

ISBN 83-89687-03-8



Statyka i Dynamika Powłok Wielopłatowych
J. Chrościelewski J. Makowski W. Pietraszkiewicz

BIBLIOTEKA MECHANIKI STOSOWANEJ

Statyka i Dynamika Powłok Wielopłatowych

**Nieliniowa teoria i metoda
elementów skończonych**

**Jaek Chrościelewski
Jerzy Makowski
Wojciech Pietraszkiewicz**



Instytut Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk

STATYKA I DYNAMIKA POWŁOK WIELOPŁATOWYCH

Nieliniowa teoria
i metoda elementów skończonych

**BIBLIOTEKA
MECHANIKI
STOSOWANEJ**

Seria A. Monografie

KOMITET REDAKCYJNY

Zenon Mróz — przewodniczący
Michał Kleiber, Wojciech K. Nowacki,
Henryk Petryk, Bogdan Raniecki,
Kazimierz Sobczyk, Józef Joachim Telega
Zofia Krawczyk — sekretarz

Jacek Chróścielewski
Jerzy Makowski
Wojciech Pietraszkiewicz

Statyka i dynamika powłok wielopłatowych

Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych

© Copyright by Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Warszawa 2004

ISBN 83-89687-03-8

Monografia została opracowana w ramach projektu badawczego Nr 7 T07A 021 12,
finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.

Wydanie książki finansowane przez Komitet Badań Naukowych

Wydanie I

Druk ukończono w sierpniu 2004 r.

Skład w systemie L^AT_EX

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Piaseczno, ul. Geodetów 47a

Spis treści

Przedmowa	13
Część I Teoria powłok	19
Rozdział 1. Podstawowe równania ogólnej mechaniki powłok	21
1.1. Podstawowe prawa i zależności mechaniki ośrodków ciągłych	21
1.1.1. Uwagi wstępne	21
1.1.2. Czasoprzestrzeń	23
1.1.3. Ośrodek ciągły	24
1.1.4. Zasady mechaniki ośrodków ciągłych	26
1.1.5. Ruch ośrodka ciągłego	27
1.1.6. Klasyczna mechanika ośrodków ciągłych	28
1.1.7. Postulat i twierdzenie Cauchy’ego	31
1.2. Podstawowe koncepcje mechaniki powłok	32
1.2.1. Podejścia stosowane w teorii powłok	32
1.2.2. Podejście przyjęte w tej książce	33
1.2.3. Regularne ciało materialne typu powłoka	35
1.2.4. Powierzchnia podstawowa w konfiguracji odniesienia powłoki	37
1.2.5. Opis konfiguracji odniesienia ciała typu powłoka	39
1.3. Całkowe zasady mechaniki powłok	41
1.3.1. Ogólna postać przekrojowych zasad mechaniki powłok	41
1.3.2. Regularne podciało materialne typu powłoka	43
1.3.3. Gęstości masy, pędu i momentu pędu	44
1.3.4. Przekrojowe siły i momenty	45
1.3.5. Całkowe prawa mechaniki powłok	47
1.4. Lokalne równania ruchu i dynamiczne warunki uboczne	49
1.4.1. Konfiguracja odniesienia powierzchni podstawowej	49
1.4.2. Pola tensorowe na powierzchni	52
1.4.3. Powierzchniowe operatory różniczkowe	52
1.4.4. Krzywe osobliwe względem pól powierzchniowych	54
1.4.5. Twierdzenia całkowe dla pól powierzchniowych	57
1.4.6. Uogólnione twierdzenia całkowe	58
1.4.7. Opis ruchu powierzchni podstawowej powłoki	62
1.4.8. Lokalne prawa dynamiki	63

1.4.9.	Parametryczny opis powierzchni podstawowej powłoki	67
1.4.10.	Lokalne zasady dynamiki powłok we współrzędnych powierzchniowych	69
1.5.	Tożsamość całkowita i zasada pracy wirtualnej	70
1.5.1.	Podstawowy problem kinematyczny teorii powłok	70
1.5.2.	Konstrukcja tożsamości całkowitej	72
1.5.3.	Zasada pracy wirtualnej	77
1.6.	Kinematyka powłoki i kinematyczne warunki uboczne	79
1.6.1.	Prędkości rzeczywiste powłoki	79
1.6.2.	Chwilowe konfiguracje powłoki	80
1.6.3.	Rzeczywisty ruch powłoki	81
1.6.4.	Wektor przesunięcia i wektory kierunkowe	83
1.6.5.	Reprezentacja materialna pola prędkości obrotowej	84
1.6.6.	Wektory kierunkowe	85
1.6.7.	Kinematyczne warunki brzegowe	87
1.7.	Ogólna teoria odkształceń w powłokach	88
1.7.1.	Uwagi wstępne	88
1.7.2.	Geometria powierzchni podstawowej powłoki	89
1.7.3.	Geometria konfiguracji odniesienia powłoki	91
1.7.4.	Geometria konfiguracji aktualnej powłoki	93
1.7.5.	Lokalna deformacja powłoki	94
1.7.6.	Naturalne miary odkształceń powłoki	95
1.7.7.	Miary odkształceń i naprężeń powłoki w reprezentacji materialnej	99
1.7.8.	Przesunięcia i parametry obrotów	100
1.7.9.	Wyrażenia na prędkości obrotowe	102
1.7.10.	Zależności kinematyczne	103
1.8.	Przekrojowe wielkości dynamiczne	104
1.8.1.	Parametryczny opis konfiguracji odniesienia ciała typu powłoka	104
1.8.2.	Układy współrzędnych i zależności geometryczne	106
1.8.3.	Formalna reprezentacja trójwymiarowej deformacji powłoki	108
1.8.4.	Przekrojowe wielkości dynamiczne	109
1.8.5.	Tensory przekrojowych sił i momentów	111

Rozdział 2. Równania konstytutywne i zagadnienia szczegółowe **113**

2.1.	Równania konstytutywne mechaniki ośrodków ciągłych	113
2.1.1.	Istota równań konstytutywnych	113
2.1.2.	Procesy dynamiczne	114
2.1.3.	Podstawy teorii równań konstytutywnych	115
2.1.4.	Niektóre szczególne klasy materiałów	116
2.2.	Równania konstytutywne mechaniki powłok	118
2.2.1.	Uwagi wstępne	118
2.2.2.	Procesy dynamiczne w powłokach	119
2.2.3.	Ogólna postać równań konstytutywnych	120
2.2.4.	Powłoki z materiału prostego	121
2.2.5.	Powłoki sprężyste i hipersprężyste	123
2.2.6.	Szczególne warianty równań konstytutywnych	125

