

mechanika sprężystych płyt i powłok

pod redakcją
Czesława Woźniaka



Warszawa 2001
Wydawnictwo Naukowe PWN

Autorzy:

Szczepan Borkowski — Część IV (rozdz. 1, 3),
Część V (rozdz. 4)

Grzegorz Jemielita — Część II, III, Bibliografia

Bohdan Michalak — Część V (rozdz. 2, 3)

Roman Nagórski — Część V (rozdz. 5)

Wojciech Pietraszkiewicz — Część IV (rozdz. 2)

Marek Rudnicki — Część V (rozdz. 6)

Małgorzata Woźniak — Część V (rozdz. 1)

Czesław Woźniak — Część I

Obwolutę, okładkę i strony tytułowe projektował
Zygmunt Ziemka

Copyright © by
Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2001

ISBN 83-01-13442-9

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10
tel.: (0-22) 695-43-21
faks: (0-22) 826-71-63
e-mail: pwn@pwn.com.pl
<http://www.pwn.com.pl>

2

Teorie nieliniowe powłok

2.1. Wstęp

Celem tego rozdziału jest przedstawienie szeregu sformułowań szczegółowych zagadnień brzegowych opisujących nieliniowe zachowanie się cienkościennych powłok sprężystych pod działaniem statycznych obciążeń zewnętrznych.

Jak wskazano w części pierwszej, w literaturze znanych jest wiele sposobów konstruowania modeli dwuwymiarowych nieliniowej mechaniki powłok. Każdy z takich 2D-modeli ma ograniczony zakres zastosowań, wynikający z założeń wykorzystanych podczas jego konstruowania z zależności trójwymiarowych mechaniki ośrodka ciągłego. Każdy 2D-model może być wyrażony przez różne pola, określone na powierzchni podstawowej, jako zmienne niezależne. Zagadnienie brzegowe względem wybranych pól może być formułowane zarówno w postaci układu równań różniczkowych cząstkowych z warunkami brzegowymi, jak i przez przyrostowe lub globalne zasady wariacyjne.

W mechanice powłok sprężystych wyróżnia się zazwyczaj dwa główne źródła nieliniowości: geometryczne i fizyczne. Przez teorię *geometrycznie nieliniową* będziemy rozumieli taki 2D-model powłoki, w którym zależności kinematyczne (wyrażające miary odkształceń przez parametry stanu przemieszczenia) są nieliniowe, natomiast równania konstytutywne (wiążące miary naprężeń i odkształceń) są liniowe. Większość publikacji z nieliniowej mechaniki powłok dotyczy właśnie teorii geometrycznie nieliniowej. Wynika to z dotychczasowych potrzeb praktyki inżynierskiej, gdyż większość tradycyjnych materiałów konstrukcyjnych takich jak stal, aluminium, żelbet itp. pozostają w przybliżeniu sprężyste tylko w zakresie małych odkształceń względnych rzędu $< 1\%$.

Ostatnio rośnie liczba prac dotyczących analizy nieliniowej powłok polimerowych, kompozytowych, gumopodobnych lub też powłok z tkanek biologicznych. Materiały te dopuszczają odwracalne odkształcenia sprężyste w znacznym zakresie deformacji, a ich równania konstytutywne nie są już liniowe. Duże odkształcenia w powłoce nie są na ogół możliwe bez jednoczesnego pojawienia się dużych przesunięć i/lub obrotów włókien materialnych powłoki. Dlatego tej fizycznej nieliniowości z reguły towarzyszy nieliniowość geometryczna, a analiza takich zadań musi być oparta na w pełni nieliniowym modelu powłoki. Zakres zastosowań tylko *fizycznie nieliniowej* teorii powłok (liniowe zależności kinematyczne, nieliniowe równania konstytutywne) jest bardzo ograniczony i taka teoria powłok nie będzie przedmiotem rozważań tego rozdziału.

Zachowanie się szerokiej klasy powłok sprężystych pod wpływem obciążeń zewnętrznych zależy głównie od sztywności powłoki na zmianę metryki i krzywizny jej powierzchni podstawowej. Dlatego najczęściej stosowanym 2D-modelem jest model powłoki *cienkiej*, zwany też w literaturze modelem typu Kirchhoffa–Love’a lub modelem trójparametrowym. W modelu tym zakłada się, że deformacja powłoki jako ciała trójwymiarowego opisywana jest z wystarczającą dokładnością tylko deformacją jej powierzchni podstawowej, określoną przez trzy składowe pola przesunięć. Taki 2D-model powłoki zaproponował już Aron [1874:1], rozszerzając na teorię powłok założenia nieliniowej teorii płyt Kirchhoffa [1850:1], a do rozpowszechnienia tego modelu przyczyniła się praca Love’a [1889:2] z liniowej teorii powłok oraz jego późniejsza monografia [1927:1]. Ten najpowszechniej stosowany 2D-model powłoki cienkiej przedstawimy w trzech kolejnych rozdziałach z różnych współczesnych punktów widzenia.

Po omówieniu w 2.2.1 podstawowych zależności geometrycznych powierzchni, nieliniowe równania równowagi powłoki cienkiej oraz odpowiednie energetycznie spójne statyczne i geometryczne warunki brzegowe wyprowadzono w 2.2.2 z zasady pracy wirtualnej (2.20) postulowanej dla powierzchni podstawowej powłoki. W tej zasadzie uwzględnia się ogólny przypadek obciążeń zewnętrznych oraz dowolną deformację powierzchni i jej brzegu. Zależności podstawowe sformułowano zarówno w stacjonarnym opisie Lagrange’a (2.35), gdzie wszystkie pola są mierzone i rozkładane w znanej geometrii powierzchni nieodkształconej, jak i w opisie mieszanym (2.40), w którym wszystkie pola są mierzone w geometrii powierzchni nieodkształconej, ale wyrażane są poprzez składowe w nieznannej geometrii powierzchni odkształconej. Ogólna postać spójnych z zasadą pracy wirtualnej równań konstytutywnych (2.43) ujmuje przypadki zarówno małych, jak i dużych odkształceń sprężystych. W szczególności, sformułowano kompletne zagadnienie brzegowe w przesunięciach oraz skonstruowano odpowiednią przyrostową zasadę wirtualnych przesunięć (2.47) i globalną zasadę wariacyjną (2.50) całkowitej energii potencjalnej. Skonstruowano również globalną wielopolową zasadę wariacyjną typu Hu-Washizu (2.52), z której można wygenerować różne inne zasady wariacyjne stanowiące podstawę komputerowej analizy nieliniowej cienkich konstrukcji i elementów powłokowych. Krótko scharakteryzowano specyfikę nieliniowej teorii membran i nieliniowej teorii cienkich powłok nieregularnych.

Konsekwentne uproszczenie równań w przesunięciach z 2.2.2 jest przedmiotem rozważań 2.3.2. Najpierw założono, że odkształcenia w powłoce są *małe*. Dla takiej teorii *geometrycznie nieliniowej* konsekwentne pierwsze przybliżenie funkcji gęstości energii sprężystej powłoki jest sumą dwóch funkcji kwadratowych (2.55) określających dwa główne składniki tej energii od rozciągania (ściskania) i zginania powierzchni podstawowej. Odpowiednio uproszczone zagadnienie brzegowe jest jednak nadal dość skomplikowane. Dlatego w 2.3.3 przedstawiono zasady klasyfikacji dalszych uproszczeń tego sformułowania zaproponowanej w [1977:30], [1979:40] i opartej na konsekwentnych ograniczeniach dopuszczalnych obrotów włókien materialnych powłoki kolejno do dużych, umiarkowanych i małych. Uwzględnia się przy tym znaną własność deformacji powłoki, że obroty dookoła normalnej są zazwyczaj bardziej skrępowane od

obrotów dookoła stycznych do powierzchni podstawowej. Wykorzystując oszacowany błąd funkcji gęstości energii odkształcenia, dla każdego zakresu obrotów podano konsekwentnie uproszczone związki kinematyczne, które następnie umożliwiają wygenerowanie wszystkich innych odpowiednio uproszczonych zależności. W ten sposób opracowano spójne warianty teorii dużych (2.3.4) i umiarkowanych (2.3.5) obrotów, a także znane zależności nieliniowej teorii powłok o małej wyniosłości (2.3.6).

Niektóre zadania nieliniowej mechaniki powłok mogą być łatwiej analizowane w innych niż przesunięcia zmiennych niezależnych. Szereg takich alternatywnych sformułowań omówiono w punkcie 2.4. Deformacja powłoki jest tu opisana w nieholonomicznej bazie obróconej, wynikającej z rozkładu biegunowego (2.117) gradientu deformacji powierzchni. Wprowadzono obroty jako zmienne niezależne teorii, a ich zależność od przesunięć uwzględniono za pomocą dołączenia do zagadnienia brzegowego trzech równań więzów (2.132). W 2.4.4 sformułowano zagadnienie brzegowe w przesunięciach, obrotach i czterech mnożnikach Lagrange'a jako zmiennych niezależnych oraz podano odpowiednie zasady wariacyjne, przyrostowe i globalne.

Przeanalizowano również możliwość sformułowania zagadnienia brzegowego przez siły błonowe i zmiany krzywizn traktowane jako zmienne niezależne. W teorii małych odkształceń takie sformułowanie równań równowagi i równań ciągłości podlega analogii statyczno-geometrycznej (2.172). Podano rozszerzone równania wewnętrzne nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych oraz odpowiednie uproszczone statyczne i deformacyjne warunki brzegowe. Szczególnymi przypadkami tego sformułowania wewnętrznego są odpowiednie zależności nieliniowej teorii płyt (2.178), teoria prawie bezwydłużeniowego zginania (2.180), teoria prawie membranowa (2.181) oraz teoria zgięciowa powłok sprężystych (2.183). Ta ostatnia może być zredukowana przy wolno zmiennych krzywiznach do układu dwóch równań (2.186), względem funkcji naprężeń i funkcji deformacji powłoki.

W punkcie 2.5 omówiono podstawy *ogólnej nieliniowej* teorii powłok, której koncepcję kinematyczną podał Reissner [1974:49], a rozwinęli Libai i Simmonds [1983:44], [1997:2] oraz Makowski i Stumpf [1990:10], [1994:11]. W tym ogólnym sformułowaniu, warunki równowagi powłoki (2.207) konstruowane są ściśle przez bezpośrednie całkowanie po grubości powłoki odpowiednich zależności ośrodka ciągłego. Powierzchniowa kinematyka powłoki jest również konstruowana ściśle na podstawie wirtualnej energetycznej tożsamości całkowitej (2.208) formułowanej na powierzchni podstawowej. Okazuje się, że modelem kinematycznym ogólnej teorii powłok jest powierzchnia Cosserat [1909:2], której deformacja określona jest przez wektor przesunięcia powierzchni podstawowej oraz tensor właściwego obrotu opisujący uśredniony obrót przekroju powłoki. Ogólna konieczna struktura dwuwymiarowych równań konstytutywnych materiału sprężystego (2.219) i (2.220) wynika również z tożsamości całkowitej (2.208). Ale każda szczególna postać równań konstytutywnych obarczona jest pewnym błędem, wynikającym albo z przybliżonego ich wyprowadzenia z trójwymiarowych równań konstytutywnych, albo z błędu powierzchniowych badań eksperymentalnych.

Dla takiej *statycznie i kinematycznie ścisłej* teorii powłok sformułowane zostały dodatkowo statyczne warunki skoku (2.233) na krzywych osobliwych, niezbędne do

formułowania modeli powłok nieregularnych zawierających załamania, rozgałęzienia, usztywnienia, połączenia technologiczne, nieciągłe zmiany grubości i/lub własności materiałowych itp. Taką ogólną teorię nieregularnych powłok sprężystych przedstawiono w 2.5.6 w postaci kilku zagadnień brzegowych, względem różnych kombinacji pól niezależnych. Sformułowano również zasadę pracy wirtualnej (2.245), zasadę wirtualnych przemieszczeń (2.246), zasadę stacjonarności całkowitej energii potencjalnej (2.249) i zasadę wariacyjną typu Hu-Washizu (2.252).

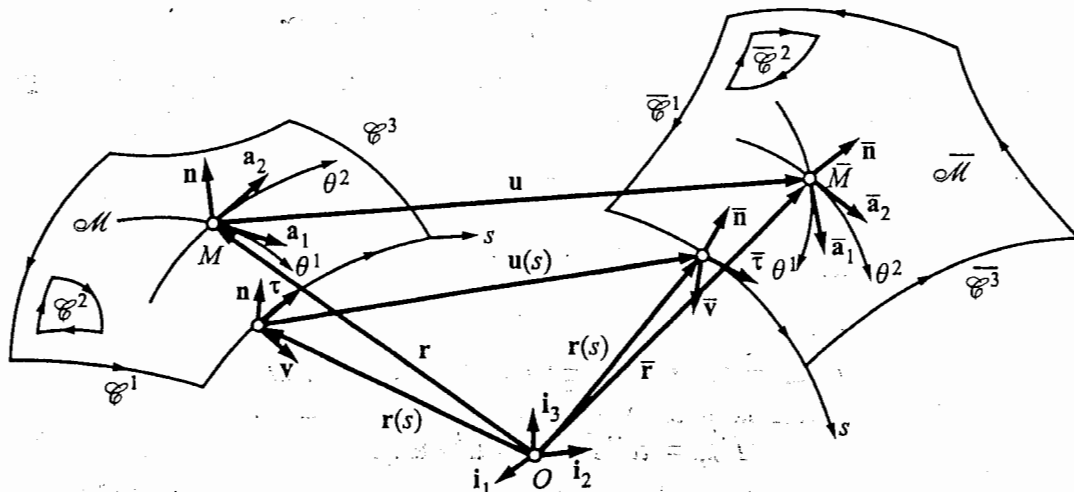
2.2. Podstawy nieliniowej teorii powłok cienkich

2.2.1. Oznaczenia i zależności geometryczne

W tym rozdziale będziemy stosowali system oznaczeń używany przez autora w [1979:40], [1980:62], [1984:62], [1989:6], gdzie podano też bardziej szczegółowe wyprowadzenia wielu rozważanych tu związków geometrycznych i fizycznych.

Niech \mathcal{E} będzie trójwymiarową Euklidesową przestrzenią punktową (przestrzenią fizyczną), a (O, \mathbf{i}_k) dowolnie wybranym w \mathcal{E} układem odniesienia, gdzie $O \in \mathcal{E}$ jest początkiem tego układu, a $\mathbf{i}_k \in \mathcal{V}$, $k = 1, 2, 3$ ortonormalną bazą trójwymiarowej przestrzeni wektorowej \mathcal{V} (przestrzeni translacyjnej \mathcal{E}).

Powierzchnię regularną \mathcal{M} w \mathcal{E} określamy lokalnie za pomocą wektora wodzącego punktów $M \in \mathcal{M}$ (rys. 2.1)



Rys. 2.1

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{k=1}^3 r^k(\theta^\alpha) \mathbf{i}_k \equiv r^k \mathbf{i}_k, \quad (2.1)$$

gdzie $r^k \in R$ są współrzędnymi kartezjańskimi punktu $M \in \mathcal{M}$ w wybranym układzie odniesienia, a θ^α , $\alpha = 1, 2$, jego współrzędnymi krzywoliniowymi. Regularność \mathcal{M} oznacza, że funkcje $r^k(\theta^\alpha)$ są ciągłe i mają ciągłe pochodne cząstkowe do trzeciego rzędu, a ponadto spełniony jest warunek $\mathbf{r}_{,1} \times \mathbf{r}_{,2} \neq \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{r}_{,a} \equiv \partial \mathbf{r} / \partial \theta^a$.

Geometria powierzchni regularnych przedstawiona jest w wielu klasycznych monografiach matematycznych, a w zakresie niezbędnym w teorii powłok — w podręcznikach i monografiach z tej dziedziny, np. [1963:57], [1964:45], [1985:27]. W celu ustalenia oznaczeń, przypomnijmy następujące związki geometryczne:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_a &= \mathbf{r}_{,a}, & a_{\alpha\beta} &= \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, & a &= \det(a_{\alpha\beta}) > 0, \\ \mathbf{a}^\beta \cdot \mathbf{a}_\alpha &= \delta_\alpha^\beta, & a^{\alpha\beta} &= \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta, & \mathbf{a}^\beta &= a^{\beta\alpha} \mathbf{a}_\alpha, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \quad b_{\alpha\beta} = -\mathbf{n}_{,a} \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad b = \det(b_{\alpha\beta}), \quad K = \frac{b}{a},$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = (\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta) \cdot \mathbf{n}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\mu} = \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\mu - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\lambda \equiv \delta_{\alpha\beta}^{\lambda\mu}.$$

W powyższych związkach \mathbf{a}_a i \mathbf{a}^β są wektorami lokalnej bazy naturalnej i dualnej powierzchni \mathcal{M} , $a_{\alpha\beta}$ i $a^{\alpha\beta}$ są kowariantnymi i kontrawariantnymi składowymi tensora metrycznego \mathbf{a} powierzchni, \mathbf{n} jest wektorem jednostkowym normalnym do powierzchni \mathcal{M} ustalającym jej orientację, $b_{\alpha\beta}$ są kowariantnymi składowymi tensora krzywizny \mathbf{b} powierzchni, K jest krzywizną Gaussa powierzchni, $\epsilon_{\alpha\beta}$ są kowariantnymi składowymi tensora permutacji na powierzchni, dla których $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = \sqrt{a}$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$, natomiast δ_α^β jest symbolem Kroneckera, $\delta_1^1 = \delta_2^2 = 1$, $\delta_2^1 = \delta_1^2 = 0$.

Składowe $a_{\alpha\beta}$ i $b_{\alpha\beta}$ spełniają dwa równania Codazziego–Mainardiego i jedno równanie Gaussa

$$b_{a\lambda|\mu} = b_{a\mu|\lambda}, \quad b_{a\lambda} b_{\beta\mu} - b_{a\mu} b_{\beta\lambda} = R_{\alpha\beta\lambda\mu}. \quad (2.3)$$

W (2.3) symbol $(\cdot)_{|\mu}$ oznacza pochodną kowariantną na \mathcal{M} , a $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$ są składowymi tensora Riemanna–Christoffela, określonymi za pomocą następujących zależności:

$$\begin{aligned} b_{a\lambda|\mu} &= b_{a\lambda,\mu} - \Gamma_{a\mu}^\kappa b_{\kappa\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa b_{a\kappa}, \\ R_{\alpha\beta\lambda\mu} &= \Gamma_{\alpha,\beta\mu,\lambda} - \Gamma_{\alpha\beta\lambda,\mu} + \Gamma_{a\mu}^\kappa \Gamma_{\kappa,\beta\lambda} - \Gamma_{a\lambda}^\kappa \Gamma_{\kappa,\beta\mu}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \mathbf{a}_\mu \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} (a_{\mu\alpha,\beta} + a_{\mu\beta,\alpha} - a_{\alpha\beta,\mu}),$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = a^{\lambda\mu} \Gamma_{\mu,\alpha\beta} = \mathbf{a}^\lambda \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta},$$

gdzie $\Gamma_{\mu,\alpha\beta}$ i $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ są symbolami Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju.

Deformację powierzchni \mathcal{M} w przestrzeni \mathcal{E} można określić odwzorowaniem $\chi: \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$ unoszącym każdy punkt M powierzchni nieodkształconej \mathcal{M} do innego miejsca $\bar{M} \in \bar{\mathcal{M}}$ w przestrzeni \mathcal{E} . We wspólnym układzie odniesienia (O, \mathbf{i}_k) mamy

$$\bar{\mathbf{r}} = \chi[\mathbf{r}(\theta^a)] = \bar{r}^k(\theta^a) \mathbf{i}_k = \mathbf{r}(\theta^a) + \mathbf{u}(\theta^a), \quad (2.5)$$

gdzie $\chi: \mathcal{V} \rightarrow \bar{\mathcal{V}}$ jest globalnie odwracalnym, ciągłym odwzorowaniem klasy C^3 , θ^a są krzywoliniowymi współrzędnymi konwekcyjnymi, a $\mathbf{u} = u^a \mathbf{a}_a + w \mathbf{n}$ jest polem przesunięć powierzchni \mathcal{M} .

Wektor wodzący $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(\theta^a)$ regularnej powierzchni odkształconej $\bar{\mathcal{M}}$ określa analogiczne do (2.2)–(2.4) wielkości geometryczne na $\bar{\mathcal{M}}$ wyróżnione dodatkowo kreską: $\bar{\mathbf{a}}_a = \bar{\mathbf{r}}_{,a}$, $\bar{a}_{a\beta} = \bar{\mathbf{a}}_a \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta$, $\bar{a} = \det(\bar{a}_{a\beta}) > 0$, $\bar{\mathbf{a}}^\beta \cdot \bar{\mathbf{a}}_a = \delta_a^\beta$, $\bar{a}^{a\beta} = \bar{\mathbf{a}}^a \cdot \bar{\mathbf{a}}^\beta$, $\bar{\mathbf{n}} = \bar{a}^{-1/2} \bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2$, $\bar{b}_{a\beta} = -\bar{\mathbf{n}}_{,a} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta$, $\bar{b} = \det(\bar{b}_{a\beta})$, $\bar{K} = \bar{b}/\bar{a}$, $\bar{\epsilon}_{a\beta} = (\bar{\mathbf{a}}_a \times \bar{\mathbf{a}}_\beta) \cdot \bar{\mathbf{n}}$, $\bar{R}_{a\beta\lambda\mu}$, $(\)_{|a}$, itd. Wszystkie zależności geometryczne odnoszące się do powierzchni odkształconej $\bar{\mathcal{M}}$ są takie same jak analogiczne zależności powierzchni nieodkształconej \mathcal{M} , jedynie każda wielkość geometryczna zdefiniowana na $\bar{\mathcal{M}}$ jest wyróżniona dodatkową kreską.

W układzie współrzędnych konwekcyjnych θ^a wielkości geometryczne powierzchni odkształconej $\bar{\mathcal{M}}$ można wyrazić przez analogiczne wielkości geometryczne powierzchni nieodkształconej \mathcal{M} i składowe pola przesunięć \mathbf{u} , por. [1980:62], [1984:62]. W szczególności, dla wektorów bazy $\bar{\mathbf{a}}_a$, $\bar{\mathbf{n}}$ otrzymamy

$$\bar{\mathbf{a}}_a = (r^k_{,a} + u^k_{,a}) \mathbf{i}_k = \mathbf{a}_a + \mathbf{u}_{,a} = l^{\lambda}_{,a} \mathbf{a}_\lambda + \varphi_a \mathbf{n}, \quad (2.6)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^{a\beta} \bar{\mathbf{a}}_a \times \bar{\mathbf{a}}_\beta = n_a \mathbf{a}^a + n \mathbf{n},$$

gdzie

$$\begin{aligned} l_{a\beta} &= a_{a\lambda} l^{\lambda}_{,\beta} = \mathbf{a}_a \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta = a_{a\beta} + \varphi_{a\beta}, \\ \varphi_{a\beta} &= \mathbf{a}_a \cdot \mathbf{u}_{,\beta} = u_{a|\beta} - b_{a\beta} w, \quad \varphi_a = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{,a} = w_{,a} + b_a^\lambda u_\lambda, \\ \bar{\epsilon}^{a\beta} &= j^{-1} \epsilon^{a\beta}, \quad \bar{\epsilon}_{a\beta} = j \epsilon_{a\beta}, \quad j = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$n_\mu = j^{-1} \epsilon^{a\beta} \epsilon_{\lambda\mu} \varphi_a l^{\lambda}_{,\beta} = j^{-1} (\varphi_\lambda l^{\lambda}_{,\mu} - \varphi_\mu l^{\lambda}_{,\lambda}),$$

$$n = \frac{1}{2} j^{-1} \epsilon^{a\beta} \epsilon_{\lambda\mu} l^{\lambda}_{,a} l^{\mu}_{,\beta} = \frac{1}{2} j^{-1} (l^{\lambda}_{,\lambda} l^{\mu}_{,\mu} - l^{\lambda}_{,\mu} l^{\mu}_{,\lambda}).$$

Wyrażenia na składowe $\bar{a}_{a\beta}$ i $\bar{b}_{a\beta}$ mają postać

$$\bar{a}_{a\beta} = a_{a\beta} + 2\gamma_{a\beta}, \quad \bar{b}_{a\beta} = b_{a\beta} - \kappa_{a\beta}, \quad (2.8)$$

gdzie

$$\gamma_{a\beta} = \frac{1}{2} (\bar{a}_{a\beta} - a_{a\beta}) = \frac{1}{2} (l^{\lambda}_{,a} l_{\lambda\beta} + \varphi_a \varphi_\beta - a_{a\beta}),$$

$$\begin{aligned} \kappa_{a\beta} &= -(\bar{b}_{a\beta} - b_{a\beta}) = l_{\lambda a} (n^\lambda|_\beta - b^\lambda_\beta n) + \varphi_a (n_{,\beta} + b^\lambda_\beta n_\lambda) + b_{a\beta} = \\ &= -n(\varphi_{a|\beta} + b^\lambda_\beta l_{\lambda a}) - n_\lambda (l^{\lambda}_{,a|\beta} - b^\lambda_\beta \varphi_a) + b_{a\beta}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wielkości $\gamma_{a\beta}$ są znane jako składowe tensora *odkształcenia*, a $\kappa_{a\beta}$ jako składowe tensora *zmiany krzywizny* powierzchni \mathcal{M} podczas deformacji χ . Zauważmy, że $\gamma_{a\beta}$ są funkcjami kwadratowymi składowych \mathbf{u} i $\mathbf{u}_{,a}$, natomiast $\kappa_{a\beta}$ są funkcjami niewymiernymi zawierającymi zarówno składowe \mathbf{u} , $\mathbf{u}_{,a}$, jak i $\mathbf{u}_{,a\beta}$.

Składowe $\gamma_{a\beta}$ i $\kappa_{a\beta}$ muszą spełniać trzy *warunki ciągłości*, wynikające z równań Codazziego–Mainardiego i Gaussa na $\bar{\mathcal{M}}$

$$\epsilon^{a\beta} \epsilon^{\lambda\mu} [\kappa_{\beta\lambda|\mu} + \bar{a}^{\kappa\nu} (b_{\kappa\lambda} - \kappa_{\kappa\lambda}) \gamma_{\nu\beta\mu}] = 0, \quad (2.10)$$

$$\epsilon^{a\beta} \epsilon^{\lambda\mu} [\gamma_{\alpha\mu|\beta\lambda} - b_{\alpha\mu} \kappa_{\beta\lambda} + \frac{1}{2} (\kappa_{\alpha\mu} \kappa_{\beta\lambda} + \bar{a}^{\kappa\nu} \gamma_{\kappa\alpha\mu} \gamma_{\nu\beta\lambda})] + K \gamma_{\kappa}^{\kappa} = 0,$$

gdzie

$$\gamma_{\mu\alpha\beta} = \gamma_{\mu\alpha|\beta} + \gamma_{\mu\beta|\alpha} - \gamma_{\alpha\beta|\mu}, \quad \bar{a}^{\alpha\beta} = j^{-2} [(1 + 2\gamma_{\lambda}^{\lambda}) a^{\alpha\beta} - 2\gamma^{\alpha\beta}], \quad (2.11)$$

$$j^2 = \frac{\bar{a}}{a} = 1 + 2\gamma_a^a + 2(\gamma_a^a \gamma_{\beta}^{\beta} - \gamma_{\beta}^{\beta} \gamma_a^a).$$

Równania ciągłości (2.10), wyprowadzone po raz pierwszy w nieco innej postaci w [1944:4], zapewniają, że przyjęcie sześciu funkcji $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\theta^{\lambda})$ klasy C^2 i $\kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta}(\theta^{\lambda})$ klasy C^1 spełniających (2.10), określa regularną powierzchnię odkształconą $\bar{\mathcal{M}}$ w przestrzeni \mathcal{E} z dokładnością do jej ruchu sztywnego.

Brzeg $\partial\bar{\mathcal{M}}$ powierzchni $\bar{\mathcal{M}}$ składa się ze skończonej liczby zamkniętych, odcinkami gładkich krzywych \mathcal{C}^a , $a = 1, \dots, A$, z których każda może być określona w postaci parametrycznej przez przyjęcie dwóch funkcji $\theta^a = \theta^a(s)$ zmiennej s mierzonej wzdłuż łuku \mathcal{C}^a .

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[\theta^a(s)] = \mathbf{r}(s) = r^k(s) \mathbf{i}_k. \quad (2.12)$$

W każdym punkcie regularnym $M \in \partial\bar{\mathcal{M}}$ można wprowadzić ortonormalną trójkę wektorów jednostkowych \mathbf{v} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} określonych następującymi związkami:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{ds} \mathbf{r}(s) \equiv \mathbf{r}' = \tau^{\beta} \mathbf{a}_{\beta}, \quad \mathbf{v} = v^{\beta} \mathbf{a}_{\beta} \equiv \mathbf{r}_{,v} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{a}_a = v_a \mathbf{v} + \tau_a \boldsymbol{\tau}, \quad v_a = \epsilon_{a\beta} \tau^{\beta}, \quad \epsilon_{a\beta} = v_a \tau_{\beta} - \tau_a v_{\beta}.$$

Wektor $\boldsymbol{\tau}$ jest styczny do $\partial\bar{\mathcal{M}}$, a \mathbf{v} jest wektorem zewnętrznej normalnej leżącym w płaszczyźnie stycznej do $\bar{\mathcal{M}}$ w $M \in \partial\bar{\mathcal{M}}$ (rys. 2.1).

Różniczkując bazę \mathbf{v} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} względem s , otrzymamy

$$\mathbf{v}' = \rho_{\tau} \times \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\tau}' = \rho_{\tau} \times \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{n}' = \rho_{\tau} \times \mathbf{n}, \quad (2.14)$$

$$\rho_{\tau} = \sigma_{\tau} \mathbf{v} + \tau_{\tau} \boldsymbol{\tau} + \rho_{\tau} \mathbf{n},$$

$$\sigma_{\tau} = b_{a\beta} \tau^a \tau^{\beta}, \quad \tau_{\tau} = -b_{a\beta} v^a \tau^{\beta}, \quad \rho_{\tau} = \tau_a v^a |_{\beta} \tau^{\beta} = -v_a \tau^a |_{\beta} \tau^{\beta},$$

gdzie σ_{τ} jest krzywizną normalną, τ_{τ} jest skruceniem geodezyjnym, a ρ_{τ} jest krzywizną geodezyjną krzywej brzegowej $\partial\bar{\mathcal{M}}$.

Funkcja deformacji χ , występująca w (2.5), odwzorowuje nieodkształconą krzywą brzegową $\partial\bar{\mathcal{M}}$ w odpowiednią krzywą odkształconą $\partial\bar{\mathcal{M}}$, będącą brzegiem powierzchni $\bar{\mathcal{M}}$ (rys. 2.1)

$$\bar{\mathbf{r}} = \chi[\mathbf{r}(s)] = \bar{r}^k(s) \mathbf{i}_k = \mathbf{r}(s) + \mathbf{u}(s). \quad (2.15)$$

Tu s jest nadal współrzędną mierzoną wzdłuż łuku brzegu nieodkształconego $\partial\mathcal{M}$, ale uniesioną do konfiguracji odkształconej i parametryzującą również brzeg $\partial\bar{\mathcal{M}}$. Jednakże współrzędna s różni się od współrzędnej \bar{s} długości łuku odkształconej krzywej brzegowej $\partial\bar{\mathcal{M}}$.

W każdym punkcie regularnym $\bar{M} \in \partial\bar{\mathcal{M}}$ wprowadźmy dwa styczne do $\bar{\mathcal{M}}$ wzajemnie ortogonalne wektory

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_\tau &= \bar{\mathbf{r}}' = \bar{\mathbf{a}}_\alpha \tau^\alpha = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u}' = a_\tau \bar{\boldsymbol{\tau}}, \\ \bar{\mathbf{a}}_\nu &= \bar{\mathbf{a}}_\tau \times \bar{\mathbf{n}} = j \bar{\mathbf{a}}^\alpha \nu_\alpha = a_\tau \bar{\boldsymbol{\nu}},\end{aligned}\quad (2.16)$$

$$a_\tau = \|\bar{\mathbf{a}}_\tau\| = \|\bar{\mathbf{a}}_\nu\| = \sqrt{1 + 2\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'}$$

Ortonormalna trójka wektorów jednostkowych $\bar{\boldsymbol{\nu}}$, $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, $\bar{\mathbf{n}}$ stanowi bazę na $\partial\bar{\mathcal{M}}$ analogiczną do bazy $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} na $\partial\mathcal{M}$. Różniczkując tę bazę względem współrzędnej \bar{s} , otrzymamy definicje $\bar{\sigma}_\tau$, $\bar{\tau}_\tau$, $\bar{\rho}_\tau$ analogiczne do (2.14).

Używając współrzędnej konwekcyjnej s na $\partial\bar{\mathcal{M}}$, wielkości geometryczne $\partial\bar{\mathcal{M}}$ można również wyrazić przez analogiczne wielkości geometryczne $\partial\mathcal{M}$ i składowe pola przesunięć $\mathbf{u} = u_\nu \boldsymbol{\nu} + u_\tau \boldsymbol{\tau} + w\mathbf{n}$, (por. [1980:62], [1989:6]). W szczególności, słuszne są zależności

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}}_{,\nu} &\equiv \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} \nu^\alpha = \boldsymbol{\nu} + \mathbf{u}_{,\nu} = a_\tau^{-1} [j \bar{\boldsymbol{\nu}} + (\bar{\mathbf{r}}_{,\nu} \cdot \bar{\mathbf{r}}') \bar{\boldsymbol{\tau}}], \\ \bar{\mathbf{n}} &= j^{-1} \bar{\mathbf{r}}_{,\nu} \times \bar{\mathbf{r}}', \quad j^2 = \|\bar{\mathbf{r}}_{,\nu}\|^2 \|\bar{\mathbf{r}}'\|^2 - |\bar{\mathbf{r}}_{,\nu} \cdot \bar{\mathbf{r}}'|^2, \\ \bar{\mathbf{a}}_\beta &= a_\tau^{-1} (j \nu_\beta \bar{\boldsymbol{\nu}} - \bar{a}_{\alpha\beta} \tau^\alpha \bar{\boldsymbol{\tau}}), \\ \bar{\mathbf{a}}^\beta &= j^{-1} (a_\tau \nu^\beta - a_\tau^{-1} \tau^\beta \bar{\mathbf{r}}_{,\nu} \cdot \bar{\mathbf{r}}') \bar{\boldsymbol{\nu}} + a_\tau^{-1} \tau^\beta \bar{\boldsymbol{\tau}}.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Pozostałe zależności geometryczne podane zostały w [1980:62], [1989:6] i będą wprowadzane w miarę potrzeb.

2.2.2. Warunki równowagi

Dwuwymiarowe równania równowagi i statyczne warunki brzegowe powłoki mogą być sformułowane w sposób ścisły, wykonując całkowanie po grubości powłoki odpowiednich trójwymiarowych warunków równowagi ośrodka ciągłego. Prowadzi to do sześciu równań równowagi, opisanych względem nieodkształconej powierzchni podstawowej \mathcal{M} i wyrażonych przez niesymetryczne wypadkowe tensory sił i momentów powierzchniowych oraz wypadkowe wektory sił i momentów poprzecznych, a także do odpowiednich sześciu statycznych warunków brzegowych. Taki ogólny sposób formułowania warunków równowagi powłoki przedstawimy w 2.5.

Rozważana w tym rozdziale nieliniowa teoria powłok *cienkich* oparta jest na dwóch postulatach:

1. *Deformacja powłoki jako ciała trójwymiarowego jest określona z wystarczającą dokładnością przez deformację jej powierzchni podstawowej.*

2. Warunki równowagi powłoki są określone przez zasadę pracy wirtualnej zawierającą pola związane tylko z odkształceniem i zginaniem powierzchni podstawowej.

Pierwszy postulat określa strukturę kinematyczną nieliniowej teorii powłok cienkich, a drugi — jej strukturę dynamiczną. Oba postulaty nie zależą od postaci równań konstytutywnych modelujących zachowanie się materiału powłoki.

Wybór powierzchni podstawowej jest ważnym elementem ogólnej teorii powłok (por. część I i 2.5.1). W nieliniowej teorii powłok cienkich, nieodkształconą powierzchnię podstawową \mathcal{M} , określoną zależnością (2.1), utożsamia się z powierzchnią środkową obszaru zajmowanego przez powłokę w stanie nieodkształconym. Umiejscowienie odkształconej powierzchni podstawowej $\bar{\mathcal{M}}$ w przestrzeni \mathcal{E} wynika wtedy z opisu jej deformacji (2.5).

Odształcona powierzchnia podstawowa $\bar{\mathcal{M}}$ określona jest wektorem wodzącym $\bar{\mathbf{r}}$ oraz wersorem normalnym $\bar{\mathbf{n}}$ ustalającym jej orientację w przestrzeni \mathcal{E} . Aby opisać wirtualną deformację powierzchni $\bar{\mathcal{M}}$, rozważmy jednoparametrową rodzinę deformacji $\bar{\mathbf{r}} = \hat{\chi}(\bar{\mathbf{r}}, t) = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{u}(\bar{\mathbf{r}}, t)$, gdzie t jest parametrem skalarnym. Wirtualnym przesunięciem \mathbf{v} powierzchni podstawowej powłoki będziemy nazywali pole wektorowe $\mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}}) = \partial \hat{\chi}(\bar{\mathbf{r}}, t) / \partial t|_{t=0} = \partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{r}}, t) / \partial t|_{t=0} \equiv \delta \mathbf{u}$, gdzie δ jest symbolem wariacji.

Wirtualny obrót $\boldsymbol{\omega}$ powierzchni podstawowej oraz wirtualny obrót $\boldsymbol{\omega}_\tau$ jej brzegu można określić przez wirtualne zmiany baz na $\bar{\mathcal{M}}$ i $\partial \bar{\mathcal{M}}$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}^\alpha \times \delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \bar{\mathbf{n}} \times \delta \bar{\mathbf{n}}), \quad \boldsymbol{\omega}_\tau = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}} \times \delta \bar{\mathbf{v}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \times \delta \bar{\boldsymbol{\tau}} + \bar{\mathbf{n}} \times \delta \bar{\mathbf{n}}). \quad (2.18)$$

Składowe wirtualnych odkształceń $e_{\alpha\beta}$ i wirtualnych zmian krzywizn $k_{\alpha\beta}$ powierzchni podstawowej, odniesionych do geometrii powierzchni nieodkształconej \mathcal{M} , mogą być określone jako wariacje odpowiednich powierzchniowych miar odkształceń (2.9). Po uwzględnieniu (2.6)₁ otrzymamy

$$e_{\alpha\beta} = \delta \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \delta \mathbf{u}_{,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \delta \mathbf{u}_{,\alpha}), \quad (2.19)$$

$$k_{\alpha\beta} = \delta \kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{n}}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{u}_{,\beta} + \bar{\mathbf{n}}_{,\beta} \cdot \delta \mathbf{u}_{,\alpha} + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}_{,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}_{,\alpha}).$$

Z (2.19) wynika, że wirtualne powierzchniowe miary odkształceń są symetryczne: $e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha}$ i $k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha}$.

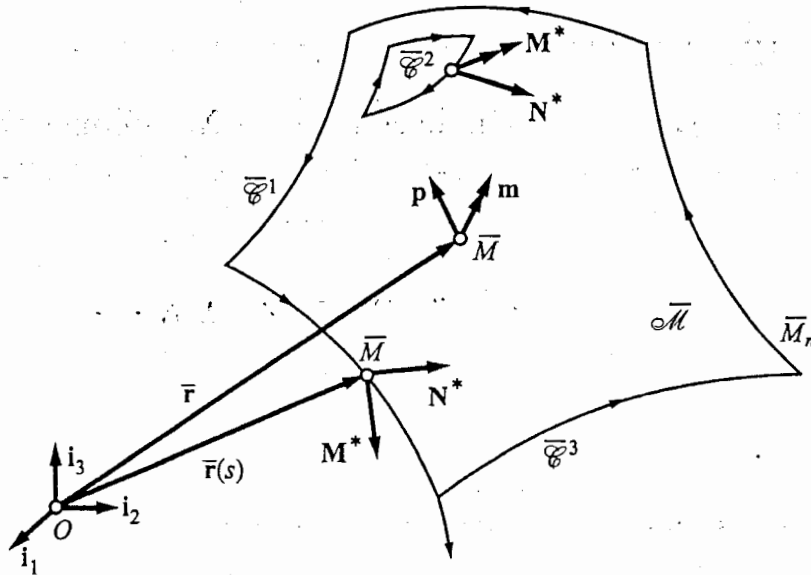
Niech $\bar{\mathcal{M}}$ będzie odkształconą powierzchnią podstawową powłoki będącej w stanie równowagi pod działaniem wypadkowych powierzchniowych wektorów sił $\mathbf{p}(\theta^\alpha)$ i momentów statycznych $\mathbf{h}(\theta^\alpha)$, mierzonych na jednostkę powierzchni nieodkształconej \mathcal{M} , oraz wypadkowych brzegowych wektorów sił $\mathbf{N}^*(s)$ i momentów statycznych $\mathbf{H}^*(s)$, mierzonych na jednostkę długości brzegu nieodkształconego $\partial \bar{\mathcal{M}}$ (rys. 2.2). Wtedy dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych wirtualnych przesunięć $\delta \mathbf{u}: \bar{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{V}$ postuluje się spełnienie następującej zasady pracy wirtualnej [1980:62]:

$$G = G_{\text{int}} - G_{\text{ext}} = 0, \quad (2.20)$$

gdzie

$$G_{\text{int}} = \iint_{\mathcal{M}} (N^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}) dA, \quad (2.21)$$

$$G_{\text{ext}} = \iint_{\mathcal{M}} (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{h} \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}) dA + \int_{\partial \mathcal{M}_f} (\mathbf{N}^* \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{H}^* \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}) ds.$$



Rys. 2.2

W (2.20) G_{int} oznacza wewnętrzną (ang. *internal*) pracę wirtualną, którą wykonują powierzchniowe składowe $N^{\alpha\beta}$ i $M^{\alpha\beta}$ wypadkowych tensorów sił i momentów wewnętrznych na odpowiednich wirtualnych powierzchniowych miarach odkształceń. Natomiast G_{ext} oznacza zewnętrzną (ang. *external*) pracę wirtualną, którą wykonują obciążenia powierzchniowe i brzegowe na odpowiednich wirtualnych przesunięciach i zmianach orientacji. Ponadto, $\partial \mathcal{M}_f$ określa tę część brzegu $\partial \mathcal{M}$, na której zadane są obciążenia (ang. *force*) brzegowe \mathbf{N}^* , \mathbf{H}^* .

