varepsilon\left(\mathbf{H}+\mathbf{H}^T\right)+\varepsilon^2\mathbf{H}^T\mathbf{H}$$

co dowodzi $(6.7)_1$. Niech $\overset{-1}{\mathbf{C}}=\mathbf{1}+\varepsilon\left(-2\widetilde{\mathbf{E}}\right)+\varepsilon^2 f(\mathbf{H})+\dots$

$$\mathbf{C}\overset{-1}{\mathbf{C}}=\mathbf{1}=\left(\mathbf{1}+\varepsilon 2\widetilde{\mathbf{E}}+\varepsilon^2\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)\left(\mathbf{1}-\varepsilon 2\widetilde{\mathbf{E}}+\varepsilon^2 f(\mathbf{H})+\dots\right)=$$

$$=\mathbf{1}+\varepsilon^2\left[\mathbf{H}^T\mathbf{H}-4\widetilde{\mathbf{E}}^2+f(\mathbf{H})\right]$$

czyli $f(\mathbf{H})=4\widetilde{\mathbf{E}}^2-\mathbf{H}^T\mathbf{H}$, co dowodzi $(6.7)_2$.

Niech $\mathbf{U}=\mathbf{1}+\varepsilon\widetilde{\mathbf{E}}+\varepsilon^2 g(\mathbf{H})+\dots$

$$\mathbf{C}=\overset{2}{\mathbf{U}}=\mathbf{1}+\varepsilon\cdot 2\widetilde{\mathbf{E}}+\varepsilon^2\left[2g(\mathbf{H})+\frac{1}{4}\left(\mathbf{H}+\mathbf{H}^T\right)\left(\mathbf{H}+\mathbf{H}^T\right)\right]$$

czyli $g(\mathbf{H})=\frac{1}{2}\mathbf{H}^T\mathbf{H}-\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{E}}^2$ co dowodzi $(6.7)_3$.

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}-\mathbf{1}\right)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon\cdot 2\widetilde{\mathbf{E}}+\varepsilon^2\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)$$ co dowodzi $(6.7)_4$

Niech $\mathbf{R}=\mathbf{1}+\varepsilon\widetilde{\mathbf{R}}+\varepsilon^2 h(\mathbf{H})+\dots$

$$\mathbf{R}\mathbf{U}=\mathbf{1}+\varepsilon\mathbf{H}=\left[\mathbf{1}+\varepsilon\widetilde{\mathbf{R}}+\varepsilon^2 h(\mathbf{H})+\dots\right]\left[\mathbf{1}+\varepsilon\widetilde{\mathbf{E}}+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\mathbf{H}^T\mathbf{H}-\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{E}}^2\right)+\dots\right]=$$

$$=\mathbf{1}+\varepsilon\mathbf{H}+\varepsilon^2\left[h(\mathbf{H})+\widetilde{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{E}}+\frac{1}{2}\mathbf{H}^T\mathbf{H}-\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{E}}^2\right]+\dots$$

czyli $h(\mathbf{H})=\dots=\frac{1}{2}\mathbf{H}^T\mathbf{H}^T-\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{E}}^2$ - co dowodzi $(6.7)_5$

Niech $R^T = 1 - \varepsilon\tilde{R} + \varepsilon^2 p(H) + \dots$

$$RR^T = 1 = \left[1 + \varepsilon\tilde{R} + \varepsilon^2 h(H)\right]\left[1 + \varepsilon^2 p(H) - \varepsilon\tilde{R}\dots\right] =$$

$$= 1 + \varepsilon^2\left[h(H) - \tilde{R}^2 + p(H)\right] + \dots$$

czyli $p(H) = \dots = \frac{1}{2}HH - \frac{1}{2}\tilde{E}^2$, co dowodzi $(6.7)_6$.

Tw. 49: Rozwinięcia jakobianów transformacji mają postać

$$J = \sqrt{III_C} = 1 + \varepsilon I_{\tilde{E}} + \varepsilon^2\left(-\frac{1}{2}I_{\tilde{E}}^2 + 2II_{\tilde{E}} + \frac{1}{2}I_{H^TH}\right) + O(\varepsilon^3) \tag{6.8}$$

$$J^{-1} = \frac{1}{\sqrt{III_C}} = 1 + \varepsilon\left(-I_{\tilde{E}}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{3}{2}I_{\tilde{E}}^2 - 2II_{\tilde{E}} - \frac{1}{2}I_{H^TH}\right) + O(\varepsilon^3)$$

D.

$$J = \hat{J}(\varepsilon) = \hat{J}(0) + \left.\frac{d\hat{J}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2\hat{J}(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon^2 + \dots \tag{6.9}$$

$$\hat{J}(0) = \left.\sqrt{III_C(\varepsilon)}\right|_{\varepsilon=0} = 1$$

$$\frac{d\hat{J}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(III_C(\varepsilon)\right)^{-1/2}\frac{d\,III_C(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(III_C(\varepsilon)\right)^{1/2}C^{-1}(\varepsilon)\cdot\left(\tilde{E} + \varepsilon H^TH\right)$$

$$\left.\frac{d\hat{J}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 1\cdot\tilde{E} = I_{\tilde{E}}$$

$$\left.\frac{d^2\hat{J}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = (1\cdot\tilde{E})(1\cdot\tilde{E}) - 2\tilde{E}\cdot\tilde{E} + 1\cdot H^TH = I_{\tilde{E}}^2 - 2I_{\tilde{E}^2} + I_{H^TH} =$$

$$= -I_{\tilde{E}}^2 + 4II_{\tilde{E}} + I_{H^TH}$$

Podstawiając powyższe zależności do (6.9) otrzymamy $(6.8)_1$. W identyczny sposób dowodzi się $(6.8)_2$.

6.3. Równania konstytutywne

Wszystkie dotychczas wyprowadzone równania konstytutywne dane są jako funkcje gradientu deformacji F i zgodnie z (6.6) w ramach teorii małego gradientu przemieszczenia są funkcjami analitycznymi parametru ε. Rozwijając więc je w szeregi Maclaurina względem ε i zachowując wyrazy 1-go, 2-go rzędu względem ε otrzymamy przybliżone równania konstytutywne teorii małego gradientu przemieszczenia.

Ponieważ zdecydowaliśmy się konsekwentnie używać opisu Lagrange'a, jako równanie definiujące rozwinięcia przyjmiemy równanie konstytutywne $(2.14)_2$ dla drugiego tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa. Równanie to posiada szereg zalet, m.in. dla izotropowego materiału sprężystego funkcja $\mathcal{f}(C)$ staje się funkcją izotropową $(4.6)_3$. Podobnie jest dla materiału hipersprężystego, co wskazują zależności $(5.8)_2$ oraz $(5.22)_3$. Tych zalet nie posiada nprz. równanie konstytutywne dla tensora naprężenia Cauchy'ego, co wynika z porównania (2.12) i $(4.6)_{12}$ oraz (5.5) i $(5.22)_{1.2}$.

Tw. 50: Równanie konstytutywne $(2.14)_2$ materiału sprężystego po rozwinięciu ma postać

$$\widetilde{T} = T_0 + \varepsilon\, {}^1L \cdot \widetilde{E} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left[\left({}^2L\, \widetilde{E}\right) \cdot \widetilde{E} + {}^1L \left(H^T H\right) \right] + O(\varepsilon^3) \quad (6.10)$$

gdzie

$T_o \equiv t_x(1)$ - tensor naprężenia Cauchy'ego w konfiguracji porównawczej

$$\begin{aligned} {}^1L &= {}^1L_x(X) \equiv 2\,\frac{\partial t_x(\mathbb{C})}{\partial \mathbb{C}}\bigg|_{\mathbb{C}=1} \\ {}^2L &= {}^2L_x(X) \equiv 2\,\frac{\partial}{\partial \mathbb{C}}\left[2\,\frac{\partial t_x(\mathbb{C})}{\partial \mathbb{C}}\right]\bigg|_{\mathbb{C}=1} \end{aligned} \qquad (6.11)$$

D.

$$\widetilde{T} = \hat{t}(\varepsilon) = \hat{t}(0) + \frac{d\hat{t}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon + \frac{1}{2!}\,\frac{d^2\hat{t}(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon^2 + \cdots \qquad (6.12)$$

$$\hat{t}(0) = t(1) \equiv T_o$$

$$\frac{dt(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\partial t(\mathbb{C})}{\partial \mathbb{C}}\cdot\frac{d\mathbb{C}}{d\varepsilon} = \frac{\partial t(\mathbb{C})}{\partial \mathbb{C}}\cdot\left(2\widetilde{E} + 2\varepsilon H^T H\right)$$

$$\frac{dt(\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = {}^1L\cdot\widetilde{E}$$

$$\frac{d\hat{t}(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbb{C}}\,\frac{\partial t(\mathbb{C})}{\partial \mathbb{C}}\bigg|_{\mathbb{C}=1}\cdot 2\widetilde{E}\right]\cdot 2\widetilde{E} + \frac{\partial t(\mathbb{C})}{\partial \mathbb{C}}\bigg|_{\mathbb{C}=1}\cdot 2H^T H = \left({}^2L\cdot\widetilde{E}\right)\cdot\widetilde{E} + {}^1L\cdot\left(H^T H\right)$$

co po podstawieniu do rozwinięcia (6.12) dowodzi (6.10).

Def.23: Tensory $\overset{1}{\mathbb{L}}, \overset{2}{\mathbb{L}}, \ldots$ nazywamy tensorami sprężystości odpowiednio 1-go, 2-go, ... rzędu materiału sprężystego w konfiguracji $\varkappa$.

Tw. 51: Tensory sprężystości $\overset{1}{\mathbb{L}} \in \mathcal{T}_4$ oraz $\overset{2}{\mathbb{L}} \in \mathcal{T}_6$ posiadają następujące własności symetrii

$$
\begin{aligned}
&\overset{1}{\mathbb{L}} = \overset{1}{\mathbb{L}}{}^{\overset{1.2}{T}} = \overset{1}{\mathbb{L}}{}^{\overset{3.4}{T}} \\
&\overset{2}{\mathbb{L}} = \overset{2}{\mathbb{L}}{}^{\overset{1.2}{T}} = \overset{2}{\mathbb{L}}{}^{\overset{3.4}{T}} = \overset{2}{\mathbb{L}}{}^{\overset{5.6}{T}} = \overset{2}{\mathbb{L}}{}^{\overset{3.5}{T}\overset{4.6}{T}}
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

które na reprezentacje w polibazie naturalnej w $\mathcal{B}_{\varkappa}$ nakłada warunki

$$
\begin{aligned}
&\overset{1}{L}{}^{KLMN} = \overset{1}{L}{}^{LKMN} = \overset{1}{L}{}^{KLNM} \\
&\overset{2}{L}{}^{KLMNPQ} = \overset{2}{L}{}^{LKMNPQ} = \overset{2}{L}{}^{KLNMPQ} = \overset{2}{L}{}^{KLMNQP} = \overset{2}{L}{}^{KLPQMN}
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

D. Wynika to z definicji (6.11) przy uwzględnieniu symetrii tensora $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ a $(6.13)_{2,4}$ z przestawienia kolejności obliczania gradientu względem $\mathbf{C}$.