2.2.7.	Powłoki liniowo sprężyste	126
2.2.8.	Kinetyczne równania konstytutywne w mechanice powłok	127
2.3.	Zagadnienia początkowo-brzegowe powłok sprężystych	128
2.3.1.	Formułowanie zagadnień mechaniki powłok	128
2.3.2.	Konfiguracja odniesienia i opis ruchu powłoki	129
2.3.3.	Równania pola i warunki uboczne	130
2.3.4.	Równania mechaniki powłok w reprezentacji materialnej	132
2.4.	Podstawowe zależności we współrzędnych fizycznych	134
2.4.1.	Składowe fizyczne wektorowych i tensorowych pól na powierzchni	134
2.4.2.	Powierzchniowe operatory różniczkowe we współrzędnych fizycznych	135
2.4.3.	Geometria konfiguracji odniesienia powłoki	136
2.4.4.	Geometria konfiguracji aktualnej i składowe fizyczne miar odkształceń	138
2.4.5.	Lokalne równania ruchu we współrzędnych fizycznych	140
2.4.6.	Równania konstytutywne w składowych fizycznych	141
2.5.	Relacje między trój- a dwuwymiarowym modelowaniem powłok	142
2.5.1.	Uwagi ogólne	142
2.5.2.	Rozkłady przemieszczeń i naprężeń po grubości powłoki	143
2.5.3.	Formalna reprezentacja trójwymiarowej deformacji powłoki	144
2.5.4.	Lokalna deformacja ciała trójwymiarowego	146
2.5.5.	Lokalna deformacja ciała typu powłoka	147
2.5.6.	Wyrażenia na gęstości pędu i momentu pędu	150
2.5.7.	Przekrojowe siły i momenty w reprezentacji materialnej	153
2.6.	Przybliżenia w równaniach konstytutywnych	154
2.6.1.	Całkowita energia mechaniczna ciała typu powłoka	154
2.6.2.	Efektywna moc naprężeń	156
2.6.3.	Powłoki hipersprężyste	157
2.6.4.	Izotropowe powłoki hipersprężyste	160
2.6.5.	Zagadnienie semi-brzegowe	161
2.7.	Szczególne warianty mechaniki powłok	163
2.7.1.	Klasyczne hipotezy kinematyczne	163
2.7.2.	Więzy kinematyczne i reakcje więzów	165
2.7.3.	Uogólnienie klasycznych hipotez kinematycznych	166
2.7.4.	Całkowe prawa mechaniki	167
2.7.5.	Równania ruchu i dynamiczne warunki uboczne	170
2.7.6.	Zredukowane równania ruchu	173
2.7.7.	Kinematyka powłoki	175
2.7.8.	Równania konstytutywne powłok sprężystych	176
2.8.	Liniowa teoria powłok	177
2.8.1.	Natura teorii liniowej	177
2.8.2.	Założenia liniowej teorii powłok	179
2.8.3.	Zagadnienie początkowo-brzegowe liniowej teorii powłok	180
2.8.4.	Parametryczny opis liniowej teorii powłok	182
2.8.5.	Dyskusja	184

Rozdział 3. Złożone konstrukcje powłokowe	187
3.1. Podstawowe zależności nieliniowej mechaniki prętów	187
3.1.1. Pręty i konstrukcje prętowe	187
3.1.2. Całkowe zasady mechaniki prętów	189
3.1.3. Lokalne równania ruchu pręta i dynamiczne warunki uboczne	191
3.1.4. Kinematyka pręta	193
3.1.5. Opis deformacji i odkształceń pręta	194
3.1.6. Równania konstytutywne	195
3.1.7. Trójwymiarowa deformacja ciała prętopodobnego	195
3.2. Konstrukcje złożone i ich modelowanie	197
3.2.1. Uwagi ogólne	197
3.2.2. Nieregularne i złożone konstrukcje powłokowe	199
3.2.3. Modelowanie złożonych konstrukcji powłokowych	201
3.2.4. Krzywe osobliwe względem pól powierzchniowych	203
3.2.5. Zasada pracy wirtualnej przy osłabionych warunkach ciągłości	205
3.3. Dynamika powłok strukturalnych	208
3.3.1. Konfiguracja odniesienia powłoki strukturalnej	208
3.3.2. Ruch wielopłatowej powierzchni podstawowej i całkowe zasady mechaniki	210
3.3.3. Lokalne postacie zasad mechaniki	213
3.3.4. Lokalne postacie zasad mechaniki powłok strukturalnych	219
3.4. Kinematyka powłok strukturalnych	219
3.4.1. Tożsamość całkowita	219
3.4.2. Formalne przekształcenia	221
3.4.3. Zasada wariacyjna	224
3.4.4. Kinematyka powłoki strukturalnej	226
3.5. Równania konstytutywne i modelowanie połączeń powłokowych	228
3.5.1. Zestawienie podstawowych zależności	228
3.5.2. Ogólna struktura równań konstytutywnych	229
3.5.3. Kinematyczne połączenia sztywne	231
3.5.4. Dynamiczne połączenia sztywne	233
3.5.5. Połączenia odkształcalne	234
3.6. Statyka cienkich powłok strukturalnych	235
3.6.1. Uwagi wstępne	235
3.6.2. Postulaty i zasada pracy wirtualnej	236
3.6.3. Lokalne równania równowagi i warunki brzegowe	240
3.6.4. Warunki ciągłości na krzywej osobliwej	247
3.6.5. Nieregularności geometryczne	248
3.6.6. Połączenia odkształcalne	249
3.6.7. Połączenie sprężyste	250
3.6.8. Połączenie niesprężyste	251
3.7. Uproszczone warianty teorii cienkich sprężystych powłok strukturalnych	252
3.7.1. Równania konstytutywne teorii pierwszego przybliżenia	252
3.7.2. Powierzchniowe miary odkształceń	254
3.7.3. Klasyfikacja uproszczeń przy ograniczonych obrotach	255
3.7.4. Uproszczona teoria dużych/malych obrotów	256

3.7.5.	Teoria umiarkowanych obrotów	261
3.7.6.	Nieliniowa teoria powłok o małej wyniosłości	263

Część II Metody obliczeniowe 267

Rozdział 4. Aspekty obliczeniowe w statyce i dynamice powłok 269

4.1.	Słaba postać zasad zachowania	269
4.1.1.	Uwagi wstępne	269
4.1.2.	Przestrzeń konfiguracyjna	273
4.1.3.	Wirtualne przemieszczenia	275
4.1.4.	Wirtualne miary odkształceń	278
4.1.5.	Notacja macierzowo-operatorowa	279
4.1.6.	Zasada wirtualnych przemieszczeń	281
4.2.	Parametryzacja i opis obrotów skończonych	282
4.2.1.	Parametryzacja globalna	282
4.2.2.	Parametryzacja lokalna	283
4.2.3.	Zależności kinematyczne w funkcji parametrów obrotu	285
4.2.4.	Wektory obrotu skończonego	286
4.2.5.	Składanie obrotów	287
4.2.6.	Zebrane zależności związane z opisem obrotu	288
4.3.	Aproksymacja skończenie wymiarowa problemu ciągłego	292
4.3.1.	Zadanie aproksymacji skończenie wymiarowej	292
4.3.2.	Ogólna koncepcja interpolacji o ciągłości klasy C^0	293
4.3.3.	Interpolacja klasy C^0 na grupie obrotów $SO(3)$	296
4.3.4.	Interpolacja wektora wirtualnego obrotu	300
4.4.	Iteracyjne rozwiązanie nieliniowych problemów statyki powłok	304
4.4.1.	Linearyzacja zagadnienia początkowo-brzegowego	304
4.4.2.	Technika sukcesywnej linearyzacji, metoda Newtona	310
4.4.3.	Aktualizacja zmiennych	313
4.4.4.	Główne aspekty implementacyjne procedury iteracyjnej	314
4.5.	Metody kontynuacyjne w nieliniowych zagadnieniach statyki	315
4.5.1.	Zadania metod kontynuacyjnych	315
4.5.2.	Cel algorytmu obliczeniowego	316
4.5.3.	Klasyfikacja punktów krytycznych	318
4.5.4.	Wyznaczanie punktów bifurkacji techniką zaburzeń	321
4.5.5.	Technika sterowania parametrem obciążenia	323
4.5.6.	Technika sterowania parametrem przemieszczenia	323
4.5.7.	Technika sterowania parametrem łuku	325
4.5.8.	Kontrola procesu rozwiązania	326
4.5.9.	Kontrola zbieżności procesu iteracyjnego	328
4.6.	Wybrane problemy nieliniowej dynamiki konstrukcji	329
4.6.1.	Uwagi wstępne	329
4.6.2.	Metoda Newmarka, modelowe zadanie liniowe	332
4.6.3.	Metoda Newmarka, modelowe zadanie nieliniowe	333
4.6.4.	Uogólniony algorytm Newmarka całkowania na grupie obrotów	338