Zasada pracy wirtualnej (2.20) jest tu postulowana od razu w opisie Lagrange'a, ponieważ wszystkie pola i operacje matematyczne występujące w (2.21) określone zostały w geometrii powierzchni nieodkształconej \mathcal{M} . Dlatego wielkości $N^{\alpha\beta}$ i $M^{\alpha\beta}$ są tu składowymi powierzchniowymi wypadkowymi miarami naprężeń typu Pioli–Kirchhoffa. Wobec zależności $\delta \bar{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{n}}$ na \mathcal{M} i $\delta \bar{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega}_\tau \times \bar{\mathbf{n}}$ na $\partial \mathcal{M}$, wynikających z (2.18), zewnętrzną pracę wirtualną (2.21)₂ można wyrazić również przez bardziej użyteczne wypadkowe wektory momentów osiowych $\mathbf{m} = \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}$ i $\mathbf{M}^* = \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^*$ wykonujące pracę wirtualną na odpowiednich wirtualnych obrotach $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\omega}_\tau$:

$$G_{\text{ext}} = \iint_{\mathcal{M}} (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}) dA + \int_{\partial \mathcal{M}_f} (\mathbf{N}^* \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_\tau) ds. \quad (2.22)$$

Wobec symetrii wirtualnych miar odkształceń (2.19) powierzchni podstawowej, wyrażenie (2.21)₁ na wewnętrzną pracę wirtualną może zawierać tylko symetryczne składowe powierzchniowych miar naprężeń $N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha}$ i $M^{\alpha\beta} = M^{\beta\alpha}$.

Ponieważ wektor $\delta\bar{\mathbf{n}}$ jest zawsze styczny do $\bar{\mathcal{M}}$, wyrażenia (2.21) i (2.22) ujmują tylko zewnętrzną pracę wirtualną od składowych wektorów \mathbf{h} , \mathbf{m} , \mathbf{H}^* i \mathbf{M}^* na płaszczyznę styczną do $\bar{\mathcal{M}}$. Ten fakt oznacza, że w teorii powłok cienkich te wypadkowe wektory mogą być ujęte jedynie w uproszczonej postaci

$$\mathbf{h} = m^a \bar{\mathbf{a}}_a, \quad \mathbf{m} = \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{h} = \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} m^a \bar{\mathbf{a}}^\beta, \quad (2.22a)$$

$$\mathbf{H}^* = M_v^* \bar{\mathbf{v}} + M_\tau^* \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad \mathbf{M}^* = \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^* = M_v^* \bar{\boldsymbol{\tau}} - M_\tau^* \bar{\mathbf{v}}.$$

Nieliniowa teoria powłok cienkich, oparta na dwóch sformułowanych powyżej postulatach, ma więc ściśle określoną strukturę kinematyczną i dynamiczną, pozwalającą na ujęcie tylko podstawowych członów w zasadzie pracy wirtualnej (2.20). Dodatkową pracę wirtualną, wykonaną przez skośnie symetryczne części powierzchniowych miar naprężeń, poprzeczne składowe tensorów sił i momentów wewnętrznych oraz składowe na $\bar{\mathbf{n}}$ wypadkowych wektorów momentów zewnętrznych, można uwzględnić dopiero w ogólnej teorii powłok rozwiniętej w punkcie 2.5.

W zasadzie pracy wirtualnej (2.20) jedynym polem podlegającym niezależnej wariacji jest pole przesunięć \mathbf{u} powierzchni podstawowej powłoki. Zależność $\delta\bar{\mathbf{n}}$ na $\bar{\mathcal{M}}$ można wyrazić przez $\delta\mathbf{u}_a$ wykonując wariację definicji $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{u}_a)$, podanej w (2.6)₂, lub też wykonując wariacje trzech tożsamości na $\bar{\mathcal{M}}$, $\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{a}}_a = 0$, $\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 1$, określających trzy równania więzów na deformację $\chi: \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$. W obu przypadkach otrzymamy zależność

$$\delta\bar{\mathbf{n}} = -\bar{\mathbf{a}}^a (\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{u}_a). \quad (2.23)$$

Wprowadzając (2.18), (2.19) i (2.23) do (2.20), (2.21) i (2.22) oraz dokonując zamiany całki powierzchniowej na całkę po brzegu $\partial\mathcal{M}$, zasada pracy wirtualnej przyjmie postać

$$\begin{aligned} G = & - \iint_{\mathcal{M}} (\mathbf{N}^a|_a + \mathbf{p} + \mathbf{l}) \cdot \delta\mathbf{u} dA + \\ & + \int_{\partial\mathcal{M}_f} [(\mathbf{N}^a v_a + m^a \bar{\mathbf{n}} v_a - \mathbf{N}^*) \cdot \delta\mathbf{u} + (M^{a\beta} \bar{\mathbf{a}}_\beta v_a) \cdot \delta\bar{\mathbf{n}} - \mathbf{M}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_\tau] ds + \\ & + \int_{\partial\mathcal{M}_d} (\mathbf{N}^a v_a + m^a \bar{\mathbf{n}} v_a) \cdot \delta\mathbf{u} + (M^{a\beta} \bar{\mathbf{a}}_\beta v_a) \cdot \delta\bar{\mathbf{n}}] ds = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

gdzie

$$\mathbf{N}^a = N^{a\beta} \bar{\mathbf{a}}_\beta + M^{a\beta} \bar{\mathbf{n}}_{,\beta} + [(M^{\kappa\rho} \bar{\mathbf{a}}_\rho)|_\kappa \cdot \bar{\mathbf{a}}^a] \bar{\mathbf{n}}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{l} = (m^a \bar{\mathbf{n}})|_a = -\bar{b}_a^\lambda m^a \bar{\mathbf{a}}_\lambda + m^a|_a \bar{\mathbf{n}}$$

oraz $\partial\mathcal{M}_d = \partial\mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}_f$ oznacza komplementarną część brzegu $\partial\mathcal{M}$, na której dane są przemieszczeniowe (ang. *displacemental*) warunki brzegowe.

W celu dalszego przekształcenia całek krzywoliniowych w (2.24), wykorzystajmy tożsamość $\boldsymbol{\omega}_\tau = \bar{\mathbf{n}} \times (\boldsymbol{\omega}_\tau \times \bar{\mathbf{n}}) + (\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\omega}_\tau) \bar{\mathbf{n}}$, w której $\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\omega}_\tau = -a_\tau^{-1} \bar{\mathbf{v}} \cdot \delta\mathbf{u}'$, co wynika z (2.18),

zależności $\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \delta \bar{\boldsymbol{v}} = -\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\tau}}$ oraz $\delta \bar{\boldsymbol{\tau}} = \delta(a_\tau^{-1} \bar{\boldsymbol{r}}')$, zgodnie z (2.16)₁. Pamiętając, że $\delta \bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\omega}_\tau \times \bar{\boldsymbol{n}}$, otrzymamy

$$\boldsymbol{\omega}_\tau = \bar{\boldsymbol{n}} \times \delta \bar{\boldsymbol{n}} - \frac{1}{a_\tau} \bar{\boldsymbol{n}} (\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{u}'). \quad (2.26)$$

Na brzegu $\partial \mathcal{M}$ wektor $\bar{\boldsymbol{n}} = \bar{\boldsymbol{n}}(s)$ spełnia tylko dwie niezależne tożsamości $\bar{\boldsymbol{r}}' \cdot \bar{\boldsymbol{n}} = 0$, $\bar{\boldsymbol{n}} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} = 1$, określające dwa równania więzów na deformację $\chi: \partial \mathcal{M} \rightarrow \partial \mathcal{M}$. Istnienie tylko dwóch niezależnych więzów na $\partial \mathcal{M}$ oznacza, że aby ustalić położenie trójki wektorów ortonormalnych $\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\boldsymbol{n}}$ względem bazy $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}$, należy ustalić nie tylko trzy składowe przesunięcia $\boldsymbol{u}(s)$ (a stąd i $\boldsymbol{u}'(s)$), lecz dodatkowo jedną funkcję skalarną $\varphi(s) = \varphi[\boldsymbol{u}_v(s), \boldsymbol{u}'(s)]$, opisującą obrotową deformację $\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\boldsymbol{n}}$ względem $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}$. Postać funkcji $\varphi = \varphi(\boldsymbol{u}_v, \boldsymbol{u}')$ nie jest tu określona jednoznacznie, gdyż zależy ona od sposobu opisu tej deformacji obrotowej.

Ogólną strukturę funkcji $\varphi = \varphi(\boldsymbol{u}_v, \boldsymbol{u}')$ zbadano w [1989:5], opierając się na warunkach całkowalności pewnych form różniczkowych na $\partial \mathcal{M}$. Wykazano tam m.in., że ogólny wzór na wirtualną zmianę wersora $\bar{\boldsymbol{n}} = \bar{\boldsymbol{n}}(\varphi, \boldsymbol{u}')$ wzdłuż $\partial \mathcal{M}$ ma postać

$$\delta \bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{q} \delta \varphi + \boldsymbol{L} \delta \boldsymbol{u}', \quad (2.27)$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\varphi, \boldsymbol{u}') = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{n}}}{\partial \varphi}, \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\varphi, \boldsymbol{u}') = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{n}}}{\partial \boldsymbol{u}'},$$

gdzie jawne wyrażenia na funkcję wektorową $\boldsymbol{q}(s)$ i tensorową $\boldsymbol{L}(s)$ zależą od przyjętej szczególnej postaci funkcji $\varphi(s) = \varphi[\boldsymbol{u}_v(s), \boldsymbol{u}'(s)]$.

W nieliniowej teorii powłok cienkich, przedstawionej w opisie Lagrange'a, najczęściej używana jest szczególnie prosta postać φ , oznaczona jako n_v , zaproponowana w [1981:39] za pomocą zależności

$$n_v = \bar{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{j} (\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{v} - \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{u}_v, \quad (2.28)$$

wynikającej z podstawienia (2.17)₁ i (2.16)₁ do (2.17)₂. Jawne wyrażenie na $\bar{\boldsymbol{n}}(n_v, \boldsymbol{u}')$ wynika z następujących przekształceń. Rozważmy tożsamość $\bar{\boldsymbol{n}} = [\boldsymbol{v} \times (\bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\boldsymbol{\tau}})] \times \boldsymbol{v} + n_v \boldsymbol{v}$, z której po rozwinięciu $\boldsymbol{v} \times (\bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\boldsymbol{\tau}})$, otrzymamy

$$[1 - (\boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}})^2] \bar{\boldsymbol{n}} = n_v [\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}) \bar{\boldsymbol{\tau}}] + (\boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{v}}) \boldsymbol{v} \times \bar{\boldsymbol{\tau}}. \quad (2.29)$$

Po prawej stronie (2.29) wykorzystajmy zależność $\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}) \bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \times (\boldsymbol{v} \times \bar{\boldsymbol{\tau}})$, a $\boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{v}}$ wyznaczmy z tożsamości $(\boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{v}})^2 + (\boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}})^2 + (\boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{n}})^2 = 1$. Przy uwzględnieniu związku $\bar{\boldsymbol{r}}' = a_\tau \bar{\boldsymbol{\tau}}$, zgodnie z (2.16)₁, i wprowadzeniu oznaczenia $c_v = \bar{\boldsymbol{r}}' \cdot \boldsymbol{v}$, po dalszych przekształceniach (2.29) otrzymamy

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{a_\tau^2 - c_v^2} [n_v \bar{\boldsymbol{r}}' \times (\boldsymbol{v} \times \bar{\boldsymbol{r}}') \pm \sqrt{a_\tau^2 (1 - n_v^2) - c_v^2} \boldsymbol{v} \times \bar{\boldsymbol{r}}'], \quad (2.30)$$

a więc rzeczywiście $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}(n_\nu, \mathbf{u}')$. Gdy kąt obrotu $\bar{\mathbf{n}}$ względem \mathbf{n} nie przekracza $\pm\pi/2$, we wzorze (2.30) należy przyjąć znak + przed pierwiastkiem kwadratowym.

Odpowiednie wyrażenie na $\delta\bar{\mathbf{n}}$ można teraz uzyskać bezpośrednio z (2.30), ale prościej wyprowadza się je wykonując wariację dwóch równań więzów na $\partial\mathcal{K}$, co prowadzi do $-\delta\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{r}}' = \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{u}'$, $\delta\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$. Mnożąc pierwsze wyrażenie przez $\bar{\mathbf{n}}$, z uwzględnieniem drugiego i (2.16)₂, otrzymamy zależność $\delta\bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{a}}_\nu = \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{u}')$, którą mnożymy lewostronnie przez \mathbf{v} . Po odpowiednich dalszych przekształceniach otrzymamy, [1984:62]

$$\delta\bar{\mathbf{n}} = \frac{1}{e_\nu} [(\bar{\mathbf{r}}' \times \bar{\mathbf{n}})\delta n_\nu + (\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{n}})\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{u}'], \quad e_\nu = \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\nu. \quad (2.31)$$

Tak więc w szczególnym przypadku $\varphi \equiv n_\nu$, funkcje \mathbf{q} i \mathbf{L} mają postać

$$\mathbf{q} = \frac{1}{e_\nu} (\bar{\mathbf{r}}' \times \bar{\mathbf{n}}), \quad \mathbf{L} = \frac{1}{e_\nu} (\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{n}}) \otimes \bar{\mathbf{n}}, \quad (2.32)$$

gdzie \otimes jest iloczynem tensorowym.

Jak wykazano w [1989:5], szczególnymi postaciami φ są m.in.: funkcja $\vartheta_\nu = a_\tau^{-2} (\bar{\mathbf{n}} - \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{a}}_\nu$ zaproponowana w [1975:52] oraz kąt całkowitego obrotu brzegu ω_τ określony w [1979:40] za pomocą zależności $2\cos\omega_\tau = \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\tau} + \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} - 1$. Wyrażenia dla \mathbf{q} i \mathbf{L} odpowiadające funkcji ϑ_ν podano w [1989:5], a odpowiadające ω_τ w [1993:10].

Wprowadźmy ogólne wyrażenie (2.27) do całek krzywoliniowych w (2.24)_{2,3}, uwzględniając (2.26). Po wykonaniu całkowania przez części całki te przyjmują postać

$$\int_{\partial\mathcal{K}_j} [(\mathbf{P} + m_\nu \bar{\mathbf{n}} - \mathbf{P}^*) \cdot \delta\mathbf{u} + (M - M^*)\delta\varphi] ds + \sum_{M_n \in \partial\mathcal{K}_j} (\mathbf{F}_n - \mathbf{F}_n^*) \cdot \delta\mathbf{u}_n, \quad (2.33)$$

$$\int_{\partial\mathcal{K}_d} [(\mathbf{P} + m_\nu \bar{\mathbf{n}}) \cdot \delta\mathbf{u} + M\delta\varphi] ds + \sum_{M_n \in \partial\mathcal{K}_d} \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{u}_n,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\mathbf{L}^T(M^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{a}}_\beta \nu_\alpha), & \mathbf{F}^* &= -\mathbf{L}^T(\mathbf{M}^* \times \bar{\mathbf{n}}), \\ \mathbf{P} &= \mathbf{N}^\alpha \nu_\alpha + \mathbf{F}', & \mathbf{P}^* &= \mathbf{N}^* + \mathbf{F}^*, & m_\nu &= m^\alpha \nu_\alpha, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$M = \mathbf{q} \cdot (M^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{a}}_\beta \nu_\alpha), \quad M^* = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{M}^* \times \bar{\mathbf{n}}),$$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n(s_n + 0) - \mathbf{F}_n(s_n - 0), \quad \mathbf{u}_n = \mathbf{u}(s_n).$$

Kinematycznie dopuszczalne wirtualne przesunięcia $\delta\mathbf{u}$ spełniają warunki $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\delta\varphi = 0$, $\delta\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ na $\partial\mathcal{K}_d$ i drugi wiersz we wzorze (2.33) znika tożsamościowo. Wprowadzając (2.33)₁ do (2.24) stwierdzamy, że postulowana zasada pracy wirtualnej jest spełniona, gdy spełnione są następujące *lokalne równania równowagi i naturalne statyczne warunki brzegowe* [1984:62]:

$$N^a|_{\alpha} + p + l = 0 \quad \text{w } \mathcal{M},$$

$$P + m_v \bar{n} - P^* = 0, \quad M - M^* = 0 \quad \text{na } \partial \mathcal{M}_f, \quad (2.35)$$

$$F_n - F_n^* = 0 \quad \text{w punktach osobliwych} \quad M_n \in \partial \mathcal{M}_f.$$

Wyprowadzone tutaj lokalne warunki równowagi (2.35) w opisie Lagrange'a są spełnione w przypadku regularnej powierzchni \mathcal{M} mającej odcinkowo regularny brzeg $\partial \mathcal{M}$. Warunki te są czasem nazywane *dwuwymiarowo ścisłymi* dla powierzchni \mathcal{M} , ponieważ muszą być spełnione dla dowolnych, w tym zależnych od deformacji χ , zewnętrznych wypadkowych obciążeń powierzchniowych p , m i brzegowych N^* , M^* , oraz przy nieograniczonych wartościach przemieszczeń u , φ , odkształceń $\gamma_{\alpha\beta}$ i zmian krzywizn $\kappa_{\alpha\beta}$ powierzchni podstawowej.

Wektorowe warunki równowagi (2.35) mają swe naturalne reprezentacje skalarne wyrażone przez składowe w znanych bazach nieodkształconych a_α , n i v , τ , \bar{n} podane w [1984:62]. Te skalarne reprezentacje warunków równowagi omówimy w 2.3.2 przy założeniu małych odkształceń, a w 2.3.3 przy dodatkowym ograniczaniu obrotów.

Do rozwiązania niektórych zadań, bardziej wygodne może okazać się przedstawienie warunków równowagi powłoki w postaci *mieszanej*. W tym przypadku wszystkie pola wektorowe i tensorowe zawarte w (2.20), (2.21) są nadal mierzone w geometrii powierzchni nieodkształconej \mathcal{M} i $\partial \mathcal{M}$, ale warunki równowagi przedstawione są przez składowe w nieznanach bazach \bar{a}_α , \bar{n} i \bar{v} , $\bar{\tau}$, \bar{n} powierzchni odkształconej $\bar{\mathcal{M}}$ i $\partial \bar{\mathcal{M}}$. Wyrażenie $\delta \bar{n}$ względem bazy $\partial \bar{\mathcal{M}}$ wynika z podstawienia (2.17)₃ do (2.23)

$$\delta \bar{n} = \bar{v}(\bar{v} \cdot \delta \bar{n}) - a_\tau^{-2} \bar{r}'(\bar{n} \cdot \delta u'). \quad (2.36)$$

Korzystając z (2.36), również ω_τ z (2.18) upraszcza się do postaci

$$\omega_\tau = \bar{\tau}(\bar{v} \cdot \delta \bar{n}) + a_\tau^{-1} [\bar{v}(\bar{n} \cdot \delta u') - \bar{n} \cdot (\bar{v} \cdot \delta u')]. \quad (2.37)$$

Wprowadźmy wyrażenia (2.36) i (2.37) do całek krzywoliniowych (2.24)_{2,3}, uwzględnijmy (2.26), wykonajmy całkowanie przez części, a następnie pomińmy całkę po $\partial \mathcal{M}_d$, co prowadzi do następującej przekształconej postaci zasady pracy wirtualnej:

$$\begin{aligned} & - \iint_{\mathcal{M}} (N^a|_{\alpha} + p + l) \cdot \delta u \, dA + \sum_{M_n \in \partial \mathcal{M}_f} (\Phi_n - \Phi_n^*) \cdot \delta u_n + \\ & + \iint_{\partial \mathcal{M}_f} [N^a v_\alpha + m_v \bar{n} + \Phi' - N^* - \Phi'^*] \cdot \delta u + (K - M_v^*) \bar{v} \cdot \delta \bar{n} \, ds = 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

gdzie

$$\Phi = H \bar{n}, \quad H = \frac{1}{a_\tau^2} v_\alpha M^{\alpha\beta} \bar{a}_{\beta\lambda} \tau^\lambda, \quad K = \frac{1}{a_\tau} j v_\alpha M^{\alpha\beta} v_\beta, \quad (2.39)$$

$$\Phi^* = \frac{1}{a_\tau} M_\tau^* \bar{n}.$$

Zasada pracy wirtualnej (2.38) jest spełniona, gdy spełnione są następujące lokalne równania równowagi i naturalne statyczne warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} N^a|_a + p + 1 &= 0 \quad \text{w } \mathcal{M}, \\ N^a v_a + m_v \bar{n} + \Phi' - N^* - \Phi^{*'} &= 0, \quad K - M_v^* = 0 \quad \text{na } \partial \mathcal{M}_f, \\ \Phi_n - \Phi_n^* &= 0 \quad \text{w punktach osobliwych } M_n \in \partial \mathcal{M}_f. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Równania równowagi (2.40)₁ w składowych w bazie \bar{a}_a, \bar{n} przyjmują postać

$$\begin{aligned} (N^{a\beta} - \bar{b}_\lambda^\beta M^{a\lambda})|_a + \bar{a}^{\beta\kappa} \gamma_{\kappa\lambda a} (N^{\lambda a} - \bar{b}_\mu^\lambda M^{a\mu}) - \\ - \bar{b}_a^\beta (M^{\lambda a}|_\lambda + \bar{a}^{\alpha\kappa} \gamma_{\kappa\rho\mu} M^{\mu\rho}) + p^\beta - \bar{b}_a^\beta m^a &= 0, \\ M^{a\beta}|_{a\beta} + (\bar{a}^{\alpha\kappa} \gamma_{\kappa\lambda\mu} M^{\mu\lambda})|_a + \bar{b}_{a\beta} (N^{a\beta} - \bar{b}_\kappa^\alpha M^{\beta\kappa}) + p + m^a|_a &= 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Powyższe równania, bez uwzględnienia zewnętrznych momentów powierzchniowych \mathbf{m} , podał Galimov [1951:15]. Zawierają one tylko powierzchniowe miary odkształceń i naprężeń, dlatego były wykorzystywane głównie do opracowania różnych wariantów tzw. *wewnętrznej nieliniowej teorii powłok* (por. [1970:38], [1973:64], [1980:62]).

W [1989:5] wykazano, że forma różniczkowa $\bar{\mathbf{v}} \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}$, obecna w całce brzegowej (2.38), nie jest formą całkowalną względem pola przesunięć \mathbf{u} . Nie istnieje więc taka funkcja $\varphi(\mathbf{u}_{,v}, \mathbf{u}')$ która umożliwiłaby przedstawienie tej formy w postaci $\mu \bar{\mathbf{v}} \cdot \delta \bar{\mathbf{n}} = \delta \varphi$, gdzie $\mu(\mathbf{u}_{,v}, \mathbf{u}')$ byłby czynnikiem całkującym. Oznacza to, że sformułowanie mieszane, wynikające z przekształconej zasady pracy wirtualnej (2.38), nie prowadzi do zagadnienia brzegowego względem pola przesunięć \mathbf{u} jako jedynej zmiennej niezależnej. Nawet w przypadku obciążeń zachowawczych takie mieszane sformułowanie nie może być przedstawione w postaci zasady wariacyjnej względem \mathbf{u} . Dlatego różne zasady wariacyjne w przesunięciach jako zmiennych niezależnych, wyprowadzane w literaturze z przekształconej postaci (2.38) zasady pracy wirtualnej, nie są poprawne.

2.2.3. Równania konstytutywne

W teorii powłok cienkich wykonanych z materiału sprężystego, do której ograniczamy się w niniejszej pracy, postulowana postać zasady pracy wirtualnej (2.20) wymaga, by istniała powierzchniowa funkcja gęstości energii sprężystej $W = W(\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}; \mathbf{r})$, mierzona na jednostkę powierzchni \mathcal{M} , której wariacja ma postać zgodną z (2.21)₁ przy (2.19)

$$\delta W = N^{\alpha\beta} \delta \gamma_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}. \quad (2.42)$$

Dlatego *równania konstytutywne* cienkich powłok sprężystych, spójne z zasadą pracy wirtualnej (2.20), mają następującą ogólną postać:

$$N^{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} = N^{\alpha\beta}(\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}; \mathbf{r}), \quad M^{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{\alpha\beta}} = M^{\alpha\beta}(\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}; \mathbf{r}). \quad (2.43)$$

Jawne wyrażenia funkcji $W = W(\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}; \mathbf{r})$ dla różnych klas cienkich powłok sprężystych, a stąd i odpowiadające im równania konstytutywne (2.43), zależą zarówno od mechanicznych własności materiału, jak i geometrii powłoki nieodkształconej — jej

grubości, struktury wewnętrznej po grubości, geometrii powierzchni podstawowej \mathcal{M} itp. Zostało to symbolicznie zaznaczone w (2.43) przez dodanie \mathbf{r} do ciągu argumentów. Funkcja W jest zwykle konstruowana albo przez konsekwentną redukcję do powierzchni \mathcal{M} odpowiedniej znanej funkcji gęstości energii sprężystej Σ ciała trójwymiarowego, albo bezpośrednio z rozważań dwuwymiarowych na powierzchni \mathcal{M} popartych następnie badaniami eksperymentalnymi.

Szereg postaci funkcji W , przydatnych do analizy dużych odkształceń powłok cienkich zbudowanych z jednorodnego i izotropowego materiału sprężystego, skonstruowano w [1983:44], [1992:17] i [1997:2], postulując hipotezy kinematyczne i oszacowania trójwymiarowego stanu odkształcenia w powłoce. W szczególności, dla powłok cienkich zbudowanych z nieściśliwego materiału gumopodobnego, wykazano [1992:17], że funkcja

$$W \equiv h \Sigma_{(0)}(\gamma_{\kappa\rho}) + \frac{h^3}{24} \{ \Sigma_{(1)}^{\alpha\beta}(\gamma_{\kappa\rho}) (\kappa_a^\lambda \kappa_{\lambda\beta} - \kappa_\lambda^a \kappa_{a\beta}) + \Sigma_{(2)}^{\alpha\beta\lambda\mu}(\gamma_{\kappa\rho}) \chi_{\alpha\beta} \chi_{\lambda\mu} \} \quad (2.44)$$

jest konsekwentnym pierwszym przybliżeniem funkcji energii odkształcenia sprężystego powłoki. W wyrażeniu (2.44) funkcje $\Sigma_{(0)}$, $\Sigma_{(1)}^{\alpha\beta}$ i $\Sigma_{(2)}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ oznaczają, odpowiednio, zmodyfikowaną funkcję trójwymiarowej gęstości energii sprężystej oraz jej pierwszą i drugą pochodną względem odkształceń stycznych, wszystkie określone są na powierzchni środkowej powłoki \mathcal{M} , h jest nieodkształconą grubością powłoki, natomiast $\chi_{\alpha\beta} = -(j^{-1} \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$. Ponadto, udział członów, podkreślonych w (2.44), w energii sprężystej powłoki jest stosunkowo mały i w obliczeniach inżynierskich człony te mogą być również pominięte, co daje *najprostsze przybliżenie* funkcji gęstości energii odkształcenia sprężystego powłoki gumopodobnej.

2.2.4. Silne i słabe sformułowania zagadnienia brzegowego w opisie Lagrange'a

Geometryczne warunki brzegowe, energetycznie spójne z wyprowadzonymi statycznymi warunkami brzegowymi (2.35)₂, wynikają z postaci całki krzywoliniowej (2.33)₂ i mają postać

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}^* = \mathbf{0}, \quad \varphi - \varphi^* = 0 \quad \text{na} \quad \partial \mathcal{M}_d, \quad (2.45)$$

gdzie gwiazdką oznaczono wartości funkcji dane na brzegu $\partial \mathcal{M}_d$. Przy założonej ciągłej deformacji χ , warunki (2.45) zapewniają automatycznie spełnienie zależności $\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^* = \mathbf{0}$ w punktach osobliwych $M_n \in \partial \mathcal{M}_d$.

Wprowadźmy równania konstytutywne (2.43), a następnie zależności kinematyczne $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$, $\kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$, zgodne z (2.9), do warunków równowagi powłoki (2.35), wyrażając je przez wektor przesunięcia \mathbf{u} jako jedyną zmienną niezależną. Pozwala to na tzw. *klasyczne (silne) sformułowanie zagadnienia brzegowego* cienkiej powłoki sprężystej w opisie Lagrange'a w postaci układu trzech nieliniowych skalarnych równań różniczkowych cząstkowych względem trzech składowych wektora \mathbf{u} w bazie \mathbf{a}_α , \mathbf{n} jako jedynych zmiennych niezależnych. Problem nieliniowej analizy statycznej takiej powłoki może więc być sformułowany następująco: przy znanych polach wektorowych sił

i momentów powierzchniowych $\mathbf{p}(\theta^\alpha)$ klasy C^0 i $\mathbf{m}(\theta^\alpha)$ klasy C^1 oraz brzegowych $\mathbf{N}^*(s)$ klasy C^0 i $\mathbf{M}^*(s)$ klasy C^1 , należy wyznaczyć pole przesunięć $\mathbf{u}(\theta^\alpha)$ klasy C^3 spełniające geometryczne warunki brzegowe (2.45) oraz wyrażone przez \mathbf{u} równania równowagi i naturalne statyczne warunki brzegowe (2.35).

Każdy stan odkształcony $\bar{\mathcal{M}}$ powierzchni podstawowej powłoki określony jest pewnym polem przesunięć $\mathbf{u}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V}$. Zbiór wszystkich możliwych pól \mathbf{u} tworzy przestrzeń konfiguracyjną rozwiązań $C(\mathcal{M}) = \mathcal{V}$, a wirtualne przesunięcie $\delta \mathbf{u}$ jest elementem przestrzeni $T_{\mathbf{u}}C(\mathcal{M})$ stycznej do $C(\mathcal{M})$ w punkcie $\mathbf{u} \in C(\mathcal{M})$, która w tym przypadku pokrywa się z \mathcal{V} .

Rozważmy krzywą $\mathcal{L}: R \rightarrow \mathcal{V}$ w przestrzeni konfiguracyjnej $C(\mathcal{M})$ zawierającą punkt $\mathbf{u} \in C(\mathcal{M})$ i taką, że $\mathbf{u}(\alpha) \in C(\mathcal{M})$ oraz $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}$. W otoczeniu \mathbf{u} pole $\mathbf{u}(\alpha)$ może być przedstawione w postaci $\mathbf{u}(\alpha) = \mathbf{u} + \alpha \delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{u} \in T_{\mathbf{u}}C(\mathcal{M}) = \mathcal{V}$.

Niech $\mathcal{V}_A \subset \mathcal{V}$ będzie przestrzenią geometrycznie dopuszczalnych przesunięć \mathbf{u} spełniających geometryczne warunki brzegowe (2.42), a $\mathcal{U}_A \subset \mathcal{V}$ przestrzenią kinematycznie dopuszczalnych wirtualnych przesunięć $\delta \mathbf{u}$ spełniających jednorodne warunki brzegowe $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\delta \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = 0$ na $\delta \mathcal{M}_d$. Wtedy funkcjonal pracy wirtualnej G z (2.20) dla powłoki sprężystej można przedstawić w rozwiniętej postaci

$$\begin{aligned}
 G[\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}] &= \iint_{\mathcal{M}} [N^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \delta \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) + M^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \delta \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{u})] dA - \\
 &\quad - \int_{\partial \mathcal{M}} [\mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})] dA - \\
 &\quad - \int_{\partial \mathcal{M}_f} [\mathbf{N}^*(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}^*(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\omega}_r(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})] ds = \\
 &= - \iint_{\mathcal{M}} [\mathbf{N}^\alpha|_\alpha(\mathbf{u}) + \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \mathbf{l}(\mathbf{u})] \cdot \delta \mathbf{u} dA + \\
 &\quad + \int_{\partial \mathcal{M}_f} \{ [\mathbf{P}(\mathbf{u}) + m_\nu(\mathbf{u}) \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}^*(\mathbf{u})] \cdot \delta \mathbf{u} + [M(\mathbf{u}) - M^*(\mathbf{u})] \delta \varphi(\mathbf{u}) \} ds + \\
 &\quad + \sum_{M_n \in \partial \mathcal{M}_f} [\mathbf{F}_n(\mathbf{u}_n) - \mathbf{F}_n^*(\mathbf{u}_n)] \cdot \delta \mathbf{u}_n.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

W rezultacie zagadnienie brzegowe analizy statycznej cienkiej powłoki sprężystej może być sformułowane w tzw. *słabej (wariacyjnej)* postaci następująco: przy znanych polach wektorowych sił i momentów powierzchniowych $\mathbf{p}(\theta^\alpha)$ klasy C^{-1} , $\mathbf{m}(\theta^\alpha)$ klasy C^0 i brzegowych $\mathbf{N}^*(s)$ klasy C^{-1} , $\mathbf{M}^*(s)$ klasy C^0 , należy wyznaczyć pole przesunięć $\mathbf{u}(\theta^\alpha) \in \mathcal{V}_A$ klasy C^1 takie, że dla każdego $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{U}_A$ klasy C^1 funkcjonal wirtualnych przesunięć podany w (2.46) znika tożsamościowo

$$G[\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}] = 0. \tag{2.47}$$

Warto podkreślić, że takie słabe (wariacyjne) sformułowanie zagadnienia brzegowego umożliwia poszukiwanie rozwiązania w klasie znacznie mniej regularnych funkcji (C^1) niż rozwiązanie klasyczne (C^3). Dlatego różne słabe sformułowania rozwiązania zagadnienia brzegowego stanowią podstawę przybliżonych metod analizy statycznej powłok, w tym popularnej metody elementów skończonych.

W wielu praktycznie ważnych przypadkach analizy statycznej powłok cienkich, obciążenia zewnętrzne mają *potencjał* $V(\mathbf{u})$ taki, że

$$G_{\text{ext}}[\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}] = -\delta V(\mathbf{u}). \quad (2.48)$$

Prostym obciążeniem potencjalnym jest np. ciężar własny powłoki, obciążenie brzegowe o ustalonym kierunku oraz (przy odpowiednim podparciu) ciśnienie gazu i ciśnienie hydrostatyczne (por. [1989:6]). W takim przypadku możemy wprowadzić funkcjonal całkowitej energii potencjalnej $I(\mathbf{u})$, którego jedyną zmienną niezależną jest pole $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_A$

$$I(\mathbf{u}) = \iint_{\mathcal{A}} W(\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}), \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{u})) dA + V(\mathbf{u}). \quad (2.49)$$

W przypadku obciążeń potencjalnych, zasada wirtualnych przesunięć (2.47) może być wyrażona w postaci zasady wariacyjnej

$$\delta I(\mathbf{u}) = 0. \quad (2.50)$$

Zasada (2.50) oznacza, że funkcjonal (2.49) osiąga wartość stacjonarną jedynie na polach $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_A$ spełniających warunki stacjonarności funkcjonu $I(\mathbf{u})$, którymi są lokalne warunki równowagi (2.35) wyrażone całkowicie przez przesunięcia. Podkreślimy, że funkcjonal (2.49) zależy tu wyłącznie od $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_A$ jako jedynego pola niezależnego. Powierzchniowe miary odkształceń $\gamma_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$ i naprężeń $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ są polami zależnymi, określonymi odpowiednio przez zależności kinematyczne (2.9) i równania konstytutywne (2.43) lub (2.44).

Formułowanie i rozwiązywanie niektórych zadań może być łatwiejsze, gdy oprócz \mathbf{u} również niektóre z pól $\gamma_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$ i/lub $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ będą zmiennymi niezależnymi zagadnienia brzegowego. Podstawą takich sformułowań mieszanych są różne funkcjonały wielopolowe, zarówno bezwarunkowe, jak i z warunkami ubocznymi, które można wygenerować z funkcjonałów (2.46) lub (2.49) dołączając do nich dodatkowo wybrane zależności metodą mnożników Lagrange'a. W najogólniejszym przypadku do funkcjonu (2.49) można dołączyć: zależności kinematyczne (2.9) przy (2.7), równania konstytutywne (2.43), geometryczne warunki brzegowe (2.45), definicje uogólnionych brzegowych sił i momentów (2.34)_{2,3} oraz definicje sił skupionych w punktach osobliwych brzegu (2.34)₄. Jeżeli następnie wykorzystamy niektóre z warunków stacjonarności takiego rozszerzonego funkcjonu do identyfikacji mnożników Lagrange'a, otrzymamy funkcjonal bezwarunkowy typu Hu-Washizu skonstruowany po raz pierwszy w [1981:39]

$$J(u, \varepsilon, \sigma) = \iint_{\mathcal{A}} \{ W(\varepsilon) - N^{\alpha\beta} [\gamma_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})] - M^{\alpha\beta} [\kappa_{\alpha\beta} - \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{u})] \} dA - \\ - \iint_{\partial \mathcal{A}_d} [(\mathbf{P} + m, \bar{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + M(\varphi - \varphi^*)] d\mathcal{S} + V(\mathbf{u}). \quad (2.51)$$

Funkcjonał J jest tu określony na trzech różnych grupach pól podlegających niezależnej wariacji: polach przemieszczeń $u \equiv \{u \text{ w } \mathcal{M}; \mathbf{u}, \varphi \text{ na } \partial\mathcal{M}\}$, polach miar odkształceń $\varepsilon \equiv \{\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta} \text{ w } \mathcal{M}\}$ oraz polach miar naprężeń $\sigma \equiv \{N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta} \text{ w } \mathcal{M}; \mathbf{P}, \mathbf{M} \text{ na } \partial\mathcal{M}\}$. Zasada wariacyjna

$$\delta J(u, \varepsilon, \sigma) = 0 \quad (2.52)$$

głosi, że wśród wszystkich pól swobodnych u klasy C^0 i ε, σ klasy C^{-1} funkcyjonał J osiąga wartość stacjonarną dla wartości tych pól spełniających wszystkie zależności nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych. Łatwo pokazać, że warunkami stacjonarności funkcyjonału J są: równania równowagi (2.35)₁, zależności kinematyczne (2.9) przy (2.7), naturalne statyczne warunki brzegowe (2.35)_{2,3}, geometryczne warunki brzegowe (2.45) oraz zależności identyfikujące mnożniki Lagrange'a (2.43) i (2.34).

Spełniając *a priori* niektóre z warunków stacjonarności funkcyjonału J , można z (2.52) wygenerować znaczną liczbę różnych wielopolowych funkcyjonałów globalnych i przyrostowych [1985:33], [1986:42]. Te różne funkcyjonały i odpowiadające im zasady wariacyjne są podstawą do konstruowania odpowiednich rodzin mieszanych elementów skończonych.

2.2.5. Membrany i powłoki nieregularne

Na zakończenie tego punktu krótko scharakteryzujemy dwa szczególne typy powłok cienkich: membrany i powłoki nieregularne.

Membraną nazywamy cieką powłokę która może przenosić jedynie wewnętrzne siły rozciągające styczne do odkształconej powierzchni podstawowej \mathcal{M} . Nieliniowe zależności dla membran otrzymamy, pomijając we wszystkich wzorach w 2.2.2–2.2.4 efekty zginania, tzn. składowe momentów wewnętrznych $M^{\alpha\beta}$, wektory momentów zewnętrznych $\mathbf{h}, \mathbf{m}, \mathbf{H}^*$ i \mathbf{M}^* oraz składową normalną $\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{N}^*$ zewnętrznych sił brzegowych. W szczególności, przekształcona zasada pracy wirtualnej (2.24) dla membrany przyjmie postać

$$G = - \iint_{\mathcal{M}} (\mathbf{N}^a|_a + \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\partial\mathcal{M}_1} (\mathbf{N}^a \nu_a - \mathbf{N}^*) \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0, \quad (2.53)$$

gdzie teraz $\mathbf{N}^a = N^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{a}}_\beta$. Z (2.53) otrzymamy odpowiednie równania równowagi i naturalne statyczne warunki brzegowe. Ponadto, uproszczona funkcja gęstości energii dla materiału nieliniowo-sprężystego $W(\gamma_{\alpha\beta})$ prowadzi do prostych równań konstytutywnych $N^{\alpha\beta} = \partial W / \partial \gamma_{\alpha\beta}$.

Membrana z założenia nie może przenosić ściskania stycznego do \mathcal{M} . Gdy pojawi się ściskanie w kierunku stycznym do \mathcal{M} , membrana traci stateczność, marszczy się i fałduje w tym kierunku. Membrana w ogóle nieobciążona nie ma jednoznacznego stanu nieodkształconego; może ona być dowolnie marszczona i fałdowana, a nawet złożona i zapakowana do pudełka. Nieliniowa teoria membran obejmuje więc formułowanie i analizę szeregu specyficznych zadań, takich jak np. określenie strefy pofałdowanej, sposób budowy membrany z części płaskich tak, aby w stanie odkształ-

conym przyjęła dany kształt, określenie globalnej sztywności nadmuchiwanym membran cylindrycznych, ewentualnie zbrojonych nierozciągliwymi włóknami itp. Wobec ograniczonej objętości tej pracy, czytelnika zainteresowanego tymi zagadnieniami odsyłamy do [1997:2, rozdz. VII].

Powłoką nieregularną nazywamy konstrukcję cienkościenną zawierającą załamania, rozgałęzienia, usztywnienia, połączenia technologiczne, skokową zmianę grubości lub własności materiałowych itp. Powierzchnią podstawową takiej nieregularnej powłoki nie jest już powierzchnia regularna opisana w 2.2.1, lecz dwuwymiarowa struktura geometryczna \mathcal{M} będąca teraz odpowiednim złożeniem powierzchni podstawowych wielu regularnych elementów powłokowych. Występujące w teorii powłok nieregularnych pola geometryczne, kinematyczne i mechaniczne mogą być nieciągłe lub nie różniczkowalne wzdłuż złączeń i innych krzywych osobliwych $\Gamma \subset \mathcal{M}$, a same krzywe osobliwe mogą mieć dodatkowe własności mechaniczne, odmienne od własności mechanicznych powłoki. W rezultacie, zagadnienie brzegowe nieliniowej teorii powłok nieregularnych obejmuje dodatkowo warunki skoku na krzywych osobliwych oraz, ewentualnie, również odpowiadające tym osobliwościom równania konstytutywne.