Tw.52. Równania konstytutywne dla tensorów naprężenia $T_{\varkappa}, T$ po rozwinięciu i wyrażeniu w terminach rozwinięcia definiującego (6.10) , mają postać

$$
\begin{aligned}
T_{\varkappa} = {} & T_o + \varepsilon\left[\overset{1}{\mathbb{L}}\cdot\widetilde{E} + HT_o\right] + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\left(\overset{2}{\mathbb{L}}\cdot\widetilde{E}\right)\cdot\widetilde{E} + \overset{1}{\mathbb{L}}\cdot\left(H^TH\right) + 2H\left(\overset{1}{\mathbb{L}}\cdot\widetilde{E}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
T = {} & T_o + \varepsilon\left[\overset{1}{\mathbb{L}}\cdot\widetilde{E} + T_oH^T + HT_o - I_{\widetilde{E}}T_o\right] + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left[\left(\overset{2}{\mathbb{L}}\cdot\widetilde{E}\right)\cdot\widetilde{E} + \overset{1}{\mathbb{L}}\cdot\left(H^TH\right) + \right. \\
& + 2H\left(\overset{1}{\mathbb{L}}\cdot\widetilde{E}\right) + 2\left(\overset{1}{\mathbb{L}}\cdot\widetilde{E}\right)H^T - 2I_{\widetilde{E}}\left(\overset{1}{\mathbb{L}}\cdot\widetilde{E}\right) + 2HT_oH^T - \\
& \left. - 2I_{\widetilde{E}}\left(T_oH^T + HT_o\right) + \left(3I_{\widetilde{E}} - 4\,II_{\widetilde{E}} - I_{H^TH}\right)T_o\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

D. Korzystamy z zależności $T_{\varkappa} = F\tilde{T}$, $T = \mathcal{J}^{-1} F \tilde{T} F^{T}$, gdzie podstawiając rozwinięcia (6.10), (6.6) oraz $(6.8)_2$ przy odrzuceniu członów $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ otrzymamy (6.15).

Tw.53. Gdy przyjmiemy stan naturalny $\varkappa_0$ jako konfigurację porównawczą, równania konstytutywne sprężystego ciała stałego posiadają następujące rozwinięcia

$$\tilde{T} = \varepsilon \overset{1}{L}_0 : \tilde{E}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left[\left(\overset{2}{L}_0 \cdot \tilde{E}_0 \right) \cdot \tilde{E}_0 + \overset{1}{L}_0 \cdot \left(H_0^T H_0 \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$T_{\varkappa_0} = \varepsilon \overset{1}{L}_0 : \tilde{E}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left[\left(\overset{2}{L}_0 : \tilde{E}_0 \right) \cdot \tilde{E}_0 + \overset{1}{L}_0 : \left(H_0^T H_0 \right) + 2H_0 \left(\overset{1}{L}_0 \cdot \tilde{E}_0 \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$T = \varepsilon \overset{1}{L}_0 : \tilde{E}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left[\left(\overset{2}{L}_0 : \tilde{E}_0 \right) \cdot \tilde{E}_0 + \overset{1}{L}_0 : \left(H_0^T H_0 \right) + 2H_0 \left(\overset{1}{L}_0 : \tilde{E}_0 \right) + \right. \tag{6.16}$$

$$\left. + 2\left(\overset{1}{L}_0 : \tilde{E}_0 \right) H_0^T - 2 I_{\tilde{E}_0} \left(\overset{1}{L}_0 \cdot \tilde{E}_0 \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

D. W stanie naturalnym $T_0 \equiv 0$ i podstawiając to do (6.10) i (6.15) otrzymamy (6.16).

Tw.54: Tensory sprężystości $\overset{1}{L}_0, \overset{2}{L}_0, \ldots$ w stanie naturalnym $\mathcal{B}_{\varkappa_0}$ są jednakowe w całym obszarze ciała stałego, t.zn. nie zależą od X_0.

D. Jest to oczywiste, gdyż stan naturalny $\varkappa_0$ jest konfiguracją jednorodną ciała materialnie równomiernego, por. (2.20). Wtedy

$$\bigwedge_{X_1, X_2 \in \mathcal{B}} \underset{X_1}{t_{\varkappa_0}}(C_0) = \underset{X_2}{t_{\varkappa_0}}(C_0) = t_{\varkappa_0}(C_0)$$

i funkcja $t_{\varkappa_0}$ nie zależy od cząstki $X \in \mathcal{B}$, a więc również tensory sprężystości zgodnie z (6.11) od X_0 nie zależą . ∎

Tw. 55: Tensory sprężystości $\overset{1}{L}, \overset{2}{L}, \dots$ hipersprężystego ciała stałego oprócz symetrii (6.13), (6.14) posiadają również własności symetrii

$$\overset{1}{L} = \overset{1}{L}{}^{\overset{1.3}{T}\,\overset{2.4}{T}}$$
$$\overset{2}{L} = \overset{2}{L}{}^{\overset{1.3}{T}\,\overset{2.4}{T}} = \overset{2}{L}{}^{\overset{1.5}{T}\,\overset{2.6}{T}} \qquad (6.17)$$

które na reprezentacje w polibazie naturalnej w $\mathcal{B}_x$ nakłada warunki

$$\overset{1}{L}{}^{KLMN} = \overset{1}{L}{}^{MNKL}$$
$$\overset{2}{L}{}^{KLMNPQ} = \overset{2}{L}{}^{MNKLPQ} = \overset{2}{L}{}^{PQMNKL} \qquad (6.18)$$

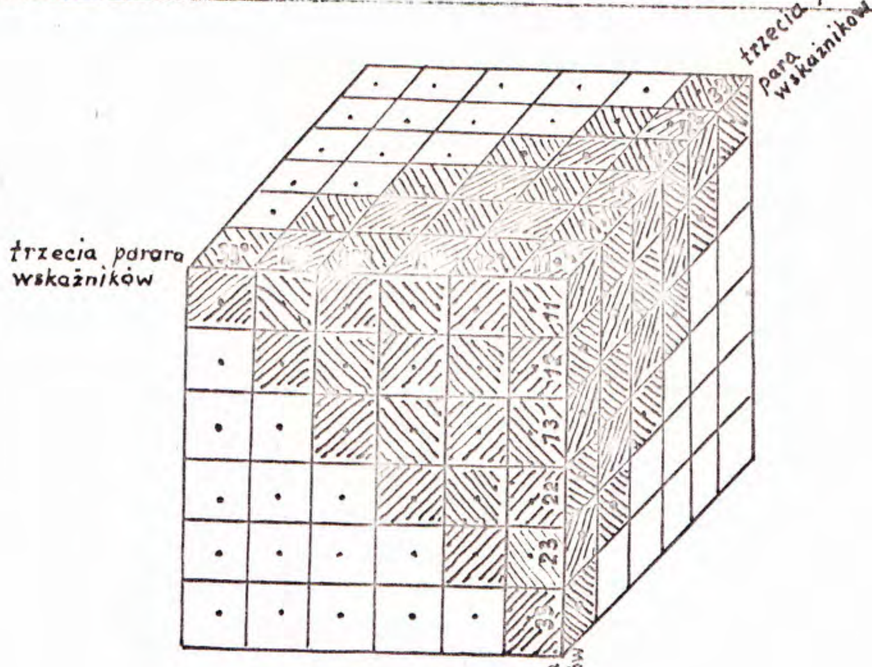
D. Dla materiału hipersprężystego, biorąc gradienty z $(5.22)_3$, mamy

$$\overset{1}{L} = 4\varrho_x \frac{\partial}{\partial \mathbb{C}}\left(\frac{\partial \varepsilon(\mathbb{C})}{\partial \mathbb{C}}\right)\bigg|_{\mathbb{C}=1}$$
$$\overset{2}{L} = 8\varrho_x \frac{\partial}{\partial \mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial \mathbb{C}}\left[\frac{\partial \varepsilon(\mathbb{C})}{\partial \mathbb{C}}\right]\right\} \qquad (6.19)$$

skąd i wynikają symetrie (6.17). ∎

Tw.56: Własności symetrii (6.13) i (6.17) redukują maksymalną ilość niezależnych reprezentacji tensorów $\overset{1}{L}, \overset{2}{L}, \dots$ do 21, 56, ... dla hipersprężystego ciała stałego, wobec 36, 126, ... dla sprężystego ciała stałego.

D. Wynika to z Rys.6.



Rys.6

Dla sprężystego ciała stałego największa ilość niezależnych reprezentacji tensorów sprężystości pokrywa się z ilością pól i sześcianów z kropkami,

$$il\left({}^1L\right) = 6\times 6 = 36$$

$$il\left({}^2L\right) = 6\times\sum_{n=1}^{6} n = 6\times 21 = 126$$

Dla hipersprężystego ciała stałego ilość ta pokrywa się z ilością pól i sześcianów zakreskowanych

$$il\left({}^1L\right) = \sum_{n=1}^{6} n = 21$$

$$il\left({}^2L\right) = \sum_{n=1}^{6}\sum_{k=1}^{n} k = 56\ .$$

Def.24: Teoria sprężystego lub hipersprężystego ciała stałego, w której konsekwentnie zachowujemy człony rzędu 1-go (rzędu 1-go i 2-go) względem ε , nazywamy teorią 1-go (2-go) rzędu w konfiguracji $\varkappa$.

Tw. 57: Równania konstytutywne teorii 1-go rzędu w konfiguracji $\varkappa$ mają postać

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= T_{o} + \varepsilon\, {}^{1}\!L \cdot \tilde{E}\\ T_{\varkappa} &= T_{o} + \varepsilon\left({}^{1}\!L \cdot \tilde{E} + H T_{o}\right)\\ T &= T_{o} + \varepsilon\left({}^{1}\!L \cdot \tilde{E} + T_{o} H^{T} + H T_{o} - I_{\tilde{E}} T_{o}\right)\end{aligned} \tag{6.20}$$

D. Wynika wprost z zależności (6.10) i (6.15) przy zachowaniu tylko członów rzędu 1-go względem ε .

Def. 25: Klasyczną teorią sprężystości nazywamy teorię 1-go rzędu w stanie naturalnym $\varkappa_{o}$.

Tw. 58: Równania konstytutywne klasycznej teorii sprężystości mają postać

$$T = T_{\varkappa_{o}} = \tilde{T} = \varepsilon\, {}^{1}\!L_{o} \cdot \tilde{E}_{o} \tag{6.21}$$

i w ramach klasycznej teorii sprężystości tensory naprężenia $T, T_{\varkappa_{o}}, \tilde{T}$ są nierozróżnialne między sobą.