Rozdział 5. Metoda elementów skończonych	343
5.1. Elementy skończone w powłokach	343
5.1.1. Strategie formułowania elementów skończonych w powłokach	343
5.1.2. Płaskie elementy płytowo-tarczowe	344
5.1.3. Zakrzywione, trójparametrowe elementy wyższej precyzji typu Kirchhoffa–Love’a	345
5.1.4. Trójwymiarowe elementy bryłowe w analizie powłok	347
5.1.5. Zdegenerowane elementy powłokowe i pięcioparametrowe elementy typu Timoszenko–Reissnera	349
5.1.6. Blokada rozwiązań	354
5.1.7. Analiza nieregularnych powłok wielopłatowych	356
5.2. Przemieszczeniowe elementy skończone	364
5.2.1. Współrzędne fizyczne	364
5.2.2. Składowe fizyczne	366
5.2.3. Typowy element skończony	367
5.2.4. Interpolacja wektora wodzącego, funkcje kształtu	369
5.2.5. Interpolacja obrotów	370
5.2.6. Reguła transformacyjna	370
5.2.7. Dyskretyzacja skończenie elementowa	371
5.2.8. Węzłowe stopnie swobody, interpolacja pól podstawowych zmiennych kinematycznych	372
5.2.9. Macierze i wektory elementowe	376
5.2.10. Elementy Lagrange’owskie	378
5.2.11. Całkowanie numeryczne	380
5.2.12. Efekt blokady	381
5.2.13. Technika jednolicie zredukowanego całkowania	383
5.2.14. Formy pasożytnicze	384
5.2.15. Technika selektywnie zredukowanego całkowania	385
5.2.16. Procedury stabilizacji form pasożytniczych	385
5.2.17. Globalne równanie macierzowe	389
5.3. Mieszane modele elementów skończonych	390
5.3.1. Uwagi wstępne	390
5.3.2. Zasada zachowania całkowitej energii potencjalnej	390
5.3.3. Dwupolowa zasada wariacyjna, wariant naprężeniowy	391
5.3.4. Równania zlinearyzowane, wariant naprężeniowy	393
5.3.5. Aproksymacja skończenie elementowa, wariant naprężeniowy	394
5.3.6. Dwupolowa zasada wariacyjna, wariant odkształceniowy	396
5.3.7. Równania zlinearyzowane, wariant odkształceniowy	397
5.3.8. Aproksymacja skończenie elementowa, wariant odkształceniowy	398
5.3.9. Mieszane elementy skończone	400
5.3.10. Trójpolowa zasada wariacyjna typu Hu–Washizu	402
5.4. Częściowo mieszane modele elementów skończonych	403
5.4.1. Uwagi o częściowo mieszanych elementach powłokowych	403
5.4.2. Zmodyfikowana dwupolowa naprężeniowa zasada wariacyjna	404
5.4.3. Równania zlinearyzowane, wariant naprężeniowy	406
5.4.4. Aproksymacja skończenie elementowa, wariant naprężeniowy	407

5.4.5.	Zmodyfikowana dwupolowa odkształceniowa zasada wariacyjna	409
5.4.6.	Równania zlinearyzowane, wariant odkształceniowy	410
5.4.7.	Aproksymacja skończenie elementowa, wariant odkształceniowy	412
5.5.	Elementy powłokowe o dwustopniowej interpolacji odkształceń	413
5.5.1.	Uwagi wstępne	413
5.5.2.	Koncepcja niestandardowej interpolacji odkształceń	417
5.5.3.	Realizacja techniki dwustopniowej interpolacji odkształceń	418
5.5.4.	Algorytm dwustopniowej interpolacji odkształceń	419
5.6.	Inne modele elementów skończonych	420
5.6.1.	Zdegenerowane elementy powłokowe	420
5.6.2.	Niedostosowany prostokątny element płytowo-tarczowy klasy C^1 . . .	426
5.6.3.	Płaski trójwęzłowy element powłokowy DCT	429
Rozdział 6. Przykłady liczbowe		435
6.1.	Równania konstytutywne liniowo sprężystych powłok cienkich	435
6.1.1.	Uwagi wstępne	435
6.1.2.	Równania konstytutywne powłoki liniowo sprężystej	436
6.1.3.	Dyskusja relacji konstytutywnych	437
6.1.4.	Kinetyczne równania konstytutywne	439
6.2.	Katalog elementów skończonych, oznaczenia w przykładach	439
6.2.1.	Rodziny sześcioparametrowych elementów skończonych CAM, CAM- γ , ASC, MIX, SEM	439
6.2.2.	Elementy mieszane MIX i częściowo mieszane SEM	442
6.2.3.	Elementy wspomagające SEL, BOX, RING	443
6.2.4.	Oznaczenia wyników obliczeń	444
6.2.5.	Oznaczenia obciążeń	444
6.3.	Klasyczne przykłady testowe	445
6.3.1.	Uwagi wstępne	445
6.3.2.	Płyty utwierdzone o różnym kącie ukosowania	445
6.3.3.	Utwierdzony panel walcowy obciążony ciśnieniem	447
6.3.4.	Panel walcowy swobodnie podparty obciążony siłą	448
6.3.5.	Panel walcowy i płyta kwadratowa ściskane jednokierunkowo	450
6.3.6.	Pręt sprężysty w locie swobodnym bez udziału sił grawitacji	452
6.3.7.	Uwagi	454
6.4.	Skończone przemieszczenia konstrukcji typu belek	456
6.4.1.	Uwagi wstępne	456
6.4.2.	Wsporniki prosty i załamany, obciążone momentem lub siłą	456
6.4.3.	Stateczność wspornika płytowego obciążonego wzdłużnie i poprzecznie	459
6.4.4.	Wspornik płytowy załamany w planie obciążony siłą	461
6.4.5.	Wspornik zakrzywiony obciążony siłą	467
6.4.6.	Pierścień utwierdzony obciążony liniowo	468
6.4.7.	Wirowanie taśmy obciążonej centralnie momentem	471
6.4.8.	Prostokątna ramka wspornikowa obciążona dynamicznie siłą prosto- padłą do planu	473
6.4.9.	Uwagi	475