Podstawy ogólnej teorii powłok nieregularnych przedstawimy w 2.5.5. W szczególnym przypadku *cienkich* powłok nieregularnych, odpowiednie *warunki skoku* zostały wyprowadzone w [1998:3] z rozszerzonej zasady pracy wirtualnej i mają postać

$$[(\mathbf{P} + m_v \bar{\mathbf{n}}) \cdot \delta \mathbf{u}] + [M \delta \varphi] - \sigma_r = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma \subset \mathcal{M}, \quad (2.54)$$

$$[\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u}]_i - \sigma_i = 0 \quad \text{w punktach osobliwych} \quad P_i \in \Gamma.$$

Tutaj $[\dots]$ oznacza skok na Γ wartości brzegowych funkcji określonych na sąsiednich płatach \mathcal{M} , $[\dots]_i$ — skok na P_i wartości brzegowych funkcji określonych na sąsiednich odcinkach Γ , natomiast σ_r i σ_i są wirtualnymi gęstościami energii określonymi, odpowiednio, wzdłuż Γ i w $P_i \in \Gamma$. Jawna postać σ_r i σ_i wynika z dodatkowych równań konstytutywnych zadawanych wzdłuż Γ . Szczegóły tej koncepcji omówiono w [1998:3].

2.3. Równania geometrycznie nieliniowej teorii powłok cienkich w przesunięciach

2.3.1. Równania konstytutywne teorii pierwszego przybliżenia

Większość materiałów stosowanych w cienkościennych elementach maszyn, urządzeń i budowli (np. metale, żelbet, niektóre kompozyty itp.) wykazuje własności liniowosprężyste tylko w zakresie stosunkowo małych odkształceń. Jednocześnie te konstrukcje i elementy powłokowe projektowane są zazwyczaj w taki sposób, aby w normalnych warunkach eksploatacyjnych odkształcenia nie przekraczały pewnych granic, w obrębie których materiał zachowuje się liniowosprężysto. Jednak nawet w zakresie małych odkształceń, przesunięcia elementów cienkościennych mogą wielokrotnie przekraczać grubość powłoki. Do opisu i analizy takich zagadnień używana jest

geometrycznie nieliniowa teoria cienkich powłok sprężystych, która stosuje się przy spełnieniu następujących założeń:

- powłoka zbudowana jest z jednorodnego i izotropowego materiału sprężystego,
- powłoka jest cienka, tzn. $h/R \ll 1$, gdzie h jest stałą grubością, a R najmniejszym promieniem krzywizny powierzchni środkowej \mathcal{M} powłoki nieodkształconej,
- powierzchnia \mathcal{M} jest *wolno zmienna*, tzn. $(h/l)^2 \ll 1$, gdzie l jest charakterystyczną długością zmienności geometrii \mathcal{M} ,
- deformacja powłoki jest *wolno zmienna*, tzn. $(h/L)^2 \ll 1$, gdzie L jest charakterystyczną długością zmienności deformacji \mathcal{M} ,
- odkształcenia w powłoce są *małe*, tzn. $\eta \ll 1$, gdzie η jest największą wartością odkształcenia włókien materialnych w obszarze powłoki.

Przy spełnieniu powyższych warunków stan przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w obszarze wewnętrznym powłoki (daleko od brzegów i krzywych osobliwych na \mathcal{M} , obciążeń skupionych itp.) można z wystarczającą dokładnością opisać tylko przez deformację jej powierzchni środkowej \mathcal{M} . W ramach takiej teorii, funkcja gęstości energii sprężystej powłoki W może być z wystarczającą dokładnością przybliżona sumą dwóch funkcji kwadratowych określających dwa główne składniki tej energii pochodzące od rozciągania (ściskania) i zginania powierzchni \mathcal{M} . Taka postać funkcji W została zaproponowana już w klasycznych pracach Kirchhoffa [1850:1], [1876:1], Arona [1874:1] i Love'a [1889:2], [1927:1]. Dokładność takiej postaci funkcji gęstości energii sprężystej badało wielu autorów, zarówno w teorii liniowej, np. [1943:7], [1960:50], jak i teorii geometrycznie nieliniowej, np. [1965:44], [1966:9]. W wyniku tych badań wykazano, że przy spełnieniu powyższych założeń funkcja kwadratowa

$$W = \frac{h}{2} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \left(\gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu} \right) + O(Eh\eta^2\theta^2) \quad (2.55)$$

jest *konsekwentnym pierwszym przybliżeniem* gęstości energii odkształcenia sprężystego powłoki.

W zależności (2.55) symbol $O(\dots)$ określa maksymalny rząd błędu popełnianego przy przyjęciu funkcji W w postaci (2.55), natomiast

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right), \quad (2.56)$$

$$\theta = \max \left(\frac{h}{d}, \frac{h}{L}, \frac{h}{l}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \sqrt{\eta} \right),$$

gdzie E oznacza moduł sprężystości Younga, ν liczbę Poissona, a d jest odległością od bocznej powierzchni brzegowej powłoki. Zmodyfikowany tensor sprężystości (2.56)₁ uwzględnia w sposób pośredni zmianę grubości powłoki podczas deformacji odpowiadającą płaskiemu stanowi naprężenia w powłoce.

Wprowadzając (2.55) do (2.43), otrzymamy odpowiednie równania konstytutywne

$$\begin{aligned}
 N^{\alpha\beta} &= C[(1-\nu)\gamma^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta}\gamma_\lambda^\lambda] + O(Eh\eta\theta^2), \\
 M^{\alpha\beta} &= D[(1-\nu)\kappa^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta}\kappa_\lambda^\lambda] + O(Eh^2\eta\theta^2), \\
 C &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

Zastosowanie przekształcenia Legendre'a

$$W^c(N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}) = N^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}\kappa_{\alpha\beta} - W(\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}). \tag{2.58}$$

pozwała wyznaczyć funkcję energii dopełniającej (ang. *complementary*) powłoki

$$W^c = \frac{1}{h} E_{\alpha\beta\lambda\mu} \left(N^{\alpha\beta} N^{\lambda\mu} + \frac{12}{h^2} M^{\alpha\beta} M^{\lambda\mu} \right) + O(Eh\eta^2\theta^2), \tag{2.59}$$

$$E_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1+\nu}{2E} \left(a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} + a_{\alpha\mu} a_{\beta\lambda} - \frac{2\nu}{1+\nu} a_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu} \right).$$

Różniczkując (2.59)₁ względem zmiennych niezależnych, otrzymamy odwrotne do (2.57) równania konstytutywne

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{\partial W^c}{\partial N^{\alpha\beta}} = A[(1+\nu)N_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta} N_\lambda^\lambda] + O(\eta\theta^2), \\
 \kappa_{\alpha\beta} &= \frac{\partial W^c}{\partial M^{\alpha\beta}} = B[(1+\nu)M_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta} M_\lambda^\lambda] + O\left(\frac{\eta\theta^2}{h}\right), \\
 A &= \frac{1}{Eh}, \quad B = \frac{12}{Eh^3}.
 \end{aligned}
 \tag{2.60}$$

Z dokładnością do błędu, wprowadzanego do funkcji energii sprężystej (2.55), tensor zmiany krzywizny można modyfikować przez dodanie lub odjęcie małych członów typu $b_\alpha^\lambda \gamma_{\lambda\beta}$ lub $b_{\alpha\beta} \gamma_\kappa^\kappa$, które są rzędu η/R . Pozwala to na różne energetycznie równoważne sformułowania liniowej i geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych, np. [1963:54], [1968:33], [1981:39], [1966:9].

2.3.2. Zagadnienie brzegowe w przesunięciach

Przyjęte w 2.3.1 założenia upraszczające teorii geometrycznie nieliniowej pozwalają na konsekwentne uproszczenia wszystkich zależności przedstawionych w 2.2.

Przy pominięciu małych odkształceń względem członów rzędu jedności, z (2.7)₃₋₅ i (2.11)₂ otrzymamy

$$j \cong 1, \quad \bar{\epsilon}^{\alpha\beta} \cong \epsilon^{\alpha\beta}, \quad \bar{a}^{\alpha\beta} \cong a^{\alpha\beta} - 2\gamma^{\alpha\beta} \cong a^{\alpha\beta}, \tag{2.61}$$

$$n_\mu \cong \varphi_\lambda l_{\cdot\mu}^\lambda - \varphi_\mu l_{\cdot\lambda}^\lambda, \quad n \cong \frac{1}{2} (l_{\cdot\lambda}^\lambda l_{\cdot\mu}^\mu - l_{\cdot\mu}^\lambda l_{\cdot\lambda}^\mu).$$

Przy powyższych uproszczeniach, składowe $\kappa_{\alpha\beta}$ określone w (2.9)₂ są wielomianami trzeciego stopnia ze względu na \mathbf{u} , $\mathbf{u}_{,\alpha}$ i $\mathbf{u}_{,\alpha\beta}$.

Powierzchniowe obciążenia zewnętrzne można przedstawić przez składowe następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= p^\alpha \bar{\mathbf{a}}_\alpha + p \bar{\mathbf{n}} = q^\lambda \mathbf{a}_\lambda + q \mathbf{n}, \\ q^\lambda &= p^\alpha l^\lambda_{,\alpha} + p n^\lambda, \quad q = p^\alpha \varphi_\alpha + p n, \\ \mathbf{l} &= (m^\alpha \bar{\mathbf{n}})|_\alpha = l^\lambda \mathbf{a}_\lambda + l \mathbf{n}, \\ l^\lambda &= (m^\alpha n^\lambda)|_\alpha - b^\lambda_\alpha (m^\alpha n), \quad l = (m^\alpha n)|_\alpha + b_{\alpha\lambda} (m^\alpha n^\lambda), \end{aligned} \quad (2.62)$$

gdzie n^λ , n są teraz wielomianami kwadratowymi przemieszczeń (2.61)₂.

Wprowadzając uproszczone według (2.61)₂ i (2.9)₂ składowe do zasady pracy wirtualnej (2.20) oraz wykorzystując (2.23), otrzymamy uproszczoną definicję pól \mathbf{N}^α

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^\alpha &= T^{\alpha\lambda} \mathbf{a}_\lambda + T^\alpha \mathbf{n}, \\ T^{\alpha\lambda} &= N^{\alpha\beta} l^\lambda_{,\beta} + M^{\alpha\beta} (n^\lambda|_\beta - b^\lambda_\beta n) + \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\mu\lambda} (A l_{\mu\beta} - A_\mu \varphi_\beta), \\ T^\alpha &= N^{\alpha\beta} \varphi_\beta + M^{\alpha\beta} (n_{,\beta} + b^\lambda_\beta n_\lambda) + \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\mu\lambda} A_\mu l_{\lambda\beta}, \\ A_\mu &= (M^{\kappa\rho} l_{\mu\kappa})|_\rho - M^{\kappa\rho} \varphi_\kappa b_{\mu\rho}, \quad A = (M^{\kappa\rho} \varphi_\kappa)|_\rho + M^{\kappa\rho} l_{\gamma\kappa} b^\gamma_\rho. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Gdy reprezentacja (2.63)₁ zostanie podstawiona do wektorowych równań równowagi (2.35)₁, w bazie \mathbf{a}_λ , \mathbf{n} otrzymamy trzy skalarne równania równowagi

$$T^{\alpha\lambda}|_\alpha - b^\lambda_\alpha T^\alpha + q^\lambda + l^\lambda = 0, \quad T^\alpha|_\alpha - b_{\alpha\lambda} T^{\alpha\lambda} + q + l = 0. \quad (2.64)$$

Z (2.62)₄, (2.63)₂₋₄ i (2.61)₂ wynika, że w geometrycznie nieliniowej teorii powłok, wyrażonej w przesunięciach, równania równowagi są liniowe względem $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ i kwadratowe względem składowych \mathbf{u} , $\mathbf{u}_{,\alpha}$ i $\mathbf{u}_{,\alpha\beta}$. Po wyrażeniu przez \mathbf{u} za pomocą równań konstytutywnych (2.57) i zależności kinematycznych (2.9), równania równowagi (2.64) stają się wielomianami piątego stopnia względem składowych \mathbf{u} , $\mathbf{u}_{,\alpha}$ i $\mathbf{u}_{,\alpha\beta}$.

Przed rozważaniem dalszych uproszczeń, pożyteczne jest przedstawić $l_{\alpha\beta}$ w postaci

$$l_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta}, \quad (2.65)$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w, \quad \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\beta|\alpha} - u_{\alpha|\beta}) = \epsilon_{\alpha\beta} \phi, \quad \phi = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} u_{\beta|\alpha},$$

gdzie $\theta_{\alpha\beta}$ są składowymi liniowego tensora odkształcenia, a składowe φ_α i ϕ określają wektor liniowego obrotu $\boldsymbol{\phi} = \epsilon^{\beta\alpha} \varphi_\alpha \mathbf{a}_\beta + \phi \mathbf{n}$.

Na brzegu $\partial \mathcal{H}$ wektory $\bar{\mathbf{a}}_\tau$ i $\bar{\mathbf{a}}_\nu$ określone w (2.16) oraz $\bar{\mathbf{n}}$ dany zależnością (2.6)₂, wyrażone są przybliżeniem (2.61)₂ przez następujące wielomiany:

$$\bar{\mathbf{a}}_\tau = c_\nu \mathbf{v} + c_\tau \boldsymbol{\tau} + c \mathbf{n}, \quad \bar{\mathbf{n}} = n_\nu \mathbf{v} + n_\tau \boldsymbol{\tau} + n \mathbf{n}, \quad (2.66)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_\nu = \bar{\mathbf{a}}_\tau \times \bar{\mathbf{n}} = e_\nu \mathbf{v} + e_\tau \boldsymbol{\tau} + e \mathbf{n},$$

$$\begin{aligned} c_v &= \theta_{v\tau} - \varphi = u'_v + \tau_\tau w - \rho_\tau u_\tau, \\ c_\tau &= 1 + \theta_{\tau\tau} = 1 + u'_\tau + \rho_\tau u_v - \sigma_v w, \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} c &= w' + \sigma_\tau u_\tau - \tau_\tau u_v, \\ n_v &\approx -\varphi_v(1 + \theta_{\tau\tau}) + \varphi_\tau(\theta_{v\tau} + \phi), \\ n_\tau &\approx \varphi_v(\theta_{v\tau} - \phi) - \varphi_\tau(1 + \theta_{v\nu}), \\ n &\approx 1 + \theta_{v\nu} + \theta_{\tau\tau} + \theta_{v\nu}\theta_{\tau\tau} - \theta_{v\tau}^2 + \phi^2, \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \varphi_v &= w_{,v} + \sigma_v u_v - \tau_\tau u_\tau, & \varphi_\tau &= w' - \tau_\tau u_v + \sigma_\tau u_\tau, \\ \phi &= \frac{1}{2}(u_{\tau,v} - u'_v - \rho_v u_v + \rho_\tau u_\tau), \\ \theta_{v\nu} &= u_{v,v} + \rho_v u_\tau - \sigma_v w, & \theta_{\tau\tau} &= u'_\tau + \rho_\tau u_v - \sigma_\tau w, \\ \theta_{v\tau} &= \frac{1}{2}(u_{\tau,v} + u'_v - \rho_\tau u_\tau - \rho_v u_\tau), \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$e_v = c_\tau n - cn_\tau, \quad e_\tau = cn_v - c_v n, \quad e = c_v n_\tau - c_\tau n_v, \quad (2.70)$$

gdzie $\sigma_v = b_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$ jest krzywizną normalną, $\tau_v = -b_{\alpha\beta} \tau^\alpha v^\beta = \tau_\tau$ — skreńcieniem geodezyjnym, a $\rho_v = v_\alpha \tau^\alpha|_\beta v^\beta = -\tau_\alpha v^\alpha|_\beta v^\beta$ — krzywizną geodezyjną krzywej powierzchniowej \mathcal{C}_v ortogonalnej do $\partial\mathcal{M}$ w $M \in \partial\mathcal{M}$.

Przy konsekwentnie uproszczonych wzorach (2.68) reprezentacje \mathbf{F} , M określone w (2.34), przy identyfikacji funkcji brzegowej $\varphi \equiv n_v$ i wykorzystaniu (2.32), są nadal niewymiernymi funkcjami przesunięć, [1984:62]

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{1}{e_v} v_\alpha M^{\alpha\beta} [(\bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{a}}_\beta) \cdot \mathbf{v}] \bar{\mathbf{n}} = \\ &= (d_v R_{v\tau} + r_v R_v) \mathbf{v} + (d_\tau R_{v\tau} + r_\tau R_v) \boldsymbol{\tau} + (dR_{v\nu} + rR_v) \mathbf{n}, \\ M &= \frac{1}{e_v} v_\alpha M^{\alpha\beta} (\bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{a}}_\beta) \cdot \bar{\mathbf{a}}_\tau = R_{v\nu} + f_\tau R_{\tau v} + fR_v, \end{aligned} \quad (2.71)$$

gdzie

$$\begin{aligned} R_{v\nu} &= v_\alpha M^{\alpha\beta} l_{\lambda\beta} v^\lambda = M_{v\nu}(1 + \theta_{v\nu}) + M_{v\tau}(\theta_{v\tau} - \phi), \\ R_{v\tau} &= v_\alpha M^{\alpha\beta} l_{\lambda\beta} \tau^\beta = M_{v\nu}(\theta_{v\tau} + \phi) + M_{v\tau}(1 + \theta_{\tau\tau}), \\ R_v &= v_\alpha M^{\alpha\beta} \varphi_\beta = M_{v\nu} \varphi_v + M_{v\tau} \varphi_\tau, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} d_v &= \frac{n_v n}{e_v}, & d_\tau &= \frac{n_\tau n}{e_v}, & d &= \frac{n^2}{e_v}, \\ r_v &= \frac{n_v n_\tau}{e_v}, & r_\tau &= \frac{n_\tau^2}{e_v}, & r &= \frac{n_\tau n}{e_v}, \\ f_\tau &= \frac{cn_v - c_v n}{e_v}, & f &= \frac{c_v n_\tau - c_\tau n_v}{e_v}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$e_v = c_\tau n - cn_\tau \cong \pm \sqrt{1 - n_v^2 - c_v^2}. \quad (2.74)$$

Podobne, konsekwentne uproszczenia dotyczą również zewnętrznych obciążeń brzegowych

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^* &= N_v^* \bar{\mathbf{v}} + N_\tau^* \bar{\boldsymbol{\tau}} + N^* \bar{\mathbf{n}} = T_v^* \mathbf{v} + T_\tau^* \boldsymbol{\tau} + T^* \mathbf{n}, \\ \mathbf{M}^* &= \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^*, \quad \mathbf{H}^* = \mathbf{M}^* \times \bar{\mathbf{n}} = M_v^* \bar{\mathbf{v}} + M_\tau^* \bar{\boldsymbol{\tau}} = H_v \mathbf{v} + H_\tau \boldsymbol{\tau} + H \mathbf{n}, \\ H_v &= M_v^* e_v + M_\tau^* c_v, \quad H_\tau = M_v^* e_\tau + M_\tau^* c_\tau, \quad H = M_v^* e + M_\tau^* c, \quad (2.75) \\ \mathbf{F}^* &= (d_v H_\tau + r_v H + e_v M^*) \mathbf{v} + (d_\tau H_\tau + r_\tau H + e_\tau M^*) \boldsymbol{\tau} + (dH_\tau + rH + eM^*) \mathbf{n}, \\ M^* &= H_v + f_\tau H_\tau + fH. \end{aligned}$$

W wyniku powyższych uproszczeń, statyczne warunki brzegowe $(2.35)_{2,3}$ są liniowymi funkcjami $N^{a\beta}$ i $M^{a\beta}$ oraz T_v^* , T_τ^* , T^* i M_v^* , M_τ^* zawierającymi jednak współczynniki, które są niewymiernymi funkcjami (typu pierwiastka kwadratowego) względem składowych \mathbf{u} , \mathbf{u}_v , \mathbf{u}' i \mathbf{u}'_v .

2.3.3. Klasyfikacja uproszczeń przy ograniczonych obrotach

Przedstawione w 2.3.2 równania geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych w opisie Lagrange'a są jednak nadal bardzo skomplikowane, ponieważ wyprowadzone zostały przy nieograniczonych wartościach przesunięć powierzchni środkowej powłoki.

W wielu elementach i konstrukcjach powłokowych rzeczywiste wartości przesunięć, występujące podczas eksploatacji (przy zachowaniu małości odkształceń sprężystych), są na ogół ograniczone przez więzy wewnętrzne wynikające z geometrii powłoki, granicy liniowej sprężystości materiału, typu obciążeń zewnętrznych, warunków brzegowych itp. Uwzględniając z góry te ograniczenia rzeczywistych wartości przesunięć i/lub ich pochodnych, układ równań wyprowadzony w 2.3.2 może być znacznie uproszczony bez utraty dokładności rozwiązania.

W literaturze stosowane są różne klasyfikacje uproszczeń równań geometrycznie nieliniowej teorii powłok cienkich w przesunięciach. Mushtari i Galimov [1957:29], Sanders [1963:53] i Koiter [1966:69] wprowadzali różne ograniczenia na składowe zlinearyzowanego wektora obrotu i gradientów przesunięć. Wśród najbardziej znanych tak uproszczonych wariantów wymienimy warianty średniego i dużego zginania [1957:29], umiarkowanie małych obrotów [1963:53] oraz małych wygięć [1966:69]. Wiele uproszczonych wariantów zaproponowanych przez Duszek [1978:54] wynikało z kombinacji ograniczenia wartości przesunięć i ich pochodnych.

Zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego [1965:10], deformacja otoczenia powierzchni środkowej \mathcal{M} powłoki może być rozłożona na trzy stany elementarne: sztywne przesunięcie, czyste rozciągnięcie wzdłuż głównych kierunków odkształcenia i sztywny obrót kierunków głównych (por. 2.4.1). W rozważanej tutaj teorii geometrycznie nieliniowej, odkształcenia w powłoce zostały już ograniczone do małych. Dlatego w [1977:30],

[1979:40] zaproponowano, aby klasyfikację dalszych uproszczeń takiej teorii powłok oprzeć na dodatkowych konsekwentnych ograniczeniach nakładanych na obroty włókien materialnych powłoki.

Obrót skończony określony jest kątem obrotu ω dookoła osi obrotu ustalonej przez podanie wektora \mathbf{e} . W matematyce obrót skończony w \mathcal{V} opisywany jest zwykle tensorem drugiego rzędu \mathbf{R} spełniającym warunki $\det \mathbf{R} = +1$ i $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, a zbiór wszystkich takich \mathbf{R} tworzy grupę obrotów $SO(3)$. W analizie chętnie używane są też wektory obrotu skończonego o kierunku \mathbf{e} i długości będącej zazwyczaj funkcją trygonometryczną kąta ω , np. $\boldsymbol{\Omega} = \sin \omega \mathbf{e}$ lub $\boldsymbol{\theta} = 2 \operatorname{tg} \omega / 2 \mathbf{e}$. Każdy z różnych opisów obrotu skończonego ma swoje zalety i ograniczenia, [1983:47].

W ramach klasyfikacji zaproponowanej w [1977:30], [1979:40] zakresy wartości kąta ω zostały wyrażone przez mały parametr θ określony w (2.56)₂: $\omega \leq O(\theta^2)$ — małe obroty, $\omega = O(\theta)$ — umiarkowane obroty, $\omega = O(\sqrt{\theta})$ — duże obroty, $\omega \geq O(1)$ — skończone obroty. Taka klasyfikacja ogranicza tylko wartości kąta obrotu ω , pozostawiając dowolny kierunek \mathbf{e} osi obrotu. Warto jednak pamiętać, że konstrukcje i elementy powłokowe wykazują zazwyczaj dużą sztywność na deformację w powierzchni powłoki, nawet przy dopuszczeniu dużej giętkości w kierunku prostopadłym do powierzchni powłoki. Tę cechę można uwzględnić, ograniczając poszczególne składowe wektora obrotu skończonego. Ponieważ dla $|\omega| < \pi/2$ oszacowanie $\boldsymbol{\Omega}$ prowadzi do $O(\|\boldsymbol{\Omega}\|) = O(\sin \omega) = O(\omega)$, możemy nazwy „małe, umiarkowane, duże, skończone” obroty przyporządkować poszczególnym składowym $\Omega = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}$ i $\Omega_a = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}_a$ wektora $\boldsymbol{\Omega}$.

W geometrycznie nieliniowej teorii powłok cienkich wektor obrotu skończonego $\boldsymbol{\Omega}$ wyraża się przez przesunięcia, zgodnie z [1977:30], [1979:40] zależnością (por. wzór ścisły (2.131))

$$\boldsymbol{\Omega} \cong \frac{1}{2} (\mathbf{a}_a \times \bar{\mathbf{a}}^a + \mathbf{n} \times \bar{\mathbf{n}}) \cong \epsilon^{\beta a} [\varphi_a (1 + \frac{1}{2} \theta_{\kappa}^{\kappa}) - \frac{1}{2} \varphi^{\lambda} (\theta_{\lambda a} - \omega_{\lambda a})] \mathbf{a}_{\beta} + \frac{1}{2} \epsilon^{a\beta} \omega_{a\beta} \mathbf{n}. \quad (2.76)$$

Przy każdym ograniczeniu nakładanym na $\boldsymbol{\Omega}$ wzór (2.76) pozwala na konsekwentne oszacowanie rzędu wartości φ_a i $\omega_{a\beta}$ jako głównych członów poszczególnych składowych wektora $\boldsymbol{\Omega}$, natomiast wartości $\theta_{a\beta}$ mogą być następnie oszacowane bezpośrednio z rozwiązania (2.9)₁ względem $\theta_{a\beta}$, przy oszacowaniu $\gamma_{a\beta} = O(\eta)$. Uzyskane w ten sposób oszacowanie rzędu wielkości φ_a , $\omega_{a\beta}$ i $\theta_{a\beta}$ umożliwiają zaproponowanie klasyfikacji uproszczeń względem obrotów podanej w tabelicy 1.

Zależnie od wariantu ograniczenia obrotów podanego w tabelicy 1, można w sposób konsekwentny uprościć związki kinematyczne (2.9) na $\gamma_{a\beta}$ i $\kappa_{a\beta}$, które są wielomianami φ_a , $\omega_{a\beta}$, $\theta_{a\beta}$. Jako podstawę uproszczeń przyjęto błąd $O(Eh\eta^2\theta^2)$ pierwszego przybliżenia (2.55) do funkcji gęstości energii sprężystej powłoki, który wymaga, aby składowe $\gamma_{a\beta}$ były określone z dokładnością $O(\eta\theta^2)$, a $\kappa_{a\beta}$ z dokładnością $O(\eta\theta^2/h)$. Oszacowanie pochodnych kowariantnych niektórych wyrażeń zawartych w (2.9) można uzyskać, dzieląc te wyrażenia przez duży parametr

$$\lambda = \frac{h}{\theta} = \min \left(b, L, l, \sqrt{hR}, \frac{h}{\sqrt{\eta}} \right). \quad (2.77)$$

Tablica 1. Klasyfikacja obrotów

Ω_a	Ω	φ_a	$\omega_{a\beta}$	$\theta_{a\beta}$
Małe	małe	θ^2	θ^2	θ^2
Umiarkowane	małe	θ	θ^2	θ^2
Umiarkowane	umiarkowane	θ	θ	θ^2
Duże	małe	$\sqrt{\theta}$	θ^2	θ
Duże	umiarkowane	$\sqrt{\theta}$	θ	θ
Duże	duże	$\sqrt{\theta}$	$\sqrt{\theta}$	θ
Skończone	małe	1	θ^2	1
Skończone	umiarkowane	1	θ	1
Skończone	duże	1	$\sqrt{\theta}$	1
Skończone	skończone	1	1	1

W różnych zadaniach mechaniki powłok, każdy z parametrów występujących w definicjach θ i λ może przyjmować wartości, które w skrajnych przypadkach mogą znacznie różnić się między sobą. Użycie ekstremalnych wartości parametrów, ujętych w wartościach wspólnych θ i λ , zawiąza rzeczywisty nieznaną błąd przedstawianych dalej oszacowań.

Postać funkcji (2.55) wskazuje, że w teorii pierwszego przybliżenia energia sprężysta od $\gamma_{a\beta}$ i $\kappa_{a\beta}$ może być tego samego rzędu. Zatem jeśli γ jest największą wartością własną $\gamma_{a\beta}$, a κ największą wartością własną $\kappa_{a\beta}$, to wyrażenie kwadratowe (2.55) na energię sprężystą ujmuje przypadek zgięciowej teorii powłok, gdy $\gamma - h\kappa = O(\eta)$. Aby móc porównywać rzędy wartości różnych wyrażeń, będziemy używali następujących oszacowań geometrii \mathcal{M} : $a_{a\beta} = O(1)$, $b_{a\beta} = O(1/R) = O(\theta^2/h) = O(\theta/\lambda)$.

Jak wynika z tablicy 1, przy dopuszczeniu skończonych wartości składowych Ω_a , składową Ω można ograniczyć do wartości dużych, umiarkowanych lub małych. Oszacowania różnych członów w związkach kinematycznych (2.9) przy (2.61)₂ wykazały, że nawet dla $\omega_{a\beta} = O(\theta^2)$ w związkach tych, z dokładnością do błędu teorii pierwszego przybliżenia, można pominąć tylko kilka małych członów. Wydaje się więc, że znacznie uproszczone zależności kinematyczne takiej geometrycznie nieliniowej teorii powłok przy skończonych/małych obrotach wyprowadzane w niektórych publikacjach nie mogą być uznane jako energetycznie konsekwentne.

2.3.4. Teoria dużych obrotów

Przy ograniczeniu składowych Ω_a do wartości dużych, składową Ω można niezależnie ograniczyć do wartości dużych, umiarkowanych lub małych. Konsekwentnie uproszczone wyrażenia różnych wariantów teorii dużych/dużych i dużych/umiarkowanych obrotów przedyskutowano w [1981:37], [1984:62]. Skonstruowano różne konsekwentnie uproszczone związki kinematyczne dla $\gamma_{a\beta}$ i $\kappa_{a\beta}$, z których wygenerowano odpowiednio uproszczone w stosunku do (2.63) i (2.71) — (2.74) wyrażenia na \mathbf{N}^a , \mathbf{F} , \mathbf{F}^* , M i M^* . Niestety, konsekwencją uproszczeń związków kinematycznych jest zburzenie ogólnej

struktury geometrycznej wyrażeń (2.63) i (2.71), a uzyskane w [1981:37] zależności są mało czytelne i nieprzydatne do zastosowań inżynierskich.

Najważniejszym przypadkiem szczególnym teorii dużych obrotów jest wariant, w którym Ω przyjęto jako małe. W takiej *teorii dużych/mających obrotów* $\varphi_\alpha = O(\sqrt{\theta})$, $\phi \sim \omega_{\alpha\beta} = O(\theta^2)$, $\theta_{\alpha\beta} = O(\theta)$, zgodnie z tablicą 1. Przy tych oszacowaniach, składowe $\gamma_{\alpha\beta}$ upraszczają się do postaci

$$\gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta + \frac{1}{2} \theta_\alpha^\lambda \theta_{\lambda\beta} - \frac{1}{2} (\theta_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta} + \theta_\beta^\lambda \omega_{\lambda\alpha}) + O(\eta\theta^2), \quad (2.78)$$

z której, gdy $\gamma_{\alpha\beta} = O(\eta) = O(\theta^2)$, wynikają następujące oszacowania:

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta + O(\theta^2), & \varphi_\alpha \theta_\lambda^\lambda - \varphi^\lambda \theta_{\lambda\alpha} &= O(\theta^2 \sqrt{\theta}), \\ \theta_\lambda^\lambda \theta_\kappa^\kappa - \theta_\kappa^\kappa \theta_\lambda^\lambda &= O(\theta^3), & n &= 1 + \theta_\kappa^\kappa + O(\theta^3), \\ n_\alpha &= -\varphi_\alpha (1 + \theta_\kappa^\kappa) + \varphi^\lambda (\theta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha}) = -\varphi_\alpha + O(\theta^2 \sqrt{\theta}). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Przy wykorzystaniu oszacowania (2.79)₂ i symetryzacji wyniku, $\kappa_{\alpha\beta}$ upraszcza się do postaci

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} [(1 + \theta_\kappa^\kappa) (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) - \varphi^\lambda (\theta_{\lambda\alpha|\beta} - \omega_{\lambda\alpha|\beta} + \theta_{\lambda\beta|\alpha} - \omega_{\lambda\beta|\alpha}) + \\ &+ b_\alpha^\lambda (\theta_{\lambda\beta} + \varphi_\lambda \varphi_\beta) + b_\beta^\lambda (\theta_{\lambda\alpha} + \varphi_\lambda \varphi_\alpha)] - b_{\alpha\beta} \theta_\kappa^\kappa + O\left(\frac{\eta\theta}{\lambda}\right), \end{aligned} \quad (2.80)$$

którą po wykorzystaniu tożsamości [1966:69]

$$\omega_{\lambda\alpha|\beta} = \theta_{\alpha\beta|\lambda} - \theta_{\lambda\beta|\alpha} + b_{\alpha\beta} \varphi_\lambda - b_{\lambda\beta} \varphi_\alpha \quad (2.81)$$

można nieco skrócić [1980:62], tzn.

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} [(1 + \theta_\kappa^\kappa) (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) + b_\alpha^\lambda \theta_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda \theta_{\lambda\alpha}] + \\ &+ \varphi^\lambda (\theta_{\lambda\alpha|\beta} + \theta_{\lambda\beta|\alpha} - \theta_{\alpha\beta|\lambda}) - b_{\alpha\beta} (\theta_\kappa^\kappa + \varphi^\lambda \varphi_\lambda) + O\left(\frac{\eta\theta}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Zauważmy, że z błędem $O(\eta\theta/\lambda)$ w $\kappa_{\alpha\beta}$, wynikającym z błędu $O(Eh\eta^2\theta^2)$ energii odkształcenia (2.55), składowe n na mocy (2.79)₂ są liniowe, natomiast składowe n_α na mocy (2.79)₃ są nadal wielomianami kwadratowymi względem przesunięć i ich pochodnych. Uniemożliwia to sformułowanie statycznych warunków brzegowych jako warunków naturalnych na brzegu, przy których ściśle spełniona jest zasada pracy wirtualnej. W rezultacie, uproszczone wyrażenia na F , M i F^* , M^* muszą być konstruowane przez oszacowania rozwinięć wielomianowych funkcji (2.72)–(2.74) (por. [1981:37], [1966:69]). Takie wielomianowe statyczne i geometryczne warunki brzegowe trudno jest uwzględnić w analizie numerycznej metodą elementów skończonych, opartej o wariacyjne sformułowanie problemu.

Już w [1980:62] zaproponowano, aby za cenę pewnej utraty dokładności w teorii dużych obrotów dopuścić większy błąd $O(Eh\eta^2\theta\sqrt{\theta})$ w energii odkształcenia (2.55). Wtedy $\gamma_{\alpha\beta}$ z błędem $O(\eta\theta\sqrt{\theta})$ ma nadal postać uproszczoną (2.78), natomiast $\kappa_{\alpha\beta}$ z błędem $O(\eta\sqrt{\theta}/\lambda)$ umożliwia przybliżenie składowych n_α z błędem $O(\theta^2\sqrt{\theta})$, co zgodnie z (2.79)₃ oznacza, że $n_\alpha \equiv -\varphi_\alpha$ są liniowe względem przesunięć. W rezultacie $\kappa_{\alpha\beta}$ upraszcza się do postaci [1983:46], [1984:62]

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} = & -\frac{1}{2}[(\delta_\alpha^\lambda + \theta_\alpha^\lambda)\varphi_{\lambda|\beta} + (\delta_\beta^\lambda + \theta_\beta^\lambda)\varphi_{\lambda|\alpha} - \varphi_\alpha(\theta_\kappa^\kappa)_{|\beta} - \varphi_\beta(\theta_\kappa^\kappa)_{|\alpha} + \\ & + b_\alpha^\lambda(\theta_{\lambda\beta} + \varphi_\lambda\varphi_\beta) + b_\beta^\lambda(\theta_{\lambda\alpha} + \varphi_\lambda\varphi_\alpha)] - b_{\alpha\beta}\theta_\kappa^\kappa + O\left(\frac{\eta\sqrt{\theta}}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Wprowadzając (2.78) i (2.83) do wewnętrznej pracy wirtualnej, po przekształceniach otrzymamy

$$\begin{aligned} G_{\text{int}} = & \iint_{\mathcal{A}} (N^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}\delta\kappa_{\alpha\beta}) dA = \\ = & - \iint_{\mathcal{A}} \mathbf{N}^\alpha|_\alpha \cdot \delta\mathbf{u} dA + \int_{\partial\mathcal{A}} [\mathbf{N}^\alpha\nu_\alpha \cdot \delta\mathbf{u} - \nu_\alpha M^{\alpha\beta}(\delta_\beta^\lambda + \theta_\beta^\lambda)\delta\varphi_\lambda + \nu_\alpha M^{\alpha\beta}\varphi_\beta\delta\theta_\lambda^\lambda] ds, \end{aligned} \quad (2.84)$$

gdzie teraz

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^\alpha = & T^{\alpha\lambda}\mathbf{a}_\lambda + T^\alpha\mathbf{n}, \\ T^{\alpha\lambda} = & N^{\alpha\beta}(\delta_\beta^\lambda + \theta_\beta^\lambda) - \frac{1}{2}(N_\beta^\alpha\omega^{\lambda\beta} + N_\beta^\lambda\omega^{\alpha\beta}) + a^{\alpha\lambda}[b_{\kappa\rho}M^{\kappa\rho} + (M^{\kappa\rho}\varphi_\kappa)_{|\rho}] - \\ & - \frac{1}{2}[M^{\alpha\beta}(b_\beta^\lambda + \varphi^\lambda|_\beta) + M^{\lambda\beta}(b_\beta^\alpha + \varphi^\alpha|_\beta)], \quad (2.85) \\ T^\alpha = & N^{\alpha\beta}\varphi_\beta + [M^{\lambda\beta}(\delta_\lambda^\alpha + \theta_\lambda^\alpha)]|_\beta + M^{\alpha\beta}(\theta_\kappa^\kappa)_{|\beta} - (b_\beta^\alpha M^{\beta\lambda} + b_\beta^\lambda M^{\alpha\beta})\varphi_\lambda. \end{aligned}$$

Zgodnie z oszacowaniem (2.79)₁, w ostatnim wyrażeniu w (2.84) możemy wykonać podstawienie $\delta\theta_\lambda^\lambda = \delta(-\frac{1}{2}\varphi^\lambda\varphi_\lambda) = -\varphi^\lambda\delta\varphi_\lambda$. Ponieważ z (2.7)₂ wynika, że $\tau^\lambda\delta\varphi_\lambda = \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u}'$, po wykonaniu całkowania przez części całka krzywoliniowa w (2.84) przyjmuje postać

$$\int_{\partial\mathcal{A}} (\mathbf{F}' \cdot \delta\mathbf{u} - M\delta\varphi_\nu) ds + \sum_{M_n \in \partial\mathcal{A}} F_n \delta w_n, \quad (2.86)$$

gdzie teraz funkcje (2.71) i (2.72) zostały zredukowane do postaci

$$\begin{aligned} R_{\nu\nu} = & M_{\nu\nu}(1 + \theta_{\nu\tau}) + M_{\nu\tau}\theta_{\nu\tau}, & R_{\nu\tau} = & M_{\nu\nu}\theta_{\nu\tau} + M_{\nu\tau}(1 + \theta_{\tau\tau}), \\ R_\nu = & M_{\nu\nu}\varphi_\nu + M_{\nu\tau}\varphi_\tau, & \mathbf{F} = & F\mathbf{n}, \\ F = & R_{\nu\tau} + R_\nu\varphi_\tau = M_{\nu\nu}(\theta_{\nu\tau} + \varphi_\nu\varphi_\tau) + M_{\nu\tau}(1 + \theta_{\tau\tau} + \varphi_\tau^2), \\ M = & R_{\nu\nu} + R_\nu\varphi_\nu = M_{\nu\nu}(1 + \theta_{\nu\nu} + \varphi_\nu^2) + M_{\nu\tau}(\theta_{\nu\tau} + \varphi_\nu\varphi_\tau). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Uproszczenie zewnętrznej pracy wirtualnej G_{ext} należy wykonać z tą samą dokładnością jak G_{int} . W teorii dużych/malych obrotów

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = (\delta_\alpha^\lambda + \theta_\alpha^\lambda) \mathbf{a}_\lambda + \varphi_\alpha \mathbf{n} + O(\theta^2), \quad \bar{\mathbf{n}} = -\varphi^\lambda \mathbf{a}_\lambda + (1 + \theta_\kappa^\kappa) \mathbf{n} + O(\theta^2 \sqrt{\theta}) \quad (2.88)$$

i dlatego z tym samym przybliżeniem

$$m^\alpha \bar{\mathbf{n}} = -m^\alpha \varphi^\lambda \mathbf{a}_\lambda + m^\alpha (1 + \theta_\kappa^\kappa) \mathbf{n},$$

$$q^\lambda = p^\alpha (\delta_\alpha^\lambda + \theta_\alpha^\lambda) - p \varphi^\lambda, \quad q = p^\alpha \varphi_\alpha + p (1 + \theta_\kappa^\kappa). \quad (2.89)$$

Struktura wzorów (2.86) — (2.89) wymaga, aby zewnętrzna praca wirtualna została zredukowana do postaci

$$G_{\text{ext}} = \iint_{\mathcal{M}} (\mathbf{p} + \mathbf{l}) \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\partial \mathcal{M}_f} [(-m_\nu \bar{\mathbf{n}} + \mathbf{N}^* + \mathbf{F}^{*\prime}) \cdot \delta \mathbf{u} - M^* \delta \varphi_\nu] ds + \sum_{M_n \in \partial \mathcal{M}_f} F_n^* \delta w_n, \quad (2.90)$$

gdzie

$$H_\nu = M_\nu^* (1 + \theta_{\nu\nu}) + M_\tau^* \theta_{\nu\tau}, \quad H_\tau = M_\nu^* \theta_{\nu\tau} + M_\tau^* (1 + \theta_{\tau\tau}),$$

$$H = M_\nu^* \varphi_\nu + M_\tau^* \varphi_\tau, \quad \mathbf{F}^* = F^* \mathbf{n},$$

$$F^* = H_\tau + H \varphi_\tau = M_\nu^* (\theta_{\nu\tau} + \varphi_\nu \varphi_\tau) + M_\tau^* (1 + \theta_{\tau\tau} + \varphi_\tau^2), \quad (2.91)$$

$$M^* = H_\nu + H \varphi_\nu = M_\nu^* (1 + \theta_{\nu\nu} + \varphi_\nu^2) + M_\tau^* (\theta_{\nu\tau} + \varphi_\nu \varphi_\tau).$$

Reasumując, zagadnienie brzegowe takiej *uproszczonej teorii dużych/malych obrotów* składa się z następującego układu zależności:

równań równowagi w \mathcal{M}

$$T^{\alpha\lambda} |_\alpha - b_\alpha^\lambda T^\alpha + q^\lambda + l^\lambda = 0, \quad T^\alpha |_\alpha - b_{\alpha\lambda} T^{\alpha\lambda} + q + l = 0, \quad (2.92)$$

naturalnych statycznych warunków brzegowych na $\partial \mathcal{M}_f$

$$\nu_\alpha T^{\alpha\lambda} \nu_\lambda + \tau_\tau F = T_\nu^* + \tau_\tau F^* + m_\nu \varphi_\nu,$$

$$\nu_\alpha T^{\alpha\lambda} \tau_\lambda - \sigma_\tau F = T_\tau^* - \sigma_\tau F^* + m_\nu \varphi_\tau,$$

$$T^\alpha \nu_\alpha + F' = T^* + F^{*\prime} - m_\nu (1 + \theta_{\nu\nu} + \theta_{\tau\tau}), \quad (2.93)$$

$$M = M^*,$$

naturalnych statycznych warunków brzegowych w narożach $M_n \in \partial \mathcal{M}_f$

$$F_n = F_n^*, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.94)$$

geometrycznych warunków brzegowych na $\partial \mathcal{M}_d$

$$u_\nu = u_\nu^*, \quad u_\tau = u_\tau^*, \quad w = w^*, \quad \varphi_\nu = \varphi_\nu^*. \quad (2.95)$$

W powyższych równaniach należy wykorzystać zależności (2.85), (2.87), (2.89) i (2.91), a następnie wyrazić $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ przez przesunięcia u_α , w , korzystając z równań

konstrytuwnych (2.57) oraz uproszczonych zależności kinematycznych (2.78) i (2.83).