D. Wynika wprost z (6.20) .

6.4. Tensory sprężystości izotropowych sprężystych ciał stałych

Tw. 59: Tensory sprężystości 1-go i 2-go rzędu izotropowego sprężystego ciała stałego w konfiguracji nieznieksztalconej $\varkappa$ mają postać

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\mathbb{L} &= \lambda \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \mu\left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.3}{T}}\right] \\
{}^{2}\mathbb{L} &= 2\pi_3 \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \pi_4\left\{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathbf{1}\otimes\left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.3}{T}}\right]\right\} + \\
&+ \pi_5\left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.3}{T}}\right]\otimes\mathbf{1} + \pi_6\frac{1}{4}\left\{\left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.5}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{1.4}{T}} + \right. \\
&+ \left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.5}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{1.3}{T}} + \left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.5}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{3.6}{T}}\right]^{\overset{1.4}{T}} + \\
&\left. + \left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{3.5}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{3.6}{T}}\right]^{\overset{1.3}{T}}\right\}
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$
\bar{t}_{\Gamma}\Big|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \tau_{\Gamma}\ ; \quad \frac{\partial \bar{t}_{\Gamma}}{\partial II_{\mathbf{E}}}\Big|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \tau_{\Gamma,2}\ ; \ldots ; \ \frac{\partial}{\partial I_{\mathbf{E}}}\frac{\partial \bar{t}_{\Gamma}}{\partial I_{\mathbf{E}}}\Big|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = \tau_{\Gamma,11} \tag{6.23}
$$

$$
\lambda \equiv \sum_{\Gamma=1}^{1} \tau_{\Gamma,1}\ ; \quad \mu \equiv \tau_1 - \tau_{-1} \tag{6.24}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi_3 &\equiv \frac{1}{2}\sum_{\Gamma=1}^{1} \tau_{\Gamma,11}\ ; \quad \pi_4 = \sum_{\Gamma=-1}^{1} \tau_{\Gamma,2} \\
\pi_5 &\equiv 2\left(\tau_{1,1} - \tau_{-1,1}\right)\ ; \quad \pi_6 = 4\tau_{-1}
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

D. Ponieważ $t_{\Gamma} = t_{\Gamma}(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}) \equiv \bar{t}_{\Gamma}(I_{\mathbf{E}}, II_{\mathbf{E}}, III_{\mathbf{E}})$ równanie konstytutywne $(4.11)_4$ przyjmie postać

$$
\tilde{T} \equiv \ell_{x}(\mathbf{E}) = \sum_{\Gamma=-1}^{1} (2\mathbf{E}+\mathbf{1})^{\Gamma}\,\bar{t}_{\Gamma}
$$

Stąd

$$ {}^1\mathbf{L} = 2\,\frac{\partial f(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}\bigg|_{\mathbf{C}=\mathbf{1}} = \frac{\partial \ell(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}\bigg|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} \qquad (6.26)$$

$$ {}^2\mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}}\,\frac{\partial \ell(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}\bigg|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} $$

$$\frac{\partial \ell(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{E}}(2\mathbf{E}+\mathbf{1})^{-1}\right]\bar{t}_{-1} + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{E}}(2\mathbf{E}+\mathbf{1})\right]\bar{t}_{1} + \sum_{r=-1}^{1}(2\mathbf{E}+\mathbf{1})^{r}\circ\frac{\partial \bar{t}_r}{\partial \mathbf{E}}$$

Korzystając z gradientów (3.24) funkcji określonych na ${}^s\mathcal{T}_2$ mamy

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{E}}(2\mathbf{E}+\mathbf{1}) \equiv \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} = \left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.3}{T}}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{E}}(2\mathbf{E}+\mathbf{1})^{-1} \equiv \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}\circ\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} = -\frac{1}{2}\left[(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1})^{\overset{1.3}{T}}\right]\circ\left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.3}{T}}\right] =$$

$$= \dots = -\left[(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1})^{\overset{1.3}{T}}\right]$$

$$\frac{d\bar{t}_r}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \bar{t}_r}{\partial I_{\mathbf{E}}}\mathbf{1} + \frac{\partial \bar{t}_r}{\partial II_{\mathbf{E}}}\left(I_{\mathbf{E}}\mathbf{1}-\mathbf{E}\right) + \frac{\partial \bar{t}_r}{\partial III_{\mathbf{E}}}\,III_{\mathbf{E}}\,\mathbf{E}^{-1}$$

Podstawiając w powyższych zależnościach $E = 0$ mamy

$$\overset{1}{L} = \left(\tau_1 - \tau_{-1}\right)\left[\left(1 \otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(1 \otimes 1\right)^{\overset{1.3}{T}}\right] + \left(\sum_{\Gamma=-1}^{1} \tau_{\Gamma,1}\right) 1 \otimes 1$$

co przy oznaczeniach (6.24) dowodzi $(6.22)_1$.

$$\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\partial \ell(E)}{\partial E}\right) = 2\frac{\partial}{\partial E}\left(2E+1\right)^{-1} \otimes \frac{\partial \bar{t}_{-1}}{\partial E} + 2\frac{\partial}{\partial E}\left(2E+1\right) \otimes \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial E} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial E}\left[\frac{\partial}{\partial E}\left(2E+1\right)^{-1}\right]\bar{t}_{-1} + \frac{\partial}{\partial E}\left[\frac{\partial}{\partial E}\left(2E+1\right)\right]\bar{t}_1 + \sum_{\Gamma=-1}^{1}\left(2E+1\right)^{\Gamma} \otimes \frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\partial \bar{t}_\Gamma}{\partial E}\right)$$

$$2\frac{\partial}{\partial E}\left(2E+1\right)^{-1} \otimes \frac{\partial \bar{t}_{-1}}{\partial E}\Bigg|_{E=0} = -2\tau_{-1}\left[\left(1 \otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(1 \otimes 1\right)^{\overset{1.3}{T}}\right] \otimes 1$$

$$2\frac{\partial}{\partial E}\left(2E+1\right)^{-1} \otimes \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial E}\Bigg|_{E=0} = 2\tau_1\left[\left(1 \otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(1 \otimes 1\right)^{\overset{1.3}{T}}\right] \otimes 1$$

$$\sum_{\Gamma}\left(2E+1\right)^{\Gamma} \otimes \frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\partial \bar{t}_\Gamma}{\partial E}\right)\Bigg|_{E=0} = \left(\sum_{\Gamma} \tau_{\Gamma,11}\right) 1 \otimes 1 \otimes 1 + \left(\sum_{\Gamma} \tau_{\Gamma,2}\right)\left\{1 \otimes 1 \otimes 1 - \frac{1}{2} 1 \otimes \left[\left(1 \otimes 1\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(1 \otimes 1\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial E}\left[\frac{\partial}{\partial E}\left(2E+1\right)\right]\bar{t}_1\Bigg|_{E=0} = 0 \;.$$

$$\frac{\partial}{\partial E}\left[\frac{\partial}{\partial E}\left(2E+1\right)^{-1}\right]\bar{t}_{-1}\Bigg|_{E=0} = \left(-\tau_{-1}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial \overset{-1}{C}}\left[\left(\overset{-1}{C} \otimes \overset{-1}{C}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\overset{-1}{C} \otimes \overset{-1}{C}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right] \circ \frac{\partial \overset{-1}{C}}{\partial C} \circ \frac{\partial C}{\partial E}\right\}\Bigg|_{E=0}$$

Dla każdych transpozycji

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}}\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right)^{\overset{\cdots}{T}}\cdot\mathbf{B}=\frac{d}{d\lambda}\left\{\left(\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}\right)\otimes\left(\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}\right)\right\}^{\overset{\cdots}{T}}\Bigg|_{\lambda=0}=\left[\mathbf{B}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right]^{\overset{\cdots}{T}}=\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{A}}\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right)\mathbf{B}\right]^{\overset{\cdots}{T}}$$

czyli

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}}\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right)^{\overset{\cdots}{T}}=\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{A}}\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right)\right]^{\overset{\cdots}{T}} \qquad (6.27).$$

Korzystając z zależności (6.27) oraz gradientu $(3.24)_5$ dla $\overset{-1}{\mathbf{C}}\in {}^{s}\mathcal{T}_2$ mamy

$$\frac{\partial}{\partial \overset{-1}{\mathbf{C}}}\left[\left(\overset{-1}{\mathbf{C}}\otimes\overset{-1}{\mathbf{C}}\right)^{\overset{1.4}{T}}+\left(\overset{-1}{\mathbf{C}}\otimes\overset{-1}{\mathbf{C}}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]\Bigg|_{\mathbf{C}=\mathbf{1}}=\frac{1}{2}\Bigg\{\left[\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{2.5}{T}}+\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{1.4}{T}}+\left[\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{2.5}{T}}+$$

$$+\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{1.3}{T}}+\left[\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{3.5}{T}}+\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{3.6}{T}}\right]^{\overset{1.4}{T}}+\left[\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{3.5}{T}}+\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{3.6}{T}}\right]^{\overset{1.3}{T}}\Bigg\}$$

Wykonując dalej odpo[illegible]lnie operacje otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{E}}\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{E}}\left(2\mathbf{E}+\mathbf{1}\right)^{-1}\right]\overline{t}_{-1}\Bigg|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}=\ldots=\left(+\tau_{-1}\right)\Bigg\{\left[\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{2.5}{T}}+\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{1.4}{T}}+\left[\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{2.5}{T}}+$$

$$+\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{1.3}{T}}+\left[\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{3.5}{T}}+\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{3.6}{T}}\right]^{\overset{1.4}{T}}+\left[\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{3.5}{T}}+\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{3.6}{T}}\right]^{\overset{3.6}{T}}\Bigg\}$$

Podstawiając powyższe zależności do $(6.26)_2$ przy oznaczeniach (6.25) otrzymamy wynik $(6.22)_2$. ◻

Def. 26 : Stałe λ, μ oraz $\pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ nazywamy stałymi sprężystymi odpowiednio 1-go i 2-go rzędu izotropowego sprężystego ciała stałego w konfiguracji nieznieksztaŀconej $\varkappa$.

Tw.60: Rozwinięcie (6.10) równania konstytutywnego dla izotropowego sprężystego ciała stałego, przy przyjęciu stanu niezniekształconego jako konfiguracji porównawczej, ma postać

$$\widetilde{T} = -p\mathbb{1} + \varepsilon\left(\lambda I_{\widetilde{E}}\mathbb{1} + 2\mu\widetilde{\mathbb{E}}\right) + \varepsilon^2\left[\left(\pi_3 I^2_{\widetilde{E}} + \frac{\lambda}{2} I_{H^TH} + \pi_4 II_{\widetilde{E}}\right)\mathbb{1} + \right.$$

$$\left. + \pi_5 I_{\widetilde{E}}\widetilde{\mathbb{E}} + \mu H^TH + \pi_6\widetilde{\mathbb{E}}^2\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \qquad (6.28)$$

D. Zgodnie z (4.5) mamy

$$T_0 = \sum_{\Gamma=-1}^{1}\left(2E + \mathbb{1}\right)^{\Gamma}\tau_{\Gamma}\Big|_{E=0} = \left(\sum_{\Gamma}\tau_{\Gamma}\right)\mathbb{1} = -p\mathbb{1}$$

skąd

$$-p \equiv \sum_{\Gamma=-1}^{1}\tau_{\Gamma} \qquad (6.29)$$

a ponadto dla ${}^1\mathbb{L}$ i ${}^2\mathbb{L}$ z (6.22) słuszne są zależności

$${}^1\mathbb{L}\cdot\widetilde{E} = \lambda I_{\widetilde{E}}\mathbb{1} + 2\mu\widetilde{E}$$

$${}^1\mathbb{L}\cdot\left(H^TH\right) = \lambda I_{H^TH}\mathbb{1} + 2\mu H^TH$$

$${}^2\mathbb{L}\cdot\widetilde{\mathbb{E}} = 2\pi_3 I_{\widetilde{E}}\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} + \pi_4\left[I_{\widetilde{E}}\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} - \mathbb{1}\otimes\widetilde{\mathbb{E}}\right] + \pi_5 I_{\widetilde{E}}\left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right] +$$

$$+\pi_6\frac{1}{2}\left[\left(\widetilde{\mathbb{E}}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\widetilde{\mathbb{E}}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.3}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\widetilde{\mathbb{E}}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\widetilde{\mathbb{E}}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]$$

$$\left({}^{2}\mathbf{L}\cdot\tilde{\mathbf{E}}\right)\cdot\tilde{\mathbf{E}}=2\left[\pi_3 I^2_{\tilde{\mathbf{E}}}+\pi_4\cdot\frac{1}{2}\left(I^2_{\tilde{\mathbf{E}}}-I_{\tilde{\mathbf{E}}^2}\right)\right]\mathbf{1}+2\pi_5 I_{\tilde{\mathbf{E}}}\tilde{\mathbf{E}}+2\pi_6\tilde{\mathbf{E}}^2$$

Podstawiając powyższe zależności do (6.10) mamy (6.28).