6.5. Układy pseudoprętowe, szósty parametr teorii	476
6.5.1. Uwagi wstępne	476
6.5.2. Wspornik tarczowy o kształcie litery L obciążony w planie momentem skupionym	476
6.5.3. Wspornik o kształcie znaku zapytania obciążony na końcu siłą poprzeczną do planu	479
6.5.4. Skręcona o 90° belka wspornikowa obciążona siłą	483
6.5.5. Wirująca swobodnie tarcza obciążona momentem skupionym	490
6.5.6. Uwagi	491
6.6. Układy o dużej sztywności przestrzennej	492
6.6.1. Uwagi wstępne	492
6.6.2. Czasza o rzucie kwadratu swobodnie nieprzesuwnie podparta, obciążona siłą skupioną	493
6.6.3. Półsfera podparta przegubowo nieprzesuwnie obciążona radialnie	496
6.6.4. Sfera swobodna obciążona samozrównoważonym układem sił skupionych	499
6.6.5. Powłoka złożona z segmentów walca i stożka, drgania własne	503
6.6.6. Uwagi	507
6.7. Powłoki o dużej wiotkości, blokada i postaci pasożytnicze	508
6.7.1. Uwagi wstępne	508
6.7.2. Półsfera z otworem obciążona siłami samozrównoważonymi	508
6.7.3. Utwierdzona powłoka walcowa obciążona siłą	514
6.7.4. Swobodna powłoka cylindryczna obciążona parą sił samozrównoważonych	520
6.7.5. Swobodna powłoka paraboloidalno-hiperboliczna zginana parą momentów	525
6.7.6. Segment sfery z otworem w swobodnym locie bez udziału sił grawitacji	529
6.7.7. Uwagi	531
6.8. Konstrukcje wielopłatowe płytowo-powłokowe	532
6.8.1. Uwagi wstępne	532
6.8.2. Belka C-owa swobodnie podparta obciążona liniowo, wspornik C-owy z siłą na końcu	532
6.8.3. Dwuteowy wspornik obciążony siłą	540
6.8.4. Wspornik falisty wzmocniony zębem i obciążony siłą	545
6.8.5. Stateczność skrętna dwuteownika bisymetrycznego	549
6.8.6. Panel płytowy w kształcie korytka	558
6.8.7. Rama płytowa	561
6.8.8. Skręcony wspornik teowy obciążony siłą	564
6.8.9. Powłoka falista wzmocniona zębem w swobodnym locie bez udziału sił grawitacji	568
6.8.10. Skręcona powłoka o przekroju teowym w swobodnym locie bez udziału sił grawitacji	571
6.8.11. Uwagi	575

Przedmowa

Teoria i analiza numeryczna cienkościennych konstrukcji powłokowych jest tematem ogromnej liczby publikacji, których podsumowanie zawarto w prawie tysiącu książek i artykułów przeglądowych, por. NOOR [1990a,b] i PIETRASZKIEWICZ [1992a]. Jednak niemal cała dostępna literatura dotyczy pojedynczych, gładkich i regularnych płatów powłoki.

Rzeczywiste powłokowe konstrukcje inżynierskie cechuje ogromna różnorodność i złożoność kształtów. Konstrukcje te często mają załamania powierzchni podstawowej powłoki, skokowe zmiany grubości i własności materiałowych, wzmocnienia belkami, łączenia powłok w wielopłatowe segmenty, połączenia odkształcalne różnych płatów lub płatów z otoczeniem itp. Częstkowe koncepcje teorii i analizy takich nieregularnych, wielopłatowych konstrukcji powłokowych są nieliczne, rozproszone po różnych wydawnictwach i dotyczą niemal wyłącznie zagadnień statycznych analizowanych na podstawie klasycznej liniowej teorii cienkich izotropowych powłok sprężystych.

Przedkładana monografia jest próbą całościowego przedstawienia teorii i analizy numerycznej zadań statyki, stateczności i dynamiki wielopłatowych konstrukcji powłokowych na podstawie dynamicznie i kinematycznie ścisłego, sześcioparametrowego modelu powłoki. Ujęto tu różnego typu nieregularności geometryczne, kinematyczne i materiałowe, a zakres deformacji i ruchu powłoki jest dowolnie duży.

W teorii powłok wyróżnia się zazwyczaj dwa główne podejścia: bezpośrednie i wyprowadzane. W podejściu bezpośrednim powłoka traktowana jest z definicji jako dwuwymiarowy ośrodek ciągły wyposażony w pewne własności kinematyczne i dynamiczne, a całą mechanikę powłok buduje się niezależnie od zasad mechaniki ośrodka ciągłego (MOC), por. np. COSSERAT [1909], ERICKSEN i TRUESDELL [1957], NAGHDI [1972], ALTENBACH i ŽILIN [1988], RUBIN [2000]. W podejściu wyprowadzanym powłoka jest traktowana jako ciało trójwymiarowe o szczególnej geometrii kształtu, w którym jeden z wymiarów (grubość) jest znacznie mniejszy od dwóch pozostałych. Zależności mechaniki powłok buduje się wtedy albo przez wprowadzenie różnych hipotez upraszczających, kinematycznych i/lub dynamicznych, albo przez zastosowanie specjalnych procedur, które pozwalają na przybliżone zredukowanie trójwymiarowego zagadnienia MOC do dwuwymiarowego zagadnienia mechaniki powłok, por. np. MUSZTARI i GALIMOW [1957], WOŹNIAK [1966], NAGHDI [1972], PIETRASZKIEWICZ [1979b], WOŹNIAK i KLEIBER [1991], ANTMAN [1995].

W tej monografii stosujemy podejście mieszane, oparte na koncepcjach zaproponowanych w pracach REISSNER [1974, 1982] i SIMMONDS [1984a], które

zostały rozwinięte w pracach MAKOWSKI i STUMPF [1990], CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i STUMPF [1992, 1997], CHRÓŚCIELEWSKI [1996] oraz LIBAI i SIMMONDS [1983, 1998]. W tym podejściu dwuwymiarowe zasady dynamiki powłok są wynikiem ścisłego całkowania po grubości odpowiednich zasad MOC. Odpowiadająca tym zasadom dynamiki kinematyka powłoki jest konstruowana również jednoznacznie, ale już na poziomie dwuwymiarowym. W stosunku do wyników zawartych w powyższych pracach, w monografii rozszerzyliśmy sformułowanie ogólnej mechaniki powłok na zagadnienia dynamiczne nieregularnych wielopłatowych konstrukcji powłokowych, por. CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i PIETRASZKIEWICZ [2000, 2002], LUBOWIECKA i CHRÓŚCIELEWSKI [2002], MAKOWSKI i PIETRASZKIEWICZ [2002]. Dyskutujemy podstawy analizy numerycznej metodą elementów skończonych (MES) zagadnień statyki i dynamiki powłok na rozmaitości zawierającej grupę obrotu. Przedstawiamy również obszerną analizę numeryczną wielu trudnych przykładów statyki, stateczności i dynamiki konstrukcji i elementów powłokowych. Zwarty przegląd zawartości monografii jest następujący:

W rozdziale 1 opracowano ogólne podstawy dynamicznie i kinematycznie ścisłej nieliniowej mechaniki powłok. Wychodząc z zasad klasycznej mechaniki ośrodka ciągłego, analogiczne zasady dla powłoki otrzymujemy przez ścisłe całkowanie zasad MOC po grubości powłoki. Następnie z otrzymanych dwuwymiarowych lokalnych równań ruchu i dynamicznych warunków brzegowych tworzymy tożsamość całkową, której odpowiednie przekształcenia umożliwiają sformułowanie energetycznie uśrednionych po grubości powierzchniowych miar przemieszczeń i odkształceń oraz kinematycznych warunków ubocznych. Taka powierzchniowa sześcioparametrowa kinematyka powłoki, odpowiadająca jednoznacznie ścisłym zasadom zachowania pędu i momentu pędu powłoki, jest wyrażona przez pola wektora przesunięć i tensora obrotów jako podstawowe zmienne niezależne. Zależności dwuwymiarowe formułujemy na wielospójnej, kawałkami regularnej powierzchni podstawowej, zawierającej również stacjonarne krzywe osobliwe, które modelują załamania powierzchni podstawowej, skokowe zmiany grubości lub własności materiałowych itp. nieregularności. Do opisu wszystkich zależności używamy analizy pól tensorowych na takiej powierzchni. Ogólne zależności mechaniki powłok przedstawiamy zarówno w zapisie absolutnym, jak i przez składowe względem bazy układu współrzędnych powierzchniowych, a także w dwóch reprezentacjach — przestrzennej i materialnej.