Struktura wyprowadzonych wyżej zależności jest względnie prosta: 1) obie miary deformacji (2.78) i (2.83) są wielomianami kwadratowymi względem u_α , w ; 2) równania równowagi (2.92) są liniowe zarówno względem $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ jak i u_α , w ; 3) wszystkie statyczne warunki brzegowe są liniowe względem $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, dwa (2.93)_{1,2} są liniowe względem u_α , w , a dwa (2.93)₄ oraz warunki w narożach (2.94) są kwadratowe względem u_α , w tylko poprzez kwadraty φ_ν i φ_τ ; 4) wszystkie geometryczne warunki brzegowe są liniowe względem przesunięć, co ma istotne znaczenie przy analizie numerycznej opartej na metodzie elementów skończonych.

Wykorzystując oszacowania (2.79) i tożsamość (2.81), konsekwentnie uproszczone wyrażenie na $\kappa_{\alpha\beta}$ może być przedstawione w kilku innych alternatywnych postaciach, np.:

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} = & -\frac{1}{2}[(1+\theta_\kappa)(\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) - \varphi^\lambda(\theta_{\lambda\alpha|\beta} + \theta_{\lambda\beta|\alpha}) + \\ & \underline{+ b_\alpha^\lambda(\theta_{\lambda\beta} + \varphi_\lambda \varphi_\beta) + b_\beta^\lambda(\theta_{\lambda\alpha} + \varphi_\lambda \varphi_\alpha)}] - \underline{b_{\alpha\beta} \theta_\kappa} + O\left(\frac{\eta\sqrt{\theta}}{\lambda}\right), \\ \kappa_{\alpha\beta} = & -\frac{1}{2}[(1+\theta_\kappa)(\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) + \underline{b_\alpha^\lambda \theta_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda \theta_{\lambda\alpha}}] + \\ & + \varphi^\lambda(\theta_{\lambda\alpha|\beta} + \theta_{\lambda\beta|\alpha} - \theta_{\alpha\beta|\lambda}) - \underline{\frac{1}{2} b_{\alpha\beta} \varphi^\lambda \varphi_\lambda} + O\left(\frac{\eta\sqrt{\theta}}{\lambda}\right), \quad (2.96) \\ \kappa_{\alpha\beta} = & -\frac{1}{2}[(\delta_\alpha^\lambda + \theta_\alpha^\lambda + \varphi^\lambda \varphi_\alpha) \varphi_{\lambda|\beta} + (\delta_\beta^\lambda + \theta_\beta^\lambda + \varphi^\lambda \varphi_\beta) \varphi_{\lambda|\alpha} + \\ & \underline{+ b_\alpha^\lambda(\theta_{\lambda\beta} + \varphi_\lambda \varphi_\beta) + b_\beta^\lambda(\theta_{\lambda\alpha} + \varphi_\lambda \varphi_\alpha) - b_{\alpha\beta} \varphi^\lambda \varphi_\lambda}] + O\left(\frac{\eta\sqrt{\theta}}{\lambda}\right), \\ \kappa_{\alpha\beta} = & -\frac{1}{2}[(\delta_\alpha^\lambda + \frac{1}{2} \varphi^\lambda \varphi_\alpha) \varphi_{\lambda|\beta} + (\delta_\beta^\lambda + \frac{1}{2} \varphi^\lambda \varphi_\beta) \varphi_{\lambda|\alpha} - \\ & \underline{-\frac{1}{2}(b_\alpha^\lambda \varphi_\beta + b_\beta^\lambda \varphi_\alpha) \varphi_\lambda + b_{\alpha\beta} \varphi^\lambda \varphi_\lambda}] + O\left(\frac{\eta\sqrt{\theta}}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Jeszcze inny wariant równoważny (2.96)₃ podano w [1984:60].

Zauważmy, że wyrażenia (2.96)_{1,2} są kwadratowe, a (2.96)_{3,4} sześciennymi względem u_α , w , natomiast (2.96)₄ jest funkcją tylko obrotów φ_α . Każde z tych wyrażen, razem z (2.78), generuje nieco inne postacie funkcji $T^{\alpha\beta}$, T^α , F i M , które są równoważne (2.85) i (2.87) w granicach błędu uproszczonej teorii dużych/małych obrotów. Warianty teorii oparte na (2.96)₃ i (2.96)₄ zostały zaproponowane w [1984:62]. Zaletą tych dwóch wariantów jest umożliwienie wyprowadzenia wszystkich zależności z odpowiednio uproszczonej zasady pracy wirtualnej. Wariant teorii oparty na (2.96)₂ zaproponowano w [1980:62] i rozwinięto w [1986:41], łącznie z obszerną analizą numeryczną szeregu

przykładów testowych. Ta analiza wykazała nie tylko dobrą zgodność wyników w granicach dużych/malych obrotów, lecz również daleko poza zakresem tych obrotów, w porównaniu z wynikami uzyskanymi na podstawie teorii geometrycznie nieliniowej opartej na pełnym wyrażeniu (2.9)₁ na $\gamma_{\alpha\beta}$ i (2.9)₃ uwzględniając (2.61)₂ na $\kappa_{\alpha\beta}$.

W zastosowaniach inżynierskich, w dążeniu do dalszego konsekwentnego uproszczenia zależności teorii dużych/malych obrotów, możemy dopuścić jeszcze większy błąd $O(Eh\eta^2\theta)$ w energii odkształcenia (2.55). Wtedy, za cenę dalszej utraty dokładności rozwiązania, powierzchniowe miary odkształceń (2.78) i (2.83) takiej *najprostszej teorii dużych/malych obrotów* przyjmują krańcowo prostą postać [1983:45], [1983:46]

$$\gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\varphi_{\alpha}\varphi_{\beta} + \frac{1}{2}\theta_{\alpha}^{\lambda}\theta_{\lambda\beta} + O(\eta\theta), \quad (2.97)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[(\delta_{\alpha}^{\lambda} + \theta_{\alpha}^{\lambda})\varphi_{\lambda|\beta} + (\delta_{\beta}^{\lambda} + \theta_{\beta}^{\lambda})\varphi_{\lambda|\alpha} - \varphi_{\alpha}(\theta_{\kappa}^{\kappa})_{|\beta} - \varphi_{\beta}(\theta_{\kappa}^{\kappa})_{|\alpha}] + O\left(\frac{\eta}{\lambda}\right).$$

Wprowadzając (2.97) do G_{int} , otrzymamy spójne z (2.97) definicje pól wewnętrznych

$$T^{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}[N^{\alpha\beta}(\delta_{\beta}^{\lambda} + \theta_{\beta}^{\lambda}) + N^{\lambda\beta}(\delta_{\beta}^{\alpha} + \theta_{\beta}^{\alpha})] - \frac{1}{2}(M^{\alpha\beta}\varphi^{\lambda}_{|\beta} + M^{\lambda\beta}\varphi^{\alpha}_{|\beta}) - a^{\alpha\lambda}(M^{e\kappa}\varphi_{\kappa})_{|\rho},$$

$$T^{\alpha} = N^{\alpha\beta}\varphi_{\beta} + [M^{\beta\lambda}(\delta_{\lambda}^{\alpha} + \theta_{\lambda}^{\alpha})]_{|\beta}, \quad (2.98)$$

a definicje wielkości brzegowych pozostają takie same jak w (2.87) i (2.91). Na zagadnienie brzegowe takiej najprostszej teorii dużych/malych obrotów składają się równania (2.92)—(2.95), ale z definicjami (2.98), gdzie $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ wyrażono przez przesunięcia, używając równań konstytutywnych (2.57) i najprostszych związków kinematycznych (2.97).

Z błędem $O(\eta/\lambda)$ również alternatywne wyrażenia (2.96) mogą być uproszczone przez pominięcie szeregu podkreślonych członów. Wtedy (2.97)₁ oraz tak uproszczone wyrażenia (2.96) generują nieco inne postacie funkcji $T^{\alpha\lambda}$, T^{α} energetycznie równoważne (2.98). Taki alternatywny najprostszy wariant teorii dużych/malych obrotów oparty na (2.96)₂ dyskutowano w [1980:62], wariant oparty na (2.96)₃ w [1984:61], a wariant oparty na (2.96)₄ w [1984:62].

W szeregu znanych publikacji zaproponowano inne uproszczone warianty geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych w przesunięciach oparte na różnych nieliniowych wyrażeniach $\kappa_{\alpha\beta}$, które nie zawierają niektórych energetycznie ważnych członów ujętych w (2.83) i (2.96), chociaż uwzględniają inne mało istotne energetycznie człony. Energetyczną spójność niektórych takich znanych z literatury wariantów zbadano w [1984:61]. Obszerna porównawcza analiza numeryczna szeregu jedno- i dwuwymiarowych przykładów testowych przeprowadzona m.in. w [1986:41] wykazała, że wszystkie energetycznie spójne warianty teorii dużych/malych obrotów, w zakresie ich stosowalności, dają zawsze wyniki zgodne z rozwiązaniami porównawczymi otrzymanymi na podstawie teorii geometrycznie nieliniowej używającej pełnych wyrażen miar odkształceń (2.9)₁ i (2.9)₃ przy (2.61)₂. W niektórych zadaniach ta zgodność wyników znacznie wykraczała poza zakres dużych obrotów. Jednocześnie

wyniki numeryczne oparte na bardziej skomplikowanych wariantach znanych z literatury, które jednak nie były energetycznie spójne, odbiegały czasem od rozwiązania porównawczego już w początkowej fazie deformacji powłoki.

2.3.5. Teoria umiarkowanych obrotów

W teorii umiarkowanych obrotów spełnione są, zgodnie z tablicą 1, oszacowania $\varphi_a = O(\theta)$, $\omega_{a\beta} = O(\theta)$, $\theta_{a\beta} = O(\theta^2)$. Umożliwiają one przedstawienie powierzchniowych miar odkształceń w następującej konsekwentnie uproszczonej i zsymetryzowanej postaci [1980:62]:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta + \frac{1}{2} \omega_{\alpha\lambda} \omega_{\lambda\beta} - \frac{1}{2} (\theta_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta} + \theta_\beta^\lambda \omega_{\lambda\alpha}) + O(\eta\theta^2), \quad (2.99)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} [\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} - b_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta} - b_\beta^\lambda \omega_{\lambda\alpha} + \varphi^\lambda (\omega_{\lambda\alpha|\beta} + \omega_{\lambda\beta|\alpha})] + O\left(\frac{\eta\theta}{\lambda}\right).$$

Ale z tożsamości (2.81) wynika, że stosując powyższe oszacowania do każdego z czterech członów prawej strony (2.81), otrzymamy wspólne oszacowanie $\omega_{\lambda\alpha|\beta} = O(\theta^2/\lambda)$. Dlatego dwa ostatnie człony w (2.99)₂ mogą być również pominięte, co prowadzi do

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} - \underline{b_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta} - b_\beta^\lambda \omega_{\lambda\alpha}}) + O\left(\frac{\eta\theta}{\lambda}\right). \quad (2.100)$$

W energetycznie spójnej teorii umiarkowanych obrotów tensor $\kappa_{\alpha\beta}$ jest więc wyrażeniem liniowym względem przesunięć i ich pochodnych. Wyrażenie (2.100) pokrywa się z definicją $\kappa_{\alpha\beta}$ stosowaną w tzw. najlepszym sformułowaniu liniowej teorii powłok [1963:54]. Z porównania (2.100) i (2.9)₂ przy (2.61)₂ wynika, że tutaj, z dokładnością do przyjętych uproszczeń, $n_\mu \cong -\varphi_\mu$, $n \cong 1$.

Po wprowadzeniu (2.99)₁ i (2.100) do wewnętrznej pracy wirtualnej (2.21)₁, dalsze jej przekształcenie jest stosunkowo proste i prowadzi do następujących energetycznie spójnych definicji pól wewnętrznych [1980:62]:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^\alpha = \{ & \underline{N^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2}(b_\beta^\alpha M^{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda M^{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} N_\kappa^\kappa \omega^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2} (N_\beta^\alpha \omega^{\lambda\beta} + N_\beta^\lambda \omega^{\alpha\beta})} + \\ & \underline{+ \frac{1}{2} (N_\beta^\alpha \theta^{\lambda\beta} - N_\beta^\lambda \theta^{\alpha\beta})} \} \mathbf{a}_\lambda + (N^{\alpha\beta} \varphi_\beta + M^{\beta\alpha}|_\beta) \mathbf{n}, \quad (2.101) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = M_{v\tau} \mathbf{n}, \quad M = M_{vv}.$$

Zauważmy, że w wyniku uproszczenia (2.100) składowe $M^{\alpha\beta}$ wchodzą do (2.101) bez jakichkolwiek mnożników uwzględniających zmianę geometrii powłoki podczas deformacji, a \mathbf{F} zawiera tylko składową normalną. Oznacza to, że spójne z (2.101) zewnętrzne momenty powierzchniowe \mathbf{m} i brzegowe \mathbf{M}^* mogą być uwzględnione tylko z takim samym przybliżeniem w postaci

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \times m^a \mathbf{a}_a, \quad \mathbf{l} = -b_a^\lambda m^a \mathbf{a}_\lambda + m^a |_{|a} \mathbf{n}, \quad (2.102)$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{n} \times (M_v^* \mathbf{v} + M_\tau^* \boldsymbol{\tau}), \quad \mathbf{F}^* = M_\tau^* \mathbf{n}, \quad M^* = M_v^*.$$

Zagadnienie brzegowe przemieszczeniowej *teorii umiarkowanych obrotów* formułowane jest przez równania równowagi (2.92) oraz statyczne (2.93), (2.94) i geometryczne (2.95) warunki brzegowe, w których wprowadzono wyrażenia (2.101) i (2.102), równania konstytutywne (2.57) oraz uproszczone związki kinematyczne (2.99)₁ i (2.100).

W wielu konstrukcjach powłokowych tylko składowe Ω_a mogą być umiarkowane, natomiast składowa Ω jest zawsze mała. W takiej *teorii umiarkowanych/małych obrotów* spełnione są, zgodnie z tablicą 1, oszacowania $\varphi_a = O(\theta)$, $\omega_{a\beta} = O(\theta^2)$, $\theta_{a\beta} = O(\theta^2)$. Umożliwiają one dalsze uproszczenia związków kinematycznych (2.99)₁ i (2.100) przez pominięcie w nich małych podkreślonych wyrazów. W wyniku tych uproszczeń wypada szereg podkreślonych członów w (2.101)₁ i zagadnienie brzegowe znacznie się upraszcza.

Innym energetycznie spójnym sposobem dalszego uproszczenia zależności *teorii umiarkowanych obrotów* jest dopuszczenie większego błędu $O(Eh\eta^2\theta)$ w energii odkształcenia (2.55). Wtedy, za cenę pewnej utraty dokładności rozwiązania, zależności takiej najprostszej *teorii umiarkowanych obrotów* przyjmują prostą postać [1984:62]

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta + \frac{1}{2} \omega_{\cdot\alpha}^\lambda \omega_{\lambda\beta} + O(\eta\theta), \\ \kappa_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|a}) + O\left(\frac{\eta}{\lambda}\right), \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\mathbf{T}^\alpha = (N^{\alpha\lambda} + \frac{1}{2} N_\kappa^\kappa \omega^{\alpha\lambda}) \mathbf{a}_\lambda + (N^{\alpha\beta} \varphi_\beta + M^{\beta\alpha} |_\beta) \mathbf{n},$$

przy nie zmienionych zależnościach (2.101)₂ i (2.102). Po dodatkowym dalszym ograniczeniu Ω do wartości małej, $\omega_{a\beta} = O(\theta^2)$, zależności *najprostszej teorii umiarkowanych/małych obrotów* wynikają z (2.103) po pominięciu dalszych małych podkreślonych wyrazów.

Przedstawiony tu wariant geometrycznie nieliniowej *teorii cienkich powłok sprężystych* w opisie Lagrange'a przy umiarkowanych obrotach, oparty na energetycznie uproszczonych powierzchniowych miarach odkształceń (2.99)₁ i (2.100), zawiera wiele znanych z literatury prostszych wariantów nieliniowej *teorii powłok*. Przegląd tych różnych uproszczonych wersji podano w [1981:38], gdzie również sformułowano szereg rodzin funkcjonałów, zarówno swobodnych jak i z warunkami ubocznymi, oraz odpowiadających im zasad wariacyjnych. Te funkcjonały umożliwiają różne słabe sformułowania zagadnienia brzegowego powłoki opartego na różnych szczególnych wersjach *teorii umiarkowanych obrotów*. Skonstruowane w [1981:38] funkcjonały mogą stanowić podstawę do opracowania odpowiednich rodzin elementów skończonych i algorytmów analizy nieliniowej powłok cienkich.

2.3.6. Nieliniowa teoria powłok o małej wyniosłości

Najprostszym i zarazem najbardziej znanym przypadkiem szczególnym teorii umiarkowanych/małych obrotów jest *nieliniowa teoria powłok o małej wyniosłości* rozwinięta m. in. przez Mushtari'ego [1938:5] i Marguerre'a [1939:2]. Oprócz oszacowań $\varphi_a = O(\theta)$, $\omega_{a\beta} = O(\theta^2)$, $\theta_{a\beta} = O(\theta^2)$ przyjmuje się tu założenie dodatkowe, że przesunięcia styczne u_a są o rząd mniejsze od normalnych w , tzn. $u_a \sim wO(\theta)$. Stąd wynika, że $\varphi_a = w_{,a} [1 + O(\theta^2)]$ i zależności kinematyczne upraszczają się do postaci

$$\gamma_{a\beta} = \theta_{a\beta} + \frac{1}{2} w_{,a} w_{,\beta} + O(\eta\theta^2), \quad \kappa_{a\beta} = -w|_{a\beta} + O\left(\frac{\eta\theta}{\lambda}\right). \quad (2.104)$$

W sformułowaniu klasycznym zazwyczaj pomija się również wektor momentów powierzchniowych

$$\mathbf{m} \equiv \mathbf{0}. \quad (2.105)$$

Po wprowadzeniu (2.104) i (2.105) do zasady pracy wirtualnej, otrzymamy następujące definicje:

$$\mathbf{N}^a = N^{a\lambda} \mathbf{a}_\lambda + (N^{a\beta} w_{,\beta} + M^{\beta a}|_\beta) \mathbf{n}, \quad (2.106)$$

$$\mathbf{F} = M_{v\tau} \mathbf{n}, \quad M = M_{v\nu}, \quad \mathbf{F}^* = M_{\tau}^* \mathbf{n}, \quad M^* = M_{\nu}^*.$$

W odpowiadających definicji (2.106)₁ równaniach równowagi (2.92)₁, również człony zawierające siły tnące $-b_a^\lambda T^a = -b_a^\lambda (N^{a\beta} w_{,\beta} + M^{\beta a}|_\beta) = O\left(Eh \frac{\eta\theta^2}{\lambda}\right)$ są pomijane względem członu głównego $N^{a\lambda}|_a = O\left(Eh \frac{\eta}{\lambda}\right)$. Dlatego równania równowagi przyjmują tu postać skrajnie uproszczoną

$$N^{a\beta}|_a + q^\beta \equiv 0, \quad M^{a\beta}|_{a\beta} + (b_{a\beta} + w|_{a\beta}) N^{a\beta} + q = 0. \quad (2.107)$$

Równania równowagi (2.107) i odpowiednio uproszczone warunki brzegowe (2.92)—(2.95), gdy wyrażone zostaną przez przesunięcia u_a , w , prowadzą do odpowiedniego zagadnienia brzegowego nieliniowej teorii powłok o małej wyniosłości w przesunięciach.

Często zagadnienie brzegowe tej teorii powłok formułowane jest przez wprowadzenie tzw. funkcji naprężeń Ψ . Z oszacowania (2.104)₂ widzimy, że w tej skrajnie uproszczonej wersji nieliniowej teorii powłok, pochodna kowariantna funkcji skalarnej $w(\theta^a)$ jest w przybliżeniu przemienna. Dlatego, z tym samym przybliżeniem, pierwsze dwa równania równowagi można spełnić przez podstawienie

$$N^{a\beta} = \epsilon^{a\lambda} \epsilon^{\beta\rho} \Psi|_{\lambda\rho} + P^{a\beta}, \quad (2.108)$$

gdzie $P^{a\beta}$ jest całką szczególną (2.107)₁. Wtedy z (2.107)₂, wykorzystując (2.57)₂, (2.104)₂ i (2.108), otrzymamy

$$Dw|_{a\beta}^{a\beta} - \epsilon^{a\lambda} \epsilon_{\beta\rho} (b_a^\beta + w|_a^\beta) \Psi|_{\lambda}^\rho - (b_a^\beta + w|_a^\beta) P|_{\beta}^a - q = 0. \quad (2.109)$$

Wprowadzając Ψ jako zmienną niezależną, trzeba dodatkowo zapewnić spełnienie równań ciągłości (2.10), które z błędem teorii pierwszego przybliżenia upraszczają się do postaci

$$\kappa_a^\beta|_\beta - \kappa_\beta^\beta|_a = O\left(\frac{\eta\theta^2}{h\lambda}\right), \quad (2.110)$$

$$\gamma_a^\beta|_\beta - \gamma_a^\alpha|_\beta - (b_a^\beta \kappa_\beta^\alpha - b_a^\alpha \kappa_\beta^\beta) + \frac{1}{2}(\kappa_a^\beta \kappa_\beta^\alpha - \kappa_a^\alpha \kappa_\beta^\beta) = O\left(\frac{\eta\theta^2}{\lambda^2}\right).$$

Pierwsze dwa równania (2.110)₁ spełnione są w granicach wskazanego błędu przez (2.104)₂. Natomiast z (2.110)₂, przy wykorzystaniu (2.60)₁, (2.108) i (2.104)₂ otrzymamy

$$A\Psi|_{a\beta}^{a\beta} - \epsilon^{a\lambda}\epsilon_{\beta\rho}(b_a^\beta + \frac{1}{2}w|_a^\beta)w|_\lambda^\rho + A[P_a^\alpha|_\beta - (1-\nu)P_a^\beta|_\alpha] = 0. \quad (2.111)$$

W literaturze najczęściej pomija się również składowe styczne wektora sił powierzchniowych, $q^a \equiv 0$, stąd też i $P^{a\beta}|_\beta \equiv 0$. Wprowadzając ponadto bardziej znane oznaczenia

$$\Psi|_a^a = \Delta\Psi, \quad \Psi|_{a\beta}^{a\beta} = \Delta\Delta\Psi, \quad \epsilon^{a\lambda}\epsilon_{\beta\rho} = \delta_\beta^a\delta_\rho^\lambda - \delta_\rho^a\delta_\beta^\lambda = \delta_{\beta\rho}^{a\lambda}, \quad (2.112)$$

równaniom (2.109) i (2.111) nadajemy postać

$$D\Delta\Delta w - \delta_{\beta\rho}^{a\lambda}(b_a^\beta + w|_a^\beta)\Psi|_\lambda^\rho - q = 0, \quad (2.113)$$

$$A\Delta\Delta\Psi + \delta_{\beta\rho}^{a\lambda}(b_a^\beta + \frac{1}{2}w|_a^\beta)w|_\lambda^\rho = 0.$$

Postać ta, przedstawiona we współrzędnych krzywiznowych, występuje w wielu monografiach, np. [1957:29], [1975:50,51], gdzie dyskutuje się również różne warianty warunków brzegowych wyrażone przez w , Ψ oraz liczne przykłady zastosowań.

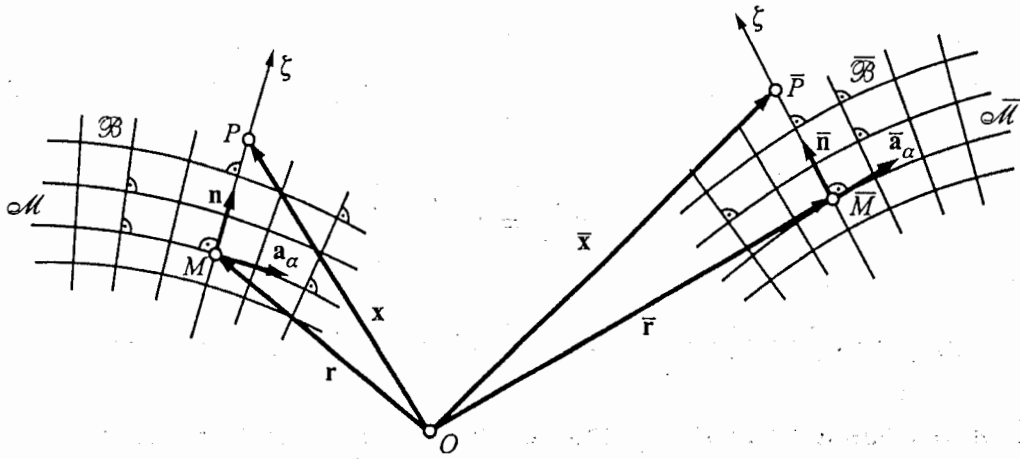
2.4. Alternatywne sformułowania nieliniowej teorii powłok cienkich

2.4.1. Rozkład biegunowy deformacji powierzchni

Deformację powierzchni określono w (2.5) odwzorowaniem $\chi: \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$ takim, że $\bar{\mathbf{r}} = \chi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \mathbf{u}$. Otoczenia powierzchni \mathcal{M} i $\bar{\mathcal{M}}$ w trójwymiarowej przestrzeni fizycznej \mathcal{E} mogą być parametryzowane układem normalnych współrzędnych konwekcyjnych (θ^a, ζ) , dla których (rys. 2.3)

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \zeta \mathbf{n}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{r}} + \zeta \bar{\mathbf{n}}, \quad (2.114)$$

Przestrzenny gradient ∇ takiego odwzorowania $\bar{\mathbf{x}} = \chi(\mathbf{x})$, obliczony na powierzchni \mathcal{M} , jest gradientem deformacji powierzchni



Rys. 2.3

$$\mathbf{F} = \nabla \chi(\mathbf{r} + \zeta \mathbf{n})|_{\zeta=0} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha + \bar{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{a}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{a}}^\alpha + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{n}}, \quad (2.115)$$

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = \bar{\mathbf{1}}, \quad \det \mathbf{F} = j = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} > 0,$$

gdzie

$$\mathbf{1} = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \bar{\mathbf{1}} = \bar{a}_{\alpha\beta} \bar{\mathbf{a}}^\alpha \otimes \bar{\mathbf{a}}^\beta + \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}, \quad (2.116)$$

są równoważnymi reprezentacjami *tensora metrycznego* przestrzeni \mathcal{V} .

W mechanice ośrodków ciągłych [1965:10] szeroko wykorzystuje się twierdzenie algebry liniowej o rozkładzie biegunowym tensora nieosobliwego, które pozwala przedstawić \mathbf{F} w postaci

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T, \quad (2.117)$$

gdzie \mathbf{R} jest *tensorem obrotu*, a \mathbf{U} i \mathbf{V} prawym i lewym *tensorami rozciągnięcia*. Oba tensory \mathbf{U} i \mathbf{V} są symetryczne i dodatnio określone, natomiast \mathbf{R} jest właściwym tensorem ortogonalnym

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T &= \mathbf{U}, & \mathbf{V}^T &= \mathbf{V}, \\ \mathbf{v}\mathbf{U}\mathbf{v} &> 0, & \mathbf{v}\mathbf{V}\mathbf{v} &> 0, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, & \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{R}^T &= \mathbf{R}^{-1}, & \det \mathbf{R} &= +1, & \mathbf{R} &\in SO(3), \end{aligned} \quad (2.118)$$

gdzie $SO(3)$ oznacza grupę obrotów.

Z (2.5) i (2.117) wynika, że deformacja χ otoczenia punktu $M \in \mathcal{M}$ jest dowolnym złożeniem przesunięcia \mathbf{u} , rozciągnięcia \mathbf{U} (lub \mathbf{V}) wzdłuż głównych osi odkształcenia oraz sztywnego obrotu \mathbf{R} tych osi głównych.

Do dalszych rozważań przydatne jest wprowadzenie dwóch nieholonomicznych baz powierzchniowych — bazy rozciągniętej \mathbf{s}_α i bazy obróconej \mathbf{r}_α

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_\alpha &= \mathbf{U}\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{R}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \mathbf{F}^T\mathbf{r}_\alpha, & \mathbf{s}_\alpha \cdot \mathbf{s}_\beta &= \bar{a}_{\alpha\beta}, \\ \mathbf{r}_\alpha &= \mathbf{R}\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{s}_\alpha, & \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta &= a_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Używając tych baz, z (2.115) i (2.117) otrzymamy następujące zależności:

$$\bar{\mathbf{a}}_a = \mathbf{F}\mathbf{a}_a = \mathbf{R}\mathbf{s}_a = \mathbf{V}\mathbf{r}_a, \quad \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{R}\mathbf{n},$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}^a \otimes \mathbf{s}_a + \bar{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n},$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{s}_a \otimes \mathbf{a}^a + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{V} = \bar{\mathbf{a}}_a \otimes \mathbf{r}^a + \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}},$$

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{a}}_a \otimes \mathbf{s}^a + \bar{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{r}_a \otimes \mathbf{a}^a + \bar{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n}.$$

W nieliniowej teorii powłok cienkich zamiast \mathbf{U} i \mathbf{V} najczęściej używa się najczęściej względnych symetrycznych *miar rozciągnięć* powierzchni

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{U} - \mathbf{1} = \boldsymbol{\eta}_\beta \otimes \mathbf{a}^\beta, \quad \boldsymbol{\eta}_\beta = \mathbf{s}_\beta - \mathbf{a}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{V} - \mathbf{1} = \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \otimes \mathbf{r}^\beta, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{r}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha, \quad (2.121)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}\boldsymbol{\eta}\mathbf{R}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \mathbf{R}\boldsymbol{\eta}_\beta, \quad \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}.$$

Przez składowe $\eta_{\alpha\beta}$ można wyrazić wiele pożytecznych związków geometrycznych [1989:6], np.

$$\mathbf{s}_a = U_a^\lambda \mathbf{a}_\lambda, \quad \bar{\mathbf{a}}_a = U_a^\lambda \mathbf{r}_\lambda, \quad \mathbf{a}_a = (U^{-1})_a^\lambda \mathbf{s}_\lambda, \quad \mathbf{r}_a = (U^{-1})_a^\lambda \bar{\mathbf{a}}_\lambda,$$

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = U_\alpha^\lambda U_\beta^\mu a_{\lambda\mu}, \quad \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = U_\alpha^\lambda U_\beta^\mu \varepsilon_{\lambda\mu}, \quad j = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\mu} U_\alpha^\lambda U_\beta^\mu, \quad (2.122)$$

$$U_a^\lambda = \delta_a^\lambda + \eta_a^\lambda, \quad (U^{-1})_a^\lambda = \frac{1}{j} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} U_\mu^\beta, \quad U_\alpha^\lambda (U^{-1})_\lambda^\beta = \delta_\alpha^\beta.$$

Odpowiadające (2.121) i (2.117) względne niesymetryczne *miary zginania* powierzchni definiuje się przez powierzchniowe gradienty wektorów \mathbf{n} i $\bar{\mathbf{n}}$ [1949:17], [1977:29], [1978:53]

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{R}^T \bar{\mathbf{n}}_{,\beta} - \mathbf{n}_{,\beta}) \otimes \mathbf{a}^\beta = \boldsymbol{\mu}_\beta \otimes \mathbf{a}^\beta, \quad \boldsymbol{\mu}_\beta = \mu_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha,$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\bar{\mathbf{n}}_{,\beta} - \mathbf{R}\mathbf{n}_{,\beta}) \otimes \mathbf{r}^\beta = \boldsymbol{\lambda}_\beta \otimes \mathbf{r}^\beta, \quad \boldsymbol{\lambda}_\beta = \mu_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha, \quad (2.123)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}\mathbf{R}^T, \quad \boldsymbol{\lambda}_\beta = \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}_\beta, \quad \mu_{\alpha\beta} \neq \mu_{\beta\alpha}.$$

Zgodnie z (2.123) i (2.120), wektorowe miary $\boldsymbol{\mu}_\beta$, $\boldsymbol{\lambda}_\beta$ określone są tylko przez powierzchniowe gradienty tensora obrotu \mathbf{R} i geometrię \mathcal{M} .

Z $(\mathbf{R}^T \mathbf{R})_{,\beta} = (\mathbf{R}\mathbf{R}^T)_{,\beta} = \mathbf{0}$ wynika, że $\mathbf{R}^T \mathbf{R}_{,\beta}$ i $\mathbf{R}_{,\beta} \mathbf{R}^T$ są tensorami skośnie symetrycznymi i mogą być przedstawione przez odpowiednie wektory osiowe \mathbf{k}_β , \mathbf{l}_β , zwane *wektorami zginania* krzywych układu współrzędnych, o składowych powierzchniowych wynikających z (2.123)

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R}_{,\beta} = \mathbf{k}_\beta \times \mathbf{1}, \quad \mathbf{R}_{,\beta} \mathbf{R}^T = \mathbf{l}_\beta \times \mathbf{1},$$

$$\boldsymbol{\mu}_\beta = \mathbf{k}_\beta \times \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\lambda}_\beta = \mathbf{l}_\beta \times \bar{\mathbf{n}}, \quad (2.124)$$

$$\mathbf{k}_\beta = \varepsilon^{\alpha\lambda} \mu_{\alpha\beta} \mathbf{a}_\lambda + k_\beta \mathbf{n}, \quad \mathbf{l}_\beta = \mathbf{R}\mathbf{k}_\beta = \varepsilon^{\alpha\lambda} \mu_{\alpha\beta} \mathbf{r}_\lambda + k_\beta \bar{\mathbf{n}}.$$

Zauważmy, że w powyższym alternatywnym opisie deformacji powierzchni pojawiły się dwa rozkłady biegunowe $(2.117)_1$, dwie powierzchniowe bazy nieholonomiczne s_a, r_a , dwie pary miar deformacji powierzchni η, μ i ε, λ oraz dwa wektory zginania k_β, l_β . Ta dwoistość opisu wskazuje na to, że mamy do wyboru dwie możliwości alternatywnego opisu zarówno deformacji powierzchni jak i spójnego z nim sformułowania nieliniowej teorii powłok. Pierwsza możliwość wynika z rozkładu $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ i została rozwinięta m.in. w pracach [1975:52], [1979:40], [1980:62] i [1984:59], natomiast konsekwencje wynikające z rozkładu $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ rozwinięto m.in. w [1949:17], [1970:39], [1977:29], [1978:53]. Oba opisy wraz ze związkami transformacyjnymi między nimi omówiono szczegółowo w [1989:6].

Przyjmując jeden wybrany opis deformacji, liczne zależności wektorowe lub tensorowe możemy wyrazić przez składowe w różnych bazach, zarówno holonomicznych jak i nieholonomicznych, co prowadzi do różnych równoważnych reprezentacji skalar-nych tych zależności. W dalszej części niniejszego punktu ograniczymy się więc do przedstawienia opisu deformacji i alternatywnego sformułowania nieliniowej teorii powłok wynikającego z drugiego rozkładu biegunowego $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ i do reprezentacji różnych pól wektorowych i tensorowych w bazie obróconej r_a, \bar{n} .

Tensor obrotu \mathbf{R} można przedstawić w postaci

$$\mathbf{R} = \cos\omega \mathbf{1} + \sin\omega (\mathbf{e} \times \mathbf{1}) + (1 - \cos\omega) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}, \quad (2.125)$$

gdzie wersor \mathbf{e} określa *kierunek* osi obrotu, a ω *kąt obrotu* dookoła osi obrotu. Do opisu obrotów będziemy używali wymiennie *wektorów obrotu skończonego* $\boldsymbol{\Omega} = \sin\omega \mathbf{e}$ i $\boldsymbol{\theta} = 2 \operatorname{tg}\omega/2 \mathbf{e}$, przez które można określić bazę r_a, \bar{n}

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a = \mathbf{R}\mathbf{a}_a &= \mathbf{a}_a + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}_a + \frac{1}{\cos^2\omega/2} \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}_a) = \mathbf{a}_a + \frac{1}{t} \boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{a}_a + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}_a), \\ t &= 1 + \frac{1}{4} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{n} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} + \frac{1}{\cos^2\omega/2} \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}) = \mathbf{n} + \frac{1}{t} \boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{n} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n}).$$

Z (2.124)₁ i (2.126) otrzymamy

$$\mathbf{l}_\beta = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_a \times \mathbf{R}_{,\beta} \mathbf{R}^T \mathbf{r}^a + \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{R}_{,\beta} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{n}}) = \frac{1}{t} (\boldsymbol{\theta}_{,\beta} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_{,\beta} \times \boldsymbol{\theta}). \quad (2.127)$$

Wykorzystując związek $\bar{\mathbf{a}}_\beta = \mathbf{a}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta}$, z (2.121)₂, (2.126) i (2.127) wynikają zależności

$$\mathbf{u}_{,\beta} = \boldsymbol{\varepsilon}_\beta + \frac{1}{t} \boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{r}_\beta - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_\beta), \quad \boldsymbol{\theta}_{,\beta} = \mathbf{l}_\beta - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{l}_\beta + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{l}_\beta) \boldsymbol{\theta}. \quad (2.128)$$

Warunki całkowalności $\epsilon^{a\beta} \mathbf{u}_{,a\beta} = \mathbf{0}$, $\epsilon^{a\beta} \boldsymbol{\theta}_{,a\beta} = \mathbf{0}$ zależności (2.128) mają postać

$$\epsilon^{a\beta} (\boldsymbol{\varepsilon}_{a|\beta} + \mathbf{l}_\beta \times \mathbf{r}_a) = \mathbf{0}, \quad \epsilon^{a\beta} (\mathbf{l}_{a|\beta} + \frac{1}{2} \mathbf{l}_a \times \mathbf{l}_\beta) = \mathbf{0}. \quad (2.129)$$

Jest to alternatywna postać warunków ciągłości odkształceń (2.10) powierzchni. (por. [1949:17], [1977:29], [1978:53]).

Prawa różniczkowania bazy \mathbf{r}_α , $\bar{\mathbf{n}}$ wynikają z (2.124) i (2.120)₄

$$\mathbf{r}_{\alpha|\beta} = \mathbf{l}_\beta \times \mathbf{r}_\alpha + b_{\alpha\beta} \bar{\mathbf{n}} = (b_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha\beta}) \bar{\mathbf{n}} - \epsilon_{\lambda\alpha} k_\beta^\lambda \mathbf{r}^\lambda, \quad (2.130)$$

$$\bar{\mathbf{n}}_{,\beta} = \mathbf{l}_\beta \times \bar{\mathbf{n}} - b_\beta^a \mathbf{r}_a = - (b_{a\beta} - \mu_{a\beta}) \mathbf{r}^a.$$

Tensor \mathbf{R} i wektor $\boldsymbol{\Omega}$ wyrażają się przez przesunięcia \mathbf{u} za pomocą niewymiernych zależności, wynikających z (2.120)₄ i (2.126), (por. [1977:30])

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}^\alpha \otimes [(\delta_\alpha^\lambda + \eta_\alpha^\lambda) \mathbf{r}_\lambda - \mathbf{u}_{,\alpha}] + \bar{\mathbf{n}} \otimes [\varphi_\alpha \bar{a}^{\alpha\beta} (\delta_\beta^\lambda + \eta_\beta^\lambda) \mathbf{r}_\lambda + n \bar{\mathbf{n}}], \quad (2.131)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{r}^\alpha + \mathbf{n} \times \bar{\mathbf{n}}) = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \{ [n^\alpha - \bar{a}^{\lambda\mu} (\delta_\lambda^\alpha + \eta_\lambda^\alpha) \varphi_\mu] \mathbf{r}^\beta + \bar{a}^{\lambda\mu} (\delta_\lambda^\alpha + \eta_\lambda^\alpha) l_{\mu}^\beta \bar{\mathbf{n}} \}.$$

Zależność obrotów od przemieszczeń jest również ujęta w sposób niejawni w definicji tensora rozciągnięcia $\boldsymbol{\epsilon}$, który zgodnie z (2.121)₂ jest tensorem symetrycznym nie mającym składowych w kierunku $\bar{\mathbf{n}}$. Ta niejawni zależność \mathbf{R} od $\mathbf{u}_{,\beta}$ może być wyrażona również w postaci trzech równań więzów [1987:15]

$$\epsilon^{a\beta} \eta_{\alpha\beta} = \epsilon^{a\beta} \mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\beta = \epsilon^{a\beta} (\mathbf{R} \mathbf{a}_\alpha) \cdot (\mathbf{a}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta} - \mathbf{R} \mathbf{a}_\beta) = 0, \quad (2.132)$$

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\beta = (\mathbf{R} \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{a}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta}) = 0.$$

Inne alternatywne zależności używane przy opisie deformacji powierzchni podano w [1989:6].