<u>Tw.61</u>: Rozwinięcia (6.15) równań konstytutywnych tensorów naprężenia $\mathbf{T}_{\varkappa}$, $\mathbf{T}$ dla izotropowego sprężystego ciała stałego, przy przyjęciu stanu nieznieksztalconego jako konfiguracji porównawczej, mają postać

$$\mathbf{T}_{\varkappa}=-p\mathbf{1}+\varepsilon\left(\lambda I_{\tilde{\mathbf{E}}}\mathbf{1}+2\mu\mathbf{E}-p\mathbf{H}\right)+\varepsilon\left[\left(\pi_3 I^2_{\tilde{\mathbf{E}}}+\frac{\lambda}{2}I_{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}+\pi_4 II_{\tilde{\mathbf{E}}}\right)\mathbf{1}+\right.$$

$$\left.+\pi_5 I_{\tilde{\mathbf{E}}}\tilde{\mathbf{E}}+\lambda I_{\tilde{\mathbf{E}}}\mathbf{H}+\mu\mathbf{H}^T\mathbf{H}+2\mu\mathbf{H}\tilde{\mathbf{E}}+\pi_6\tilde{\mathbf{E}}^2\right]+\mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right)$$

$$\mathbf{T}=-p\mathbf{1}+\varepsilon\left[(\lambda+p)I_{\tilde{\mathbf{E}}}\mathbf{1}+2(\mu-p)\tilde{\mathbf{E}}\right]+\varepsilon^2\left[\left\{\left(\pi_3-\frac{p}{2}\right)-(\lambda+p)I^2_{\tilde{\mathbf{E}}}+\right.\right. \qquad (6.30)$$

$$\left.+\frac{1}{2}(\lambda+p)I_{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}+(\pi_4+2p)II_{\tilde{\mathbf{E}}}\right\}\mathbf{1}+\left\{(\pi_5-2p)+2(\lambda+p)-2(\mu-p)I_{\tilde{\mathbf{E}}}\tilde{\mathbf{E}}+\right.$$

$$\left.+\left\{4(\mu-p)+(\pi_6+4p)\right\}\tilde{\mathbf{E}}^2+(\mu-p)\mathbf{H}\mathbf{H}^T\right]+\mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right)$$

<u>D.</u> Korzystając z zależności $\mathbf{T}_{\varkappa}=\mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}}$, $\mathbf{T}=\overset{-1}{J}\mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{F}^T$ i podstawiając tu (6.28), (6.6) oraz $(6.8)_2$ otrzymamy (6.30). ↯

Tw.62: Gdy przyjmiemy stan naturalny $\varkappa_0$ jako konfigurację porównawczą, rozwinięcia równań konstytutywnych izotropowego sprężystego ciała stałego mają postać

$$\widetilde{T} = \varepsilon\left(\lambda_0 I_{\widetilde{E}_0} \mathbf{1} + 2\mu_0 \widetilde{E}_0\right) + \varepsilon^2\left[\left(\pi_{3_0} I^2_{\widetilde{E}_0} + \frac{\lambda_0}{2} I_{H_0^T H_0} + \pi_{4_0} II_{\widetilde{E}_0}\right)\mathbf{1} + \pi_{5_0} I_{\widetilde{E}_0} \widetilde{E}_0 + \mu_0 H_0^T H_0 + \pi_{6_0} \widetilde{E}_0^2\right] + O(\varepsilon^3)$$

$$T_{\varkappa_0} = \varepsilon\left(\lambda_0 I_{\widetilde{E}_0} \mathbf{1} + 2\mu_0 \widetilde{E}_0\right) + \varepsilon^2\left[\left(\pi_{3_0} I^2_{\widetilde{E}_0} + \frac{\lambda_0}{2} I_{H_0^T H_0} + \pi_{4_0} II_{\widetilde{E}_0}\right)\mathbf{1} + \pi_{5_0} I_{\widetilde{E}_0} \widetilde{E}_0 + \lambda_0 I_{\widetilde{E}_0} H_0 + \mu_0 H_0^T H_0 + 2\mu_0 H_0 \widetilde{E}_0 + \pi_{6_0} \widetilde{E}_0^2\right] + O(\varepsilon^3) \qquad (6.31)$$

$$T = \varepsilon\left(\lambda_0 I_{\widetilde{E}_0} \mathbf{1} + 2\mu_0 \widetilde{E}_0\right) + \varepsilon^2\left[\left\{(\pi_{3_0} - \lambda_0) I^2_{\widetilde{E}_0} + \frac{\lambda_0}{2} I_{H_0^T H_0} + \pi_{4_0} II_{\widetilde{E}_0}\right\}\mathbf{1} + (\pi_{5_0} + 2\lambda_0 - 2\mu_0) I_{\widetilde{E}_0} \widetilde{E}_0 + (4\mu_0 + \pi_{6_0}) \widetilde{E}_0^2 + \mu_0 H_0 H_0^T\right] + O(\varepsilon^3).$$

D. Wprost jako wniosek z (6.28), (6.30), przy $p \equiv 0$. ◊

6.5. Tensory sprężystości izotropowych hipersprężystych ciał stałych.

Tw.63. Tensory sprężystości 1-go i 2-go rzędu izotropowego hipersprężystego ciała stałego w konfiguracji niezniekształconej $\varkappa$ mają postać

$$\overset{1}{\mathbf{L}} = \lambda \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \mu\left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.3}{T}}\right]$$

$$\overset{2}{\mathbf{L}} = 2\pi_3 \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \pi_5\left\{\frac{1}{2}\mathbf{1}\otimes\left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.5}{T}}\right] + \left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{1.3}{T}}\right]\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right.$$

$$+\pi_6 \frac{1}{4}\left\{\left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.5}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{1.4}{T}} + \left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.5}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{1.3}{T}} +\right.$$

$$\left. + \left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.5}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{2.4}{T}} + \left[(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.5}{T}} + (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{2.3}{T}}\right\}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\varrho_{\varkappa}\frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial I_E}\bigg|_{E=0} \equiv \varrho_{\varkappa}\bar{\varepsilon}_{,1}\bigg|_{E=0} = \vartheta_1 \; ; \dots ; \; \varrho_{\varkappa}\frac{\partial}{\partial II_E}\frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial I_E}\bigg|_{E=0} \equiv \varrho_{\varkappa}\bar{\varepsilon}_{,12}\bigg|_{E=0} = \vartheta_{12} \qquad (6.33)$$

$$\lambda \equiv \vartheta_{11} + \vartheta_2 \quad ; \quad \mu \equiv -\frac{1}{2}\vartheta_2 \qquad (6.34)$$

$$\pi_3 \equiv \frac{1}{2}\vartheta_{111} + \vartheta_{21} \quad ; \quad \pi_4 \equiv \vartheta_{12} + \vartheta_3$$
$$\pi_5 \equiv -(\vartheta_{21} + \vartheta_3) \quad ; \quad \pi_6 \equiv \vartheta_3 \qquad (6.35)$$

D. Funkcja energii izotropowego hipersprężystego ciała stałego

$$\varepsilon(\mathbb{C}) = \varepsilon\left(I_{\mathbb{C}}, II_{\mathbb{C}}, III_{\mathbb{C}}\right) = \overline{\varepsilon}\left(I_{E}, II_{E}, III_{E}\right) = \widetilde{\varepsilon}(E)$$

Korzystając z (3.14) oraz oznaczeń (6.33) mamy

$$\frac{1}{\rho_{\varkappa}}\widetilde{T} = \mathbf{1}\,\overline{\varepsilon}_{,1} + \left(\mathbf{1}I_E - E\right)\overline{\varepsilon}_{,2} + \left(\mathbf{1}II_E - EI_E + E^2\right)\overline{\varepsilon}_{,3}$$

$$\frac{1}{\rho_{\varkappa}}\frac{\partial}{\partial E}\widetilde{T} = \mathbf{1}\otimes\frac{\partial}{\partial E}\overline{\varepsilon}_{,1} + \frac{\partial}{\partial E}\left(\mathbf{1}I_E - E\right)\overline{\varepsilon}_{,2} + \left(\mathbf{1}I_E - E\right)\otimes\frac{\partial}{\partial E}\overline{\varepsilon}_{,2} + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial E}\left(\mathbf{1}II_E - EI_E + E^2\right)\overline{\varepsilon}_{,3} + \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial E}\overline{\varepsilon}_{,1} = \mathbf{1}\,\overline{\varepsilon}_{,11} + \left(\mathbf{1}I_E - E\right)\overline{\varepsilon}_{,12} + \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial E}\left(\mathbf{1}I_E - E\right) = \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} - \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial E}\overline{\varepsilon}_{,2} = \mathbf{1}\,\overline{\varepsilon}_{,21} + \left(\mathbf{1}I_E - E\right)\overline{\varepsilon}_{,22} + \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial E}\left(\mathbf{1}II_E - EI_E + E^2\right) = \mathbf{1}\otimes\left(\mathbf{1}I_E - E\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]I_E - E\otimes\mathbf{1} +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left(E\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(E\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{2.4}{T}} + \left(E\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{1.3}{T}} + \left(E\otimes\mathbf{1}\right)^{\overset{2.3}{T}}\right]$$

Podstawiając w powyższych zależnościach $\mathbb{E}=\mathbb{O}$ i korzystając z $(6.26)_1$, (6.33), po przekształceniach otrzymamy

$$\overset{1}{\mathbb{L}} = \vartheta_{11}\, \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} + \vartheta_2\left\{\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} - \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right\} \qquad (6.36)$$

co przy oznaczeniach (6.34) dowodzi (6.32).

$$\frac{1}{\varrho_{\varkappa}}\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\tilde{T}\right) = \mathbb{1}\otimes\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\overline{\tau}_{,1}\right) + 2\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\left(\mathbb{1}I_{\mathbb{E}} - \mathbb{E}\right)\otimes\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\overline{\tau}_{,2} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\left(\mathbb{1}\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - \mathbb{E}I_{\mathbb{E}} + \mathbb{E}^2\right)\right]\overline{\tau}_{,3} + \cdots$$

$$\varrho_{\varkappa}\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\tau_{,1}\right)\Bigg|_{\mathbb{E}=\mathbb{O}} = \vartheta_{111}\,\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} + \vartheta_{12}\left\{\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} - \frac{1}{2}\left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\left(\mathbb{1}\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - \mathbb{E}I_{\mathbb{E}} + \mathbb{E}^2\right)\right]\Bigg|_{\mathbb{E}=\mathbb{O}} = \mathbb{1}\otimes\left\{\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} - \frac{1}{2}\left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]\right\} +$$

$$-\left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.4}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]\otimes\mathbb{1} + \frac{1}{4}\left\{\left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.5}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{1.4}{T}} + \left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.5}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{1}{T}}\right.$$

$$\left. + \left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.5}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{2.4}{T}} + \left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.5}{T}} + \left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{2.3}{T}}\right\}$$

gdzie skorzystano z tożsamości typu (6.27) , czyli dla dowolnych transpozycji,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\left(\mathbb{E}\otimes\mathbb{1}\right)^{\ddot{T}}=\left[\frac{\partial}{\partial \mathbb{E}}\left(\mathbb{E}\otimes\mathbb{1}\right)\right]^{\ddot{T}} \tag{6.37}$$