Rozdział 2 zawiera zasady budowy powierzchniowych równań konstytutywnych dla powłok oraz omówienie szeregu zagadnień szczególnych. Równania konstytutywne dla przekrojowych tensorów sił i momentów powłoki budujemy analogicznie do teorii takich równań rozwiniętej w MOC, a bardziej szczegółowo dyskutujemy równania konstytutywne powłok wykonanych z materiału sprężystego. Wykazujemy, że w teorii powłok, odmiennie niż w MOC, powierzchniowe pola pędu i momentu pędu muszą być również określone przez kinetyczne równania konstytutywne oraz podajemy kilka ich szczególnych postaci. Formułujemy

ogólne zagadnienie początkowo-brzegowe powłoki z warunkami ciągłości na krzywych osobliwych. Wszystkie zależności zagadnienia przedstawiamy zarówno w zapisie absolutnym, jak i we współrzędnych fizycznych. Dyskutujemy relacje między trój- i dwuwymiarowymi polami w modelowaniu powłok. W wyniku redukcji jednego wymiaru zagadnienia pojawia się dodatkowe pole — tzw. odkształcenie wewnętrzne — które jest pewną miarą przybliżenia mechaniki powłok w stosunku do mechaniki ośrodka ciągłego. Omawiamy kilka szczególnych modeli powłok wynikających przy dodatkowym nałożeniu na deformację klasycznych więzów kinematycznych typu Kirchhoffa–Love’a, Timoszenko–Reissnera i ich uogólnień. Dla tych szczególnych modeli formułujemy zredukowane całkowe i lokalne zasady mechaniki powłok, wskazując m.in., że składowe wielu pól na kierunek tzw. direktora nie są w tych modelach określone. Rozważamy procedurę redukcji zależności MOC do zależności dwuwymiarowych liniowej mechaniki powłok. Wykazujemy w szczególności, że procesy redukcji wymiaru i linearyzacji nie są w mechanice powłok przemienne. Poprawne zależności sześcioparametrowej liniowej mechaniki powłok wynikają tylko z konsekwentnej linearyzacji otrzymanych poprzednio ogólnych zależności nieliniowej mechaniki powłok.

W rozdziale 3 omówiono szereg problemów modelowania nieregularnych konstrukcji wielopłatowych, będących złożeniem nieregularnych powłok i prętów. Używając podobnej procedury jak w rozdziale 1 dla powłok kawałkami regularnych, wyprowadzamy ogólne jednowymiarowe zależności dynamicznie i kinematycznie ścisłej mechaniki prętów przestrzennych kawałkami regularnych. Dla złożonych konstrukcji wielopłatowych formułujemy zasadę pracy wirtualnej przy osłabionych warunkach ciągłości. Wyprowadzone dynamiczne warunki ciągłości na krzywych osobliwych mają teraz postać równań różniczkowych, w odróżnieniu od algebraicznych warunków ciągłości dla powłok kawałkami regularnych. Rozważamy różne sposoby modelowania połączeń w powłokach, m.in. jako kinematycznie sztywne, dynamicznie sztywne oraz odkształcalne przez sprężyste pręty. Bardziej szczegółowo przedstawiamy modelowanie cienkich powłok strukturalnych, których deformacja jest przybliżana jedynie przez deformację wielopłatowej powierzchni podstawowej, a jedyną zmienną niezależną zagadnienia brzegowego jest pole wektora przesunięć. Dla tej klasy konstrukcji powłokowych sformułowano w opisie Lagrange’a równania równowagi oraz warunki brzegowe i ciągłości na krzywych osobliwych. Omówiono nieregularności geometryczne i połączenia odkształcalne, sprężyste i niesprężyste. Przedstawiono również konsekwentnie uproszczone warianty geometrycznie nieliniowej teorii cienkich nieregularnych powłok sprężystych, wynikające przy konsekwentnie ograniczanych obrotach.

Rozdział 4 zawiera różne aspekty analizy numerycznej zagadnień początkowo-brzegowych złożonych konstrukcji powłokowych, wynikające z cech ogólnej sześcioparametrowej mechaniki powłok. Wprowadzamy przestrzeń konfiguracyjną rozwiązań, która jest tu nieskończenie wymiarową grupą Liego. Szczegółowo dyskutujemy problem lokalnej i globalnej parametryzacji grupy obrotów $SO(3)$, składanie obrotów i ich przyrostów oraz definicje wirtualnych i rzeczywistych prędko-

ści i przyspieszeń w reprezentacji materialnej i przestrzennej. Formułujemy zasadę wirtualnych przemieszczeń dla ogólnego zagadnienia nieliniowej dynamiki nieregularnych konstrukcji wielopłatowych. W ramach skończenie wymiarowej aproksymacji zagadnienia, omawiamy interpolację klasy C^0 w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej E i przedstawiamy koncepcję interpolacji klasy C^0 na grupie obrotów $SO(3)$. Omawiamy linearyzację zasady wirtualnych przemieszczeń i iteracyjną metodę Newtona–Kantorowicza rozwiązywania zagadnień nieliniowych na rozmaitości zawierającej grupę obrotów. Analizujemy algorytmy numeryczne metody kontynuacyjnej, w tym sposoby wyznaczania punktów bifurkacji i granicznych rozwiązania, oraz metody sterowania i kontroli procesu iteracyjnego. Przypominamy podstawy nieliniowej dynamiki konstrukcji oraz przedstawiamy rozszerzenie algorytmu Newmarka całkowania równań dynamiki na przestrzeń konfiguracyjną, zawierającą grupę obrotów.

W rozdziale 5 dyskutujemy zasady i różne strategie formułowania powłokowych elementów skończonych, w tym płaskich elementów płytowo-tarczowych, zakrzywionych trójparametrowych elementów typu Kirchhoffa–Love’a, bryłowych elementów trójwymiarowych, elementów zdegenerowanych i pięcioparametrowych elementów typu Timoszenko–Reissnera. Omawiamy problemy blokady rozwiązań, wystąpienia zero-energetycznych form pasożytniczych, sposoby modelowania szóstego stopnia swobody (tzw. owinięcia) oraz stosowane dotąd przybliżone sposoby łączenia elementów powłokowych i prętowych w przestrzenne struktury. Bardziej szczegółowo przedstawiamy formułowanie autorskich elementów skończonych, używanych w rozdziale 6 do nieliniowej analizy zadań statyki, stateczności i dynamiki powłok. Należą do nich rodziny powłokowych elementów przemieszczeniowych, mieszanych i częściowo mieszanych oraz elementy o dwustopniowej interpolacji, elementy zdegenerowane, elementy płaskie niedostosowane klasy C^1 oraz płaskie typu DCT. Omawiamy też używane przyrostowe metody analizy rozwiązań nieliniowych, w tym klasyfikację punktów krytycznych rozwiązania, stosowane metody wyznaczania punktów bifurkacji i granicznych oraz techniki sterowania parametrami obciążenia, przemieszczenia i parametrem łuku wzdłuż ścieżki równowagi. Podajemy sposoby kontroli procesu rozwiązania, w tym i kontroli zbieżności procesu iteracyjnego. Rozwijamy również metodę całkowania nieliniowych równań dynamiki powłok na rozmaitości zawierającej grupę obrotu.