2.4.2. Rozkład biegunowy deformacji brzegu

Podczas deformacji $\chi: \partial \mathcal{M} \rightarrow \partial \bar{\mathcal{M}}$ trójka wektorów ortonormalnych \mathbf{v} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} przekształca się w trójkę ortogonalną $\bar{\mathbf{a}}_v, \bar{\mathbf{a}}_\tau, \bar{\mathbf{n}}$ (por. (2.16)). Rozkład biegunowy (2.117) wprowadza na brzegu $\partial \bar{\mathcal{M}}$ wektory bazy obróconej $\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_\tau$ takie, że

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_v &= \mathbf{R} \mathbf{v} = \mathbf{r}_\alpha v^\alpha, & \mathbf{r}_\tau &= \mathbf{R} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_\alpha \tau^\alpha, \\ \bar{\mathbf{a}}_\tau &= \bar{\mathbf{a}}_\alpha \tau^\alpha = a_\tau \bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{V} \mathbf{r}_\tau = (\delta_\alpha^\lambda + \eta_\alpha^\lambda) \mathbf{r}_\lambda \tau^\alpha, \\ \bar{\mathbf{a}}_v &= \bar{\mathbf{a}}_\tau \times \bar{\mathbf{n}} = j \bar{\mathbf{a}}^\alpha v_\alpha = \epsilon_{\lambda\beta} (\delta_\alpha^\beta + \eta_\alpha^\beta) \mathbf{r}^\lambda \tau^\alpha. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Z (2.133) wynika, że przekształcenie wektorów \mathbf{v} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} w $\bar{\mathbf{a}}_v, \bar{\mathbf{a}}_\tau, \bar{\mathbf{n}}$ składa się z obrotu \mathbf{R} wektorów \mathbf{v} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} do położenia pośredniego $\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_\tau, \bar{\mathbf{n}}$, a następnie rozciągnięcia a_τ wektorów $\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_\tau$ i ich dodatkowego obrotu \mathbf{Q}_v wynikającego stąd, że kierunki $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\tau}}$ nie muszą pokrywać się z kierunkami głównymi tensora \mathbf{V} na $\partial \bar{\mathcal{M}}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_v \otimes \mathbf{v} + \mathbf{r}_\tau \otimes \boldsymbol{\tau} + \bar{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n}, \quad (2.134)$$

$$\mathbf{Q}_v = \frac{1}{a_\tau} (\bar{\mathbf{a}}_v \otimes \mathbf{r}_v + \bar{\mathbf{a}}_\tau \otimes \mathbf{r}_\tau) + \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}.$$

W dalszych rozważaniach pożyteczne jest wprowadzenie *tensora całkowitego obrotu brzegu* \mathbf{R}_τ , będącego złożeniem \mathbf{R} i \mathbf{Q}_V

$$\mathbf{R}_\tau = \mathbf{Q}_V \mathbf{R} = \bar{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \otimes \boldsymbol{\tau} + \bar{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n}, \quad (2.135)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_v = a_\tau \mathbf{R}_\tau \mathbf{v}, \quad \bar{\mathbf{a}}_\tau = a_\tau \mathbf{R}_\tau \boldsymbol{\tau}, \quad \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{R}_\tau \mathbf{n}.$$

Z (2.16), (2.17) i (2.135)₁ wynika, że $\mathbf{R}_\tau = \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_v, \mathbf{u}')$.

Różniczkowanie bazy $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{n}}$ wzdłuż $\partial \mathcal{M}$ względem s prowadzi do analogicznych jak (2.14) zależności

$$\bar{\mathbf{v}}' = a_\tau \bar{\boldsymbol{\rho}}_\tau \times \bar{\mathbf{v}}, \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}' = a_\tau \bar{\boldsymbol{\rho}}_\tau \times \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad \bar{\mathbf{n}}' = a_\tau \bar{\boldsymbol{\rho}}_\tau \times \bar{\mathbf{n}}, \quad (2.136)$$

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}_\tau = \bar{\sigma}_\tau \bar{\mathbf{v}} + \bar{\tau}_\tau \bar{\boldsymbol{\tau}} + \bar{\rho}_\tau \bar{\mathbf{n}}.$$

Ale $\mathbf{R}_\tau^T \mathbf{R}'_\tau$ i $\mathbf{R}'_\tau \mathbf{R}_\tau^T$ są tensorami skośnie symetrycznymi. Stąd

$$\mathbf{R}_\tau^T \mathbf{R}'_\tau = \mathbf{k}_\tau \times \mathbf{1}, \quad \mathbf{R}'_\tau \mathbf{R}_\tau^T = \mathbf{l}_\tau \times \mathbf{1}, \quad \mathbf{l}_\tau = \mathbf{R}_\tau \mathbf{k}_\tau, \quad (2.137)$$

gdzie \mathbf{k}_τ i \mathbf{l}_τ są *wektorami zginania brzegu* $\partial \mathcal{M}$. Dlatego różniczkowanie bazy $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{n}}$ wzdłuż $\partial \mathcal{M}$ względem s wyraża się również wzorami

$$\bar{\mathbf{v}}' = (\mathbf{R}_\tau \boldsymbol{\rho}_\tau + \mathbf{l}_\tau) \times \bar{\mathbf{v}}, \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}' = (\mathbf{R}_\tau \boldsymbol{\rho}_\tau + \mathbf{l}_\tau) \times \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad \bar{\mathbf{n}}' = (\mathbf{R}_\tau \boldsymbol{\rho}_\tau + \mathbf{l}_\tau) \times \bar{\mathbf{n}}. \quad (2.138)$$

Z (2.138) i (2.136) wynika, że

$$\mathbf{l}_\tau = \mathbf{R}_\tau \mathbf{k}_\tau = \mathbf{R}_\tau (-k_{\tau\tau} \mathbf{v} + k_{v\tau} \boldsymbol{\tau} - k_{n\tau} \mathbf{n}), \quad (2.139)$$

$$-k_{\tau\tau} = a_\tau \bar{\sigma}_\tau - \sigma_\tau, \quad k_{v\tau} = a_\tau \bar{\tau}_\tau - \tau_\tau, \quad -k_{n\tau} = a_\tau \bar{\rho}_\tau - \rho_\tau.$$

Składowe $\bar{\boldsymbol{\rho}}_\tau$ w (2.136) można wyrazić przez miary $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\kappa_{\alpha\beta}$ na $\partial \mathcal{M}$ różniczkując wyrażenia (2.16), co po przekształceniach daje (por. [1975:52], [1977:30])

$$\begin{aligned} -k_{\tau\tau} &= \frac{1}{a_\tau} (\sigma_\tau - \kappa_{\tau\tau}) - \sigma_\tau, \\ k_{v\tau} &= \frac{1}{a_\tau} j [\tau_\tau + v_\lambda \bar{a}^{\lambda\mu} (\kappa_{\mu\beta} + 2b_\beta^\kappa \gamma_{\mu\kappa}) \tau^\beta] - \tau_\tau, \\ -k_{n\tau} &= \frac{1}{a_\tau^2} j (\rho_\tau - v_\alpha \bar{a}^{\alpha\mu} \gamma_{\mu\lambda\beta} \tau^\lambda \tau^\beta) - \rho_\tau. \end{aligned} \quad (2.140)$$

2.4.3. Rozszerzone warunki równowagi

W punkcie 2.2 wyprowadziliśmy wektorowe warunki równowagi (2.35) powłoki cienkiej, będące konsekwencją zasady pracy wirtualnej (2.20). Uwzględniliśmy przy tym fakt, że podczas deformacji powierzchni podstawowej wirtualne obroty $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\omega}_\tau$ są funkcjami wirtualnych przesunięć $\delta \mathbf{u}$ (por. (2.10), (2.20) i (2.26)). Sformułowane w 2.2.4 zagadnienia brzegowe wyrażają się albo przez przesunięcia \mathbf{u} jako zmienne niezależne, albo przez \mathbf{u} oraz miary odkształceń i/lub naprężeń jako zmienne niezależne.

Jeśli obroty opisane przez \mathbf{R} (lub $\boldsymbol{\theta}$) mają być zmiennymi niezależnymi zagadnienia brzegowego, to nie możemy stosować wyrażenia (2.18), lecz zależność \mathbf{R} (lub $\boldsymbol{\theta}$) od \mathbf{u} należy wyrazić poprzez dołączenie do zasady pracy wirtualnej (2.20) równań więzów (2.132).

W (2.121) wprowadziliśmy nowe miary deformacji powierzchni $\eta_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$, przez które wariacja funkcji gęstości energii sprężystej wyraża się w postaci

$$\delta W = N^{\alpha\beta} \delta \gamma_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} \delta \eta_{\beta\alpha} + H^{\alpha\beta} \delta \mu_{\beta\alpha}. \quad (2.141)$$

Zależność między miarami $\gamma_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$ i $\eta_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ łatwo uzyskać ze wzorów (2.121)₂ i (2.123)

$$(\bar{\mathbf{a}}_\alpha - \mathbf{r}_\alpha) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{r}_\beta) = \eta_\alpha^\lambda \eta_{\lambda\beta}, \quad \mathbf{r}_\lambda \cdot (\bar{\mathbf{n}}_{,\beta} - \mathbf{R} \mathbf{n}_{,\beta}) = \mu_{\lambda\beta}, \quad (2.142)$$

skąd po przekształceniach i symetryzacji otrzymamy

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta_\alpha^\lambda \eta_{\lambda\beta}, \quad (2.143)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [(\delta_\alpha^\lambda + \eta_\alpha^\lambda) \mu_{\lambda\beta} + (\delta_\beta^\lambda + \eta_\beta^\lambda) \mu_{\lambda\alpha}] - \frac{1}{2} (b_\alpha^\lambda \eta_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda \eta_{\lambda\alpha}).$$

Wprowadzenie (2.143) do (2.141) pozwala nadać interpretację nowym składowym $S^{\alpha\beta}$, $H^{\alpha\beta}$ przez składowe $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$

$$S^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\eta_\alpha^\lambda N^{\lambda\beta} + \eta_\beta^\lambda N^{\alpha\lambda}) - \frac{1}{2} [(b_\alpha^\lambda - \mu_\alpha^\lambda) M^{\lambda\beta} + (b_\beta^\lambda - \mu_\beta^\lambda) M^{\alpha\lambda}], \quad (2.144)$$

$$H^{\alpha\beta} = M^{\alpha\lambda} (\delta_\lambda^\beta + \eta_\lambda^\beta).$$

Zauważmy, że $S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha}$, ale $H^{\alpha\beta} \neq H^{\beta\alpha}$.

Wirtualny obrót $\boldsymbol{\omega}$ ujęty poprzez (2.23) w (2.19)₂ może być interpretowany jako wektor osiowy skośnie symetrycznego tensora $\delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T$ wynikającego z $\delta (\mathbf{R} \mathbf{R}^T) = \mathbf{0}$

$$\delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}^\alpha \times \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{r}_\alpha + \bar{\mathbf{n}} \times \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{n}}). \quad (2.145)$$

Stąd

$$\delta \mathbf{r}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha, \quad \delta \bar{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{n}}. \quad (2.146)$$

Wirtualne zmiany wektorowych miar deformacji $\boldsymbol{\epsilon}_\beta$, $\boldsymbol{\lambda}_\beta$ względem bazy \mathbf{r}_α , $\bar{\mathbf{n}}$ można określić korzystając z *współobrotowej wariacji* δ^0 tych miar zastosowanej do (2.121)₂ i (2.123)₂

$$\delta^0 \boldsymbol{\epsilon}_\beta = \mathbf{R} \delta (\mathbf{R}^T \boldsymbol{\epsilon}_\beta) = \delta \eta_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha = \delta \mathbf{u}_{,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.147)$$

$$\delta^0 \boldsymbol{\lambda}_\beta = \mathbf{R} \delta (\mathbf{R}^T \boldsymbol{\lambda}_\beta) = \delta \mu_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha = \boldsymbol{\omega}_{,\beta} \times \bar{\mathbf{n}}.$$

Powyższe zależności umożliwiają przedstawienie równań więzów (2.132) nałożonych na wirtualne odkształcenia względem bazy \mathbf{r}_α , $\bar{\mathbf{n}}$

$$\epsilon^{ab} \mathbf{r}_a \cdot \delta \eta_{\lambda\beta} \mathbf{r}^\lambda = 0, \quad \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \eta_{\lambda\beta} \mathbf{r}^\lambda = 0. \quad (2.148)$$

Wprowadźmy równania więzów (2.148) do wyrażenia (2.141) korzystając z odpowiednich mnożników Lagrange'a S i Q^α . Wtedy wewnętrzna praca wirtualna (2.21)₁ przyjmuje postać

$$G_{\text{int}} = \iint_{\mathcal{A}} (\mathbf{N}^\alpha \cdot \delta \eta_{\lambda\alpha} \mathbf{r}^\lambda + H^{ab} \mathbf{r}_\beta \cdot \delta \mu_{\lambda\alpha} \mathbf{r}^\lambda) dA, \quad (2.149)$$

$$\mathbf{N}^\alpha = R^{ab} \mathbf{r}_\beta + Q^\alpha \bar{\mathbf{n}}, \quad R^{ab} = S^{ab} + \epsilon^{ab} S.$$

Równania więzów (2.148) z mnożnikami Lagrange'a A i B^β muszą być wprowadzone również na brzegu $\partial \mathcal{M}$ powłoki. Z analizy tak uzupełnionej zasady pracy wirtualnej przeprowadzonej w [1989:6] wynika, że $A = B_\beta v^\beta = 0$, a jedynie $B \equiv B_\beta \tau^\beta \neq 0$. Uwzględniając już ten fakt, zasada pracy wirtualnej (2.20) przyjmuje następującą *rozszerzoną* postać:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{A}} (\mathbf{N}^\alpha \cdot \delta \eta_{\lambda\alpha} \mathbf{r}^\lambda + H^{ab} \mathbf{r}_\beta \cdot \delta \mu_{\lambda\alpha} \mathbf{r}^\lambda) dA = \iint_{\mathcal{A}} (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}) dA + \\ + \int_{\partial \mathcal{M}_f} (\mathbf{N}^* \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_\tau) ds + \int_{\partial \mathcal{M}} B \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \eta_{\lambda\alpha} \mathbf{r}^\lambda \tau^\alpha ds. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Wprowadźmy (2.147) do (2.150), wykorzystajmy twierdzenie Stokesa do zamiany całki powierzchniowej na całkę po brzegu $\partial \mathcal{M}$, a następnie scałkujmy przez części po $\partial \mathcal{M}$, otrzymując

$$\begin{aligned} - \iint_{\mathcal{A}} [(\mathbf{N}^\alpha|_\alpha + \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M}^\alpha|_\alpha + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \times \mathbf{N}^\alpha + \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega}] dA + \\ + \int_{\partial \mathcal{M}_f} \{[\mathbf{N}^\alpha v_\alpha + (B \bar{\mathbf{n}})' - \mathbf{N}^*] \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M}^\alpha v_\alpha + B \bar{\mathbf{a}}_\nu - \mathbf{M}^*) \cdot \boldsymbol{\omega}_\tau\} ds + \end{aligned} \quad (2.151)$$

$$+ \int_{\partial \mathcal{M}_d} \{[\mathbf{N}^\alpha v_\alpha + (B \bar{\mathbf{n}})'] \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M}^\alpha v_\alpha + B \bar{\mathbf{a}}_\nu) \cdot \boldsymbol{\omega}_\tau\} ds + \sum_{M_n \in \partial \mathcal{M}} (B \bar{\mathbf{n}})_n \cdot \delta \mathbf{u}_n = 0,$$

$$\mathbf{M}^\alpha = \bar{\mathbf{n}} \times H^{ab} \mathbf{r}_\beta = \epsilon_{\beta\lambda} H^{ab} \mathbf{r}^\lambda.$$

Kinematycznie dopuszczalne wirtualne przesunięcia i obroty spełniają warunki $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\omega}_\tau = \mathbf{0}$ na $\partial \mathcal{M}_d$, dlatego wyrażenia (2.151)₃ na $\partial \mathcal{M}_d$ znikają tożsamościowo. Spełnienie zasady pracy wirtualnej wymaga więc, aby były spełnione następujące *rozszerzone* lokalne równania równowagi i naturalne statyczne warunki brzegowe:

$$\mathbf{N}^\alpha|_\alpha + \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^\alpha|_\alpha + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \times \mathbf{N}^\alpha + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \text{w} \quad \mathcal{M},$$

$$\mathbf{N}^\alpha v_\alpha + (B \bar{\mathbf{n}})' - \mathbf{N}^* = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^\alpha v_\alpha + B \bar{\mathbf{a}}_\nu - \mathbf{M}^* = \mathbf{0} \quad \text{na} \quad \partial \mathcal{M}_f, \quad (2.152)$$

$$(B \bar{\mathbf{n}})_n = \mathbf{0} \quad \text{w punktach osobliwych} \quad M_n \in \partial \mathcal{M}_f.$$

Podobnie jak (2.35), powyższe lokalne warunki równowagi powierzchni podstawowej \mathcal{M} są dwuwymiarowo ściśle. Równania równowagi (2.152)₁ przedstawione w składowych w bazie \mathbf{r}_α , $\bar{\mathbf{n}}$ prowadzą do sześciu równań skalarnych, z których trzy pozwalają na interpretację mnożników S , Q^α przez $H^{\alpha\beta}$ i ich pochodne. Naturalne statyczne warunki brzegowe (2.152)₂ przedstawione w bazie $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, $\bar{\mathbf{n}}$ dają pięć warunków skalarnych, w tym jeden pozwalający na interpretację mnożnika B przez $H_{\nu\nu}$, $H_{\tau\nu}$ i M_τ^* .

2.4.4. Zagadnienie brzegowe w przesunięciach, obrotach i mnożnikach Lagrange'a

Rozszerzone warunki równowagi (2.152) pozwalają na znaczną swobodę w wyborze zmiennych niezależnych i formułowaniu zagadnień brzegowych nieliniowej teorii powłok cienkich.

Uzupełnijmy (2.152) o kinematyczne warunki brzegowe, wynikające z więzów $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\omega}_\tau \times \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ na $\partial\mathcal{M}_d$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \quad \mathbf{R}_\tau \mathbf{n} = \mathbf{R}_\tau^* \mathbf{n} \quad \text{na} \quad \partial\mathcal{M}_d. \quad (2.153)$$

Związki kinematyczne między wprowadzonymi miarami deformacji $\eta_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ a polami \mathbf{u} , \mathbf{R} mają, zgodnie z (2.121), (2.123) i (2.127), jawną postać

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta = (\mathbf{R}^T - \mathbf{1})\mathbf{r}_{\beta} + \mathbf{u}_{,\beta}, \quad \boldsymbol{\lambda}_\beta = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_\lambda \times \mathbf{R}_{,\beta} \mathbf{R}^T \mathbf{r}^\lambda + \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{R}_{,\beta} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{n}}) \times \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{I}_\beta \times \bar{\mathbf{n}}. \quad (2.154)$$

Równania konstytutywne cienkich powłok sprężystych, spójne z reprezentacją (2.141)₂, wymagają istnienia funkcji gęstości energii sprężystej $W = W(\eta_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}; \mathbf{r})$ takiej, że

$$S^{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial \eta_{\alpha\beta}}, \quad H^{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial \mu_{\alpha\beta}}. \quad (2.155)$$

Wprowadźmy (2.155), a następnie (2.154) do (2.152). Stwierdzamy, że lokalne warunki równowagi wyrażają się teraz przez pola \mathbf{u} , \mathbf{R} , S , Q^α i B jako jedyne zmienne niezależne na powierzchni \mathcal{M} . Pozwala to na następujące silne sformułowanie zagadnienia brzegowego nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych: przy znanych polach wektorowych sił i momentów powierzchniowych $\mathbf{p}(\theta^\alpha)$, $\mathbf{m}(\theta^\alpha)$ i brzegowych $\mathbf{N}^*(s)$, $\mathbf{M}^*(s)$ klasy C^0 należy wyznaczyć pole przesunięć $\mathbf{u}(\theta^\alpha)$ i pole obrotów $\mathbf{R}(\theta^\alpha)$ klasy C^1 oraz pola mnożników Lagrange'a $S(\theta^\alpha)$, $Q^\beta(\theta^\alpha)$, $B(s)$ klasy C^0 , spełniające geometryczne warunki brzegowe (2.153) oraz równania równowagi i naturalne statyczne warunki brzegowe (2.152).

Każdy stan powierzchni $\bar{\mathcal{M}}$ jest tu określony przez pola $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{R} \in SO(3)$, $S \in R$, $Q^\beta \in R \times R$ i $B \in R$. Zbiór wszystkich możliwych rozwiązań $u = (\mathbf{u}, \mathbf{R}, S, Q^\beta, B)$ tworzy przestrzeń konfiguracyjną rozwiązań $C(\mathcal{M}) = \mathcal{V} \times SO(3) \times R^4$, a wirtualna zmiana rozwiązania δu jest elementem przestrzeni $T_u C(\mathcal{M})$ stycznej do $C(\mathcal{M})$ w $u \in C(\mathcal{M})$. W otoczeniu u każde pole $u(\alpha)$ wzdłuż krzywej $\mathcal{L}: R \rightarrow C(\mathcal{M})$ ma postać

$$u(\alpha) = u + \alpha \delta u, \quad \alpha \in R, \quad u(0) = 0. \quad (2.156)$$

Przedstawmy funkcjonal (2.20) pracy wirtualnej w następującej rozwiniętej postaci, uwzględniającej również równania więzów (2.148):

$$\begin{aligned}
G[u; \delta u] = & \iint_{\mathcal{M}} \delta W[\eta_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{R}), \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{R})] dA - \\
& - \iint_{\mathcal{M}} [\mathbf{p}(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m}(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\omega}] dA - \\
& - \int_{\partial \mathcal{M}_f} [\mathbf{N}^*(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}^*(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\omega}_\tau] ds + \quad (2.157) \\
& + \iint_{\mathcal{M}} \delta \{ [\epsilon^{\alpha\beta} S r_\beta(\mathbf{R}) + Q^\alpha \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R})] \cdot \eta_{\lambda\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \mathbf{r}^\lambda(\mathbf{R}) \} dA - \\
& - \int_{\partial \mathcal{M}} \delta [B \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \eta_{\lambda\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \mathbf{r}^\lambda(\mathbf{R}) \tau^\alpha] ds.
\end{aligned}$$

Zagadnienie brzegowe może być więc sformułowane w następującej słabej postaci: przy znanych polach \mathbf{p} , \mathbf{m} , \mathbf{N}^* i \mathbf{M}^* klasy C^{-1} (odcinkami ciągłych), należy wyznaczyć rozwiązanie $u = (\mathbf{u}, \mathbf{R}, S, Q^\alpha, B)$, w którym \mathbf{u} , \mathbf{R} są geometrycznie dopuszczalne klasy C^0 spełniające (2.153), a S , Q^α , B są klasy C^{-1} takie, że dla każdego kinematycznie dopuszczalnego δu , w którym $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\omega}_\tau = \mathbf{0}$ na $\partial \mathcal{M}_d$, funkcjonal przyrostowy (2.157) znika tożsamościowo

$$G[u; \delta u] = 0. \quad (2.158)$$

Sformułowanie (2.158) jest więc w istocie *zasadą pracy wirtualnej* nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych uwzględniającą w sposób jawny obroty jako zmienne niezależne, wprowadzone za pomocą mnożników Lagrange'a.

Gdy obciążenia zewnętrzne mają potencjał $V(\mathbf{u}, \mathbf{R})$ taki, że

$$G_{\text{ext}}[\mathbf{u}, \mathbf{R}; \delta \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}] = -\delta V(\mathbf{u}, \mathbf{R}), \quad (2.159)$$

możemy wprowadzić funkcjonal całkowitej energii potencjalnej

$$\begin{aligned}
I(u) = & \iint_{\mathcal{M}} \{ W[\eta_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{R}), \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{R})] + \epsilon^{\alpha\beta} S \eta_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{R}) + Q^\alpha \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \} dA - \\
& - \int_{\partial \mathcal{M}} B \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \tau^\alpha ds + V(\mathbf{u}, \mathbf{R}), \quad (2.160)
\end{aligned}$$

dla którego geometryczne warunki brzegowe (2.153) są warunkami dodatkowymi. Wtedy zasada pracy wirtualnej przyjmuje postać zasady wariacyjnej

$$\delta I(u) = 0. \quad (2.161)$$

Warunkami stacjonarności funkcjonału $I(u)$ są: równania równowagi (2.152)₁, naturalne statyczne warunki brzegowe (2.152)_{2,3} oraz równania więzów (2.148) w \mathcal{M} i na $\partial \mathcal{M}$.

Twierdzenie (2.161) jest *zmodyfikowaną zasadą całkowitej energii potencjalnej* w nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych.

Podobnie jak zasada pracy wirtualnej (2.158) i (2.157), również zasada (2.161) uwzględniając (2.160) jest liniowa względem S , Q^α , B oraz wymierna względem \mathbf{u} , \mathbf{R} i ich *pierwszych* pochodnych powierzchniowych. Zasada (2.161) umożliwia budowanie rozwiązań przybliżonych w klasie C^{-1} dla S , Q^α , B i C^0 dla \mathbf{u} , \mathbf{R} . W przypadku np. metody elementów skończonych, wystarcza więc użycie elementów klasy C^0 o najprostszych funkcjach kształtu.

Przy rozwiązywaniu niektórych zadań pożyteczne może być rozważenie ogólnego swobodnego funkcjonału typu Hu-Washizu [1989:6]

$$\begin{aligned}
 J = & \iint_{\mathcal{M}} \{ W(\eta_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}) + \epsilon^{ab} S \eta_{a\beta} + Q^\alpha \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \eta_{\lambda\alpha} \mathbf{r}^\lambda(\mathbf{R}) - \\
 & - S^{ab} [\eta_{\beta a} - \eta_{\beta a}(\mathbf{u}, \mathbf{R})] - H^{ab} [\mu_{\beta a} - \mu_{\beta a}(\mathbf{R})] \} dA - \\
 & - \int_{\partial \mathcal{M}} B \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \eta_{\lambda\alpha} \mathbf{r}^\lambda(\mathbf{R}) \tau^\alpha ds - \\
 & - \int_{\partial \mathcal{M}_d} \{ [(S^{ab} + \epsilon^{ab} S) \mathbf{r}_\beta(\mathbf{R}) + Q^\alpha \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R})] \nu_\alpha + [B \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R})]' \} \cdot (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}^*) + \\
 & + [H^{ab} \mathbf{r}_\beta(\mathbf{R}) \nu_\alpha - B \bar{\mathbf{a}}_\tau(\mathbf{u})] \cdot (\mathbf{R}_\tau \mathbf{n} - \mathbf{R}_\tau^* \mathbf{n}) ds + V(\mathbf{u}, \mathbf{R}).
 \end{aligned} \tag{2.162}$$

Funkcjonał J powstaje z funkcjonału I przez dołączenie zależności kinematycznych (2.154) i geometrycznych warunków brzegowych (2.153) z mnożnikami Lagrange'a. Wtedy część warunków stacjonarności funkcjonału J pozwala na identyfikację tych mnożników jako S^{ab} , H^{ab} , $\mathbf{N}^\alpha \nu_\alpha + (B \bar{\mathbf{n}})'$ oraz $H^{ab} \mathbf{r}_\beta \nu_\alpha - B \bar{\mathbf{a}}_\tau$, odpowiednio, i tak zidentyfikowane mnożniki zostały już włączone do funkcjonału (2.162). W rezultacie, funkcjonał J jest określony na polach \mathbf{u} , \mathbf{R} , $\eta_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$, S^{ab} , S , H^{ab} i B podlegających swobodnej wariacji. Zasada wariacyjna typu Hu-Washizu $\delta J = 0$ jest alternatywnym słabym sformułowaniem kompletu zależności nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych rozważanej w tym rozdziale.

Spełniając *a priori* niektóre z warunków stacjonarności funkcjonału J , można go przekształcić do różnych prostszych postaci zarówno bezwarunkowych, jak i z warunkami ubocznymi. W szczególności, przy dodatkowym ograniczeniu postaci \mathbf{p} , \mathbf{m} oraz postaci warunków brzegowych na $\partial \mathcal{M}$, z funkcjonału J można skonstruować ([1989:6], p. 5.7) funkcjonał $J_2(\Psi, \theta, B)$ zawierający wektor funkcji naprężeń Ψ i wektor obrotu skończonego θ w \mathcal{M} oraz mnożnik Lagrange'a B na $\partial \mathcal{M}$ jako pola niezależne. Funkcjonał $J_2(\Psi, \theta, B)$ uściśla podobne funkcjonały zaproponowane w [1972:51] i [1984:59].

Wszystkie sformułowane tu zagadnienia brzegowe zostały przedstawione dla nieograniczonych odkształceń i zgięć powierzchni podstawowej. Dlatego występujące tu składowe $\mu_{\alpha\beta}$ i H^{ab} są niesymetryczne. W przypadku *małych* odkształceń sprężystych, skońsiesymetryczne części tych składowych mogą być pominięte i wszystkie zależności nieco się upraszczają.

2.4.5. Siły błonowe i zmiany krzywizn jako zmienne niezależne

Rozwiązanie niektórych zadań nieliniowej teorii powłok cienkich nie wymaga wyznaczenia przesunięć i/lub obrotów, lecz tylko powierzchniowych miar odkształceń i/lub naprężeń albo nawet tylko charakterystyk globalnych wyrażonych przez te pola (np. energii, przy której powłoka traci stateczność, lub częstości drgań własnych).

Sformułowanie zagadnienia brzegowego cienkich powłok sprężystych przez powierzchniowe miary odkształceń jako zmienne niezależne zostało zaproponowane już przez Chiena [1944:4] i rozwinięte w szeregu pracach omówionych w [1989:6]. W takim sformułowaniu, znanym również jako *teoria wewnętrzna* (ang. *intrinsic*), równania równowagi i warunki ciągłości odkształceń tworzą razem podstawowy układ równań zagadnienia brzegowego. Równania skalarne teorii wewnętrznej mogą być formułowane w różnych bazach i przez różne pola jako zmienne niezależne. Tutaj przedstawimy sformułowanie oparte na równaniach powłok w bazie obróconej \mathbf{r}_α , $\bar{\mathbf{n}}$, [1956:28], przy przyjęciu sił błonowych i zmian krzywizn jako podstawowych zmiennych niezależnych. Wybór takich zmiennych niezależnych zaproponowany w [1970:38] znacznie rozszerza możliwości zastosowań teorii wewnętrznej.

Wektorowe warunki ciągłości odkształceń (2.129), wyrażone przez składowe w bazie obróconej \mathbf{r}_α , $\bar{\mathbf{n}}$ za pomocą (2.121)₂, (2.123)₂, (2.124)₃, (2.130), prowadzą do następujących sześciu równań skalarnych:

$$\begin{aligned} \epsilon^{a\beta} \eta_{\lambda\alpha|\beta} + \epsilon^{a\beta} (\delta_a^\kappa + \eta_a^\kappa) \epsilon_{\kappa\lambda} k_\beta &= 0, \\ \epsilon^{a\beta} \eta_a^\lambda (b_{\lambda\beta} - \mu_{\lambda\beta}) - \epsilon^{a\beta} \mu_{a\beta} &= 0, \\ \epsilon^{a\beta} \epsilon^{\lambda\kappa} \mu_{\lambda\alpha|\beta} - \epsilon^{a\beta} k_\alpha (b_\beta^\kappa - \mu_\beta^\kappa) &= 0, \\ \epsilon^{a\beta} \epsilon^{\lambda\kappa} \mu_{\lambda\alpha} (b_{\kappa\beta} - \frac{1}{2} \mu_{\kappa\beta}) + \epsilon^{a\beta} k_{a|\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Podobnie, z wektorowych warunków równowagi (2.152)₁ przedstawionych w bazie obróconej za pomocą (2.149)₂, (2.151)₄ i (2.130) otrzymamy również sześć równań skalarnych

$$\begin{aligned} H^{a\beta}|_a + k_a H^a_{,\lambda} \epsilon^{\lambda\beta} - Q^a (\delta_a^\beta + \eta_a^\beta) + \hat{m}^\beta &= 0, \\ -\epsilon_{\lambda\beta} (b_a^\lambda - \mu_{,\alpha}^\lambda) H^{a\beta} + \epsilon_{\lambda\beta} (\delta_a^\lambda + \eta_a^\lambda) R^{a\beta} &= 0, \\ R^{a\beta}|_a - (b_a^\beta - \mu_{,\alpha}^\beta) Q^a + k_a R^a_{,\lambda} \epsilon^{\lambda\beta} + \hat{p}^\beta &= 0, \\ Q^a|_a + (b_{\beta a} - \mu_{\beta a}) R^{a\beta} + p &= 0, \end{aligned} \quad (2.164)$$

gdzie teraz $\mathbf{p} = \hat{p}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + p \bar{\mathbf{n}}$, $\mathbf{m} = \bar{\mathbf{n}} \times \hat{m}^\alpha \mathbf{r}_\alpha$.

Oba układy równań (2.163) i (2.164) są dwuwymiarowo ściśle na powierzchni \mathcal{M} i zawierają tylko miary odkształceń $\eta_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$, k_α i naprężeń $R^{a\beta}$, $H^{a\beta}$, Q^a jako zmienne niezależne. Korzystając z ogólnej postaci równań konstytutywnych (2.155) oraz rozwiązania (2.163)₁ względem k_α i (2.164)₁ względem Q^a , układ ten można wyrazić całkowicie przez miary odkształceń $\eta_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ jako jedyne zmienne niezależne.

W przypadku teorii *małych* odkształceń sprężystych, układy równań (2.163) i (2.164) mogą być znacznie uproszczone. W tym celu składowe niesymetrycznych tensorów przedstawmy przez ich części symetryczne i skośniesymetryczne

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha\beta} &= \rho_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta} \rho, & \rho_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\mu_{\alpha\beta} + \mu_{\beta\alpha}), & \rho &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}, \\ R^{\alpha\beta} &= S^{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta} S, & & & & (2.165) \\ H^{\alpha\beta} &= G^{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta} G, & G^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (H^{\alpha\beta} + H^{\beta\alpha}), & G &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Z błędów równań konstytutywnych (2.60) wynika, że z tą samą dokładnością zależności (2.143), przy (2.165)₁, przyjmują postać

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + O(\eta\theta^2), \quad \kappa_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} + O\left(\frac{\eta\theta^2}{h}\right), \quad (2.166)$$

przy której funkcja energii sprężystej (2.55), z uwzględnieniem błędu pierwszego przybliżenia, może być wyrażona jedynie przez zmodyfikowane symetryczne miary odkształceń

$$W = \frac{h}{2} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \left(\eta_{\alpha\beta} \eta_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\mu} \right) + O(Eh\eta^2\theta^2). \quad (2.167)$$

Odpowiadające (2.167) równania konstytutywne mają postać

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} &= \frac{\partial W}{\partial \eta_{\alpha\beta}} = C [(1-\nu)\eta^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} \eta_{\kappa}^{\kappa}] + O(Eh\eta\theta^2), \\ G^{\alpha\beta} &= \frac{\partial W}{\partial \rho_{\alpha\beta}} = D [(1-\nu)\rho^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} \rho_{\kappa}^{\kappa}] + O(Eh^2\eta\theta^2), \end{aligned} \quad (2.168)$$

a ich odwrotność

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} &= A [(1+\nu)S_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta} S_{\kappa}^{\kappa}] + O(\eta\theta^2), \\ \rho_{\alpha\beta} &= B [(1+\nu)G_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta} G_{\kappa}^{\kappa}] + O\left(\frac{\eta\theta^2}{h}\right). \end{aligned} \quad (2.169)$$

Z błędów zawartych w (2.167) i (2.168)₂ wynika oszacowanie $G = O(Eh^2\eta\theta^2)$.

Wprowadźmy reprezentację (2.165)₁ do (2.163). Przy uwzględnieniu błędu równań konstytutywnych (2.169), równaniom ciągłości można nadać uproszczoną postać

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta} \eta_{\lambda\alpha|\beta} + k_{\lambda} &= O\left(\frac{\eta\theta^2}{\lambda}\right), \\ 2\rho - \epsilon^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\kappa} (b_{\beta}^{\kappa} - \rho_{\beta}^{\kappa}) &= O\left(\frac{\eta\theta^4}{h}\right), \end{aligned}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\kappa} \rho_{\lambda\alpha|\beta} + \epsilon^{\kappa\beta} \rho_{,\beta} - \epsilon^{\alpha\beta} k_\alpha (b_\beta^\kappa - \rho_\beta^\kappa) = O\left(\frac{\eta\theta^4}{h\lambda}\right), \quad (2.170)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\kappa} (b_{\lambda\alpha} - \frac{1}{2} \rho_{\lambda\alpha}) \rho_{\kappa\beta} + \epsilon^{\alpha\beta} k_{\alpha|\beta} = O\left(\frac{\eta\theta^2}{\lambda^2}\right).$$

Z (2.170)_{1,2} wynikają oszacowania $k_\alpha = O(\eta/\lambda)$, $\rho = O(\eta\theta/\lambda)$, które mogą być wykorzystane do uproszczeń równań równowagi (2.164). Wprowadzając do nich reprezentacje (2.165)_{2,3} i uwzględniając błąd równań konstytutywnych (2.168) otrzymamy

$$\begin{aligned} G^{\alpha\beta}|_\alpha - Q^\beta + \hat{m}^\beta &= O\left(Eh^2 \frac{\eta\theta^2}{\lambda}\right), \\ 2S + \epsilon_{\lambda\beta} \eta_\alpha^\lambda S^{\alpha\beta} - \epsilon_{\lambda\beta} (b_\alpha^\lambda - \rho_\alpha^\lambda) G^{\alpha\beta} &= O(Eh\eta\theta^4), \\ S^{\alpha\beta}|_\alpha + \epsilon^{\alpha\beta} S_{,\alpha} - Q^\alpha (b_\alpha^\beta - \rho_\alpha^\beta) - \epsilon^{\beta\lambda} S_\lambda^\alpha k_\alpha + \hat{p}^\beta &= O\left(Eh \frac{\eta\theta^4}{\lambda}\right), \\ S^{\alpha\beta} (b_{\alpha\beta} - \rho_{\alpha\beta}) + Q^\alpha|_\alpha + p &= O\left(Eh^2 \frac{\eta\theta^2}{\lambda^2}\right). \end{aligned} \quad (2.171)$$

Między układami równań (2.170) i (2.171) zachodzi interesująca *analogia statyczno-geometryczna* [1956:28], która ułatwia sprawdzenie poprawności tych nadal skomplikowanych układów równań. Wprowadźmy formalną modyfikację miar odkształceń

$$\eta_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\sigma} \epsilon_{\beta\tau} \tilde{\eta}^{\sigma\tau}, \quad \rho_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\sigma} \epsilon_{\beta\tau} \tilde{\rho}^{\sigma\tau}, \quad k_\alpha = -\epsilon_{\alpha\sigma} \tilde{k}^\sigma, \quad \rho = \tilde{\rho} \quad (2.172)$$

i przekształćmy równania ciągłości (2.170) przez podstawienie zależności (2.172) w taki sposób, by każdy człon kwadratowy został pomnożony przez 2 i rozdzielony na dwa równe czony, a następnie podstawienie (2.172) wprowadzone tylko do jednego ze składników każdego czlonu kwadratowego. Jeśli w przekształconych równaniach $\tilde{\eta}^{\alpha\beta}$, $\tilde{\rho}^{\alpha\beta}$, \tilde{k}^α , $\tilde{\rho}$ utożsamimy z $G^{\alpha\beta}$, $S^{\alpha\beta}$, Q^α , S , to tak przekształcone równania ciągłości (2.170) i jednorodne równania równowagi (2.171) będą identyczne.

Z równań (2.170)_{1,2} można wyznaczyć k_α , ρ , a z równań (2.171)_{1,2} również Q^β , S . Obie grupy zmiennych można następnie wyeliminować z pozostałych równań, co daje układ sześciu równań względem $\eta_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$ i $S^{\alpha\beta}$, $G^{\alpha\beta}$ nadal spełniający analogię statyczno-geometryczną (2.172). Z otrzymanego w ten sposób układu równań można jeszcze wyeliminować $\eta_{\alpha\beta}$ i $G^{\alpha\beta}$, korzystając z równań konstytutywnych (2.169)₁ i (2.168)₂, co po przekształceniach prowadzi do następujących *rozszerzonych równań wewnętrznych* nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych [1989:6]:

$$\begin{aligned} S_\alpha^\beta|_\beta + A [(1+\nu)S_\alpha^\lambda - \nu\delta_\alpha^\lambda S_\kappa^\kappa]|_\beta S_\lambda^\beta - \frac{1}{2} A [(1+\nu)S_\lambda^\beta S_\beta^\lambda - \nu S_\lambda^\lambda S_\beta^\beta]|_\alpha - \\ - \frac{1}{2} D(1-\nu)(b_\alpha^\lambda \rho_\lambda^\beta - b_\lambda^\beta \rho_\alpha^\lambda)|_\beta - D(b_\alpha^\beta - \rho_\alpha^\beta) \rho_\lambda^\lambda|_\beta + \hat{p}_\alpha - (b_\alpha^\beta - \rho_\alpha^\beta) \hat{m}_\beta = O\left(Eh \frac{\eta\theta^4}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

$$D\rho_a^\alpha|_\beta + (b_a^\beta - \rho_a^\beta) S_\beta^\alpha + p + \hat{m}^a|_a = O\left(Eh^2 \frac{\eta\theta^2}{\lambda^2}\right), \quad (2.173)$$

$$\begin{aligned} \rho_a^\beta|_\beta - \rho_{\beta,a}^\beta + \frac{1}{2}A(1+\nu)[(b_a^\lambda - \rho_a^\lambda) S_\lambda^\beta - (b_\lambda^\beta - \rho_\lambda^\beta) S_a^\lambda]|_\beta - \\ - A(b_a^\beta - \rho_a^\beta) S_{\lambda,\beta}^\lambda - A(1+\nu)(b_a^\beta - \rho_a^\beta) \hat{p}_\beta = O\left(\frac{\eta\theta^4}{h\lambda}\right), \\ AS_a^\alpha|_\beta + (b_a^\beta - \frac{1}{2}\rho_a^\beta) \rho_\beta^\alpha - (b_a^\alpha - \frac{1}{2}\rho_a^\alpha) \rho_\beta^\beta + A(1+\nu) \hat{p}^a|_a = O\left(\frac{\eta\theta^2}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Do układu (2.173) należy dołączyć odpowiednio uproszczone statyczne i geometryczne warunki brzegowe, wyrażone tylko przez $S^{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$ jako jedyne zmienne niezależne.