Podstawiając powyższe zależności do $(6.26)_2$, po przekształceniach mamy

$$\begin{aligned} {}^{2}\mathbb{L}= &\left(\Theta_{111}+2\Theta_{21}\right)\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}+\left(\Theta_{12}+\Theta_{3}\right)\mathbb{1}\otimes\left\{\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}-\frac{1}{2}\left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.4}{T}}+\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]\right\} \\ &+\left(-\Theta_{21}-\Theta_{3}\right)\left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.4}{T}}+\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{1.3}{T}}\right]\otimes\mathbb{1}+\Theta_{3}\cdot\frac{1}{4}\left\{\left[\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.5}{T}}+\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\right)^{\overset{2.6}{T}}\right]^{\overset{1.4}{T}}+\right. \\ &\left.+\left[\ldots\right]^{\overset{1.3}{T}}+\left[\ldots\right]^{\overset{2.4}{T}}+\left[\ldots\right]^{\overset{2.3}{T}}\right\} \end{aligned} \tag{6.38}$$

Pamiętając o przemienności różniczkowania, $\Theta_{12}=\Theta_{21}$ i przy wprowadzonych oznaczeniach (6.35) stałych sprężystych 2-go rzędu daje zależność

$$\pi_5=-\pi_4 \tag{6.39}$$

co dowodzi $(6.32)_2$. ↯

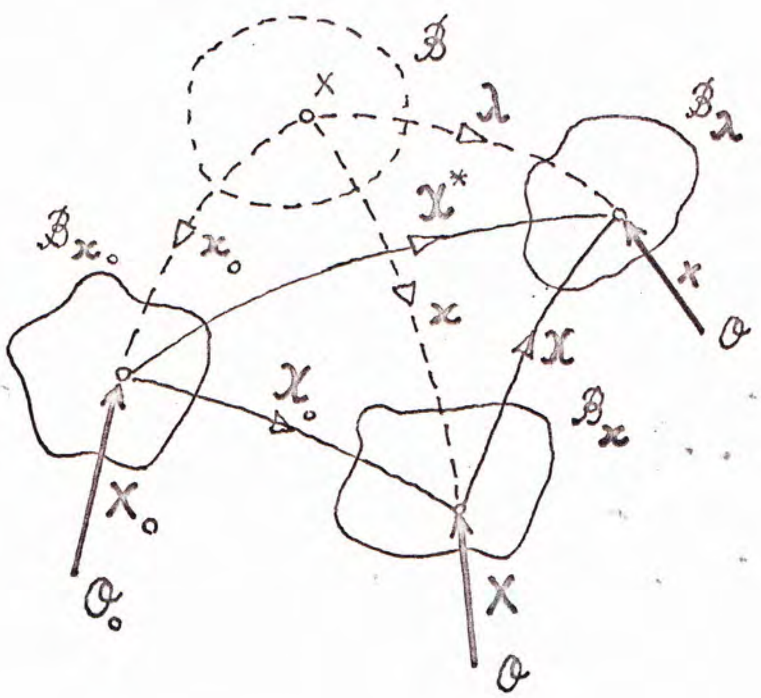
<u>Tw. 64</u>: W ramach teroii 1-go rzędu <u>nie da się odróżnić</u> izotropowego sprężystego ciała stałego od hipersprężystego.

<u>D.</u> Jest to wprost wniosek z porównania tensorów 1-go rzędu $(6.32)_1$ oraz $(6.22)_1$, które są identyczne. ↯

7. NAŁOŻENIE DEFORMACJI SPRĘŻYSTYCH

7.1. Oznaczenia i zależności wstępne

Rozpatrzmy ciało $\mathcal{B}$ w trzech różnych konfiguracjach: $\varkappa_0$ - stan naturalny, $\varkappa$ - konfiguracja porównawcza, λ - konfiguracja aktualna (Rys.6).



Rys. 6.

Konfiguracje te związane są ze sobą przez funkcje deformacji $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}^*$ (Rys. 6), przy czym

$$\mathcal{X}_0 = \varkappa \circ \overset{-1}{\varkappa}_0 \qquad \mathcal{X} = \lambda \circ \overset{-1}{\varkappa} \qquad \mathcal{X}^* = \lambda \circ \overset{-1}{\varkappa}_0 \tag{7.1}$$

$$\mathcal{X}_0 : X_0 \to X \qquad \mathcal{X} : X \to x \qquad \mathcal{X}^* : X_0 \to x \tag{7.2}$$

$$\underset{\circ}{F} \equiv \frac{\partial \varkappa_\circ (X_\circ, t)}{\partial X_\circ} \; ; \; F \equiv \frac{\partial \varkappa (X, t)}{\partial X} \; ; \; F^* \equiv \frac{\partial \varkappa^* (X_\circ, t)}{\partial X_\circ} \tag{7.3}$$

Dla tensorów naprężenia przyjmijmy następujące oznaczenia

$T, T_\varkappa, \tilde{T}_\varkappa$ - tensory naprężenia w konfiguracji λ przy przyjęciu konfiguracji $\varkappa$ jako porównawczej

$T, T_{\varkappa_\circ}, \tilde{T}_{\varkappa_\circ}$ - tensory naprężenia w konfiguracji λ przy przyjęciu konfiguracji $\varkappa_\circ$ jako porównawczej

$T_\circ \equiv T_{\circ\varkappa} \equiv \tilde{T}_{\circ\varkappa}$ - tensory naprężenia w konfiguracji $\varkappa$ przy przyjęciu konfiguracji $\varkappa$ jako porównawczej

$T_\circ, T_{\circ\varkappa_\circ}, \tilde{T}_{\circ\varkappa_\circ}$ - tensory naprężenia w konfiguracji $\varkappa$ przy przyjęciu konfiguracji $\varkappa_\circ$ jako porównawczej.

Słuszne są ponadto zależności

$$\begin{aligned} &F_\circ = R_\circ U_\circ = V_\circ R_\circ \qquad && B_\circ = F_\circ F_\circ^T = V_\circ^2 \\ &F = R U = V R && B = F F^T = V^2 \\ &F^* = R^* U^* = V^* R^* && B^* = F^* F^{*T} = V^{*2} \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} &C_\circ = F_\circ^T F_\circ = U_\circ^2 \qquad && E_\circ = \frac{1}{2}(C_\circ - 1) \\ &C = F^T F = U^2 && E = \frac{1}{2}(C - 1) \\ &C^* = F^{*T} F^* = U^{*2} && E^* = \frac{1}{2}(C^* - 1) \end{aligned} \tag{7.5}$$

Tw. 65: Gradienty deformacji (7.3) związane są zależnością

$$F^{*} = F\,F_{\circ} \tag{7.6}$$

D. $$x = \chi^{*}(X_{\circ}, t) = \chi(X, t) = \chi\{\chi_{\circ}(X_{\circ}, t), t\}$$

$$F^{*} = \frac{\partial \chi}{\partial X} \circ \frac{\partial \chi}{\partial X_{\circ}} = F\,F_{\circ} \quad . \quad ↯$$

7.2. Tensory sprężystości w konfiguracji odkształconej

Z rozważań rozdziału 6 wynika, że tensory sprężystości $\overset{1}{L}_{\chi}, \overset{2}{L}_{\chi}, \ldots$ zależą od tego w jakiej konfiguracji zostały one obliczone. Oczywiste jest również, że tensory sprężystości obliczone w różnych konfiguracjach muszą być związane ze sobą, gdyż reprezentują one przecież cechy fizyczne tego samego ciała stałego.

Zwykle doświadczalnie ustala się stałe sprężyste lub postać funkcji reakcji ciała stałego w jednej wybranej konfiguracji zwykle w stanie naturalnym $\chi_{\circ}$. Stałe sprężyste ciała stałego w dowolnej innej konfiguracji χ można wtedy wyznaczyć poprzez stałe sprężyste lub funkcję reakcji w stanie naturalnym χ, Korzystając ze wziązków transformacyjnych, uzyskanie których jest celem dalszych rozważań.

Tw. 66: Funkcja reakcji $t_{\chi}(\mathbb{C})$ materiału sprężystego przy zmianie konfiguracji porównawczej z χ na $\chi_{\circ}$ spełnia zależność

$$t_{\chi}(\mathbb{C}) = J^{-1}(F_{\circ})\,F_{\circ}\,t_{\chi_{\circ}}\left(F_{\circ}^{T}\,\mathbb{C}\,F_{\circ}\right)F_{\circ}^{T} \tag{7.7}$$

D.

$$T = g_{\varkappa}(F) = J^{-1}(F)\,F\,t_{\varkappa}(C)\,F^{T}$$

$$= g_{\varkappa_0}(F^{*}) = J^{-1}(F^{*})\,F^{*}\,t_{\varkappa_0}\left(F^{*T}F^{*}\right)F^{*T}$$

ale

$$J^{-1}(F) = J^{-1}(F)\,J^{-1}(F_0)$$

i po uproszczeniach otrzymamy (7.7). ↯

Tw. 67: Tensor sprężystości 1-go rzędu w konfiguracji $\varkappa$ spełnia zależność

$$\overset{1}{L}_{\varkappa} \cdot \widetilde{E} = J^{-1}(F_0)\,F_0\left\{2\,G_{\varkappa_0}(C_0)\cdot\left(F_0^{T}\widetilde{E}F_0\right)\right\}F_0^{T} \qquad (7.8)$$

gdzie

$$G_{\varkappa_0}(C_0) \equiv \left.\frac{\partial t_{\varkappa_0}(C^{*})}{\partial C^{*}}\right|_{C^{*}=C_0} \qquad (7.9)$$

D. Zgodnie z rozwinięciem (6.12) oraz (7.7) mamy

$$\overset{1}{L}_{\varkappa} \cdot \widetilde{E} = \left.\frac{d\hat{t}_{\varkappa}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = J^{-1}(F_0)\,F_0\left.\left\{\frac{\partial}{\partial C^{*}}t_{\varkappa_0}\left(F_0^{T}CF_0\right)\cdot\frac{d\hat{C}^{*}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right\}\right|_{\varepsilon=0}F_0^{T}$$

ale

$$C^{*} = F^{*T}F^{*} = F_0^{T}F^{T}FF_0 = F_0^{T}CF_0 \qquad (7.10)$$

i korzystając z $(6.7)_1$ oraz (7.9) otrzymamy (7.8). ↯

<u>Tw. 68:</u> Tensor sprężystości 1-go rzędu w konfiguracji izotropowego sprężystego ciała stałego ma postać

$$
{}^{1}\mathbb{L}_{\varkappa}=2\mathcal{J}^{-1}(\mathbb{F}_\circ)\Big\{-t_{-1}\frac{1}{2}\Big[(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}}+(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}}\Big]+t_{1}\frac{1}{2}\Big[(\mathbb{B}_\circ\otimes\mathbb{B}_\circ)^{\overset{1.4}{T}}+(\mathbb{B}_\circ\otimes\mathbb{B}_\circ)^{\overset{1.3}{T}}\Big]+
$$

$$
+\sum_{r=-1}^{1}\mathbb{B}^{r+1}\otimes\Big[\frac{\partial t_r}{\partial I_{\mathbb{C}_\circ}}\mathbb{B}_\circ+\frac{\partial t_r}{\partial \mathrm{II}_{\mathbb{C}_\circ}}\big(I_{\mathbb{C}_\circ}\mathbb{B}_\circ-\mathbb{B}_\circ^{2}\big)+\frac{\partial t_r}{\partial \mathrm{III}_{\mathbb{C}_\circ}}\mathrm{III}_{\mathbb{C}_\circ}\mathbb{1}\Big]\Big\} \qquad (7.11)
$$