Rozdział 6 zawiera wyniki obszernej analizy numerycznej kilkudziesięciu odpowiednio wybranych przykładów powłok regularnych i nieregularnych konstrukcji wielopłatowych. Symulacje numeryczne dotyczą nieliniowej analizy zagadnień statyki, stateczności i dynamiki powłok głównie liniowo sprężystych w zakresie dowolnej deformacji. Analizowane przykłady obejmują m.in.: a) klasyczne problemy testowe płyt i powłok małowyniosłych; b) skończone przemieszczenia jednowymiarowych konstrukcji typu belka i konstrukcji pseudoprętowych; c) powłoki kuliste pod obciążeniem skupionym i liniowym; d) powłoki o dużej wiotkości i prawie izometrycznej deformacji; e) wielopłatowe konstrukcje powłokowo-płytowe;

f) dynamikę wymuszonego i swobodnego ruchu w przestrzeni giętkich trójplątowych konstrukcji powłokowych. W tych przykładach testuje się poprawność rozwiniętych wcześniej sformułowań teoretycznych i efektywność opracowanych algorytmów i programów numerycznych. W szczególności, badano możliwości uniknięcia zjawiska blokady, redukcji lub eliminacji form pasożytniczych, zbieżność rozwiązań numerycznych w zakresie liniowym i nieliniowym, wpływ wartości współczynnika owinięcia i metod stabilizacji na rozwiązania oraz zachowanie całkowitej energii mechanicznej podczas ruchu powłoki w przestrzeni. W całości, te obszerne wyniki badań numerycznych ilustrują różne aspekty nieliniowej teorii i analizy numerycznej regularnych i nieregularnych wielopłatowych konstrukcji powłokowych.

Reasumując, opracowana monografia przedstawia oryginalny, całościowy pogląd na ogólną teorię oraz analizę statyczną i dynamiczną powłok regularnych oraz nieregularnych wielopłatowych konstrukcji powłokowych w zakresie dowolnej deformacji.

Monografia została opracowana w ramach projektu badawczego Nr 7 T07A 021 12, finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.

Gdańsk, wrzesień 2003 r.

Autorzy

Część I

Teoria powłok

Rozdział 1

Podstawowe równania ogólnej mechaniki powłok

1.1. Podstawowe prawa i zależności mechaniki ośrodków ciągłych

1.1.1. Uwagi wstępne

Przystępując do omawiania dowolnej teorii fizycznej, należy przede wszystkim wskazać odpowiedni dla tej teorii aparat matematyczny.

Podstawowym aparatem matematycznym, wykorzystywanym w mechanice ośrodków ciągłych i mechanice powłok, jest klasyczny rachunek wektorowy i tensorowy, zapoczątkowany pracą GIBBS [1884]. Podstawy tego rachunku są omawiane niemal w każdej książce z zakresu mechaniki ośrodków ciągłych i nieliniowej teorii sprężystości, np. TRUESDELL [1972], WANG i TRUESDELL [1973], ŁURIE [1980], OGDEN [1984], GURTIN [1981], BILLINGTON [1986]. Czyni to zbędnym szczegółowe powtarzanie tutaj znanych definicji, twierdzeń i operacji rachunku wektorowego i tensorowego. W odpowiednich miejscach tej książki ograniczymy się do przypomnienia tylko tych pojęć i operacji, które są potrzebne do zrozumienia używanych sformułowań i dalszego wyprowadzania wzorów. Pełny kurs algebry i analizy wektorów i tensorów zawierają monografie matematyczne, np. HALMOS [1958], BOWEN i WANG [1976], NOLL [1987], SIMMONDS [1997b].

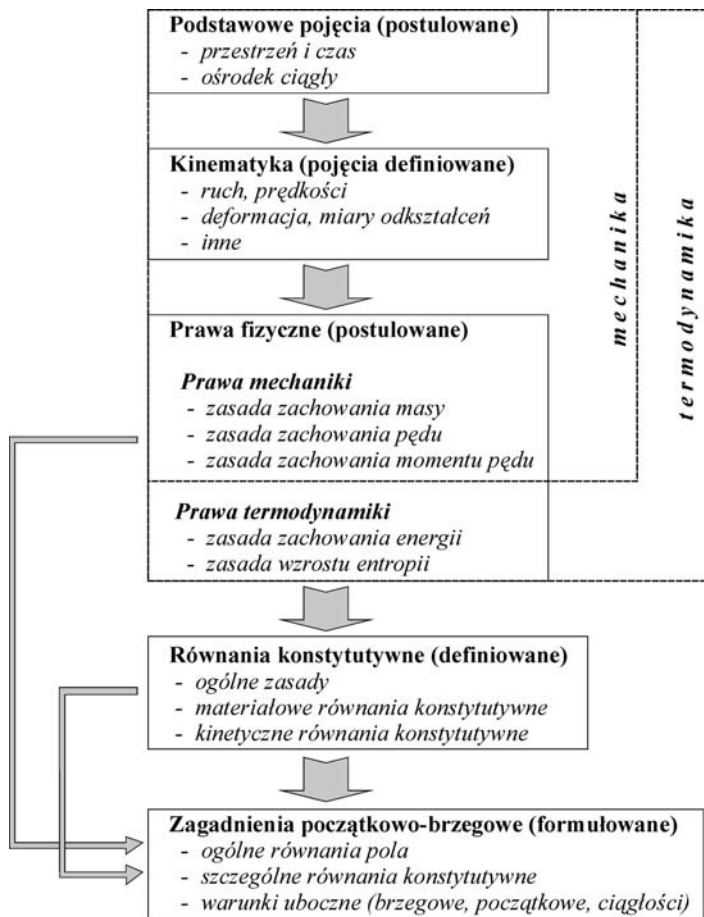
W książce wykorzystujemy zarówno zapis absolutny pól wektorowych i tensorowych, jak i ich zapis wskaźnikowy. Wektory oznaczать będziemy małymi literami półgrubymi, np. \mathbf{a} , \mathbf{u} , $\boldsymbol{\omega}$, natomiast tensory półgrubymi literami dużymi, np. \mathbf{T} , \mathbf{U} , $\boldsymbol{\Phi}$. Pod pojęciem *tensor* będziemy konsekwentnie rozumieli odwzorowanie liniowe, które wektorom przyporządkowuje wektory. W przypadku zapisu wskaźnikowego, indeksy składowych wektorów i tensorów w odpowiednich bazach, oznaczane małymi literami alfabetu łacińskiego i, j, k, l, \dots , przebiegają ciąg wartości 1, 2, 3, a indeksy oznaczane małymi literami alfabetu greckiego $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \dots$ przebiegają ciąg wartości 1, 2. Obowiązuje przy tym konwencja sumacyjna — domyślne sumowanie względem każdego wskaźnika występującego w danym symbolu lub wyrażeniu raz u góry i raz u dołu.

Nie można właściwie zrozumieć natury i specyfiki mechaniki powłok nie wnikając w podstawy mechaniki ośrodków ciągłych. Istnieją liczne opracowania, zarówno w postaci książkowej jak i obszernych artykułów, które omawiają te podstawy z różnych punktów widzenia i na różnym poziomie matematycznym. Każdy czytelnik, pragnący zapoznać się gruntownie z podstawami mechaniki ośrodków

ciągłych, znajdzie więc z łatwością odpowiadające mu pozycje, np. TRUESDELL i TOUPIN [1960], TRUESDELL i NOLL [1965], ERINGEN [1967], GURTIN [1981], BILLINGTON [1986], a w literaturze polskiej np. PERZYNA [1966], WOŹNIAK [1985, 1992], RYMARZ [1993], OSTROWSKA-MACIEJEWSKA [1994].