Stacyjne warunki brzegowe wynikają z przedstawienia wektorowych warunków (2.152)_{2,3} w bazie $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, $\bar{\mathbf{n}}$, a następnie wyeliminowania mnożnika Lagrange'a B i wszystkich pozostałych zmiennych oprócz $S^{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$ oraz uwzględnienia błędów wnoszonych przez równania konstytutywne (2.168) i (2.169). W ten sposób po przekształceniach otrzymamy, [1989:6]

$$S_{vv} - A(1+\nu)S_{v\tau}^2 + D(1-\nu)(\tau_\lambda + \rho_{v\tau})\rho_{v\tau} = N_v^* + (\tau_\lambda + \rho_{v\tau})M_\tau^* + O(Eh\eta\theta^4),$$

$$S_{v\tau} + A(1+\nu)S_{vv}S_{v\tau} + \frac{1}{2}D(1-\nu)(\sigma_v\rho_{v\tau} + \tau_\tau\rho_{vv}) - \frac{3}{2}D(1-\nu)(\sigma_\tau - \rho_{\tau\tau})\rho_{v\tau} -$$

$$-\frac{1}{2}D(1-\nu)(\tau_\tau + \rho_{v\tau})\rho_{\tau\tau} = N_\tau^* - (\sigma_\tau - \rho_{\tau\tau})M_\tau^* + O(Eh\eta\theta^4),$$

$$D\{\rho_{vv,v} + \rho_{\tau\tau,v} + 2(1-\nu)\rho'_{v\tau} + (1-\nu)[\rho_\tau(\rho_{vv} - \rho_{\tau\tau}) + 2\rho_v\rho_{v\tau}]\} + \quad (2.174)$$

$$+ \hat{m}_v = N^* + M_\tau^* + O\left(Eh^2 \frac{\eta\theta^2}{\lambda^2}\right),$$

$$D(\rho_{vv} + \nu\rho_{\tau\tau}) = M_v^* + O(Eh^2\eta\theta^2) \quad \text{na} \quad \partial\mathcal{M}_f,$$

$$D(1-\nu)(\rho_{v\tau})_n \bar{\mathbf{n}} = (M_\tau^*)_n \bar{\mathbf{n}} + O(Eh^2\eta\theta^2) \quad \text{w} \quad M_n \in \partial\mathcal{M}_f.$$

Podczas deformacji powłoki cienkiej, nieodkształcona prostokreślna powierzchnia brzegowa $\mathbf{x}(s, \zeta) = \mathbf{r}(s) + \zeta\mathbf{n}(s)$ przekształca się w również prostokreślną odkształconą powierzchnię brzegową $\bar{\mathbf{x}}(s, \zeta) = \bar{\mathbf{r}}(s) + \zeta\bar{\mathbf{n}}(s)$, która na $\partial\mathcal{M}_d$ jest określona przez warunki brzegowe $\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}^*(s)$ i $\varphi(s) = \varphi^*(s)$. Jest to podstawowy przemieszczeniowy wariant geometrycznych warunków brzegowych (2.45).

Powierzchnię brzegową $\bar{\mathbf{x}}(s, \zeta)$ można określić również w sposób niejawni, przez następujący układ równań różniczkowych:

$$\bar{\mathbf{x}}_{,ss} = \bar{\mathbf{r}}'' + \zeta\bar{\mathbf{n}}'', \quad \bar{\mathbf{x}}_{,\zeta s} = \bar{\mathbf{n}}'', \quad \bar{\mathbf{r}}'' = \bar{\mathbf{a}}'_\tau \quad \text{na} \quad \partial\mathcal{M}_d. \quad (2.175)$$

Równania (2.175) określają powierzchnię brzegową $\bar{\mathbf{x}}(s, \zeta)$ z dokładnością do jej sztywnego przesunięcia i obrotu w przestrzeni \mathcal{E} . Zgodnie z (2.138), równania są

określone, gdy na $\partial\mathcal{M}_d$ znane są funkcje $\mathbf{R}_r(s)$, $\mathbf{I}_r(s)$ i $\gamma_{rr}(s)$. Ale tensor $\mathbf{R}_r(s)$ może być włączony do obrotowego stopnia swobody rozwiązania. Do określenia $\bar{\mathbf{x}}(s, \zeta)$ wystarczy więc, aby

$$\mathbf{k}_r(s) = \mathbf{k}_r^*(s), \quad \gamma_{rr}(s) = \gamma_{rr}^*(s) \quad \text{na} \quad \partial\mathcal{M}_d. \quad (2.176)$$

Warunki (2.176) nazywane są *deformacyjnymi* warunkami brzegowymi. Rzeczywiście, z (2.139) i (2.140) wynika, że składowe \mathbf{k}_r wyrażone są całkowicie przez miary deformacji powierzchni obliczone na $\partial\mathcal{M}$. Składowe (2.140) należy więc wyrazić przez $\eta_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$, ρ za pomocą (2.143) i (2.165), następnie wyrazić $\eta_{\alpha\beta}$ przez $S^{a\beta}$ wykorzystując (2.169)_p, a potem pominąć małe wyrazy rzędu błędu teorii pierwszego przybliżenia. Postępując w ten sposób, po przekształceniach otrzymamy konsekwentnie uproszczone *deformacyjne* warunki brzegowe. [1989:6]

$$\begin{aligned} \rho_{rr} + A(1+\nu)(\tau_r + \rho_{vr})S_{vr} &= k_{rr}^* + O\left(\frac{\eta\theta^4}{h}\right), \\ \rho_{vr} - \frac{1}{2}A(1+\nu)(\sigma_v - \rho_{vv})S_{vr} + \frac{3}{2}A(1+\nu)(\sigma_r - \rho_{rr})S_{vr} - \\ &- \frac{1}{2}A(1+\nu)(\tau_r + \rho_{vr})(S_{vv} - S_{rr}) = k_{vr}^* + O\left(\frac{\eta\theta^4}{h}\right), \quad (2.177) \\ 2A(1+\nu)S'_{vr} - A(S_{rr,v} - \nu S_{vv,v}) + 2A(1+\nu)\rho_v S_{vr} + \\ &+ A(1+\nu)\rho_r(S_{vv} - S_{rr}) = k_{rr}^* + O\left(\frac{\eta\theta^3}{h}\right), \\ A(S_{rr} - \nu S_{vv}) &= \gamma_{rr}^* + O(\eta\theta^2). \end{aligned}$$

Zauważmy, że uproszczone statyczne (2.174) i deformacyjne (2.177) warunki brzegowe nie są warunkami wzajemnie energetycznymi. W przekształconej zasadzie pracy wirtualnej (2.151), statyczne wyrażenia brzegowe generujące (2.174) wykonują pracę wirtualną na $\delta\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\omega}_r$, a nie na $\delta\mathbf{k}_r$ i $\delta\gamma_{rr}$. Można jednak (por. [1980:61]), w razie potrzeby, zbudować całki krzywoliniowe na $\partial\mathcal{M}_f$ z wyrażeń brzegowych (2.174), które będą określały statyczne wektory energetyczne do $\delta\mathbf{k}_r$ i $\delta\gamma_{rr}$ w zasadzie pracy wirtualnej. W ten sposób wyrażenia podane w (2.174) określają również statyczne warunki brzegowe energetycznie spójne z warunkami deformacyjnymi (2.177).

Zagadnienie brzegowe sformułowania wewnętrznego nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych składa się więc z sześciu równań (2.173) różniczkowych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu, kwadratowych względem zmiennych $S^{a\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$ oraz czterech statycznych (2.174) i czterech deformacyjnych (2.177) warunków brzegowych, z których po trzy są kwadratowe, a pozostałe liniowe względem tych zmiennych. W każdym z konsekwentnie uproszczonych równań (2.173) obecne są obie zmienne niezależne $S^{a\beta}$ i $\rho_{\alpha\beta}$. Oznacza to, że równania (2.173) mogą być stosowane nie tylko przy zgięciowym stanie odkształceń $\eta \sim h\rho$, gdzie η i ρ są największymi wartościami własnymi powierzchniowych miar odkształceń $\eta_{\alpha\beta}$ i $\rho_{\alpha\beta}$, lecz również w przypadkach gdy $\eta \ll h\rho$ lub $\eta \gg h\rho$ (występujący tu i dalej symbol ρ nie należy mylić ze skośnie-symetryczną częścią $\mu_{\alpha\beta}$ (por. (2.165)₁)).

W omówionym powyżej sformułowaniu: a) zagadnienie brzegowe jest kompletne, łącznie ze statycznymi i deformacyjnymi warunkami brzegowymi; b) ujęto najogólniejszy przypadek zewnętrznych obciążeń powierzchniowych i brzegowych; c) podstawowe niewiadome $S^{a\beta}$, $\rho_{a\beta}$ są zmiennymi naturalnymi sformułowania w bazie obróconej; d) zależności wyjściowe (2.170) i (2.171) związane są analogią statyczno-geometryczną; e) w przypadku linearyzacji tak sformułowane zagadnienie brzegowe redukuje się do tzw. najlepszego wariantu liniowej teorii powłok [1963:54]. Zaproponowane w [1973:64], [1980:62] alternatywne sformułowania rozszerzonej teorii wewnętrznej są równoważne powyższemu sformułowaniu w granicach błędu teorii pierwszego przybliżenia, lecz albo nie są kompletne, albo nie mają którejś z podanych tutaj cech.

Dla $b_{a\beta} \rightarrow 0$, zależności (2.173) redukują się do rozszerzonego układu równań geometrycznie nieliniowej teorii płyt

$$\begin{aligned} \{ S_a^\beta + A[(1+\nu)S_a^\lambda - \nu\delta_a^\lambda S_\kappa^\kappa] S_\lambda^\beta - \frac{1}{2} A \delta_a^\beta [(1+\nu)S_\lambda^\kappa S_\kappa^\lambda - \nu S_\lambda^\lambda S_\kappa^\kappa + \\ + D[(\rho_a^\beta - \frac{1}{2}\delta_a^\beta \rho_\lambda^\lambda) \rho_\kappa^\kappa] \}_\beta + A[(1+\nu)S_a^\beta \hat{p}_\beta - \nu S_\beta^\beta \hat{p}_a] + \\ + \hat{p}_a + \rho_a^\beta \hat{m}_\beta = O\left(Eh \frac{\eta\theta^4}{\lambda}\right), \end{aligned} \quad (2.178)$$

$$D\rho_a^\alpha|_\beta - \rho_a^\beta S_\beta^\alpha + p + \hat{m}^\alpha|_\alpha = O\left(Eh^2 \frac{\eta\theta^2}{\lambda^2}\right),$$

$$\rho_a^\beta|_\beta - \rho_{\beta,a}^\beta - \frac{1}{2} A(1+\nu)(\rho_a^\lambda S_\lambda^\beta - \rho_\lambda^\beta S_a^\lambda)|_\beta + A\rho_a^\beta S_{\lambda,\beta}^\lambda + A(1+\nu)\rho_a^\beta \hat{p}_\beta = O\left(\frac{\eta\theta^4}{\lambda^2}\right),$$

$$AS_a^\alpha|_\beta - \frac{1}{2}\rho_a^\beta \rho_\beta^\alpha + \frac{1}{2}\rho_a^\alpha \rho_\beta^\beta + A(1+\nu)\hat{p}^\alpha|_\alpha = O\left(\frac{\eta\theta^2}{\lambda^2}\right).$$

Odpowiednio zredukowane statyczne i deformacyjne warunki brzegowe teorii płyt spójne z (2.178) wynikają z (2.174) i (2.177), po pominięciu tam członów zawierających krzywizny, tzn. $\sigma_\nu = \sigma_\tau = \tau_\nu = \tau_\tau = 0$.

2.4.6. Wybrane przypadki szczególne równań geometrycznie nieliniowej teorii powłok

Przyjrzyjmy się uważniej strukturze równań (2.173). Niech L_η i L_ρ oznaczają charakterystyczne długości zmienności miar odkształceń, dla których słuszne są oszacowania $\eta_a^\beta|_\lambda = O(\eta/L_\eta)$, $\rho_a^\beta|_\lambda = O(\rho/L_\rho)$. Dzieląc (2.173)_{1,2} przez E i mnożąc (2.173)_{3,4} przez h^2 , otrzymamy następujące oszacowania poszczególnych wyrażeń w równaniach (2.173):

$$(2.173)_1: \quad \frac{h}{L_\eta} \cdot \eta, \quad \frac{h}{L_\eta} \cdot \eta^2, \quad \frac{h}{R} \cdot \frac{h}{l} \cdot h\rho, \quad \frac{h}{R} \cdot \frac{h}{L_\rho} \cdot h\rho, \quad \frac{h}{L_\rho} \cdot (h\rho)^2,$$

$$(2.173)_2: \quad \left(\frac{h}{L_\rho}\right)^2 \cdot h\rho, \quad \frac{h}{R} \cdot \eta, \quad \eta \cdot h\rho,$$

$$(2.173)_3: \quad \frac{h}{L_\rho} \cdot h\rho, \quad \frac{h}{R} \cdot \frac{h}{l} \cdot \eta, \quad \frac{h}{R} \cdot \frac{h}{L_\eta} \cdot \eta, \quad \frac{h}{L_\eta} \cdot \eta \cdot h\rho, \quad \frac{h}{L_\eta} \cdot \eta \cdot h\rho, \quad (2.179)$$

$$(2.173)_4: \quad \left(\frac{h}{L_\rho}\right)^2 \cdot \eta, \quad \frac{h}{R} \cdot h\rho, \quad (h\rho)^2.$$

W podobny sposób można określić oszacowania poszczególnych wyrażen w statycznych (2.174) i deformacyjnych (2.177) warunkach brzegowych.

W oszacowaniach (2.179) pojawiło się aż sześć różnych małych parametrów: h/R , h/l , η , $h\rho$, h/L_ρ , h/L_η . Każdy z tych parametrów charakteryzuje inną cechę nieliniowej teorii powłok. Parametry h/R i h/l określają geometrię nieodkształconej powierzchni środkowej i jej zmienność przestrzenną; oba parametry są znane jeszcze przed rozwiązaniem zadania. Natomiast parametry η , $h\rho$ oraz h/L_η , h/L_ρ określają przewidywane oszacowania wartości odkształceń błonowych i zgięciowych oraz ich zmienności przestrzennej. Parametry te charakteryzują typ rozwiązywanego zadania nieliniowej teorii powłok i zależą nie tylko od geometrii, lecz również od obciążeń zewnętrznych i warunków brzegowych. W geometrycznie nieliniowej teorii powłok zakłada się, że parametry h/R , $(h/l)^2$, $(h/L_\eta)^2$, $(h/L_\rho)^2$, η i $h\rho$ są małe i mogą być pomijane względem jedności. To założenie określa dopuszczalne kresy górne tych parametrów. Jednakże w różnych zadaniach geometrycznie nieliniowej teorii powłok, poszczególne małe parametry mogą przyjmować wartości dalekie od ich dopuszczalnych kresów górnych.

W niektórych zadaniach mechaniki powłok udaje się z góry przewidzieć typ zachowania się rozwiązania w całym obszarze \mathcal{M} . Wnioski z tego przewidywania mogą być wykorzystywane do wstępnego oszacowań poszczególnych członów występujących w równaniach (2.173) i pominięcia w nich tych członów, które są małe, rzędu błędu wskazanego w poszczególnych równaniach. Jeśli te przewidywania są trafne, to oczekiwany typ rozwiązania zadania można na ogół otrzymać ze znacznie prostszego niż (2.173) układu równań. W tym heurystycznym rozumowaniu zakłada się, że pominięcie małych wyrazów w równaniach (2.173) tylko nieznacznie wpłynie na błąd poszukiwanego rozwiązania, co nie dla każdego rozwiązania równań nieliniowych (2.173) musi być zgodne z prawdą. Zawsze warto więc na końcu sprawdzić czy rozwiązanie otrzymane z uproszczonego w ten sposób układu równań rzeczywiście odpowiada tym założeniom, na podstawie których układ (2.173) został uproszczony.

Zgodnie z oszacowaniami (2.179), zagadnienie brzegowe jest opisane przez sześć małych parametrów, z których każdy może być określony niezależnie od pozostałych. Pozwala to na wygenerowanie z (2.173) znacznej liczby prostszych wariantów równań, stosowanych przy spełnieniu szczególnej kombinacji wartości tych sześciu małych parametrów. Poniżej przedstawimy tylko trzy najważniejsze uproszczone warianty wewnętrznej teorii powłok, pomijając w nich wskazanie błędu poszczególnych równań.

Wariant *prawie bezwydłużeniowego zginania* powłok opisuje zagadnienia, w których odkształcenia błonowe są znacznie mniejsze od zgięciowych: $\eta/h\rho \ll 1$. W takich zagadnieniach również zmienność przestrzenna odkształceń zgięciowych jest na ogół mniejsza niż w ogólnym przypadku deformacji i możemy założyć $h/L_p \ll 1$. Przyjmując dodatkowo $L_\eta \leq l$, możemy równania (2.173), odnoszące się do tego wariantu uprościć do postaci

$$\begin{aligned} [S_\alpha^\beta - \frac{1}{2}D(1-\nu)(b_\alpha^\lambda \rho_\lambda^\beta - b_\lambda^\beta \rho_\alpha^\lambda)]|_\beta - D(b_\alpha^\beta - \rho_\alpha^\beta) \rho_\lambda^\lambda|_\beta + \hat{p}_\alpha - (b_\alpha^\beta - \rho_\alpha^\beta) \hat{m}_\beta &= 0, \\ D\rho_\alpha^\alpha|_\beta + (b_\alpha^\beta - \rho_\alpha^\beta) S_\beta^\alpha + p + \hat{m}^\alpha|_\alpha &= 0, \\ (\rho_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \rho_\lambda^\lambda)|_\beta &= 0, \\ (b_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\rho_\alpha^\beta) \rho_\beta^\alpha - (b_\alpha^\alpha - \frac{1}{2}\rho_\alpha^\alpha) \rho_\beta^\beta &= 0. \end{aligned} \quad (2.180)$$

Zauważmy, że tak uproszczone warunki ciągłości odkształceń (2.180)_{3,4} zawierają tylko zmiany krzywizny $\rho_{\alpha\beta}$ i mogą być rozwiązane niezależnie od stanu naprężenia w powłoce pochodzącego od $S^{\alpha\beta}$. W tym sensie zagadnienia prawie bezwydłużeniowego zginania są geometrycznie wyznaczalne. Po wyznaczeniu $\rho_{\alpha\beta}$, siły błonowe $S^{\alpha\beta}$ mogą być obliczone z uproszczonych równań równowagi (2.180)_{1,2}, a następnie równania konstytutywne (2.168)₂, (2.169)₁ pozwalają na określenie $G^{\alpha\beta}$ i $\eta_{\alpha\beta}$. Obecność w (2.180)₂ członu sprzęgającego $\rho_\alpha^\beta S_\beta^\alpha$ pozwala na gładkie przejście graniczne do wariantu prawie bezwydłużeniowego zginania płyt, przy $b_{\alpha\beta} \rightarrow 0$. Zauważmy, że (2.180) wynika z (2.173) również przy formalnym założeniu $A \rightarrow 0$ (por. [1979:49], [1980:60]).

Teoria *prawie membranowa* powłok opisuje zagadnienia, w których odkształcenia błonowe $\eta_{\alpha\beta}$ są znacznie większe od zgięciowych: $\eta/h\rho \gg 1$. W takich zagadnieniach również zmienność przestrzenna odkształceń błonowych jest na ogół mniejsza niż w ogólnym przypadku deformacji i możemy założyć $h/L_\eta \ll 1$. Przyjmując dodatkowo $L_p \leq l$, możemy równania (2.173) dla tej teorii uprościć do postaci

$$\begin{aligned} S_\alpha^\beta|_\beta + \hat{p}_\alpha &= 0, \\ D\rho_\alpha^\alpha|_\beta + (b_\alpha^\beta - \rho_\alpha^\beta) S_\beta^\alpha + p + \hat{m}^\alpha|_\alpha &= 0, \\ [\rho_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \rho_\lambda^\lambda + \frac{1}{2}A(1+\nu)(b_\alpha^\lambda S_\lambda^\beta - b_\lambda^\beta S_\alpha^\lambda) - Ab_\alpha^\beta S_\lambda^\lambda]|_\beta + Ab_{\beta,\alpha}^\beta S_\lambda^\lambda - A(1+\nu)b_\alpha^\beta \hat{p}_\beta &= 0, \\ AS_\alpha^\alpha|_\beta + b_\alpha^\beta \rho_\beta^\alpha - b_\alpha^\alpha \rho_\beta^\beta + A(1+\nu)\hat{p}^\alpha|_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (2.181)$$

Zauważmy, że konsekwentnie uproszczone równanie równowagi (2.181)₂ zawiera zarówno siły błonowe jak i zmiany krzywizny. Oznacza to, że równania równowagi (2.181)_{1,2} nie mogą być tu rozwiązywane niezależnie od warunków ciągłości odkształceń (2.181)_{3,4} i wariant prawie membranowej teorii powłok nie jest statycznie wyznaczalny. Człony sprzęgające, zawierające $\rho_{\alpha\beta}$ w (2.181)₂, zapobiegają pojawieniu się osobliwości przy przejściu granicznym zarówno do teorii liniowej, jak i do prawie

membranowej teorii płyt, przy $b_{\alpha\beta} \rightarrow 0$. Jednocześnie układ równań (2.181) jest znacznie prostszy od analogicznego układu równań geometrycznie nieliniowej teorii membranowej powłok zaproponowanego w [1979:49] i uzyskanego w wyniku formalnego uproszczenia układu (2.173), przy założeniu $D \rightarrow 0$.

Zgięciowa teoria powłok opisuje szeroką klasę zagadnień, w których

$$\max\left(\frac{L_\rho}{l} \frac{h}{R}, \frac{L_\rho}{L_\eta} \frac{h}{R}\right) \ll \frac{h\rho}{\eta} \ll \min\left(\frac{l}{L_\eta} \frac{R}{h}, \frac{L_\rho}{L_\eta} \frac{R}{h}, \frac{L_\rho}{L_\eta} \frac{1}{h\rho}\right). \quad (2.182)$$

Przy spełnieniu (2.182), układ (2.173) można zredukować do

$$\begin{aligned} S_\alpha^\beta|_\beta + \hat{p}_\alpha &= 0, \\ D\rho_\alpha^\beta|_\beta + (b_\alpha^\beta - \rho_\alpha^\beta) S_\beta^\alpha + p + \hat{m}^\alpha|_\alpha &= 0, \\ (\rho_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \rho_\lambda^\lambda)|_\beta &= 0, \\ AS_\alpha^\beta|_\beta + (b_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \rho_\alpha^\beta) \rho_\beta^\alpha - (b_\alpha^\alpha - \frac{1}{2} \rho_\alpha^\alpha) \rho_\beta^\beta + A(1+\nu) \hat{p}^\alpha|_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (2.183)$$

Wyprowadzony układ równań (2.183) jest stosunkowo prosty: aż cztery równania (2.183)_{1,3} są liniowe, a tylko dwa (2.183)_{2,4} kwadratowe względem $S^{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$. Ponadto, równania (2.183)_{1,3} mają postać dywergentną względem jednego pola, co sugeruje wprowadzenie następujących podstawień:

$$S_\alpha^\beta = \epsilon_{\alpha\lambda} \epsilon^{\beta\rho} (F|_\rho^\lambda + \delta_\rho^\lambda KF) + P_\alpha^\beta, \quad \rho_\alpha^\beta = W|_\alpha^\beta + \delta_\alpha^\beta KW, \quad (2.184)$$

gdzie F jest funkcją naprężeń, W — funkcją deformacji, K — krzywizną Gaussa powierzchni \mathcal{M} , natomiast P_α^β jest całką szczególną równań równowagi (2.183)₁ taką, że $P_\alpha^\beta|_\beta + \hat{p}_\alpha = 0$.

Przy założeniu, że krzywizna K spełnia oszacowania

$$\frac{L_\eta}{l} |K| L_\eta^2 \ll 1, \quad \frac{L_\rho}{l} |K| L_\rho^2 \ll 1, \quad (2.185)$$

podstawienia (2.184) spełniają równania (2.183)_{1,3} z dokładnością do błędu tych równań. Wprowadzając (2.184) do pozostałych równań (2.183)_{2,4} otrzymamy [1989:6]

$$\begin{aligned} D\Delta(\Delta W + 2KW) + \epsilon^{\alpha\lambda} \epsilon_{\beta\rho} (b_\alpha^\beta - W|_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta KW) (F|_\lambda^\rho + \delta_\lambda^\rho KF) + \\ + (b_\alpha^\beta - W|_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta KW) P_\beta^\alpha + p + \hat{m}^\alpha|_\alpha &= 0, \\ A\Delta(\Delta F + 2KF) - \epsilon^{\alpha\lambda} \epsilon_{\beta\rho} (b_\alpha^\beta - \frac{1}{2} W|_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta KW) (W|_\lambda^\rho + \delta_\lambda^\rho KW) + \\ + A(\Delta P_\alpha^\alpha - (1+\nu) P_\alpha^\beta|_\beta) &= 0. \end{aligned} \quad (2.186)$$

Powyższy układ równań opisuje zagadnienia zgięciowej nieliniowej teorii powłok o wolno zmiennych krzywiznach. Układ równań (2.186), przy pominięciu \hat{m}^α , jest równoważny układowi równań zaproponowanemu w [1988:21] z dokładnością do błędu teorii pierwszego przybliżenia. Przy bardziej restrykcyjnym założeniu $|K|L^2 \ll 1$, gdzie

$L = \min(L_\eta, L_\rho, l)$, w granicach błędu teorii pierwszego przybliżenia, można dodatkowo pominąć w (2.186) również wszystkie człony zawierające krzywiznę K , co przy $\hat{m}^a \equiv 0$ daje równania teorii powłok równoważne zaproponowanym w [1949:17], [1966:69].

Inne szczególne warianty równań teorii wewnętrznej i ich zastosowania są dyskutowane w pracach [1970:38], [1979:49] i [1983:44], [1979:40]. Do każdego konsekwentnie uproszczonego wariantu teorii wewnętrznej należy dołączyć odpowiednie statyczne i deformacyjne warunki brzegowe, które wynikają z konsekwentnego uproszczenia (przy tych samych założeniach) warunków brzegowych (2.174) i (2.177).

2.5. Podstawy statycznie i kinematycznie ścisłej teorii powłok

2.5.1. Geometria powłoki nieodkształconej

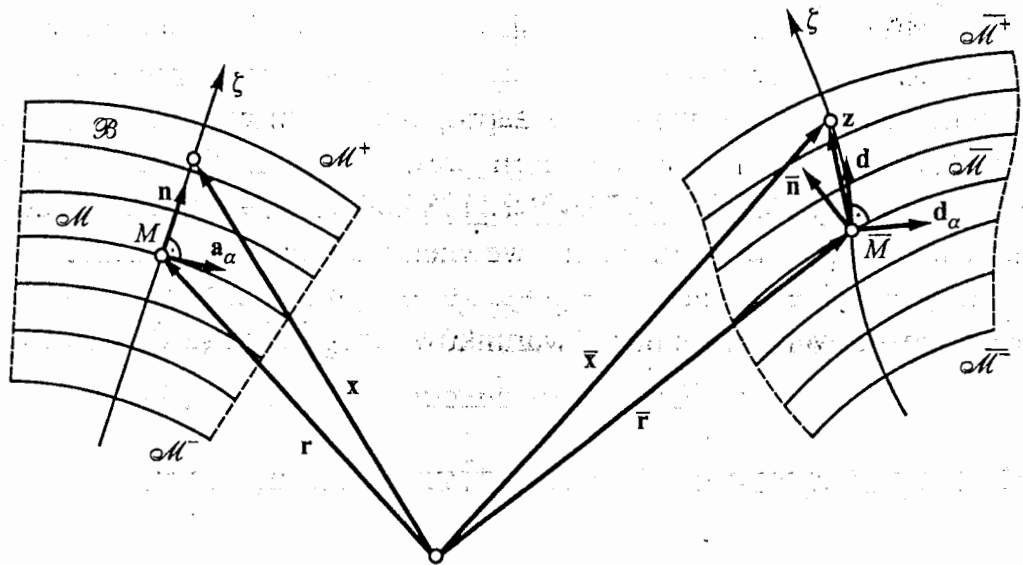
Powłoka jest ciałem trójwymiarowym \mathcal{B} złożonym z cząstek materialnych $X \in \mathcal{B}$. W mechanice ośrodków ciągłych [1965:10] przyjmuje się, że \mathcal{B} jest trójwymiarową zorientowaną rozmaitością różniczkową, zanurzoną w przestrzeni fizycznej \mathcal{E} przez rodzinę jednoparametrowych odwzorowań $\kappa_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_t$, gdzie $\mathcal{B}_t \subset \mathcal{E}$ jest obszarem regularnym zajmowanym przez ciało \mathcal{B} przy odwzorowaniu κ_t , zwanym konfiguracją ciała \mathcal{B} , a parametr $t \in R$ oznacza czas. Ze względu na wygodę opisu analitycznego wybiera się zazwyczaj jedną ustaloną konfigurację $\kappa_0: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0$, zwaną konfiguracją odniesienia, często (ale nie zawsze) utożsamianą ze stanem nieodkształconym powłoki przy $t = 0$, a deformację ciała względem \mathcal{B}_0 opisuje się dla każdego t odwzorowaniem złożonym $\chi = \kappa_t \circ \kappa_0^{-1}: \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_t$. W tej pracy będziemy utożsamiali powłokę \mathcal{B} z zajmowanym przez nią obszarem w stanie nieodkształconym, tj. $\mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{B}$. Ponadto, wobec ograniczenia się do zagadnień statyki będziemy używali oznaczenia $\mathcal{B}_t \equiv \mathcal{B}$ dla obszaru zajmowanego przez powłokę w stanie odkształconym.

W mechanice powłok geometrię powłoki nieodkształconej — obszaru \mathcal{B} — opisuje się zwykle w układzie współrzędnych normalnych (θ^a, ζ) , gdzie $\zeta = 0$ określa regularną powierzchnię podstawową \mathcal{M} (zwaną też powierzchnią odniesienia) parametryzowaną współrzędnymi krzywoliniowymi θ^a , natomiast ζ jest odległością od \mathcal{M} (rys. 2.4). W wybranym układzie odniesienia (O, \mathbf{i}_ν) przestrzeni \mathcal{E} położenie dowolnego punktu $X \in \mathcal{B}$ może być określone zależnością

$$\mathbf{x}(\theta^a, \zeta) = \mathbf{r}(\theta^a) + \zeta \mathbf{n}(\theta^a), \quad (2.187)$$

gdzie $\mathbf{r}(\theta^a) = \mathbf{x}(\theta^a, 0)$ jest wektorem wodzącym punktu $M \in \mathcal{M}$, \mathbf{n} wersorem normalnym do \mathcal{M} ustalającym jej orientację, a $-h^-(\theta^a) \leq \zeta \leq +h^+(\theta^a)$. Opis (2.187) obszaru \mathcal{B} jest jednoznaczny dla $|\zeta| < R = \min(R_1, R_2)$, gdzie R_1, R_2 są promieniami głównych krzywizn powierzchni \mathcal{M} .

W tym rozdziale powłoka jest rozumiana jako trójwymiarowe ciało materialne, którego powierzchnia brzegowa w stanie nieodkształconym $\partial \mathcal{B}$ składa się z trzech części: powierzchni górnej \mathcal{M}^+ i dolnej \mathcal{M}^- oraz powierzchni bocznej $\partial \mathcal{B}^*$, określonych przez



Rys. 2.4

$$\mathbf{x}^\pm(\theta^a, \pm h^\pm) = \mathbf{r}(\theta^a) \pm h^\pm(\theta^a) \mathbf{n}(\theta^a), \quad (2.188)$$

$$\mathbf{x}^*(s, \zeta) = \mathbf{r}(s) + \zeta \mathbf{n}(s),$$

gdzie $\mathbf{r}(s)$ określa brzeg $\partial \mathcal{M}$ (por. (2.12)). Odległość $h = h^- + h^+$ między \mathcal{M}^- i \mathcal{M}^+ mierzona wzdłuż \mathbf{n} jest początkową grubością powłoki, która w szczególności może być stała, $h = \text{const}$. Gdy $h \ll R$ powłoka zwana jest *cienką*, ale w tym punkcie takiego założenia nie wprowadzamy.

Powierzchnia boczna $\partial \mathcal{B}^*$ określona przez (2.188)₂ składa się z elementów prostoliniowych, prostopadłych do \mathcal{M} wzdłuż $\partial \mathcal{M}$. Ogólniejsze określenie $\partial \mathcal{B}^*$ jako powierzchni prostokątnej, ale nie prostopadłej do \mathcal{M} [1966:67], może być wygodne przy analizie powłok załamanych [1996:4, 5], ale tutaj ograniczymy się do postaci (2.188)₂.

W wielu zagadnieniach nieliniowej mechaniki powłok wybór powierzchni podstawowej \mathcal{M} nie jest oczywisty. W przypadku powłoki jednorodnej, cienkiej, o stałej lub wolno zmiennej grubości h , powierzchnia \mathcal{M} jest zwykle powierzchnią środkową obszaru \mathcal{B} oraz $h^- = h^+ = h/2$, tak jak to przyjęto w 2.2.2. i 2.3.1. W przypadku powłok niejednorodnych (np. warstwowych, zbrojonych, złożonych z kilku składników), cechujących się mikrostrukturą, znaczną lub znacząco zmienną grubością, w zagadnieniach dużych odkształceń lub problemach kontaktowych, wygodniejsza może okazać się powierzchnia ważona według gęstości masy obszaru \mathcal{B} lub inna powierzchnia geometryczna, w tym również \mathcal{M}^+ lub \mathcal{M}^- .

Układ współrzędnych (θ^a, ζ) generuje w \mathcal{B} wektory bazy lokalnej $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j$ oraz składowe g_{ij}, g^{ij} tensora metrycznego $\mathbf{1}$ przestrzeni \mathcal{V} , które wyrażają się przez geometrię powierzchni \mathcal{M} [1979:40]

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_a &= \mathbf{x}_{,a} = \mu_a^\lambda \mathbf{a}_\lambda, & \mathbf{g}^b &= (\mu^{-1})_\mu^\beta \mathbf{a}^\mu, & \mathbf{g}_3 &= \mathbf{x}_{,\zeta} = \mathbf{g}^3 = \mathbf{n}, \\ g_{a\beta} &= \mathbf{g}_a \cdot \mathbf{g}_\beta = \mu_a^\lambda \mu_\beta^\mu g_{\lambda\mu}, & g^{a\beta} &= \mathbf{g}^a \cdot \mathbf{g}^\beta = (\mu^{-1})_\lambda^a (\mu^{-1})_\mu^\beta g^{\lambda\mu}, & (2.189) \\ g_{a3} &= \mathbf{g}_a \cdot \mathbf{g}_3 = g^{a3} = 0, & g_{33} &= \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = g^{33} = 1, & g &= \det(g_{ij}). \end{aligned}$$

$$\mu_a^\lambda = \delta_a^\lambda - \zeta b_a^\lambda, \quad (\mu^{-1})_a^\lambda = \frac{1}{\mu} [\delta_a^\lambda + \zeta (b_a^\lambda - 2H\delta_a^\lambda)],$$

$$\mu_a^\lambda (\mu^{-1})_\lambda^\beta = \delta_a^\beta, \quad \mu_a^\lambda (\mu^{-1})_\mu^a = \delta_\mu^\lambda, \quad (2.190)$$

$$\mu = \det(\mu_a^\lambda) = \sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - 2\zeta H + \zeta^2 K > 0.$$

Dla elementu objętości dV w układzie (θ^a, ζ) , otrzymamy

$$dV = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{n} d\theta^1 d\theta^2 d\zeta = \mu d\zeta dA, \quad (2.191)$$

gdzie $dA = \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2$ jest elementem powierzchni \mathcal{M} .

Wektor wodzący powierzchni \mathcal{M}^+ oraz jej zorientowany element mają postać wynikającą z (2.188)₁

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{r} + h^+ \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^+ dA^+ = + (\mathbf{x}_{,1}^+ \times \mathbf{x}_{,2}^+) d\theta^1 d\theta^2 = + (\mathbf{g}^3 - h_{,a}^+ \mathbf{g}^a) d\theta^1 d\theta^2. \quad (2.192)$$

Podobną zależność, tylko z przeciwnymi znakami, można otrzymać dla $\mathbf{n}^- dA^-$. Wtedy z (2.190)₃ otrzymamy

$$\mathbf{n}^+ dA^+ = \pm (\mathbf{g}^3 \mp h_{,a}^+ \mathbf{g}^a) \mu^\pm dA. \quad (2.193)$$

Zorientowany element powierzchni bocznej $\partial\mathcal{B}^*$ może być określony przez różniczkowanie (2.188)₂

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^* dA^* &= \mathbf{x}_{,s}^* \times \mathbf{x}_{,\zeta}^* ds d\zeta = \mathbf{g}_a^* \tau^a \times \mathbf{n} ds d\zeta = \\ &= \epsilon_{a3\beta}^* \mathbf{g}^{*\beta} \tau^a ds d\zeta = \mathbf{g}^{*a} \nu_a \mu d\zeta ds. \end{aligned} \quad (2.194)$$

Dalsze zależności geometryczne w układzie współrzędnych normalnych (θ^a, ζ) podano w [1963:57], [1979:40].

2.5.2. Wypadkowe warunki równowagi

Podstawowymi zasadami klasycznej mechaniki ośrodka ciągłego są prawa *bilansu pędu* i *momentu pędu* [1965:10]. W przypadku zagadnień statycznych prawa te stwierdzają, że gdy ciało w stanie odkształconym $\bar{\mathcal{B}}$ jest w równowadze, to wypadkowa siła i wypadkowy moment względem dowolnego punktu $O \in \mathcal{E}$, obliczone ze wszystkich obciążeń działających na dowolną część \mathcal{P} ciała $\bar{\mathcal{B}}$, muszą być równe zeru. W opisie względem stanu nieodkształconego te prawa bilansu przyjmują postać

$$\iint_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{T} \mathbf{n} dA + \iiint_{\mathcal{P}} \mathbf{b} dV = \mathbf{0}, \quad \iint_{\partial\mathcal{P}} \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{T} \mathbf{n} dA + \iiint_{\mathcal{P}} \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{b} dV = \mathbf{0}, \quad (2.195)$$

gdzie \mathbf{n} jest wersorem zewnętrznej normalnej do $\partial\mathcal{P}$, \mathbf{b} wektorem sił masowych, natomiast

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^i \otimes \mathbf{g}_i = T^{ij} \bar{\mathbf{g}}_j \otimes \mathbf{g}_i \quad (2.196)$$

jest pierwszym tensorem naprężeń Pioli–Kirchhoffa, a \mathbf{T}^i są znane jako wektory naprężeń nominalnych. Zwróćmy uwagę na to, że naturalne składowe T^{ij} tensora \mathbf{T} są zapisane w bazie mieszanej $\bar{\mathbf{g}}_j \otimes \mathbf{g}_i$. Spełnienie (2.195)₂ wymaga, aby te składowe były symetryczne, $T^{ij} = T^{ji}$, ale sam tensor \mathbf{T} jako element przestrzeni $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ nie jest symetryczny, $\mathbf{T}^T \neq \mathbf{T}$.

Podczas deformacji powłoki $\chi: \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$ nieodkształcona powierzchnia podstawowa \mathcal{M} przekształca się w powierzchnię $\bar{\mathcal{M}}$ określoną przez (2.5). Wektor wodzący $\bar{\mathbf{x}}$ punktów powłoki odkształconej $\bar{\mathcal{B}}$ może być przedstawiony w postaci (rys. 2.4)

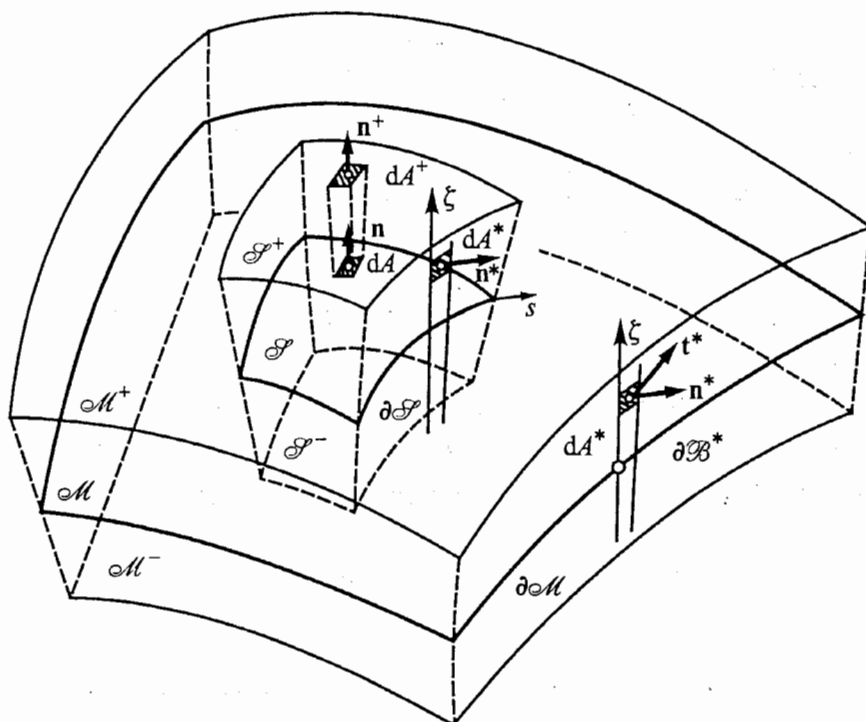
$$\bar{\mathbf{x}}(\theta^\alpha, \zeta) = \bar{\mathbf{r}}(\theta^\alpha) + \mathbf{z}(\theta^\alpha, \zeta), \quad \mathbf{z}(\theta^\alpha, 0) = \mathbf{0}, \quad (2.197)$$

gdzie \mathbf{z} jest odchyłką punktów obszaru $\bar{\mathcal{B}}$ od powierzchni $\bar{\mathcal{M}}$, a (θ^α, ζ) są współzrędnymi konwekcyjnymi. Przedstawienie (2.197) jest całkowicie formalne i nie nakłada żadnych ograniczeń na deformację powłoki.