<u>D.</u> Zgodnie z (7.9) i $(4.11)_4$ mamy

$$
\mathbb{G}_{\varkappa_\circ}(\mathbb{C}_\circ)=\frac{\partial}{\partial\mathbb{C}^*}\sum_{r=-1}^{1}\mathbb{C}^{*r}t_r(\mathbb{C}^*)\Big|_{\mathbb{C}^*=\mathbb{C}_\circ}=-t_{-1}\frac{1}{2}\Big[(\overset{-1}{\mathbb{C}}_\circ\otimes\overset{-1}{\mathbb{C}}_\circ)^{\overset{1.4}{T}}+(\overset{-1}{\mathbb{C}}_\circ\otimes\overset{-1}{\mathbb{C}}_\circ)^{\overset{1.3}{T}}\Big]+
$$

$$
+t_{1}\frac{1}{2}\Big[(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}}+(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}}\Big]+\sum_{r=-1}^{1}\mathbb{C}_\circ^{r}\otimes\Big\{\frac{\partial t_r}{\partial I_{\mathbb{C}_\circ}}\mathbb{1}+\frac{\partial t_r}{\partial \mathrm{II}_{\mathbb{C}_\circ}}\big(I_{\mathbb{C}_\circ}\mathbb{1}-\mathbb{C}_\circ\big)+\frac{\partial t_r}{\partial \mathrm{III}_{\mathbb{C}_\circ}}\mathrm{III}_{\mathbb{C}_\circ}\overset{-1}{\mathbb{C}}_\circ\Big\} \qquad (7.12)
$$

ale

$$
\frac{1}{2}\Big[(\overset{-1}{\mathbb{C}}_\circ\otimes\overset{-1}{\mathbb{C}}_\circ)^{\overset{1.4}{T}}+(\overset{-1}{\mathbb{C}}_\circ\otimes\overset{-1}{\mathbb{C}}_\circ)^{\overset{1.3}{T}}\Big]\cdot(\mathbb{F}_\circ^{T}\widetilde{\mathbb{E}}\mathbb{F}_\circ)=\ldots=\overset{-1}{\mathbb{F}}_\circ\widetilde{\mathbb{E}}\overset{-1}{\mathbb{F}}_\circ=\frac{1}{2}\Big[(\overset{-1}{\mathbb{F}}{}_\circ^{T}\otimes\overset{-1}{\mathbb{F}}{}_\circ^{T})^{\overset{1.4}{T}}+(\overset{-1}{\mathbb{F}}{}_\circ^{T}\otimes\overset{-1}{\mathbb{F}}_\circ)^{\overset{1.3}{T}}\Big]\cdot\widetilde{\mathbb{E}}
$$

$$
\frac{1}{2}\Big[(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}}+(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}}\Big]\cdot(\mathbb{F}_\circ^{T}\widetilde{\mathbb{E}}\mathbb{F}_\circ)=\ =\mathbb{F}_\circ^{T}\widetilde{\mathbb{E}}\mathbb{F}_\circ=\frac{1}{2}\Big[(\mathbb{F}_\circ\otimes\mathbb{F}_\circ)^{\overset{1.4}{T}}+(\mathbb{F}_\circ\otimes\mathbb{F}_\circ^{T})^{\overset{1.3}{T}}\Big]\cdot\widetilde{\mathbb{E}}
$$

$$
\mathbb{1}\cdot(\mathbb{F}_\circ^{T}\widetilde{\mathbb{E}}\mathbb{F}_\circ)=\ldots=tr\,(\mathbb{B}_\circ\widetilde{\mathbb{E}})=\mathbb{B}_\circ\cdot\widetilde{\mathbb{E}}
$$

$$
\mathbb{C}_\circ\cdot(\mathbb{F}_\circ^{T}\widetilde{\mathbb{E}}\mathbb{F}_\circ)=\ldots=tr\,(\mathbb{B}_\circ^{T}\mathbb{B}_\circ\widetilde{\mathbb{E}})=(\mathbb{B}^{T}\mathbb{B})\cdot\widetilde{\mathbb{E}}
$$

$$
\overset{-1}{\mathbb{C}}_\circ\cdot(\mathbb{F}_\circ^{T}\widetilde{\mathbb{E}}\mathbb{F}_\circ)=\ldots=tr\,(\widetilde{\mathbb{E}})=\mathbb{1}\cdot\widetilde{\mathbb{E}}
$$

skąd otrzymujemy

$$\mathbb{G}_{\varkappa_0}(\dot{\mathbb{C}}_0)\cdot(\mathbb{F}_0^T\widetilde{\mathbb{E}}\mathbb{F}_0)=-t_{-1}(\overset{-1}{\mathbb{F}_0}\widetilde{\mathbb{E}}\overset{-1}{\mathbb{F}_0}{}^T)+t_1(\mathbb{F}_0^T\widetilde{\mathbb{E}}\mathbb{F}_0)+\sum_{r=-1}^{1}\dot{\mathbb{C}}_0^r\Big\{\frac{\partial t_r}{\partial I_{\mathbb{C}_0}}I_{\mathbb{B}_0\widetilde{\mathbb{E}}}+$$

$$+\frac{\partial t_r}{\partial II_{\mathbb{C}_0}}\left(I_{\mathbb{C}_0}I_{\mathbb{B}_0\widetilde{\mathbb{E}}}-I_{\mathbb{B}_0^2\widetilde{\mathbb{E}}}\right)+\frac{\partial t_r}{\partial III_{\mathbb{C}_0}}III_{\mathbb{C}_0}I_{\widetilde{\mathbb{E}}}\Big\}$$

Korzystając z (7.8) mamy

$$\overset{1}{\mathbb{L}}_{\varkappa}\cdot\widetilde{\mathbb{E}}=2\overset{-1}{\mathcal{J}}(\mathbb{F}_0)\Big\{-t_{-1}\widetilde{\mathbb{E}}+t_1(\mathbb{B}_0\widetilde{\mathbb{E}}\mathbb{B}_0)+\sum_{r=-1}^{1}\mathbb{B}_0^{r+1}\Big[\frac{\partial t_r}{\partial I_{\mathbb{C}_0}}I_{\mathbb{B}_0\widetilde{\mathbb{E}}}+$$

$$+\frac{\partial t_r}{\partial II_{\mathbb{C}_0}}\left(I_{\mathbb{C}_0}II_{\mathbb{B}_0\widetilde{\mathbb{E}}}-I_{\mathbb{B}_0^2\widetilde{\mathbb{E}}}\right)+\frac{\partial t_r}{\partial III_{\mathbb{C}_0}}III_{\mathbb{C}_0}I_{\widetilde{\mathbb{E}}}\Big]\Big\} \tag{7.13}$$

skąd wynika (7.11), gdyż dla $\mathbb{B}_0\in{}^s\mathcal{T}_2$, $\widetilde{\mathbb{E}}\in{}^s\mathcal{T}_2$ mamy

$$I_{\mathbb{B}_0^n\widetilde{\mathbb{E}}}\equiv\mathbb{B}_0^n\cdot\widetilde{\mathbb{E}} \tag{7.14}$$

<u>Tw. 69</u>: Tensor sprężystości 1-go rzędu w konfiguracji $\varkappa$ izotropowego sprężystego ciała stałego, wyrażony w terminach współczynników reakcji $t_r\equiv \bar{t}_{\varkappa_0,r}(\mathbb{E}^*)$ w stanie naturalnym $\varkappa_0$, ma postać

$$\overset{1}{\mathbb{L}}_{\varkappa}=2\overset{-1}{\mathcal{J}}(\mathbb{F}_0)\Big\{-\bar{t}_{-1}\frac{1}{2}\Big[(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}}+(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}}\Big]+\bar{t}_1\frac{1}{2}\Big[(\mathbb{B}_0\otimes\mathbb{B}_0)^{\overset{1.4}{T}}+(\mathbb{B}_0\otimes\mathbb{B}_0)^{\overset{1.3}{T}}\Big]+\sum_{r=-1}^{1}\mathbb{B}_0^{r+1}\otimes\Big[\frac{\partial\bar{t}_r}{\partial I_{\mathbb{E}_0}}\mathbb{B}_0+$$

$$+\frac{\partial\bar{t}_r}{\partial II_{\mathbb{E}_0}}\left(\left(I_{\mathbb{E}_0}-\frac{1}{2}\right)\mathbb{B}_0-\frac{1}{2}\mathbb{B}_0^2\right)+\frac{\partial\bar{t}_r}{\partial III_{\mathbb{E}_0}}\left(\left(II_{\mathbb{E}_0}+\frac{1}{2}I_{\mathbb{E}_0}+\frac{1}{4}\right)\mathbb{B}_0-\left(\frac{1}{2}I_{\mathbb{E}_0}+\frac{1}{2}\right)\mathbb{B}_0^2+\frac{1}{4}\mathbb{B}_0^3\right)\Big]\Big\} \tag{7.15}$$

<u>D.</u> W zależności (7.12) mamy

$$\sum_{\Gamma=-1}^{1} \overset{\Gamma}{\mathbf{C}_\circ} \otimes \frac{\partial \overline{t}_\Gamma}{\partial \mathbf{E}_\circ} = \sum_{\Gamma=-1}^{1} \overset{\Gamma}{\mathbf{C}_\circ} \otimes \left\{ \frac{\partial \overline{t}_\Gamma}{\partial I_{\mathbf{E}_\circ}} \mathbf{1} + \frac{\partial \overline{t}_\Gamma}{\partial II_{\mathbf{E}_\circ}} \left(I_{\mathbf{E}_\circ} \mathbf{1} - \mathbf{E}_\circ \right) + \frac{\partial \overline{t}_\Gamma}{\partial III_{\mathbf{E}_\circ}} \left(II_{\mathbf{E}_\circ} \mathbf{1} - I_{\mathbf{E}_\circ} \mathbf{E}_\circ + \mathbf{E}_\circ^2 \right) \right\} \tag{7.16}$$

ale

$$\mathbf{E}_\circ : \left(\mathbf{F}_\circ^T \widetilde{\mathbf{E}} \mathbf{F}_\circ \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_\circ - \mathbf{1} \right) \cdot \left(\mathbf{F}_\circ^T \widetilde{\mathbf{E}} \mathbf{F}_\circ \right) = \frac{1}{2} \left(I_{\mathbf{B}_\circ^2 \widetilde{\mathbf{E}}} - I_{\mathbf{B}_\circ \widetilde{\mathbf{E}}} \right)$$

$$\mathbf{E}_\circ^2 : \left(\mathbf{F}_\circ^T \widetilde{\mathbf{E}} \mathbf{F}_\circ \right) = \frac{1}{4} \left(\mathbf{C}_\circ^2 - 2\mathbf{C}_\circ + \mathbf{1} \right) \cdot \left(\mathbf{F}_\circ^T \widetilde{\mathbf{E}} \mathbf{F}_\circ \right) = \frac{1}{4} \left(I_{\mathbf{B}_\circ^3 \widetilde{\mathbf{E}}} - 2 I_{\mathbf{B}_\circ^2 \widetilde{\mathbf{E}}} + I_{\mathbf{B}_\circ \widetilde{\mathbf{E}}} \right)$$