Celem tego podrozdziału jest jedynie krótkie omówienie podstawowych pojęć i zestawienie podstawowych praw nieliniowej mechaniki ośrodka ciągłego, które stanowią punkt wyjścia przy formułowaniu nieliniowej mechaniki powłok wielopłatowych w ramach przyjętej w tej książce koncepcji.

W dużym uproszczeniu, formułowanie różnych problemów w ramach mechaniki ośrodków ciągłych można przedstawić w postaci diagramu (rys. 1.1.1).



Rys. 1.1.1. Schemat formułowania zagadnień w ramach mechaniki ośrodków ciągłych.

Gdy mówimy o ruchu i deformacji ciał odkształcalnych — trójwymiarowych, dwuwymiarowych typu membran, płyt i powłok lub jednowymiarowych typu be-

lek i prętów — oraz o prawach nimi rządzących, pozostajemy ciągle w świecie zjawisk czysto mechanicznych. Jednak nie wszystkie zjawiska w przyrodzie można opisać i zrozumieć w ramach mechaniki. Na przykład, zjawisko przepływu ciepła w ciałach materialnych rządzi się prawami termodynamiki, niezależnymi od praw mechaniki, por. TRUESDELL [1984], HANYGA [1991], ŠILHAVY [1997]. Innym przykładem są przepływy ładunków elektrycznych i zjawiska magnetyczne w ciałach, opisywane prawami elektrodynamiki, np. ERINGEN i MAUGIN [1990]. W tej książce zajmować się będziemy wyłącznie modelowaniem zjawisk czysto mechanicznych, pomijając wpływ zjawisk cieplnych, elektrycznych, magnetycznych itp. na ruch ciała.

1.1.2. Czasoprzestrzeń

U podstaw mechaniki ośrodków ciągłych, a właściwie wszystkich teorii fizycznych, leży pojęcie czasoprzestrzeni. *Czasoprzestrzeń* jest matematycznie definiowana jako czterowymiarowa rozmaitość różniczkowa \mathcal{W} , której elementy nazywa się *zdarzeniami*. Wyposażając \mathcal{W} w dodatkowe struktury, otrzymuje się różne czasoprzestrzenie, odpowiadające różnym teoriom fizycznym.

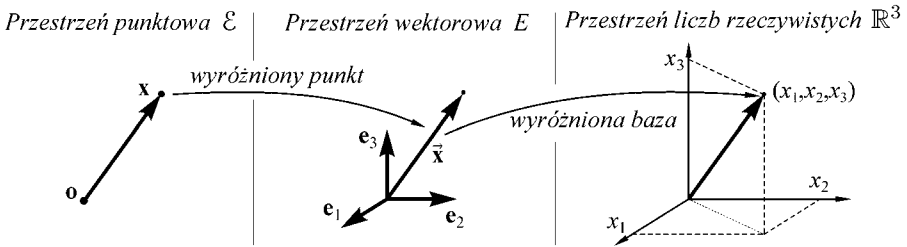
W ramach klasycznej mechaniki ośrodków ciągłych, \mathcal{W} jest rozumiana w sensie czasoprzestrzeni Newtona, dla której istnieje odpowiednio proste odwzorowanie \mathcal{W} na $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$. Tutaj $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}^3$ jest trójwymiarową euklidesową przestrzenią punktową (przestrzenią fizyczną), a $\mathcal{T} \equiv \mathcal{E}^1$ jednowymiarową euklidesową przestrzenią punktową (czasem). Odwzorowanie $\zeta: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{T}$, które przyporządkowuje w sposób ciągły i jednoznaczny każdemu zdarzeniu $e \in \mathcal{W}$ parę uporządkowaną (\mathbf{x}, t) , gdzie $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ i $t \in \mathcal{T}$, ustala *układ odniesienia* w czasoprzestrzeni.

Przestrzeń punktowa \mathcal{E} jest izomorficzna z trójwymiarową euklidesową przestrzenią wektorową $E \equiv E^3$, powstającą z \mathcal{E} przez wyróżnienie dowolnego punktu $\mathbf{o} \in \mathcal{E}$, a z kolei przestrzeń wektorowa E jest izomorficzna z trójwymiarową przestrzenią liczb rzeczywistych \mathbb{R}^3 , powstającą z E przez przyjęcie bazy naturalnej, złożonej z trójki ortonormalnych wektorów jednostkowych \mathbf{e}_i . Zauważmy jednak, że w \mathcal{E} żaden punkt nie jest wyróżniony, natomiast E posiada wyróżniony element, mianowicie wektor zerowy $\mathbf{o} \in E$. Z kolei, \mathbb{R}^3 ma dodatkowo wyróżnione kierunki związane z bazą naturalną \mathbf{e}_i , podczas gdy żadna trójka liniowo niezależnych wektorów w E nie jest naturalnie wyróżniona, rys. 1.1.2. Układu odniesienia nie należy więc mylić z układem współrzędnych kartezjańskich x_i ani też innych współrzędnych krzywoliniowych.

W matematycznym sformułowaniu mechaniki ośrodków ciągłych nie sam układ odniesienia, lecz jedynie dopuszczalne zmiany układu odniesienia są istotne. Jeśli $\zeta': \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{T}$ jest innym układem odniesienia, to odwzorowanie

$$\zeta' \circ \zeta^{-1}: \mathcal{E} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{T}, \quad (\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}', t'), \quad (1.1.1)$$

gdzie \circ oznacza operację złożenia funkcji, opisuje *zmianę* układu odniesienia.



Rys. 1.1.2. Przestrzenie euklidesowe.

Spośród wszystkich zmian układów odniesienia czasoprzestrzeni Newtona wyróżnia te, które zachowują odległości i odstępy czasowe. Z podstawowego twierdzenia geometrii wynika, że najogólniejszymi odwzorowaniami spełniającymi te warunki są odwzorowania izometryczne

$$(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}', t') = \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{c}(t) + \mathbf{O}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{o}), \\ t' = c + t, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

gdzie $\mathbf{c}(t)$ jest zależnym od czasu wektorem, $\mathbf{c}(t) \in E$, $\mathbf{O}(t)$ jest zależnym od czasu tensorem ortogonalnym, $\mathbf{O}(t) \in O(E)^1$, a c jest stałą liczbą rzeczywistą. Przypomnijmy, że tensor ortogonalny spełnia zależności $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}$, $\det \mathbf{O} = \pm 1$, gdzie \mathbf{O}^T jest transpozycją, \mathbf{O}^{-1} odwrotnością, a $\det \mathbf{O}$ wyznacznikiem tensora \mathbf{O} .

Szczególnym podzbiorem odwzorowań postaci (1.1.2) są odwzorowania

$$(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}', t') = \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{c} + \mathbf{v}t + \mathbf{O}(\mathbf{x} - \mathbf{o}), \\ t' = c + t, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

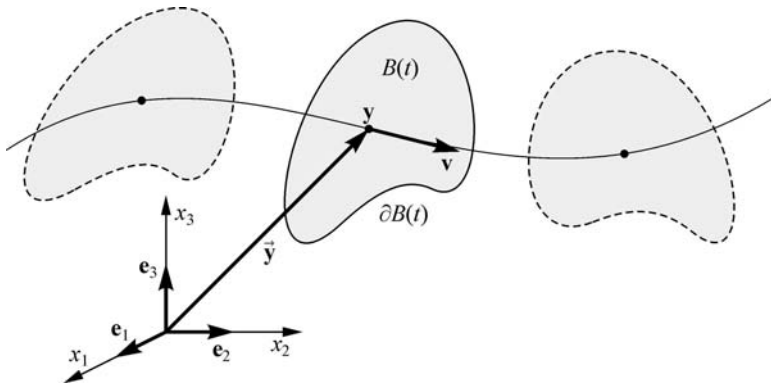
gdzie \mathbf{c} i \mathbf{v} są stałymi (niezależnymi od czasu) wektorami, natomiast $\mathbf{O} \in O(E)$ jest stałym (niezależnym od czasu) tensorem ortogonalnym. Przekształcenia postaci (1.1.3) tworzą tzw. *grupę Galileusza*. Zgodnie z zasadą względności Galileusza, prawa mechaniki klasycznej mają tę samą postać we wszystkich układach odniesienia związanych odwzorowaniem (1.1.3), zwanych też *układami inercjalnymi*.