Rozważmy dowolną część \mathcal{P} obszaru \mathcal{B} skonstruowaną w taki sposób, by zawierała wszystkie punkty leżące na liniach prostopadłych do części powierzchni $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$ ograniczonej przez odcinkami gładką krzywą $\partial \mathcal{I}$ (rys. 2.5). Powierzchnia brzegowa $\partial \mathcal{P}$ takiego obszaru $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ składa się z trzech części: powierzchni górnej i dolnej $\mathcal{I}^\pm \subset \mathcal{M}^\pm$ oraz powierzchni bocznej $\partial \mathcal{P}^*$, określonych przez wektory wodzące (2.188). W rezultacie, całki powierzchniowe w (2.195) dekomponują się na trzy części

$$\iint_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{T} \mathbf{n} dA = \iint_{\mathcal{I}^+} \mathbf{T}^+ \mathbf{n}^+ dA^+ + \iint_{\mathcal{I}^-} \mathbf{T}^- \mathbf{n}^- dA^- + \iint_{\partial \mathcal{P}^*} \mathbf{T}^* \mathbf{n}^* dA^*, \quad (2.198)$$

$$\iint_{\partial \mathcal{P}} \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{T} \mathbf{n} dA = \iint_{\mathcal{I}^+} (\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{z})^+ \times \mathbf{T}^+ \mathbf{n}^+ dA^+ + \iint_{\mathcal{I}^-} (\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{z})^- \times \mathbf{T}^- \mathbf{n}^- dA^- + \iint_{\partial \mathcal{P}^*} (\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{z}) \times \mathbf{T}^* \mathbf{n}^* dA^*.$$



Rys. 2.5

Wprowadzając (2.193), (2.194) i (2.196) do (2.198), otrzymamy

$$\iint_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{T} \mathbf{n} dA = \iint_{\mathcal{S}} [(\mathbf{T}^3 \mp h_{,a}^{\pm} \mathbf{T}^{\alpha}) \mu]_{\pm}^{\pm} dA + \int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{N}^{\alpha} v_{\alpha} ds, \quad (2.199)$$

$$\iint_{\partial \mathcal{P}} \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{T} \mathbf{n} dA = \iint_{\mathcal{S}} \bar{\mathbf{r}} \times [(\mathbf{T}^3 \mp h_{,a}^{\pm} \mathbf{T}^{\alpha}) \mu]_{\pm}^{\pm} dA + \int_{\partial \mathcal{S}} (\mathbf{M}^{\alpha} + \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{N}^{\alpha}) v_{\alpha} ds,$$

gdzie

$$[\dots]_{\pm}^{\pm} = [\dots] \Big|_{\zeta = +h^+} - [\dots] \Big|_{\zeta = -h^-}, \quad (2.200)$$

$$\mathbf{N}^{\alpha} = \int_{-}^{+} \mathbf{T}^{\alpha} \mu d\zeta, \quad \mathbf{M}^{\alpha} = \int_{-}^{+} \mathbf{z} \times \mathbf{T}^{\alpha} \mu d\zeta, \quad \text{gdzie} \quad \int_{-}^{+} \equiv \int_{-h^-}^{+h^+}. \quad (2.201)$$

Całki objętościowe w (2.195) mogą być wyrażone w postaci

$$\iiint_{\mathcal{P}} \mathbf{b} dV = \iint_{\mathcal{S}} \left(\int_{-}^{+} \mathbf{b} \mu d\zeta \right) dA, \quad (2.202)$$

$$\iiint_{\mathcal{P}} \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{b} dV = \iint_{\mathcal{S}} \left[\bar{\mathbf{r}} \times \left(\int_{-}^{+} \mathbf{b} \mu d\zeta \right) + \int_{-}^{+} \mathbf{z} \times \mathbf{b} \mu d\zeta \right] dA.$$

Wprowadźmy wypadkowe wektory powierzchniowe

$$\mathbf{p} = \int_{-}^{+} \mathbf{b} \mu d\zeta + [(\mathbf{T}^3 \mp h_{,a}^{\pm} \mathbf{T}^{\alpha}) \mu]_{\pm}^{\pm}, \quad (2.203)$$

$$\mathbf{m} = \int_{-}^{+} \mathbf{z} \times \mathbf{b} \mu d\zeta + [\mathbf{z} \times (\mathbf{T}^3 \mp h_{,a}^{\pm} \mathbf{T}^{\alpha}) \mu]_{\pm}^{\pm}.$$

Powierzchnia boczna $\partial \mathcal{P}^*$ obszaru \mathcal{P} może, w szczególności, pokrywać się z częścią powierzchni bocznej powłoki $\partial \mathcal{B}_f^*$, na której spełniony jest warunek

$$\mathbf{T} \mathbf{n}^* = \mathbf{t}^*, \quad (2.204)$$

gdzie \mathbf{t}^* jest danym wektorem sił powierzchniowych działających w każdym punkcie $\bar{\mathbf{x}} = \chi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}_f^*$. Korzystając z (2.188)₂, (2.194) i (2.197), otrzymamy statycznie równoważne wypadkowe wektory zewnętrznych sił i momentów brzegowych

$$\iint_{\partial \mathcal{B}_f^*} \mathbf{t}^* dA^* = \int_{\partial \mathcal{M}_f} \mathbf{N}^* ds, \quad \iint_{\partial \mathcal{B}_f^*} \mathbf{z} \times \mathbf{t}^* dA^* = \int_{\partial \mathcal{M}_f} \mathbf{M}^* ds, \quad (2.205)$$

$$\mathbf{N}^* = \int_{-}^{+} \mathbf{t}^* \mu d\zeta, \quad \mathbf{M}^* = \int_{-}^{+} \mathbf{z} \times \mathbf{t}^* \mu d\zeta,$$

gdzie $\partial \mathcal{M}_f = \partial \mathcal{B}_f^* \cap \mathcal{M}$.

Z definicji (2.201), (2.203)₂ i (2.205) wynika, że wypadkowe wektory momentów \mathbf{M}^α , \mathbf{m} i \mathbf{M}^* mają na ogół niezerowe składowe również na kierunek normalny do \mathcal{M} . Oznacza to, że rozważana tutaj teoria powłok jest ogólniejsza od teorii powłok cienkich rozwiniętej w 2.2.2.

Po uwzględnieniu (2.199), (2.203) i (2.205), prawa bilansu (2.195) redukują się do *wypadkowych równań równowagi powłoki*

$$\int_{\partial\mathcal{S}\setminus\partial\mathcal{M}_f} \mathbf{N}^\alpha v_\alpha ds + \int_{\partial\mathcal{S}\cap\partial\mathcal{M}_f} \mathbf{N}^* ds + \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{p} dA = \mathbf{0}, \quad (2.206)$$

$$\int_{\partial\mathcal{S}\setminus\partial\mathcal{M}_f} (\mathbf{M}^\alpha + \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{N}^\alpha) v_\alpha ds + \int_{\partial\mathcal{S}\cap\partial\mathcal{M}_f} (\mathbf{M}^* + \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{N}^*) ds + \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) dA = \mathbf{0}.$$

W (2.206) wszystkie pola są określone tylko na nieodkształconej powierzchni podstawowej \mathcal{M} powłoki. $\mathbf{N}^\alpha v_\alpha$ jest wypadkowym wektorem sił wewnętrznych, a $\mathbf{M}^\alpha v_\alpha$ — wypadkowym wektorem momentów wewnętrznych powłoki; oba wektory są określone na jednostkę długości brzegu nieodkształconego $\partial\mathcal{S}$. Ponadto, \mathbf{p} jest wypadkowym wektorem sił zewnętrznych, a \mathbf{m} wypadkowym wektorem momentów zewnętrznych; oba wektory są określone na jednostkę powierzchni nieodkształconej \mathcal{S} . Zauważmy również, że $\mathbf{M}^\alpha v_\alpha$, \mathbf{M}^* i \mathbf{m} są zdefiniowane względem powierzchni odkształconej $\bar{\mathcal{S}}$, gdyż w definicjach (2.201)₂, (2.203)₂ i (2.205)₂ występuje odchyłka $\mathbf{z}(\theta^\alpha, \zeta)$ od wektora wodzącego $\bar{\mathbf{r}}$.

Stosując odwrotne twierdzenie Stokesa do pierwszych całek krzywoliniowych w (2.206) i pamiętając, że obszar $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ jest dowolny, otrzymamy *lokalną* postać warunków równowagi powłoki

$$\mathbf{N}^\alpha|_\alpha + \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^\alpha|_\alpha + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \times \mathbf{N}^\alpha + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \text{w} \quad \mathcal{M}, \quad (2.207)$$

$$\mathbf{N}^* - \mathbf{N}^\alpha v_\alpha = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^* - \mathbf{M}^\alpha v_\alpha = \mathbf{0} \quad \text{na} \quad \partial\mathcal{M}_f.$$

Wypadkowe warunki równowagi (2.207) są *trójwymiarowo ścisłe*, gdyż są bezpośrednią konsekwencją trójwymiarowych praw bilansu (2.195) i warunku na powierzchni brzegowej (2.204). Podczas wyprowadzenia (2.207) nie korzystano z żadnych hipotez upraszczających. Równania (2.207) muszą być spełnione niezależnie od materiału, z którego jest zbudowana powłoka.

2.5.3. Energetycznie ścisła kinematyka powłoki

Wprowadźmy dwa dowolne odpowiednio gładkie pola wektorowe $\mathbf{v}(\theta^\alpha)$, $\mathbf{w}(\theta^\alpha)$ określone na powierzchni podstawowej \mathcal{M} z brzegiem $\partial\mathcal{M}$. Mnożąc pierwsze wyrażenia w (2.207) przez \mathbf{v} , a drugie przez \mathbf{w} oraz całkując sumę tych wyrazów po całej powierzchni \mathcal{M} i jej brzegu $\partial\mathcal{M}$, otrzymamy tożsamość całkową

$$\iint_{\mathcal{M}} [(\mathbf{N}^\alpha|_\alpha + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{M}^\alpha|_\alpha + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \times \mathbf{N}^\alpha + \mathbf{m}) \cdot \mathbf{w}] dA + \int_{\partial\mathcal{M}_f} [(\mathbf{N}^* - \mathbf{N}^\alpha v_\alpha) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{M}^* - \mathbf{M}^\alpha v_\alpha) \cdot \mathbf{w}] ds = 0. \quad (2.208)$$

Całki powierzchniowe w (2.208) zawierające pochodne pól \mathbf{N}^α i \mathbf{M}^α mogą być przekształcone za pomocą twierdzenia Stokesa, co prowadzi do

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{M}} [(\mathbf{N}^\alpha \cdot (\mathbf{v}_{,\alpha} + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \times \mathbf{w}) + \mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{w}_{,\alpha})] dA = \\ & = \iint_{\mathcal{M}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{w}) dA + \int_{\partial \mathcal{M}_1} (\mathbf{N}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{w}) ds + \int_{\partial \mathcal{M}_2} (\mathbf{N}^\alpha v_{,\alpha} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}^\alpha v_{,\alpha} \cdot \mathbf{w}) ds. \end{aligned} \quad (2.209)$$

Jeśli \mathbf{v} i \mathbf{w} są interpretowane jako kinematycznie dopuszczalne pola wirtualnych przesunięć i obrotów, tzn. $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ na $\partial \mathcal{M}_d$, to druga i trzecia całka (2.209) mają sens zewnętrznej pracy wirtualnej wykonanej przez dane obciążenia powierzchniowe \mathbf{p} , \mathbf{m} i brzegowe \mathbf{N}^* , \mathbf{M}^* , a ostatnia całka w (2.209) znika tożsamościowo. W tym kontekście pierwsza całka (2.209) musi mieć sens wewnętrznej pracy wirtualnej, a wyrażenia $\mathbf{v}_{,\alpha} + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \times \mathbf{w}$ i $\mathbf{w}_{,\alpha}$ mogą być interpretowane jako wirtualne zmiany odpowiednio zdefiniowanych energetycznie spójnych z \mathbf{N}^α i \mathbf{M}^α powierzchniowych miar odkształceń.

Z powyższej dyskusji wynika, że ściśle wypadkowe równania równowagi (2.207)₁ i statyczne warunki brzegowe (2.207)₂ wymagają wyraźnie sprecyzowanego opisu kinematyki (deformacji) powierzchni podstawowej. Postać (2.209) sugeruje konieczność wyposażenia powierzchni \mathcal{M} w dwa niezależne pola, których wirtualne zmiany miałyby sens wirtualnych przesunięć \mathbf{v} i obrotów \mathbf{w} . Te pola powinny umożliwić skonstruowanie takich dwóch powierzchniowych miar odkształceń, których wirtualne zmiany odpowiadałyby wyrażeniom $\mathbf{v}_{,\alpha} + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \times \mathbf{w}$ i $\mathbf{w}_{,\alpha}$. Wyniki prac Reissnera [1974:49], Libai i Simmonds [1983:44], [1997:2] oraz Makowskiego i Stumpfa [1990:10], [1994:11] wskazują, że model kinematyczny ogólnej nieliniowej teorii powłok spełniający powyższe wymagania jest identyczny z kinematyką powierzchni Cosserat [1909:2].

Powierzchnia Cosserat w stanie odkształconym $\bar{\mathcal{E}}$ zawiera dwa składniki: powierzchnię podstawową powłoki \mathcal{M} oraz dołączoną do niej w każdym punkcie trójkę sztywno obracających się wektorów \mathbf{d}_i ($\mathbf{d}_3 \equiv \mathbf{d}$) zwanych *direktorami*. Umieszczenie $\bar{\mathcal{E}}$ w przestrzeni \mathcal{E} określa się zarówno położeniem powierzchni podstawowej, jak i orientacją direktorów względem dowolnie wybranego układu odniesienia (O, \mathbf{i}_k) . W rozważaniach teoretycznych wygodnie jest przyjąć takie wektory \mathbf{d}_i , które w stanie nieodkształconym pokrywają się z bazą \mathbf{a}_i ($\mathbf{a}_3 \equiv \mathbf{n}$) nieodkształconej powierzchni podstawowej \mathcal{M} . Zatem konfiguracja odkształcona $\bar{\mathcal{E}}$ powierzchni Cosserat określona jest następującymi zależnościami:

$$\bar{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{d}_i = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{Q}\mathbf{a}_i, \quad (2.210)$$

gdzie $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ jest *wektorem przesunięcia* określającym położenie \mathcal{M} w przestrzeni \mathcal{E} , a $\mathbf{Q} \in SO(3)$ jest *tensorem obrotu* określającym orientację \mathbf{d}_i względem \mathbf{a}_i . W odróżnieniu od bazy $\bar{\mathbf{r}}_\alpha$, $\bar{\mathbf{n}}$ wprowadzonej w 2.4.1 i zależnej od \mathbf{u} przez tensor obrotu $\mathbf{R}(\mathbf{u}) \in SO(3)$, tutaj orientacja \mathbf{d}_i określona przez \mathbf{Q} jest drugim polem opisującym deformację powierzchni Cosserat, całkowicie niezależnym od \mathbf{u} . Deformacja (2.210) nie powinna być osobliwa, tzn.

$$\det(\bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{,\beta}) > 0, \quad \epsilon^{\alpha\beta} (\bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} \times \bar{\mathbf{r}}_{,\beta}) \cdot \mathbf{d} > 0. \quad (2.211)$$

Z (2.210)₂ wynika, że własności metryczne bazy \mathbf{d}_i są takie same jak \mathbf{a}_i , np. $\mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\beta = a_{\alpha\beta}$, $\mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_3 = 0$ itp.

Wirtualne przesunięcie \mathbf{v} może być interpretowane, zgodnie z (2.148), jako $\mathbf{v} \equiv \delta \mathbf{u}$. Wirtualny obrót \mathbf{w} wyraża się przez $\delta \mathbf{Q}$ analogiczną do (2.145) zależnością

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^i \times \delta \mathbf{d}_i = \frac{1}{2} \mathbf{d}^i \times \delta \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{d}_i, \quad \delta \mathbf{d}_i = \mathbf{w} \times \mathbf{d}_i. \quad (2.212)$$

Wprowadźmy dla powierzchni Cosserat wektorowe miary odkształceń analogiczne do (2.121)₂ i (2.124)_{1,3}

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{d}_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{d}^\alpha + \varepsilon_\beta \mathbf{d}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \otimes \mathbf{d}^\beta, \quad (2.213)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_\beta = \frac{1}{2} \mathbf{d}^i \times \mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T \mathbf{d}_i = \mathbf{d} \times \lambda_{\alpha\beta} \mathbf{d}^\alpha + \lambda_\beta \mathbf{d}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_\beta \otimes \mathbf{d}^\beta.$$

Wirtualne zmiany miar (2.213) względem obracającej się bazy \mathbf{d}_i można obliczyć, wprowadzając współbrotową wariację $\delta^0(\cdot) = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{Q}^T(\cdot))$. Stosując δ^0 do (2.213)₁, otrzymamy

$$\delta^0 \boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \delta \mathbf{u}_{,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \times \mathbf{w} = \delta \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{d}^\alpha + \delta \varepsilon_\beta \mathbf{d}. \quad (2.214)$$

Z zależności $\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T = \boldsymbol{\lambda}_\beta \times \mathbf{1}$ odpowiadającej (2.213)₂ wynika, że

$$\delta(\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T) = (\mathbf{w}_{,\beta} + \mathbf{w} \times \boldsymbol{\lambda}_\beta) \times \mathbf{1} = \delta \boldsymbol{\lambda}_\beta \times \mathbf{1}, \quad (2.215)$$

skąd otrzymamy zależność

$$\delta \boldsymbol{\lambda}_\beta = \mathbf{w}_{,\beta} + \mathbf{w} \times \boldsymbol{\lambda}_\beta. \quad (2.216)$$

Zastosowanie δ^0 do (2.215)₁, przy uwzględnieniu (2.216), prowadzi do

$$\delta^0 \boldsymbol{\lambda}_\beta = \mathbf{w}_{,\beta} = \mathbf{d} \times \delta \lambda_{\alpha\beta} \mathbf{d}^\alpha + \delta \lambda_\beta \mathbf{d}. \quad (2.217)$$

Porównując (2.214) i (2.217) z wyrażeniami na wirtualne miary odkształceń zawartymi w pierwszej całce (2.209), widzimy, że struktura obu wyrażeń jest identyczna. Dlatego tak skonstruowane miary odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}_\beta$, $\boldsymbol{\lambda}_\beta$, wynikające z opisu kinematyki (2.210), są energetycznie spójne z wypadkowymi miarami naprężeń \mathbf{N}^β , \mathbf{M}^β . Zgodnie z (2.213), (2.214) i (2.217), wektorowe miary odkształceń i ich współbrotowe wariacje mają trzy niezerowe składowe, a składowe powierzchniowe tensorowych miar odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\lambda}$ i ich wariacji są na ogół niesymetryczne.

Skonstruowana tu dwuwymiarowa kinematyka powłoki jest energetycznie ścisła, słuszna przy nieograniczonych przesunięciach, obrotach, odkształceniach i zgięciach elementów materialnych powłoki oraz niezależna od grubości powłoki, jej struktury poprzecznej i własności materiałowych. Taka struktura kinematyczna jest bezpośrednim energetycznym odpowiednikiem dwuwymiarowej struktury ścisłych wypadkowych równań równowagi (2.207)₁.

Z tożsamości całkowitej (2.209) wynika również, że geometryczne warunki brzegowe spójne z tą kinematyką powinny mieć postać

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}^* = 0, \quad \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^* = 0 \quad \text{na} \quad \partial \mathcal{M}_d = \partial \mathcal{M} \setminus \partial \mathcal{M}_f, \quad (2.218)$$

gdzie $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(s)$, $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^*(s)$ są znanymi funkcjami na $\partial \mathcal{M}_d$, energetycznie równoważnymi zadaniu trójwymiarowego warunku brzegowego $\chi(\mathbf{x}) = \chi^*(\mathbf{x})$ dla $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}_d^*$. Oznacza to, że praca na $\partial \mathcal{M}_d$ wypadkowych reakcji wewnętrznych $\mathbf{N}^\alpha \nu_\alpha$, $\mathbf{M}^\alpha \nu_\alpha$ na polach \mathbf{u}^* , \mathbf{Q}^* powinna być taka sama jak praca na $\partial \mathcal{B}_d^*$ reakcji wewnętrznej \mathbf{t} na polu $\chi^*(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}_d^*$.

2.5.4. Równania konstytutywne

Do zamknięcia układu zależności wyprowadzonych w 2.5.2 i 2.5.3 wymagane są równania konstytutywne wiążące \mathbf{N}^α , \mathbf{M}^α i ϵ_β , λ_β . O ile warunki równowagi (2.207) oraz zależności kinematyczne (2.210), (2.213) i (2.218) są ściśle w określonym poprzednio sensie, o tyle równania konstytutywne, jako relacje fizyczne oparte na badaniach eksperymentalnych, są zawsze obarczone pewnym błędem. Podstawy teorii równań konstytutywnych dla takiego statycznie i kinematycznie ścisłego sformułowania nieliniowej teorii powłok omówione zostały w [1994:11] i [1997:2].

Z tożsamości całkowitej (2.209) wynika, że dla powłok wykonanych z „prostego” w sensie prac [1965:10] i [1994:11] materiału sprężystego równania konstytutywne muszą mieć postać

$$\mathbf{N}^\alpha = \mathcal{N}^\alpha(\epsilon_\beta, \lambda_\beta; \mathbf{r}), \quad \mathbf{M}^\alpha = \mathcal{M}^\alpha(\epsilon_\beta, \lambda_\beta; \mathbf{r}), \quad (2.219)$$

gdzie funkcje konstytutywne \mathcal{N}^α , \mathcal{M}^α zależą również od geometrii powłoki nieodkształconej — geometrii powierzchni \mathcal{M} , grubości powłoki h , struktury poprzecznej przekroju itp.

Własności mechaniczne materiału hipersprężystego określa trójwymiarowa funkcja energii sprężystej $\Sigma(\mathbf{F}; \mathbf{x})$, zależna od przestrzennego gradientu deformacji $\mathbf{F} = \nabla \chi(\mathbf{x})$ (tu gradient \mathbf{F} jest inny niż gradient \mathbf{F} wprowadzony w 2.4.1 w normalnym układzie współrzędnych otoczenia \mathcal{M} i $\bar{\mathcal{M}}$) i zdefiniowana na jednostkę objętości stanu nieodkształconego \mathcal{B} [1965:10]. Wprowadźmy dwuwymiarową funkcję energii sprężystej W żądając, by jej struktura była zgodna z sugerowaną przez (2.219)

$$\int^+ \Sigma(\mathbf{F}, \mathbf{x}) \mu d\xi = W(\epsilon_\beta, \lambda_\beta; \mathbf{r}) + r, \quad (2.220)$$

$$\mathbf{N}^\alpha = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_\alpha}(\epsilon_\beta, \lambda_\beta; \mathbf{r}) + r, \quad \mathbf{M}^\alpha = \frac{\partial W}{\partial \lambda_\alpha}(\epsilon_\beta, \lambda_\beta; \mathbf{r}) + r,$$

gdzie r oznacza nieznaną błąd.

Warunek $r \rightarrow 0$ nie może być na ogół spełniony bez wprowadzenia różnych założeń upraszczających, np. w postaci więzów nakładanych na deformację χ na grubości powłoki. Możliwości wprowadzenia takich więzów jest wiele i taka sama struktura równań konstytutywnych (2.220)₂ może być wynikiem przyjęcia różnych założeń upraszczających. W tym sensie przedstawione tu zależności nieliniowej mechaniki powłok są reprezentatywne dla szerokiej klasy różnych teorii szczegółowych.

Wypadkowe siły i momenty wewnętrzne \mathbf{N}^a , \mathbf{M}^a mają swe naturalne reprezentacje w bazie \mathbf{d}_i

$$\mathbf{N}^a = L^{a\beta} \mathbf{d}_\beta + L^a \mathbf{d}, \quad \mathbf{M}^a = \mathbf{d} \times K^{a\beta} \mathbf{d}_\beta + K^a \mathbf{d}, \quad (2.221)$$

gdzie na ogół $L^{a\beta} \neq L^{\beta a}$, $K^{a\beta} \neq K^{\beta a}$.

Korzystając z (2.209), (2.214), (2.217), (2.220) i (2.221), otrzymamy

$$\delta W = \mathbf{N}^a \cdot \delta^0 \boldsymbol{\varepsilon}_a + \mathbf{M}^a \cdot \delta^0 \boldsymbol{\lambda}_a = L^{a\beta} \delta \varepsilon_{\beta a} + L^a \delta \varepsilon_a + K^{a\beta} \delta \lambda_{\beta a} + K^a \delta \lambda_a. \quad (2.222)$$

Z (2.222) wynika, że ogólne równania konstytutywne dla powłok hipersprężystych (2.220)₂ mają następującą reprezentację skalarną:

$$L^{a\beta} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{a\beta}}, \quad L^a = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_a}, \quad K^{a\beta} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_{a\beta}}, \quad K^a = \frac{\partial W}{\partial \lambda_a}.$$

W literaturze brak jest szerszej dyskusji na temat ogólnej postaci funkcji $W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{r})$ oraz nakładanych na nią ograniczeń. Uważa się jedynie [1997:2], że: a) W powinna być dodatnio określoną funkcją miar odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\lambda}$, tzn. $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| + h/2\|\boldsymbol{\lambda}\| > 0 \Rightarrow W > 0$, b) W powinna być funkcją niezmienniczą względem zmiany orientacji powierzchni \mathcal{M} . Szczególne postacie funkcji W przydatne dla teorii dużych deformacji powłok zbudowanych z nieściśliwego materiału gumopodobnego zaproponowano w [1990:10] i [1986:39]; te postacie nie wykazują zależności W od λ_a .

W szczególnym przypadku *małych* odkształceń, w teorii jednorodnych izotropowych powłok sprężystych mogą być stosowane liniowe równania konstytutywne zaproponowane w [1992:15], [1996:5], które są naturalnym rozszerzeniem równań konstytutywnych (2.158) teorii pierwszego przybliżenia

$$L^{a\beta} = C[(1-\nu)\varepsilon^{a\beta} + \nu a^{a\beta} \varepsilon_{\kappa}^{\kappa}], \quad L^a = \frac{1}{2} \alpha_s C(1-\nu)\varepsilon^a, \quad (2.223)$$

$$K^{a\beta} = D[(1-\nu)\lambda^{a\beta} + \nu a^{a\beta} \lambda_{\kappa}^{\kappa}], \quad K^a = \alpha_t D(1-\nu)\lambda^a.$$

Tutaj α_s jest współczynnikiem ścinania o wartości od $\pi^2/12$ do 1 (najczęściej 5/6) zależnej od zastosowanego kryterium [1973:49], natomiast α_t jest współczynnikiem owinięcia, którego optymalna wartość nie została dotąd ustalona. Testy numeryczne przeprowadzone w [1992:15], [1996:4] na różnych reprezentatywnych przykładach izotropowych powłok liniowosprężystych wykazały, że przy $\alpha_t < 1$ nie obserwuje się wpływu α_t na rozwiązanie, a wkład miar odkształceń λ_a do energii sprężystej powłoki jest pomijalnie mały.

Dokładniejsze od (2.223) równania konstytutywne w teorii małych odkształceń powłok sprężystych, uwzględniające również sprzężenia pomiędzy poszczególnymi składowymi miar odkształceń, mogą być konstruowane rozważając *konsekwentne drugie przybliżenie* do energii odkształcenia powłoki [1979:40], [1979:48].

Struktura trójwymiarowo ściśłych wypadkowych miar naprężeń \mathbf{N}^a , \mathbf{M}^a podana w (2.221) jest ogólniejsza od struktury analogicznych miar naprężeń teorii powłok cienkich podanej w (2.149)₂ i (2.151)₄. Dlatego składowe $S^{a\beta}$, $H^{a\beta}$, a następ-

nie również składowe $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ powierzchniowych miar naprężeń teorii powłok cienkich mogą być teraz łatwo zinterpretowane poprzez składowe $L^{\alpha\beta}$, $K^{\alpha\beta}$ wypadkowych miar naprężeń teorii ogólnej.

2.5.5. Powłoki nieregularne

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że nieodkształcona powierzchnia podstawowa \mathcal{M} powłoki jest powierzchnią regularną, a wszystkie związane z nią pola geometryczne, kinematyczne i statyczne są ciągłe i różniczkowalne wymaganą ilość razy.

Rzeczywiste konstrukcje i elementy powłokowe charakteryzuje ogromna różnorodność kształtów. Często są to konstrukcje złożone z elementów powierzchniowych (powłoki, płyty, tarcze, membrany itp.), krzywo- lub prostoliniowych (łuki, belki, pręty, cięgna, słupy itp.), a nawet punktowych (np. połączenie technologiczne słupa i powłoki). Same elementy powłokowe mogą zawierać załamania, usztywnienia, rozgałęzienia, skokową zmianę grubości lub własności materiałowych, połączenia technologiczne itp. Zewnętrzne obciążenia i warunki brzegowe mogą również wprowadzać do opisu powierzchniowego dodatkowe nieregularności liniowe i punktowe.

Każda powłoka nieregularna może być modelowana jako określone złączenie powłok regularnych, których wspólne granice są krzywymi przestrzennymi mogącymi mieć również własne, odmienne niż powłoki regularne, własności mechaniczne. Te wspólne granice reprezentują załamania, rozgałęzienia, połączenia technologiczne i inne krzywe osobliwe, wzdłuż których niektóre pola są nieciągłe. Dlatego opis mechaniczny takich powłok nieregularnych musi zawierać również warunki skoku, które należy spełnić wzdłuż tych krzywych osobliwych.

Podstawy ogólnej teorii powłok nieregularnych opracowane zostały przez Makowskiego i Stumpfa [1994:11] i rozwinięte w [1996:4,5]. Tutaj skupimy się na wprowadzeniu kompletu zależności zawierających również warunki skoku pól statycznych i kinematycznych. Te warunki skoku stanowią istotne dopełnienie układu równań mechaniki powłok regularnych i umożliwiają formułowanie i rozwiązywanie zagadnień brzegowych globalnie dla całej nieregularnej konstrukcji powłokowej.

Niech powłoka nieregularna \mathcal{B} , utożsamiana z zajmowanym przez nią w stanie nieodkształconym obszarem przestrzeni, będzie przedstawiona jako złączenie regularnych elementów powłokowych, $\mathcal{B} = \bigcup_k \mathcal{B}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, K$. W każdym regularnym elemencie $\mathcal{B}^{(k)}$ wyróżniamy regularną powierzchnię podstawową $\mathcal{M}^{(k)}$ zorientowaną wersorem normalnym $\mathbf{n}^{(k)}$, której brzeg $\partial\mathcal{M}^{(k)}$ składa się ze skończonej liczby zamkniętych, odcinkami gładkich krzywych odpowiednio zorientowanych względem $\mathcal{M}^{(k)}$ wersorem zewnętrznej normalnej $\mathbf{v}^{(k)}$. Zakładamy, że wszystkie wspólne brzegi $\partial\mathcal{M}^{(k)}$ różnych powierzchni $\mathcal{M}^{(k)}$ tworzą zbiór $\Gamma = \partial\mathcal{M}^{(k)} \cap \partial\mathcal{M}^{(l)} \cap \dots \cap \partial\mathcal{M}^{(m)}$, $k \neq l \neq \dots \neq m$, natomiast $\partial\mathcal{M} = \mathcal{M} \setminus \Gamma$ jest brzegiem zbioru $\mathcal{M} = \bigcup_k \mathcal{M}^{(k)}$. Tak wprowadzony twór geometryczny \mathcal{M} będziemy nazywali (nieodkształconą) *nieregularną po-*

wierzchnią podstawową, a Γ — (nieodkształconą) krzywą osobliwą na \mathcal{M} . Zauważmy przy tym, że w sensie geometrii różniczkowej \mathcal{M} nie jest powierzchnią, a Γ nie jest krzywą w \mathcal{E} . Krzywa osobliwa Γ modeluje tu różne sytuacje fizyczne, w których rozważane dalej pola mogą być nieciągłe wzdłuż Γ . Jeśli $\boldsymbol{\tau}_r$ jest wersorem stycznym do Γ w punkcie regularnym, to na brzegu $\partial\mathcal{M}^{(k)}$, będącym częścią Γ , mamy $\mathbf{v}^{(k)} = \pm \boldsymbol{\tau}_r \times \mathbf{n}^{(k)}$, gdzie znak + lub - musi być tak dobrany, by brzeg $\partial\mathcal{M}^{(k)}$ był właściwie zorientowany względem $\mathcal{M}^{(k)}$.

Niech deformacja $\boldsymbol{\chi}^{(k)}: \mathcal{M}^{(k)} \rightarrow \mathcal{V}$ będzie ciągłą funkcją na każdej powierzchni $\mathcal{M}^{(k)}$ i klasy C^1 wewnątrz obszaru $\mathcal{M}^{(k)}$ oznaczonego przez $\text{int } \mathcal{M}^{(k)}$. Nie zakładamy tutaj by $\boldsymbol{\chi}^{(k)}$ była ciągłą również na Γ ; oczekujemy tylko, by w granicy dążącej do $\partial\mathcal{M}^{(k)}$ wartość $\bar{\mathbf{r}}^{(k)} = \boldsymbol{\chi}^{(k)}(\mathbf{r})$ dla każdego regularnego punktu $\mathbf{r} \in \partial\mathcal{M}^{(k)} \subset \Gamma$ była skończona

$$\bar{\mathbf{r}}^{(k)} = \boldsymbol{\chi}^{(k)}(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}} \boldsymbol{\chi}^{(k)}(\mathbf{q}), \quad \|\bar{\mathbf{r}}^{(k)}\| < \infty, \quad \forall \mathbf{q} \in \text{int } \mathcal{M}^{(k)}. \quad (2.224)$$

Deformacja krzywej osobliwej Γ może być opisana niezależną funkcją $\bar{\mathbf{r}}_r = \boldsymbol{\chi}_r(\mathbf{r}_r)$, $\mathbf{r}_r \in \Gamma$, będącą ciągłym odwzorowaniem $\boldsymbol{\chi}_r: \Gamma \rightarrow \mathcal{V}$ danym tylko na Γ .

Załóżmy również, że wypadkowe pola wektorowe \mathbf{N}^a , \mathbf{M}^a są klasy C^1 w $\text{int } \mathcal{M}^{(k)}$ i mają skończone przedłużenia analityczne do $\partial\mathcal{M}^{(k)}$

$$\mathbf{N}_{(k)}^a = \lim_{\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}} \mathbf{N}_{(k)}^a(\mathbf{q}), \quad \|\mathbf{N}_{(k)}^a\| < \infty, \quad \forall \mathbf{r} \in \partial\mathcal{M}^{(k)} \subset \Gamma, \quad (2.225)$$

$$\mathbf{M}_{(k)}^a = \lim_{\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}} \mathbf{M}_{(k)}^a(\mathbf{q}), \quad \|\mathbf{M}_{(k)}^a\| < \infty, \quad \forall \mathbf{q} \in \text{int } \mathcal{M}^{(k)}.$$

W przypadku powłoki nieregularnej, przy redukcji zagadnienia trójwymiarowego (2.195) do dwuwymiarowego (2.206), mogą dodatkowo pojawić się wektory zewnętrznych sił $\mathbf{p}_r(s)$ i momentów $\mathbf{m}_r(s)$ dane tylko na krzywej osobliwej Γ . Wektorom \mathbf{p}_r , \mathbf{m}_r można nadawać różne interpretacje fizyczne, w zależności od przewidywanych zastosowań. Na przykład, gdy Γ jest prętem, to \mathbf{p}_r i \mathbf{m}_r są lewymi stronami równań równowagi pręta. W przypadku połączenia technologicznego lub przecięcia się wielu gałęzi powłoki nieregularnej \mathbf{p}_r i \mathbf{m}_r mogą być interpretowane jako dodatkowe zmienne dynamiczne, dla których muszą być określone równania konstytutywne. W najprostszym przypadku \mathbf{p}_r i \mathbf{m}_r mogą oznaczać wektory sił i momentów zewnętrznych dodatkowo przyłożonych tylko wzdłuż krzywej osobliwej Γ . W rezultacie, pozostawiając definicje wektorów \mathbf{p}_r , \mathbf{m}_r nieokreślone, wypadkowe równania równowagi powłoki nieregularnej (2.206) można rozszerzyć do

$$\int_{\partial\mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}_f} \mathbf{N}^a v_a ds + \int_{\partial\mathcal{M} \cap \partial\mathcal{M}_f} \mathbf{N}^* ds + \iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} \mathbf{p} dA + \int_{\Gamma} \mathbf{p}_r ds = \mathbf{0}, \quad (2.226)$$

$$\int_{\partial\mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}_f} (\mathbf{M}^a + \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{N}^a) v_a ds + \int_{\partial\mathcal{M} \cap \partial\mathcal{M}_f} (\mathbf{M}^* + \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{N}^*) ds + \iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) dA + \int_{\Gamma} (\mathbf{m}_r + \bar{\mathbf{r}}_r \times \mathbf{p}_r) ds = \mathbf{0}.$$

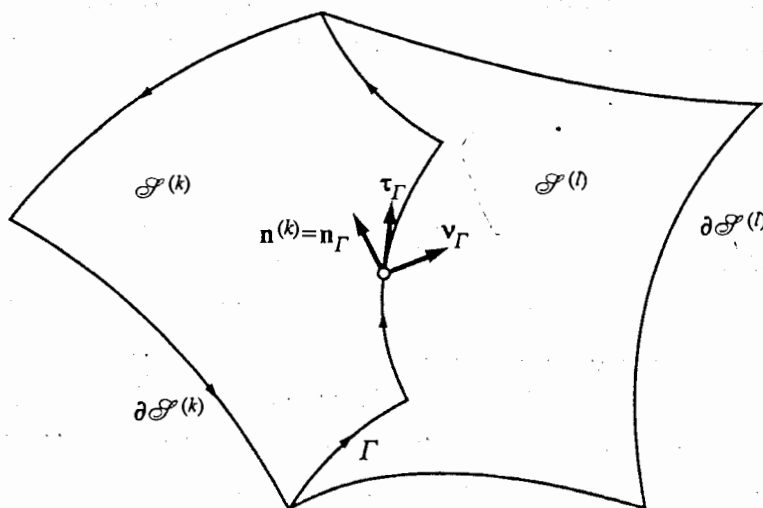
Rozważmy przekształcenie pierwszej całki (2.226) w najprostszym przypadku, w którym rozważany obszar $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ zawiera tylko jedną krzywą osobiwą Γ dzielącą \mathcal{S} na dwa regularne płyty $\mathcal{S}^{(k)}$ i $\mathcal{S}^{(l)}$, a brzeg $\partial \mathcal{S}$ nie styka się z $\partial \mathcal{M}_f$. Niech orientacja Γ określona przez $\boldsymbol{\tau}_\Gamma = d\mathbf{r}_\Gamma/ds$ pokrywa się z orientacją $\partial \mathcal{S}^{(k)}$, tzn. $\mathbf{v}_\Gamma = \boldsymbol{\tau}_\Gamma \times \mathbf{n}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k)} = -\mathbf{v}^{(l)}$ (rys. 2.6). Wtedy twierdzenie Stokesa zastosowane do wektora $\mathbf{N}^a|_a$ na każdej regularnej części $\mathcal{S}^{(k)}$ i $\mathcal{S}^{(l)}$ daje

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S} \setminus \Gamma} \mathbf{N}^a|_a dA &= \iint_{\mathcal{S}^{(k)}} \mathbf{N}^a_{(k)}|_a dA + \iint_{\mathcal{S}^{(l)}} \mathbf{N}^a_{(l)}|_a dA = \\ &= \int_{\partial \mathcal{S}^{(k)} \setminus \Gamma} \mathbf{N}^a_{(k)} v_a^{(k)} ds + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^a_{(k)} v_a^{(k)} ds + \int_{\partial \mathcal{S}^{(l)} \setminus \Gamma} \mathbf{N}^a_{(l)} v_a^{(l)} ds + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^a_{(l)} v_a^{(l)} ds = \\ &= \int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{N}^a v_a ds + \int_{\Gamma} [[\mathbf{N}_v]] ds, \end{aligned} \quad (2.227)$$

gdzie

$$[[\mathbf{N}_v]] = \mathbf{N}^a_{(k)} v_a^{(k)} + \mathbf{N}^a_{(l)} v_a^{(l)} = (\mathbf{N}^{(k)} - \mathbf{N}^{(l)}) \mathbf{v}_\Gamma \quad (2.228)$$

jest *skokiem* tensora sił wewnętrznych $\mathbf{N} = \mathbf{N}^a \otimes \mathbf{a}_a$ na krzywej osobiwej Γ .



Rys. 2.6

Dla ogólniejszego przypadku, w którym Γ jest wspólną częścią brzegu wielu płyt regularnych $\partial \mathcal{S}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, K$, a część brzegu $\partial \mathcal{S}$ pokrywa się z $\partial \mathcal{M}_f$, otrzymamy

$$\iint_{\mathcal{S} \setminus \Gamma} \mathbf{N}^a|_a dA = \int_{\partial \mathcal{S} \setminus \partial \mathcal{M}_f} \mathbf{N}^a v_a ds + \int_{\partial \mathcal{S} \cap \partial \mathcal{M}_f} \mathbf{N}^a v_a ds + \int_{\Gamma} [[\mathbf{N}_v]] ds, \quad (2.229)$$

gdzie teraz

$$[[\mathbf{N}_v]] = \sum_{k=1}^K \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} = \sum_{k=1}^K \pm \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{v}_\Gamma, \quad (2.230)$$

a znak + lub - należy wybrać w zależności od przyjętej orientacji Γ względem każdego $\partial \mathcal{S}^{(k)}$.

Wprowadzając (2.229) do (2.226)₁ oraz przekształcając analogicznie zależność (2.226)₂, otrzymamy

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} (\mathbf{N}^\alpha|_\alpha + \mathbf{p}) dA + \int_{\partial \mathcal{M} \cap \partial \mathcal{M}_f} (\mathbf{N}^* - \mathbf{N}^\alpha \nu_\alpha) ds + \int_\Gamma (\mathbf{p}_\Gamma - \llbracket \mathbf{N}_\nu \rrbracket) ds = \mathbf{0}, \\ \iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} [(\mathbf{M}^\alpha|_\alpha + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \times \mathbf{N}^\alpha + \mathbf{m}) + \bar{\mathbf{r}} \times (\mathbf{N}^\alpha|_\alpha + \mathbf{p})] dA + \\ + \int_{\partial \mathcal{M} \cap \partial \mathcal{M}_f} [(\mathbf{M}^* - \mathbf{M}^\alpha \nu_\alpha) + \bar{\mathbf{r}} \times (\mathbf{N}^* - \mathbf{N}^\alpha \nu_\alpha)] ds + \\ + \int_\Gamma [(\mathbf{m}_\Gamma - \llbracket \mathbf{M}_\nu \rrbracket) + \bar{\mathbf{r}}_\Gamma \times \mathbf{p}_\Gamma - \llbracket \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{N}_\nu \rrbracket] ds = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.231)$$

gdzie analogicznie do (2.228) i (2.230)

$$\llbracket \mathbf{M}_\nu \rrbracket = \sum_{k=1}^K \mathbf{M}_{(k)}^\alpha \nu_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^K \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} = \sum_{k=1}^K \pm \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{v}_\Gamma \quad (2.232)$$

jest skokiem na Γ wypadkowego tensora momentów wewnętrznych $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha$.