co podstawiając do (7.16) i dalej do (7.8) mamy

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{L}_{\varkappa} \cdot \widetilde{\mathbf{E}} = 2 \mathcal{J}^{-1}(\mathbf{F}_\circ) \Big\{ & \overline{t}_{-1} \widetilde{\mathbf{E}} + \overline{t}_1 \left(\mathbf{B}_\circ \widetilde{\mathbf{E}} \mathbf{B}_\circ \right) + \sum_{\Gamma=-1}^{1} \overset{\Gamma}{\mathbf{B}_\circ} \Big[\frac{\partial \overline{t}_\Gamma}{\partial I_{\mathbf{E}_\circ}} I_{\mathbf{B}_\circ \widetilde{\mathbf{E}}} + \\ & + \frac{\partial \overline{t}_\Gamma}{\partial II_{\mathbf{E}_\circ}} \left(\left(I_{\mathbf{E}_\circ} - \frac{1}{2} \right) I_{\mathbf{B}_\circ \widetilde{\mathbf{E}}} - \frac{1}{2} I_{\mathbf{B}_\circ^2 \widetilde{\mathbf{E}}} \right) + \frac{\partial \overline{t}_\Gamma}{\partial III_{\mathbf{E}_\circ}} \left(\left(II_{\mathbf{E}_\circ} + \frac{1}{2} I_{\mathbf{E}_\circ} + \frac{1}{4} \right) I_{\mathbf{B}_\circ \widetilde{\mathbf{E}}} + \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{2} I_{\mathbf{E}_\circ} + \frac{1}{2} \right) I_{\mathbf{B}_\circ^2 \widetilde{\mathbf{E}}} + \frac{1}{4} I_{\mathbf{B}_\circ^3 \widetilde{\mathbf{E}}} \right) \Big] \Big\} \end{aligned} \tag{7.17}$$

skąd, uwzględniając (7.14), wynika (7.15). ↯

7.3. Mała wstępna deformacji

Zależności (7,8), (7.11) oraz (7.15) słuszne są dla dowolnych skończonych deformacji wstępnych. Pozwala to na wyrażenie tensora sprężystości 1-go rzędu w konfiguracji odkształconej $\varkappa$ poprzez współczynniki reakcji materiału w konfiguracji naturalnej $\varkappa_\circ$ dla materiału izotropowego a ogólnie poprzez samo równanie konstytutywne, oraz poprzez odpowiednie tensory odkształcenia konfiguracji $\varkappa_\circ$.

Załóżmy teraz, że deformacja $\chi_\circ$ jest deformacją o małym gradiencie przemieszczenia w sensie rozdziału 6 . Rozwijając wszystkie miary deformacji $\chi_\circ$ w szeregi potęgowe względem ε stojącego przy gradiencie wektora przemieszczenia $H_\circ$ otrzymamy związki między tensorami sprężystości w konfiguracjach $\varkappa$ i $\varkappa_\circ$.

Tw. 70: Tensor sprężystości 1-go rzędu w konfiguracji $\varkappa$, otrzymanej ze stanu naturalnego $\varkappa_\circ$ przy pomocy małej deformacji, spełnia zależność

$$\begin{aligned} {}^1L_{\varkappa}\cdot \tilde{E} = {}^1L_\circ\cdot \tilde{E} + \varepsilon\Big\{ &\big({}^2L_\circ\cdot \tilde{E}_\circ\big)\cdot \tilde{E} + {}^1L_\circ\big(H_\circ^T\tilde{E} + \tilde{E}H_\circ\big) + \big({}^1L_\circ\cdot \tilde{E}\big)H_\circ^T + \\ &+ H_\circ\big({}^1L_\circ\cdot \tilde{E}\big) - I_{\tilde{E}_\circ}\big({}^1L_\circ\cdot \tilde{E}\big)\Big\} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{7.18}$$

D. Rozwijając (7.9) w szereg potęgowy względem ε mamy

$$2G_{\varkappa_0}\left(\hat{\mathbb{C}}_0(\varepsilon)\right)=2\hat{G}_{\varkappa_0}(\varepsilon)-2\hat{G}_{\varkappa_0}(0)+2\left.\frac{dG_{\varkappa}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon+\ldots=$$

$$={}^1\mathbb{L}_0+2\left.\frac{\partial G_{\varkappa_0}(\mathbb{C}_0)}{\partial\mathbb{C}_0}\right|_{\mathbb{C}_0=1}\cdot\left.\frac{d\mathbb{C}_0(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon+\ldots={}^1\mathbb{L}_0+\varepsilon\,{}^2\mathbb{L}_0\cdot\tilde{E}_0+\ldots$$

co podstawiając do (7.8), przy uwzględnieniu (6.6), $(6.8)_2$ mamy

$$^1\mathbb{L}_{\varkappa}:\tilde{E}=\left(1-\varepsilon I_{\tilde{E}_0}\right)\left(\mathbb{1}+\varepsilon H_0\right)\left\{\left[{}^1\mathbb{L}_0+\varepsilon\,{}^2\mathbb{L}_0:\tilde{E}_0\right]\cdot\left[\tilde{E}+\varepsilon\left(H_0^T\tilde{E}+\tilde{E}H_0\right)\right]\right\}\left(\mathbb{1}+\varepsilon H_0^T\right)= \tag{7.19}$$

$$={}^1\mathbb{L}_0:\tilde{E}+\varepsilon\left\{\left[\left({}^2\mathbb{L}_0:\tilde{E}_0\right)\tilde{E}+{}^1\mathbb{L}_0:\left(H_0^T\tilde{E}+\tilde{E}H_0\right)+\left({}^1\mathbb{L}_0:\tilde{E}\right)H_0^T+\right.\right.$$
$$\left.\left.+H_0\left({}^1\mathbb{L}_0:\tilde{E}\right)-I_{\tilde{E}_0}\left({}^1\mathbb{L}_0:\tilde{E}\right)\right]\right\}$$

co i dowodzi (7.18). ↯

<u>Tw. 71:</u> Naprężenie sprężystego ciała stałego po kolejnym nałożeniu, od stanu naturalnego $\varkappa_0$, dwóch deformacji o małych gradientach przemieszczenia ma postać

$$\tilde{T}_{\varkappa}=\varepsilon\,{}^1\mathbb{L}_0:\left(\tilde{E}_0+\tilde{E}\right)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left\{\left[{}^2\mathbb{L}_0:\left(\tilde{E}_0+\tilde{E}\right)\right]\cdot\left(\tilde{E}_0+\tilde{E}\right)+{}^1\mathbb{L}_0:\left(H_0^TH_0+H^TH+\right.\right. \tag{7.20}$$

$$\left.\left.+2H_0^T\tilde{E}+2\tilde{E}H_0\right)+2\left({}^1\mathbb{L}_0:\tilde{E}\right)H_0^T+2H_0\left({}^1\mathbb{L}_0:\tilde{E}\right)-2I_{\tilde{E}}\left({}^1\mathbb{L}_0:\tilde{E}\right)\right\}+\mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

D. Podstawiając w (6.10) rozwinięcia $(6.16)_3$, (7.19) oraz rozwinięcie

$$ {}^2\mathcal{L}_{\varkappa}(\varepsilon) = {}^2\mathcal{L}_o + \ldots \tag{7.21}$$

i zachowując człony rzędu do ε^2 włącznie, otrzymamy (7.20). ↯

Tw.72: Używając tensorów naprężenia $T, T_{\varkappa}, T_{\varkappa_o}, \widetilde{T}_{\varkappa_o}$ zależność (7.20) może być przekształcona do postaci

$$T = \varepsilon\, {}^1L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Big\{ \big[{}^2L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E})\big] \cdot (\widetilde{E}_o + \widetilde{E}) + {}^1L_o : \big(H_o^T H_o + H^T H + 2\widetilde{E} H_o + 2 H_o^T \widetilde{E}\big) + 2(H_o + H)\big[{}^1L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E})\big] + 2\big[{}^1L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E})\big](H_o^T + H^T) - 2\big(I_{\widetilde{E}_o} + I_{\widetilde{E}}\big)\big[{}^1L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E})\big] \Big\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{7.22}$$

$$T_{\varkappa} = \varepsilon\, {}^1L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Big\{ \big[{}^2L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E})\big] \cdot (\widetilde{E}_o + \widetilde{E}) + {}^1L_o : \big(H_o^T H_o + H^T H + 2\widetilde{E} H_o + 2 H_o^T \widetilde{E}\big) + 2(H_o + H)\big[{}^1L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E})\big] + 2\big[{}^1L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E})\big] H_o^T - 2 I_{\widetilde{E}_o}\big[{}^1L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E})\big] \Big\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$T_{\varkappa_o} = \varepsilon\, {}^1L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Big\{ \big[{}^2L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E})\big] \cdot (\widetilde{E}_o + \widetilde{E}) + {}^1L_o : \big(H_o^T H_o + H^T H + 2\widetilde{E} H_o + 2 H_o^T \widetilde{E}\big) + 2(H_o + H)\big[{}^1L_o : (\widetilde{E}_o + \widetilde{E})\big] \Big\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{7.23}$$

$$\tilde{T}_{\varkappa_\circ} = \varepsilon \overset{1}{L}_\circ : (\tilde{E}_\circ + \tilde{E}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Big\{ \big[\overset{2}{L}_\circ : (\tilde{E}_\circ + \tilde{E}) \big] \cdot (\tilde{E}_\circ + \tilde{E}) + \overset{1}{L}_\circ : (H_\circ^T H_\circ + H^T H + 2\tilde{E} H_\circ + 2 H_\circ^T \tilde{E}) \Big\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

D. Stosując zależność $T = \overset{-1}{\mathcal{J}}(F) F \tilde{T}_\varkappa F^T$,
przy korzystaniu z (7.20), (6.6), $(6.8)_2$ otrzymamy $(7.22)_1$ i analogicznie $(7.22)_2$.
Zależności (7.23) otrzymamy analogicznie, np.

$$\tilde{T}_{\varkappa_\circ} = \mathcal{J}(F^*) \overset{-1}{F^*} T (\overset{-1}{F^*})^T = \mathcal{J}(F(\varepsilon)) \mathcal{J}(F_\circ(\varepsilon)) \overset{-1}{F_\circ}(\varepsilon) \overset{-1}{F}(\varepsilon) T(\varepsilon) \overset{-1}{F}{}^T(\varepsilon) \overset{-1}{F_\circ}{}^T(\varepsilon) =$$

$$= \Big[1 + \varepsilon \big(I_{\tilde{E}_\circ} + I_{\tilde{E}}\big)\Big] \Big[\mathbb{1} - \varepsilon \big(H_\circ + H\big)\Big] T(\varepsilon) \Big[\mathbb{1} - \varepsilon \big(H_\circ^T + H^T\big)\Big]$$

skąd po rozwinięciu mamy $(7.23)_2$ i analogicznie $(7.23)_1$. ◀

Tw.73 : Tensor sprężystości 1-go rzędu izotropowego sprężystego ciała stałego w konfiguracji $\varkappa$, otrzymanej z $\varkappa_\circ$ przy pomocy małej deformacji, ma postać

$$\overset{1}{L}_\varkappa = \Big[\lambda_\circ + \varepsilon \big(2\pi_{3\circ} + 4\pi_{4\circ} - \lambda_\circ\big) I_{\tilde{E}_\circ}\Big] (\mathbb{1} \circ \mathbb{1}) + \Big[\mu_\circ + \varepsilon \big(\pi_{5\circ} - \mu_\circ\big) I_{\tilde{E}_\circ}\Big] \Big[(\mathbb{1} \circ \mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbb{1} \circ \mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}}\Big] + \varepsilon \Big\{ \big(-\pi_{4\circ} + 2\lambda_\circ\big)(\mathbb{1} \circ \tilde{E}_\circ) + 2\lambda_\circ (\tilde{E}_\circ \circ \mathbb{1}) + \Big(\frac{1}{2}\pi_{6\circ} + 2\mu_\circ\Big) \Big[(\tilde{E}_\circ \circ \mathbb{1})^{\overset{1.4}{T}} + (\tilde{E}_\circ \circ \mathbb{1})^{\overset{1.3}{T}} + (\mathbb{1} \circ \tilde{E}_\circ)^{\overset{1.4}{T}} + (\mathbb{1} \circ \tilde{E}_\circ)^{\overset{1.3}{T}}\Big] \Big\} \qquad (7.24)$$

D. Zgodnie z (7.18), przy wykorzystaniu (6.22) w stanie naturalnym $\varkappa_o$ oraz tożsamości (3.21), mamy:

$$\overset{1}{L}_o \cdot \tilde{E} = \left\{ \lambda_o (1 \otimes 1) + \mu_o \left[(1 \otimes 1)^{\overset{1.4}{T}} + (1 \otimes 1)^{\overset{1.3}{T}} \right] \right\} \cdot \tilde{E}$$

$$\left(\overset{2}{L}_o : \tilde{E}_o\right) \cdot \tilde{E} = \left\{ 2\pi_{3o} I_{\tilde{E}_o} (1 \otimes 1) + \pi_{4o} I_{\tilde{E}_o} (1 \otimes 1) - \pi_{4o} (1 \otimes \tilde{E}_o) + \right.$$

$$\left. + \pi_{5o} I_{\tilde{E}_o} \left[(1 \otimes 1)^{\overset{1.4}{T}} + (1 \otimes 1)^{\overset{1.3}{T}} \right] + \pi_{6o} \cdot \frac{1}{2} \left[(\tilde{E}_o \otimes 1)^{\overset{1.4}{T}} + (\tilde{E}_o \otimes 1)^{\overset{1.3}{T}} + (1 \otimes \tilde{E}_o)^{\overset{1.4}{T}} + (1 \otimes \tilde{E}_o)^{\overset{1.3}{T}} \right] \right\} \cdot \tilde{E}$$

$$\overset{1}{L}_o \cdot \left(H_o^T \tilde{E} + \tilde{E} H_o \right) = \left\{ 2\lambda_o (1 \otimes \tilde{E}_o) + \mu_o \left[(H_o \otimes 1)^{\overset{1.4}{T}} + (H_o \otimes 1)^{\overset{1.3}{T}} + (1 \otimes H_o)^{\overset{1.4}{T}} + (1 \otimes H_o)^{\overset{1.3}{T}} \right] \right\} \tilde{E}$$

$$\left(\overset{1}{L}_o \cdot \tilde{E}\right) H_o^T = \left\{ \lambda_o (H_o^T \otimes 1) + \mu_o \left[(H_o^T \otimes 1)^{\overset{1.4}{T}} + (H_o^T \otimes 1)^{\overset{1.3}{T}} \right] \right\} \cdot \tilde{E}$$

$$H_o \left(\overset{1}{L}_o \cdot \tilde{E}\right) = \left\{ \lambda_o (H_o \otimes 1) + \mu_o \left[(1 \otimes H_o^T)^{\overset{1.4}{T}} + (1 \otimes H_o)^{\overset{1.3}{T}} \right] \right\} \cdot \tilde{E}$$

$$-I_{\tilde{E}_o} \left(\overset{1}{L}_o \cdot \tilde{E}\right) = \left\{ -\lambda_o I_{\tilde{E}_o} (1 \otimes 1) - \mu_o I_{\tilde{E}_o} \left[(1 \otimes 1)^{\overset{1.4}{T}} + (1 \otimes 1)^{\overset{1.3}{T}} \right] \right\} \cdot \tilde{E}$$

Sumując powyższe wyrażenia zgodnie z (7.18) otrzymamy (7.24).

Tw. 74: Naprężenie izotropowego sprężystego ciała stałego po kolejnym nałożeniu, od stanu naturalnego $\varkappa_\circ$ dwóch deformacji o małych gradientach przemieszczenia ma postać

$$\tilde{T}_{\varkappa_\circ} = \varepsilon\left[\lambda_\circ I_{(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E})}\mathbb{1} + 2\mu_\circ\left(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E}\right)\right] + \varepsilon^2\left\{\left[\pi_{3\circ} I^2_{(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E})} + \frac{\lambda_\circ}{2} I_{(\underset{\circ}{H}+H)^T(\underset{\circ}{H}+H)} + \right.\right.$$

$$\left. + \pi_{4\circ} I\!I_{(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E})}\right]\mathbb{1} + \pi_{5\circ} I_{(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E})}\left(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E}\right) + \pi_{6\circ}\left(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E}\right)^2 + \qquad (7.25)$$

$$+\mu_\circ\left(\underset{\circ}{H}+H\right)^T\left(\underset{\circ}{H}+H\right) + \frac{\lambda_\circ}{2}\left(I_{H\underset{\circ}{H}} + I_{\underset{\circ}{H}^T H^T}\right)\mathbb{1} + \mu_\circ\left(H\underset{\circ}{H} + \underset{\circ}{H}^T H^T\right) + O(\varepsilon^3)$$

D. Zależności (6.22) podstawmy do $(7.23)_2$, co daje

$$\overset{1}{\underset{\circ}{L}} : \left(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E}\right) = \lambda_\circ I_{(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E})}\mathbb{1} + 2\mu_\circ\left(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E}\right)$$

$$\left[\overset{2}{\underset{\circ}{L}} : \left(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E}\right)\right]\cdot\left(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E}\right) = 2\left[\pi_{3\circ} I^2_{(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E})} + \pi_{4\circ} I\!I_{(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E})}\right] + 2\pi_{5\circ} I_{(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E})}\left(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E}\right) +$$

$$+ 2\pi_{6\circ}\left(\underset{\circ}{\tilde{E}}+\tilde{E}\right)$$

$$\overset{1}{\underset{\circ}{L}} : \left(\underset{\circ}{H}^T\underset{\circ}{H} + H^T H + H\underset{\circ}{H} + H^T\underset{\circ}{H} + \underset{\circ}{H}^T H + \underset{\circ}{H}^T H^T\right) = \lambda_\circ I_{(\underset{\circ}{H}+H)^T(\underset{\circ}{H}+H)}\mathbb{1} +$$

$$+ 2\mu_\circ\left(\underset{\circ}{H}+H\right)^T\left(\underset{\circ}{H}+H\right) + \lambda_\circ\left(I_{H\underset{\circ}{H}} + I_{\underset{\circ}{H}^T H^T}\right)\mathbb{1} + 2\mu_\circ\left(H\underset{\circ}{H} + \underset{\circ}{H}^T H^T\right)$$

Sumując powyższe wyrażenia otrzymamy (7.25) .

<u>Tw.75:</u> Używając tensora $\mathcal{T}$, zależność (7.25) może być przekształcona do postaci

$$\mathcal{T}=\varepsilon\left[\lambda_\circ I_{(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}})}\mathbb{1}+2\mu_\circ\left(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}}\right)\right]+\varepsilon^2\left\{\left[\left(\pi_{3\circ}-\lambda_\circ\right)I^2_{(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}})}+\frac{\lambda_\circ}{2}tr\left\{(H_\circ+H)^T(H_\circ+H)+\right.\right.\right.$$

$$\left.+HH_\circ+H_\circ^TH\right\}+\pi_4\,\mathrm{II}_{(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}})}\Big]\mathbb{1}+\left(\pi_{5\circ}+2\lambda_\circ-2\mu_\circ\right)I_{(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}})}\left(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}}\right)+ \quad (7.26)$$

$$+\left(\pi_{6\circ}+4\mu_\circ\right)\left(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}}\right)^2+\mu_\circ\left[\left(H_\circ+H\right)\left(H_\circ^T+H^T\right)+HH_\circ+H_\circ^TH^T\right]\Big\}+\mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

<u>D.</u>

$$\left(H_\circ+H\right)\left[\overset{1}{\mathbb{L}}_\circ:\left(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}}\right)\right]=\lambda_\circ I_{(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}})}\left(H_\circ+H\right)+2\mu_\circ\left(H_\circ+H\right)\left(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}}\right)$$

$$\left[\overset{1}{\mathbb{L}}_\circ:\left(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}}\right)\right]\cdot\left(H_\circ^T+H^T\right)=\lambda_\circ I_{(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}})}\left(H_\circ^T+H^T\right)+2\mu_\circ\left(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}}\right)\left(H_\circ^T+H^T\right) \quad (7.27)$$

$$-I_{(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}})}\overset{1}{\mathbb{L}}_\circ:\left(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}}\right)=-\lambda_\circ I^2_{(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}})}\mathbb{1}-2\mu_\circ I_{(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}})}\left(\tilde{\mathbb{E}}_\circ+\tilde{\mathbb{E}}\right) \quad (7.27)_3$$

co podstawiając do (7.22) mamy (7.26). ↯

LITERATURA

[1] Noll W., A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuum media, Arch.Rational Mech.Anal., vol 2 (1958), 3, 195-226

[2] Truesdell C., Noll W., The non-linear field theory, Encyclopedia of Physics, Ed.S.Flügge, vol.III/3, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.

[3] Gurtin M.E., Thermodynamics and the Possibility of Spatial Interaction in Elastic Materials, Arch.Rational Mech.Anal, vol.19 (1965), 5, 339 - 352.

[4] Gurtin M.E., On the thermodynamics of elastic materials, J.Math.Anal.Appl., vol.18 (1967), 1, 38 - 44.

[5] Noll W., Materially uniform simple bodies with inhomogeneties, Arch.Rational Mech.Anal., Vol.27/1967/, 1-32.

[6] Truesdell C., The elements of continuum mechanics, Springer-Verlag, New York 1966.

[7]

[8] Rychlewski J., Tensory i funkcje tensorowe, Biuletyn IMP PAN Nr 631, 1969

[9] Toupin R.A., Rivlin R.S., Dimensional changes in crystals caused by dislocations, J.Math.Phys. vol.1 (1960), 1, 8-15.

[10] Pietraszkiewicz W., Stałe sprężyste 2-go rzędu dla izotropowego materiału sprężystego, Biuletyn IMP PAN Nr 612, Gdańsk 1968.

[11] Pietraszkiewicz W., Naprężenia izotropowego ciała sprężystego po kolejnym nałożeniu dwóch małych deformacji,

[12] Pietraszkiewicz W., Termodynamika materiału sprężystego,

[13] Coleman B.D., Markowitz H., Noll W., Viscometric flow of non-newtonian fluids, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

Streszczenie

Opracowanie zawiera podstawowe definicje, twierdzenia z dowodami i wnioski mechanicznej teorii materiałów sprężystych w wersji rozwijanej przez Nolla, Truesdella i innych. Konsekwentnie używany jest rachunek absolutny. Szczególną uwagę zwraca się w opracowaniu na wyróżnienie definicji i postulatów od twierdzeń, które można udowodnić w ramach przyjętego modelu ośrodka ciągłego, przy czym dowody z reguły są podane.

Zakres zagadnień ujętych w opracowaniu jest szeroki. M.in. przeanalizowano różne postacie równań konstytutyw - nych materiału sprężystego i hipersprężystego podano różne postacie równań ruchu w opisie Lagrange'a i Eulera oraz formułowano warunki brzegowe, zbadano własności materiałów izotropowych oraz pokazano ściśle przejście do teorii małego gradientu przemieszczenia. Zbadano również zagadnienia nałożenia deformacji sprężystych. Opracowanie zawiera również niektóre podstawowe zależności algebry i analizy funkcji tensorowych, tym niemniej czytanie opracowania niewątpliwie ułatwi chociaż pobieżna znajomość rachunku absolutnego oraz podstaw mechaniki racjonalnej.