Ponieważ \mathcal{S} i Γ są dowolne, z (2.231) wynikają lokalne równania równowagi (2.207)₁ w $\mathcal{M} \setminus \Gamma$, statyczne warunki brzegowe (2.207)₂ na $\partial \mathcal{M}_f$ oraz dodatkowo *statyczne warunki skoku*

$$\mathbf{p}_\Gamma - \llbracket \mathbf{N}_\nu \rrbracket = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}_\Gamma - \llbracket \mathbf{M}_\nu \rrbracket + \llbracket (\bar{\mathbf{r}}_\Gamma - \bar{\mathbf{r}}) \times \mathbf{N}_\nu \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma. \quad (2.233)$$

Wprowadźmy dwa pola wektorowe $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ i $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ klasy C^1 określone na całej nieregularnej powierzchni podstawowej \mathcal{M} , z wyjątkiem krzywej Γ , i mające skończone przedłużenia analityczne do brzegów $\partial \mathcal{M}^{(k)}$ każdej powierzchni regularnej $\mathcal{M}^{(k)} \in \mathcal{M}$. Wprowadźmy również niezależnie dwa inne pola wektorowe $\mathbf{v}_\Gamma(s)$ i $\mathbf{w}_\Gamma(s)$ określone tylko na Γ . Wtedy postępując jak w 2.5.3, przy dodatkowym wymnożeniu (2.233) przez \mathbf{v}_Γ i \mathbf{w}_Γ , możemy wyprowadzić podobną do (2.208) tożsamość całkową, gdzie pierwsza całka jest teraz obliczana po obszarze $\mathcal{M} \setminus \Gamma$, do której dodatkowo trzeba wprowadzić wyrażenie

$$\int_\Gamma [(\mathbf{p}_\Gamma - \llbracket \mathbf{N}_\nu \rrbracket) \cdot \mathbf{v}_\Gamma + (\mathbf{m}_\Gamma - \llbracket \mathbf{M}_\nu \rrbracket) + \llbracket (\bar{\mathbf{r}}_\Gamma - \bar{\mathbf{r}}) \times \mathbf{N}_\nu \rrbracket] \cdot \mathbf{w}_\Gamma ds. \quad (2.234)$$

Tożsamość całkową (2.208) uzupełnioną o (2.234) możemy przekształcić, używając wzorów typu (2.229) oraz wprowadzonej już w 2.5.3 kinematyki, co prowadzi do następującej zależności:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} (\mathbf{N}^\alpha \cdot \delta^0 \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha + \mathbf{M}^\alpha \cdot \delta^0 \boldsymbol{\lambda}_\alpha) dA = \iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{w}) dA + \\ + \int_{\partial \mathcal{M}_f} (\mathbf{N}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{w}) ds + \int_{\partial \mathcal{M}_i} (\mathbf{N}_\nu \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}_\nu \cdot \mathbf{w}) ds + \\ + \int_\Gamma [\mathbf{p}_\Gamma \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{m}_\Gamma \cdot \mathbf{w}_\Gamma + \llbracket \mathbf{N}_\nu \cdot \{\mathbf{v} - \mathbf{v}_\Gamma + (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_\Gamma) \times \mathbf{w}_\Gamma \} \rrbracket + \llbracket \mathbf{M}_\nu \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_\Gamma) \rrbracket] ds. \end{aligned} \quad (2.235)$$

Tożsamość całkowa (2.235) wyraża spełnienie w słabej postaci warunków równowagi (2.207) i statycznych warunków skoku (2.233). Jest to zależność globalna odnosząca się do całej powłoki nieregularnej poddanej dowolnej (również nieciągłej na Γ) deformacji.

W 2.5.3 zbudowaliśmy kinematykę powierzchni Cosserat wyrażoną przez dwa pola \mathbf{u} , \mathbf{Q} w $\mathcal{M} \setminus \Gamma$, (por. (2.210)). Pola $\mathbf{u}_\Gamma(s)$, $\mathbf{Q}_\Gamma(s)$ odpowiadające tej kinematyce mogą na ogół być przyjmowane na krzywej osoblwej Γ niezależnie od pól \mathbf{u} , \mathbf{Q} w $\mathcal{M} \setminus \Gamma$.

Jeśli deformacja powierzchni Cosserat jest ciągła na Γ , to

$$\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{u}_\Gamma, \quad \mathbf{Q}|_\Gamma = \mathbf{Q}_\Gamma, \quad (2.236)$$

$$\mathbf{v}|_\Gamma = \delta \mathbf{u}|_\Gamma = \delta \mathbf{u}_\Gamma, \quad \mathbf{w}|_\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{d}^i \times \delta \mathbf{Q}_\Gamma \mathbf{Q}_\Gamma^T \mathbf{d}_i = \mathbf{w}_\Gamma.$$

W takim szczególnym przypadku, trzeci wiersz wzoru (2.235) upraszcza się do postaci

$$\int_\Gamma (\mathbf{p}_\Gamma \cdot \delta \mathbf{u}_\Gamma + \mathbf{m}_\Gamma \cdot \mathbf{w}_\Gamma) ds, \quad (2.237)$$

a warunek skoku (2.233)₂ redukuje się do

$$\mathbf{m}_\Gamma - \llbracket \mathbf{M}_\nu \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{na} \quad \Gamma. \quad (2.238)$$

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do deformacji (2.236) ciągłej na Γ , a stąd i do uproszczonych wyrażeń (2.237) i (2.238).

2.5.6. Silne i słabe sformułowania zagadnień brzegowych

Jak wynika z (2.210) i rozważań 2.5.3, każde umiejscowienie $\bar{\mathcal{C}}$ powierzchni Cosserat w przestrzeni fizycznej \mathcal{E} jest całkowicie określone przez uporządkowaną parę $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$ pól zadanych na \mathcal{M} z wartościami w $\mathcal{V} \times SO(3)$. Zbiór wszystkich takich umiejscowień tworzy *przestrzeń konfiguracyjną* zagadnienia

$$C(\bar{\mathcal{C}}) = \{\mathbf{u} | \mathbf{u}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V} \times SO(3)\} \equiv C(\mathcal{M}, \mathcal{V} \times SO(3)). \quad (2.239)$$

Tak zdefiniowana $C(\bar{\mathcal{C}})$ jest nieskończenie wymiarową grupą Banacha-Lie'go nie mającą struktury przestrzeni liniowej. Przestrzeń $T_{\mathbf{u}}C(\bar{\mathcal{C}})$ styczna do $C(\bar{\mathcal{C}})$ w dowolnym punkcie $\mathbf{u} \in C(\bar{\mathcal{C}})$ jest nieskończenie wymiarową przestrzenią liniową lokalnie izomorficzną do przestrzeni $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \equiv \mathcal{V}^2$, której elementami są uporządkowane pary przemieszczeń wirtualnych $\delta \mathbf{u} = (\delta \mathbf{u}, \mathbf{w})$. Struktura $C(\bar{\mathcal{C}})$ i $T_{\mathbf{u}}C(\bar{\mathcal{C}})$ jest omówiona np. w [1978:52], a w zakresie niezbędnym w teorii powłok w [1990:10] i [1992:15].

Wprowadźmy zwarte oznaczenia na uogólnione pola i przestrzenie ich wartości [1996:4]: wirtualne przemieszczenia $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{U} = C(\mathcal{M}, \mathcal{V}^2)$, miary odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{E} = C(\mathcal{M}, \mathcal{V}^4)$, miary wirtualnych odkształceń $\delta \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{W} = C(\mathcal{M}, \mathcal{V}^4)$, wypadkowe miary naprężeń $\mathbf{S} \in \mathcal{S} = C(\mathcal{M} \setminus \Gamma, \mathcal{V}^4)$ oraz obciążenia zewnętrzne \mathbf{p} na $\mathcal{M} \setminus \Gamma$, \mathbf{p}_Γ na Γ i \mathbf{F}^* na $\partial \mathcal{M}_f$, gdzie \mathbf{p} , \mathbf{p}_Γ , $\mathbf{F}^* \in \mathcal{F} = C(\mathcal{M}, \mathcal{V}^2)$. Nadajmy tym zwartym oznaczeniom symboliczną postać wektorową

$$\delta \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{Bmatrix}, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta^0 \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta^0 \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta^0 \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \delta^0 \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \delta^0 \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \delta^0 \boldsymbol{\lambda}_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.240)$$

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^1 \\ \mathbf{N}^2 \\ \mathbf{M}^1 \\ \mathbf{M}^2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}_\Gamma = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_\Gamma \\ \mathbf{m}_\Gamma \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}^* = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^* \\ \mathbf{M}^* \end{Bmatrix}.$$

Przy powyższych zwartych oznaczeniach, komplet równań ogólnej teorii powłok sprężystych przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} \text{równania równowagi:} & \quad \mathbf{B}^*(\mathbf{u})\mathbf{S} + \mathbf{p} = \mathbf{0} & \quad \text{w } \mathcal{M} \setminus \Gamma, \\ \text{zależności kinematyczne:} & \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) & \quad \text{w } \mathcal{M} \setminus \Gamma, \\ \text{równania konstytutywne:} & \quad \mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\varepsilon}) & \quad \text{w } \mathcal{M} \setminus \Gamma, \\ \text{statyczne warunki brzegowe:} & \quad \mathbf{B}_\nu \mathbf{S} = \mathbf{F}^* & \quad \text{na } \partial \mathcal{M}_f, \\ \text{kinematyczne warunki brzegowe:} & \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^* & \quad \text{na } \partial \mathcal{M}_d, \\ \text{statyczne warunki skoku:} & \quad [[\mathbf{B}_\nu \mathbf{S}]] = \mathbf{p}_\Gamma & \quad \text{na } \Gamma, \\ \text{warunki zgodności przemieszczeń:} & \quad \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{u}_\Gamma & \quad \text{na } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.241)$$

gdzie $\mathbf{B}_\nu = \{\mathbf{N}^\alpha \nu_\alpha, \mathbf{M}^\alpha \nu_\alpha\}^T$ jest operatorem brzegowym, $[[(\cdot)]]$ oznacza skok funkcji (\cdot) na Γ , zdefiniowany jak w (2.230), natomiast operator $\mathbf{B}^*: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$ jest operatorem sprzężonym do operatora $\mathbf{B}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ występującego w wyrażeniu na wirtualne miary odkształceń $\delta \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}] = \mathbf{B}(\mathbf{u})\delta \mathbf{u}$ w sensie spełnienia zależności całkowej

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} \{\mathbf{B}(\mathbf{u})\delta \mathbf{u}\}^T \mathbf{S} dA &= \\ &= - \iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} \delta \mathbf{u}^T \{\mathbf{B}^*(\mathbf{u})\mathbf{S}\} dA + \int_{\partial \mathcal{M}} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{B}_\nu \mathbf{S}) ds + \int_\Gamma [[\delta \mathbf{u}^T (\mathbf{B}_\nu \mathbf{S})]] ds. \end{aligned} \quad (2.242)$$

Zagadnienie brzegowe (2.241) zostało sformułowane w sposób następujący: przy zadanych obciążeniach \mathbf{p} , \mathbf{p}_Γ , \mathbf{F}^* klasy C^0 , przemieszczeniach \mathbf{u}^* klasy C^0 i funkcjach konstytutywnych $\tilde{\mathbf{S}}$, należy wyznaczyć przemieszczenia $\mathbf{u} \in C(\mathcal{C})$ klasy C^1 , miary odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{E}$ klasy C^0 i miary naprężeń $\mathbf{S} \in \mathcal{F}$ klasy C^0 spełniające układ równań (2.241).

Zależności kinematyczne $\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$ mogą być użyte do eliminacji miar odkształceń z równań konstytutywnych $\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{u})$, co redukuje układ (2.241) do zagadnienia brzegowego względem dwóch pól \mathbf{u} , \mathbf{S} . Jeżeli dodatkowo wyeliminujemy miary naprężeń \mathbf{S} również z warunków równowagi, to układ (2.241) redukuje się do zagadnienia brzegowego tylko względem przemieszczeń $\mathbf{u} \in C(\mathcal{C})$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^*(\mathbf{u})\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{u}) + \mathbf{p} &= \mathbf{0} & \quad \text{w } \mathcal{M} \setminus \Gamma, \\ [[\mathbf{B}_\nu \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{u})]] &= \mathbf{p}_\Gamma, \quad \mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{u}_\Gamma & \quad \text{na } \Gamma, \\ \mathbf{B}_\nu \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{F}^* & \quad \text{na } \partial \mathcal{M}_f, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^* & \quad \text{na } \partial \mathcal{M}_d. \end{aligned} \quad (2.243)$$

Zagadnienie brzegowe (2.243) tworzy układ sześciu quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych względem \mathbf{u} na $\mathcal{M} \setminus \Gamma$ powiązanych warunkami skoku i zgodności przemieszczeń na Γ . Rozwiązanie \mathbf{u} klasy C^2 jest nazywane *klasycznym* (lub *silnym*) rozwiązaniem przemieszczeniowego zagadnienia brzegowego (2.243).

Podstawą analizy numerycznej zagadnień statycznych powłok nieregularnych są tzw. *słabe* sformułowania zagadnień brzegowych w postaci różnych wirtualnych tożsamości całkowych i zasad wariacyjnych, opracowane dla tego ogólnego wariantu teorii powłok w [1996:4,5]. Poniżej przedstawiamy kilka przykładów takich słabych sformułowań.

Równania równowagi (2.241)₁, statyczne warunki brzegowe (2.241)₄ i statyczne warunki skoku (2.241)₆ implikują dla każdego $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ tożsamość całkową

$$\iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} \delta \mathbf{u}^T \{ \mathbf{B}^*(\mathbf{u}) \mathbf{S} + \mathbf{p} \} dA + \int_{\partial \mathcal{M}_i} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{F}^* - \mathbf{B}_v \mathbf{S}) ds + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}_\Gamma^T (\mathbf{p}_\Gamma - \llbracket \mathbf{B}_v \mathbf{S} \rrbracket) ds = 0, \quad (2.244)$$

z której po uwzględnieniu (2.243)₂ otrzymamy tożsamość całkową równoważną (2.235), w której uwzględniono (2.236).

Pole \mathbf{u} nazywamy *geometrycznie dopuszczalnym*, $\mathbf{u} \in C_A(\mathcal{C}) \subset C(\mathcal{C})$, gdy spełnia $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ na $\partial \mathcal{M}_d$ i $\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{u}_\Gamma$ na Γ . Podobnie, pole $\delta \mathbf{u}$ jest *kinematycznie dopuszczalnym*, $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{U}_A \subset \mathcal{V}$, gdy $\delta \mathbf{u} = 0$ na $\partial \mathcal{M}_d$ i $\delta \mathbf{u}|_\Gamma = \delta \mathbf{u}_\Gamma$ na Γ . Dla takich pól \mathbf{u} i $\delta \mathbf{u}$ tożsamość (2.244) można przedstawić w postaci

$$\iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{S} dA = \iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dA + \int_{\partial \mathcal{M}_i} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}^* ds + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}_\Gamma^T \mathbf{p}_\Gamma ds. \quad (2.245)$$

Tożsamość całkowa (2.245) jest *zasadą pracy wirtualnej* dla ogólnej teorii powłok nieregularnych. Z powyższych przekształceń wynika, że zasada (2.245) obowiązuje, jeżeli spełnione są lokalne równania równowagi oraz statyczne warunki brzegowe i warunki skoku podane w (2.241), a globalne i wirtualne przemieszczenia są geometrycznie i kinematycznie dopuszczalne. Zasada (2.245) obowiązuje niezależnie od równań konstytutywnych i zależności kinematycznych, a więc również w przypadku np. powłok niesprężystych.

W przypadku powłok sprężystych, z równania pracy wirtualnej (2.245) możemy wyeliminować miary naprężeń używając równań konstytutywnych $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{u})$, a wirtualne miary odkształceń wyrazić zależnością $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u}$, co pozwala przedstawić (2.245) w postaci

$$\iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} \{ \mathbf{B}(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \}^T \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{u}) dA = \iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dA + \int_{\partial \mathcal{M}_i} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}^* ds + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}_\Gamma^T \mathbf{p}_\Gamma ds. \quad (2.246)$$

Tożsamość całkowa (2.246) jest *zasadą wirtualnych przemieszczeń* dla ogólnej teorii nieregularnych powłok sprężystych. Zasada obowiązuje, gdy spełnione są warunki równowagi (2.243), a pola \mathbf{u} i $\delta \mathbf{u}$ są geometrycznie i kinematycznie dopuszczalne. Rozwiązanie $\mathbf{u} \in C_A(\mathcal{C})$ klasy C^0 spełniające (2.246) nazywamy *słabym* rozwiązaniem zagadnienia brzegowego (2.243). Właśnie ze względu na słabsze wymagania dotyczące gładkości pola \mathbf{u} (tu tylko klasy C^0 , a w sformułowaniu (2.243) aż klasy C^2), zasada

wirtualnych przemieszczeń (2.246) i jej różne modyfikacje stanowią dobrą podstawę do konstruowania rozwiązań przybliżonych metodą elementów skończonych. Szereg takich elementów skończonych klasy C^0 opracowano w [1992:15], [1996:4,5], gdzie są również podane liczne przykłady zastosowań.

W dalszej części tego rozdziału zakładamy, że obciążenia zewnętrzne \mathbf{p} , \mathbf{p}_r , \mathbf{F}^* mają potencjał $V: C_A(\mathcal{C}) \rightarrow R$ taki, że

$$\iint_{\mathcal{A} \setminus \Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dA + \int_{\partial \mathcal{A}_f} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}^* ds + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}_f^T \mathbf{p}_r ds = -\delta V(\mathbf{u}). \quad (2.247)$$

Gdy powłoka sprężysta jest również hipersprężysta, to operator konstytutywny $\tilde{\mathbf{S}} = W_{,\boldsymbol{\varepsilon}}$. W takim przypadku możemy wprowadzić funkcjonal całkowitej energii potencjalnej $I(\mathbf{u})$, którego jedyną zmienną niezależną jest pole uogólnionych przemieszczeń $\mathbf{u} \in C_A(\mathcal{C})$

$$I(\mathbf{u}) = \iint_{\mathcal{A} \setminus \Gamma} W\{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\} dA + V(\mathbf{u}). \quad (2.248)$$

Przy tych dodatkowych założeniach, zasada wirtualnych przemieszczeń (2.246) może być wyrażona w postaci zasady wariacyjnej

$$\delta I(\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in C_A, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{U}_A. \quad (2.249)$$

Wyrażenie (2.249) jest nazywane *zasadą stacjonarności całkowitej energii potencjalnej*. Zasada (2.249) głosi, że spośród wszystkich $\mathbf{u} \in C_A(\mathcal{C})$ tylko te pola czynią funkcjonal $I(\mathbf{u})$ stacjonarnym, które spełniają lokalne równania równowagi, statyczne warunki brzegowe i warunki skoku wyrażone przez \mathbf{u} w (2.243). Rozwiązanie $\mathbf{u} \in C_A(\mathcal{C})$ zagadnienia (2.249) może być konstruowane w sposób przybliżony również w klasie funkcji C^0 .

Przez włączenie do funkcjonału $I(\mathbf{u})$ dodatkowych wybranych z listy (2.241) zależności za pomocą mnożników Lagrange'a, można wygenerować wiele funkcjonałów wielopolowych, zarówno bezwarunkowych jak i z warunkami ubocznymi, oraz odpowiadających tym funkcjonałom zasad wariacyjnych. Szereg takich funkcjonałów typu Hellingera–Reissnera i odpowiadających im zasad wariacyjnych zaproponowano w [1996:4] i na ich podstawie zbudowano kilka rodzin powłokowych elementów skończonych klasy C^0 o sześciu stopniach swobody w każdym węźle.

Funkcjonały dwupolowe są szczególnymi przypadkami ogólnego funkcjonału trójpolowego typu Hu–Washizu $J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{S})$, w którym $\mathbf{u} \in C_A(\mathcal{C})$, natomiast pola $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{S} są swobodne. Funkcjonał J powstaje przez dołączenie do $I(\mathbf{u})$ zależności kinematycznych $\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$ z mnożnikiem Lagrange'a, który jest następnie identyfikowany jako \mathbf{S} . W ten sposób otrzymamy

$$J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{S}) = \iint_{\mathcal{A} \setminus \Gamma} (W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \{\boldsymbol{\varepsilon} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})\}^T \mathbf{S}) dA - V(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in C_A(\mathcal{C}). \quad (2.250)$$

Wariacja funkcjonału J po uwzględnieniu (2.242) ma postać

$$\begin{aligned} \delta J = & \iint_{\mathcal{M} \setminus \Gamma} [\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (W_{,\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{S}) - \{\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})\}^T \delta \mathbf{S} - \delta \mathbf{u}^T \{ \mathbf{B}^*(\mathbf{u}) \mathbf{S} + \mathbf{p} \}] dA + \\ & + \int_{\partial \mathcal{M}_f} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{B}_\nu \mathbf{S} - \mathbf{F}^*) ds + \int_{\partial \mathcal{M}_d} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{B}_\nu \mathbf{S}) ds + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T ([\mathbf{B}_\nu \mathbf{S}] - \mathbf{p}_T) ds. \end{aligned} \quad (2.251)$$

Przy $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{U}_A$, całka po $\partial \mathcal{M}_d$ znika tożsamościowo. Zasada wariacyjna

$$\delta J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{S}) = 0 \quad (2.252)$$

głosi, że spośród wszystkich pól $\mathbf{u} \in C_A(\mathcal{C})$ klasy C^0 oraz pól swobodnych $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{E}$, $\mathbf{S} \in \mathcal{T}$ klasy C^{-1} (odcinkami ciągłych) tylko te pola czynią funkcjonal $J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{S})$ stacjonarnym, które spełniają lokalne równania równowagi, zależności kinematyczne i równania konstytutywne w $\mathcal{M} \setminus \Gamma$, statyczne warunki brzegowe na $\partial \mathcal{M}_f$ i statyczne warunki skoku na Γ .

BIBLIOGRAFIA *

[1850]

1. Kirchhoff G.: *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*. J. Reine u. Angew. Math. (Crelle Journal), 40, 1, 55-88.

[1874]

1. Aron H.: *Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen Schale*. J. Reine u. Angew. Math. (Crelle Journal), 78, 2, 136-174.

[1876]

1. Kirchhoff G.: *Mechanik*. Leipzig.

[1889]

2. Love A.E.H.: *The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell*. Phil. Trans. Royal Soc. London (A) for the year 1888, 179, 491-546.

[1909]

2. Cosserat E., Cosserat F.: *Théorie des corps déformables*. Paris: Herman et Flis. (Engl. transl: NASA TT F-11, 561. Washington DC: NASA, 1968).

[1927]

1. Love A.E.H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th ed. Oxford.

[1938]

5. Mushtari Kh.M.: *Nekotorye obobshcheniya tonkich obolohek s prilozheniyami k zadache ustojchivosti uprugogo ravnovesiya*. Izv. Kazan. Fiz-Mat. Obshchestva, Ser. 3, 11, 71-150.

[1939]

2. Marguerre K.: *Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung*. Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge (Mass.) 1938. New York: Wiley, 93—101.

[1941]

7. Synge J.L., Chien W.Z.: *The intrinsic theory of elastic shells and plates*. Kármán Anniversary Volume. Pasadena: Calif. Inst. Techn., 103 -120.

[1943]

4. Chien W.Z.: *The intrinsic theory of thin shells and plates. Part I - General theory*. Quart. Appl. Math., 1, 4, 297-327.
7. Novozhilov V.V., Finkel'shtein R.: *O pogreshnosti gipotez Kirchgoffa v teorii obolohek*. Prikl. Mat. Mech., 7, 331-340.

* Niniejsza bibliografia zawiera tylko te pozycje literatury z całej monografii, które są cytowane w tym rozdziale.

[1944]

4. Chien W.Z.: *The intrinsic theory of thin shells and plates. Part II - Applications to thin plates.* Quart. Appl. Math., 2, 1, 43-59; *Part III. Applications to thin shells*, ibid., 2, 2, 120-135.

[1949]

17. Alomyaé N.A.: *Differencialnye uravneniya sostoyanij rawnowesiya tonkostennykh uprugikh obolochek w poslekriticheskoj stadii.* Prikl. Mat. Mech., 13, 95-106.

[1951]

15. Galimov K.Z.: *K obshchej teorii plastin i obolochek pri konechnykh peremeshcheniyakh i deformatsiyakh.* Prikl. Mat. Mech., 15, 723-742.

[1953]

17. Galimov K.Z.: *O nekotorykh variatsionnykh formulakh nelinejnoj teorii uprugosti.* Uchenye Zapiski Kazan. Gosud. Univ., Ser. Fiz. i Mekh., 115, 12, 111-118.

[1956]

28. Alomyaé N.A.: *O predstavlenii osnovnykh sootnoshenij nelinejnoj teorii obolochek.* Prikl. Mat. Mech., 20, 136-139.

[1957]

29. Mushtari Kh. M., Galimov K.Z.: *Nelinejnaya teoriya uprugikh obolochek.* Kazań: Tatknigoizdat. Tłum. angielskie: *Non-linear Theory of Thin Elastic Shells.* Jerusalem: The Israel Program Sci. Transl. 1961.

[1960]

50. Koiter W.T.: *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells.* Proc. IUTAM Symp. Theory Thin Elastic Shells. (ed.): W.T. Koiter. Amsterdam: North-Holland, 12-33.

[1963]

53. Sanders J.L.: *Nonlinear theories of thin shells.* Quart. Appl. Math., 21, 1, 21-36.
54. Budiansky B.; Sanders J.L.: *On the „best” first-order linear shell theory.* Progress in Applied Mechanics. The Prager Anniversary Volume. New York: Macmillan, 129-140.
57. Naghdi P.M.: *Foundations of elastic shell theory.* Progress in Solid Mechanics, Vol. 4. (ed.): I.N. Sneddon, R. Hill. Amsterdam: North Holland, 1-90.
64. Reissner E.: *On the equations for finite symmetrical deflections of thin shells of revolution.* Progress in Applied Mechanics. The Prager Anniversary Volume. New York: Macmillan, 171-178.
65. Wainwright W.L.: *On a nonlinear theory of elastic shells.* Int. J. Eng. Sci., 1, 339-358.

[1964]

45. Chernykh K.F.: *Linejnaya teoriya obolochek.* Chast 2. Leningrad: Izd. Leningr. Univ.

[1965]

10. Truesdell C., Noll W.: *The non-linear field theories of mechanics*. Handbuch der Physik, vol. III/3. (ed.): S. Flügge. Berlin: Springer-Verlag, 1-602.
53. John F.: *Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations*. Comm. Pure Appl. Math., 18, 1/2, 235-267.

[1966]

67. Woźniak Cz.: *Nieliniowa teoria powłok*. Warszawa: PWN.
69. Koiter W.T.: *On the nonlinear theory of thin elastic shells*. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. B, 69,1, 1-54.

[1968]

33. Budiansky B.: *Notes on nonlinear shell theory*. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 35, 393-401.

[1970]

38. Danielson D.A.: *Simplified intrinsic equations for arbitrary elastic shells*. Int. J. Eng. Sci., 8, 251-259.
39. Simmonds J.G., Danielson D.A.: *Nonlinear shell theory with a finite rotation vector*. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. B, 73, 460-478.
43. Novotný B.: *On the asymptotic integration of the three dimensional non-linear equations of thin elastic shells and plates*. Int. J. Solids Struct., 8, 433-451.

[1971]

44. Danielson D.A.: *Improved error estimates in the linear theory of thin elastic shells*. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. B, 74, 294-300.
45. John F.: *Refined interior equations for thin elastic shells*. Comm. Pure Appl. Math., 24, 585-615.

[1972]

51. Simmonds J.G., Danielson D.A.: *Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectors*. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 39, 1085-1090.

[1973]

49. Grigolyuk É.I., Selezov I.T.: *Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej, plastin i oboloček*. Itogi Nauki i Tekh., Ser. Mekh. Tverd. Deform. Tel., T.5, 116-180.
64. Koiter W.T.; Simmonds J.G.: *Foundations of shell theory*. Theoretical and Applied Mechanics, Proc. 13th Int. Congr., Moscow Univ. (eds.): E. Becker, G.K. Mikhailov. Berlin: Springer-Verlag, 150-176.

[1974]

49. Reissner E.: *Linear and nonlinear theory of shells*. Thin-Shell Structures. (eds.): Y.C. Fung, E.E. Sechler. New Jersey: Prentice-Hall, 29-44.
52. Yokoo Y., Matsunaga H.: *A general nonlinear theory of elastic shells*. Int. J. Solids Struct., 10, 2, 261-274.
60. Langhaar H.L.: *Elastic surfaces and theories of shells*. Acta Mech., 19, 109-128.

[1975]

50. Galimov K.Z.: *Osnovy nelinejnoj teorii tonkikh oboloček*. Kazań: Izd. Kazan. Univ.

51. Brush D.O., Almroth B.O.: *Buckling of bars, plates and shells*. New York : McGraw-Hill.
 52. Novozhilov V.V., Shamina V.A.: *O kinematicheskikh krajevykh usloviyach v nelinejnykh zadachach teorii uprugosti*. Izv. AN SSSR, Mech.Tv. Tela, 5, 63-71.

[1977]

29. Shkutin L.I.: *Tochnaya formulirovka uravnenij nelinejnogo deformirovaniya tonkikh obolochek*. Prikl. Probl. Proch. Plast., 7, 3-9. Gorkij.
 30. Pietraszkiewicz W.: *Introduction to the non-linear theory of shells*. Mitt. Inst. für Mech., No 10. Bochum: Ruhr-Universität.

[1978]

45. Pietraszkiewicz W.: *Nieliniowe teorie cienkich powłok sprężystych*. Konstrukcje powłokowe: Teoria i zastosowania. Materiały symp. Kraków 1974, T.1. (red.): J. Orkisz, Z. Waszczyszyn. Warszawa: PWN, 27-50.
 52. Abraham R., Marsden J.E.: *Foundations of Mechanics*. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley.
 53. Shkutin L.I.: *Tochnaya formulirovka uravnenij nelinejnogo deformirovaniya tonkikh obolochek*. Prikl. Probl. Proch. Plast., 8, 38-43; 9, 19-25. Gorkij.
 54. Duszek M.K.: *A systematic study of kinematics of shells at large strains and displacements*. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. sci. tech., 26, 39-47.

[1979]

40. Pietraszkiewicz W.: *Finite Rotations and Lagrangian Description in the Nonlinear Theory of Shells*. Warszawa: PWN.
 48. Pietraszkiewicz W.: *Consistent second approximation to the elastic strain energy of a shell*. ZAMM, 59, T206-T208.
 49. Simmonds J.G.: *Special cases of the nonlinear shell equations*. Trends in Solid Mechanics. (eds.): J.F. Besseling, A.M.A. van der Heiden. Delft: Sijthoff & Noordhoff, 211-223.
 64. Pietraszkiewicz W.: *Nekotorye sootnosheniya nelinejnoj teorii obolochek Reissnera*. Vest. Leningr. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron., 1, 115-124.

[1980]

60. Koiter W.T.: *The intrinsic equations of shell theory with some applications*. Mechanics Today, Vol. 5. (ed.): S. Nemat-Nasser. New York: Pergamon Press, 139-154.
 61. Pietraszkiewicz W.: *Finite rotations in shells*. Theory of Shells, Proc. 3rd IUTAM Symp., Tbilisi (USSR) 1978. (eds.): W.T. Koiter, G.K. Mikhailov. Amsterdam: North-Holland, 445-471.
 62. Pietraszkiewicz W.: *Finite rotations in the nonlinear theory of shells*. Thin Shell Theory, New Trends and Applications. (ed.): W. Olszak. Wien: Springer Verlag, 153-208. (CISM Courses & Lect., No 240.)
 75. Pietraszkiewicz W.: *Niektóre problemy nieliniowej teorii powłok*. Mech. Teor. Stos., 18, 2, 169-192.

[1981]

37. Pietraszkiewicz W.: *On consistent approximations in the geometrically non-linear theory of shells*. Mitt. Inst. für Mech., No 26. Bochum: Ruhr-Universität.
 38. Schmidt R., Pietraszkiewicz W.: *Variational principles in the geometrically non-linear theory of shells undergoing moderate rotations*. Ing. Arch., 50, 187-201.
 39. Pietraszkiewicz W., Szwabowicz M.L.: *Entirely Lagrangian nonlinear theory of thin shells*. Arch. Mech., 33, 273-288.

[1982]

35. Schmidt R.: *Variational principles for general and restricted geometrically non-linear Kirchhoff-Love type shell theories*. Proc. Int. Conf. on FEM, Shanghai (China). (eds.): He Guangqian, Y.K. Cheung. Beijing: Science Press, 621-626.

[1983]

44. Libai A., Simmonds J.G.: *Nonlinear elastic shell theory*. Advances in Applied Mechanics. Vol. 23. (eds.): J.W. Hutchinson, T.Y. Wu. Boston: Academic Press, 271-371.
45. Pietraszkiewicz W.: *A simplest consistent version of the geometrically non-linear theory of elastic shells undergoing large/small rotations*. ZAMM, 63, T200-T202.
46. Nolte L.-P., Stumpf H.: *Energy-consistent large rotation shell theories in Lagrangean description*. Mech. Res. Comm., 10, 213-221.
47. Pietraszkiewicz W., Badur J.: *Finite rotations in the description of continuum deformation*. Int. J. Eng. Sci., 21, 9, 1097-1115.

[1984]

58. Simmonds J.G.: *The nonlinear thermodynamical theory of shells: Descent from 3-dimensions without thickness expansions*. Flexible Shells, Theory and Applications. (eds.): E.L. Axelrad, F.A. Emmerling. Berlin: Springer-Verlag, 1-11.
59. Atluri S.N.: *Alternative stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotations, for computational analyses of finitely deformed solids, with application to plates and shells - I*. Comp. Struct., 18, 96-116.
60. Schmidt R.: *On geometrically non-linear theories for thin shells*. Flexible Shells, Theory and Applications. (eds.): E.L. Axelrad, F.A. Emmerling. Berlin: Springer-Verlag, 76-90.
61. Pietraszkiewicz W.: *On entirely Lagrangian displacement form of non-linear shell equations*. Flexible Shells, Theory and Applications. (eds.): E.L. Axelrad, F.A. Emmerling. Berlin: Springer-Verlag, 103-123.
62. Pietraszkiewicz W.: *Lagrangian description and incremental formulation in the non-linear theory of thin shells*. Int. J. Non-Linear Mech., 19, 115-140.

[1985]

27. Bařar Y., Krätzig W.B.: *Mechanik der Flächentragwerke*. Braunschweig: Fr. Vieweg u. Sohn.
33. Schmidt R.: *A current trend in shell theory: consistent geometrically nonlinear Kirchhoff-Love type theories based on polar decomposition of strains and rotations*. Comp. Struct., 20, 265-275.

[1986]

38. Stumpf H., Makowski J.: *On large strain deformation of shells*. Acta Mech., 65, 153-168.
39. Makowski J., Stumpf H.: *Finite strains and rotations in shells*. Finite Rotations in Structural Mechanics. Proc. Euromech Coll. 197, Jabłonna (Poland) 1985. (ed.): W. Pietraszkiewicz. Berlin: Springer-Verlag, 175-194. (Lect. Notes in Engng., Vol. 19.).
40. Rheinboldt W.C.: *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations*. New York: J. Wiley & Sons.
41. Nolte L.-P., Makowski J., Stumpf H.: *On the derivation and comparative analysis of large rotation shell theories*. Ing. Arch., 56, 145-160.
42. Szwabowicz M.L.: *Variational formulation in the geometrically nonlinear thin elastic shell theory*. Int. J. Solids Struct., 22, 1161-1175.

51. Brush D.O., Almroth B.O.: *Buckling of bars, plates and shells*. New York : McGraw-Hill.
52. Novozhilov V.V., Shamina V.A.: *O kinematicheskikh kraevykh usloviyakh v nelinejnykh zadachach teorii uprugosti*. Izv. AN SSSR, Mech.Tv. Tela, 5, 63-71.

[1977]

29. Shkutin L.I.: *Tochnaya formulirovka uravnenij nelinejnogo deformirovaniya tonkikh obolochek*. Prikl. Probl. Proch. Plast., 7, 3-9. Gorkij.
30. Pietraszkiewicz W.: *Introduction to the non-linear theory of shells*. Mitt. Inst. für Mech., No 10. Bochum: Ruhr-Universität.

[1978]

45. Pietraszkiewicz W.: *Nieliniowe teorie cienkich powłok sprężystych*. Konstrukcje powłokowe: Teoria i zastosowania. Materiały symp. Kraków 1974, T.1. (red.): J. Orkisz, Z. Waszczyszyn. Warszawa: PWN, 27-50.
52. Abraham R., Marsden J.E.: *Foundations of Mechanics*. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley.
53. Shkutin L.I.: *Tochnaya formulirovka uravnenij nelinejnogo deformirovaniya tonkikh obolochek*. Prikl. Probl. Proch. Plast., 8, 38-43; 9, 19-25. Gorkij.
54. Duszek M.K.: *A systematic study of kinematics of shells at large strains and displacements*. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. sci. tech., 26, 39-47.

[1979]

40. Pietraszkiewicz W.: *Finite Rotations and Lagrangian Description in the Nonlinear Theory of Shells*. Warszawa: PWN.
48. Pietraszkiewicz W.: *Consistent second approximation to the elastic strain energy of a shell*. ZAMM, 59, T206-T208.
49. Simmonds J.G.: *Special cases of the nonlinear shell equations*. Trends in Solid Mechanics. (eds.): J.F. Besseling, A.M.A. van der Heiden. Delft: Sijthoff & Noordhoff, 211-223.
64. Pietraszkiewicz W.: *Nekotorye sootnosheniya nelinejnoj teorii obolochek Reissnera*. Vest. Leningr. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron., 1, 115-124.

[1980]

60. Koiter W.T.: *The intrinsic equations of shell theory with some applications*. Mechanics Today, Vol. 5. (ed.): S. Nemat-Nasser. New York: Pergamon Press, 139-154.
61. Pietraszkiewicz W.: *Finite rotations in shells*. Theory of Shells, Proc. 3rd IUTAM Symp., Tbilisi (USSR) 1978. (eds.): W.T. Koiter, G.K. Mikhailov. Amsterdam: North-Holland, 445-471.
62. Pietraszkiewicz W.: *Finite rotations in the nonlinear theory of shells*. Thin Shell Theory, New Trends and Applications. (ed.): W. Olszak. Wien: Springer Verlag, 153-208. (CISM Courses & Lect., No 240.)
75. Pietraszkiewicz W.: *Niektóre problemy nieliniowej teorii powłok*. Mech. Teor. Stos., 18, 2, 169-192.

[1981]

37. Pietraszkiewicz W.: *On consistent approximations in the geometrically non-linear theory of shells*. Mitt. Inst. für Mech., No 26. Bochum: Ruhr-Universität.
38. Schmidt R., Pietraszkiewicz W.: *Variational principles in the geometrically non-linear theory of shells undergoing moderate rotations*. Ing. Arch., 50, 187-201.
39. Pietraszkiewicz W., Szwabowicz M.L.: *Entirely Lagrangian nonlinear theory of thin shells*. Arch. Mech., 33, 273-288.

[1987]

15. Badur J., Pietraszkiewicz W.: *On geometrically non-linear theory of elastic shells derived from pseudo-Cosserat continuum with constrained micro-rotations*. Finite Rotations in Structural Mechanics. Proc. Euromech Colloq. 197, Jabłonna (Poland) 1985. (ed.): W. Pietraszkiewicz. Berlin: Springer-Verlag, 19-32. (Lect. Notes in Engng., Vol. 19)

[1988]

21. Rychter Z.: *Nonlinear equations of shells of slowly varying curvatures*. Mech. Teor. Stos., 26, 303-309.
22. Libai A., Simmonds J.G.: *The Nonlinear Theory of Elastic Shells. One Spatial Dimension*. Boston: Academic Press.

[1989]

5. Makowski J., Pietraszkiewicz W.: *Work-conjugate boundary conditions in the nonlinear theory of thin shells*. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 56, 395-402.
6. Pietraszkiewicz W.: *Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells*. Advances in Mechanics, 12, 1, 51-130.

[1990]

10. Makowski J., Stumpf H.: *Buckling equations for elastic shells with rotational degrees of freedom undergoing finite strain deformation*. Int. J. Solids Struct., 26, 353-368.

[1992]

15. Chróścielewski J., Makowski J., Stumpf H.: *Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity*. Int. J. Num. Meth. Engng., 35, 63-94.
16. Pietraszkiewicz W.: *Addendum to: Bibliography of monographs and surveys on shells*. Appl. Mech. Rev., 45, 6, 249-250.
17. Schieck B., Pietraszkiewicz W., Stumpf H.: *Theory and numerical analysis of shells undergoing large elastic strains*. Int. J. Solids Struct., 29, 689709.

[1993]

9. Pietraszkiewicz W.: *Explicit Lagrangian incremental and buckling equations for the non-linear theory of thin shells*. Int. J. Non-Linear Mech., 28, 209-220.
10. Pietraszkiewicz W.: *Work-conjugate boundary conditions associated with the total rotation angle of the shell boundary*. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 60, 785-786.

[1994]

10. Chróścielewski J., Makowski J., Stumpf H.: *Finite elements for irregular nonlinear shells*. Mitt. Inst. für Mech., No 96. Bochum: Ruhr-Universität.
11. Makowski J., Stumpf H.: *Mechanics of irregular shell structures*. Mitt. Inst. für Mech., No 95. Bochum: Ruhr-Universität.

[1996]

4. Chróścielewski J.: *Rodzina elementów skończonych klasy C^0 w nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok*. Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej, Nr 540, Bud. Łąd., z. 53, 3-291.

5. Chróścielewski J., Makowski J., Stumpf H.: *Finite element analysis of smooth, folded and multi-shell structures*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 141, 1-46.
11. Chernykh K.F.: *Nelinejnaya teoriya izotropno uprugikh tonkikh obolochek s uchetom poperechnogo sdviga*. Izv. RAN, Mekh. Tv. Tela, 1, 124-136.

[1997]

2. Libai A., Simmonds J.G.: *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*. 2nd ed. Cambridge: University Press.

[1998]

3. Makowski J., Pietraszkiewicz W., Stumpf H.: *On the general form of jump conditions for thin irregular shells*. Arch. Mech., 50, 483-495.