1.1.3. Ośrodek ciągły

Przedmiotem badań mechaniki ośrodków ciągłych są ciała materialne (ciała stałe, ciecze i gazy), którym można przypisać strukturę ciągłą. Mechanika ośrodków ciągłych jest więc teorią fenomenologiczną, zaniedbującą rzeczywistą cząsteczkową strukturę wewnętrzną ciał materialnych.

W obrębie mechaniki klasycznej ośrodek ciągły, nazywany *ciałem materialnym* lub po prostu *ciałem* i niezmiennie oznaczany przez \mathcal{B} , jest postrzegany

¹Tutaj $O(E)$ oznacza grupę tensorów ortogonalnych, zob. np. RYMARZ [1993].



Rys. 1.1.3. Ruch ośrodka ciągłego w przestrzeni fizycznej.

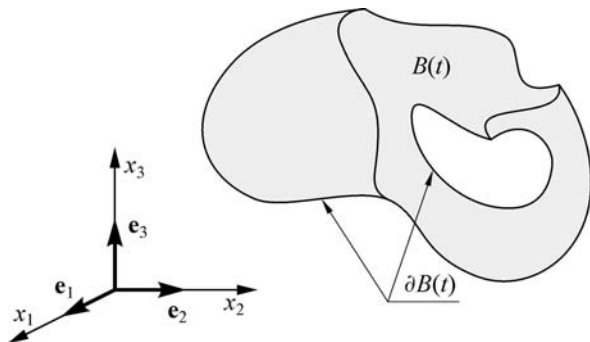
jako kontinuum cząstek materialnych, które w każdej chwili t wypełniają w sposób ciągły pewien obszar $B(t)$ przestrzeni fizycznej \mathcal{E} . Obszar $B(t)$ jest nazywany *chwilową konfiguracją* ciała \mathcal{B} . Mówimy, że punkt $\mathbf{y} \in B(t)$ jest *miejszem* chwilowo zajmowanym przez cząstkę materialną X ciała \mathcal{B} . W tym sensie, chwilowa konfiguracja ciała jest po prostu obszarem $B(t)$ w przestrzeni fizycznej, mającym specyficzne własności fizyczne definiowane oddzielnie dla każdej klasy problemów. Natomiast ciało materialne \mathcal{B} jest rozumiane jako jednoparametrowa rodzina $\{B(t)\}$ obszarów w przestrzeni fizycznej \mathcal{E} . Względem ustalonego układu odniesienia (lub ustalonych współrzędnych kartezjańskich w przestrzeni) typowy punkt \mathbf{y} w obszarze $B(t)$ określa wektor pozycyjny $\vec{\mathbf{y}}$, który w każdej chwili t jest odwzorowaniem obszaru $B(t)$ w E .

Obszar $B(t)$ i jego brzeg $\partial B(t)$ muszą spełniać pewne matematyczne warunki regularności. W wielu przypadkach wystarczy przyjąć, że $B(t)$ jest obszarem regularnym (w sensie Kellogga) z brzegiem $\partial B(t)$ kawałkami gładkim (rys. 1.1.4). Do sformułowania ogólnych praw mechaniki w postaci całkowej wystarczają znacznie słabsze założenia matematyczne (zob. HANYGA [1985]):

1. $B(t)$ jest obszarem ograniczonym i regularnie otwartym, tzn. $\text{int}(\text{cl } B(t)) = B(t)^2$.
2. Funkcja charakterystyczna obszaru $B(t)$ jest mierzalna w sensie Borela.
3. Brzeg $\partial B(t)$ obszaru $B(t)$ jest ciągły w sensie Lipschitza.

Założenia te zapewniają, że jednostkowy wektor zewnętrznie normalny do brzegu ∂B jest dobrze określony prawie we wszystkich punktach $\mathbf{y} \in \partial B(t)$ (z wyjątkiem zbiorów miary zero w sensie miary \mathcal{H}^2), a całka powierzchniowa po $\partial B(t)$ może być poprawnie zdefiniowana. Tutaj i dalej \mathcal{H}^2 i \mathcal{L}^3 oznaczają odpowiednio, dwuwymiarową miarę Hausdorffa i trójwymiarową miarę Lebesgue'a; wszystkie całki pojawiające się w dalszych rozważaniach należy rozumieć w sensie tych miar.

² Dla dowolnego podzbioru $A \subset X$ przestrzeni topologicznej X , na przykład \mathcal{E} , $\text{cl } A$ oznacza domknięcie, a $\text{int } A$ wnętrze tego zbioru.



Rys. 1.1.4. Chwilowa konfiguracja ośrodka ciągłego.

1.1.4. Zasady mechaniki ośrodków ciągłych

Naszkirowane powyżej pojęcie ciała materialnego charakteryzuje jedynie jego cechy geometryczno-kinematyczne. W mechanice ośrodków ciągłych ciało jest traktowane jako układ dynamiczny. Zakłada się więc, że ciało materialne ma masę oraz jest zdolne do przenoszenia oddziaływań mechanicznych, wyrażonych przez układy sił³.

Mechanika ośrodków ciągłych formułowana jest przez następujące wielkości fizyczne: $\mathfrak{M}(\mathcal{P}, t)$ – masa (skalar), $\mathfrak{P}(\mathcal{P}, t)$ – pęd (wektor), $\mathfrak{F}(\mathcal{P}, t)$ – siła (wektor), $\mathfrak{M}(\mathcal{P}, t)$ – moment pędu (kręt) (wektor osiowy) i $\mathfrak{T}(\mathcal{P}, t)$ – moment sił (wektor osiowy). Te wielkości muszą być określone nie tylko dla całego ciała \mathcal{B} , ale również dla każdej części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} (zwanej dalej podciałem) i dla każdej chwili t z dowolnego przedziału $[t_1, t_2]$. Te wielkości fizyczne są obiektami pierwotnymi, które nie są definiowalne przez inne wielkości fizyczne. Przyjmuje się jedynie, że we wszystkich przypadkach szczególnych mamy o tych wielkościach pewną wiedzę natury fizycznej.

Szereg szczególnych teorii opisywanych w ramach mechaniki ośrodków ciągłych ma wspólną bazę w postaci trzech postulatów, nazywanych *zasadami mechaniki*. W ogólnym przypadku te postulaty głoszą, że w inercjalnym układzie odniesienia wymienione powyżej wielkości fizyczne muszą spełniać następujące, globalne w przestrzeni i czasie, zasady zachowania:

zasada zachowania masy

$$\left[\mathfrak{M}(\mathcal{P}, t) \right]_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (1.1.4)$$

³W przypadku bardziej ogólnych teorii fizycznych ośrodka ciągłego uwzględnia się również, że ciało ma temperaturę i jest zdolne do przewodzenia ciepła, że ma energię i entropię oraz, że może mieć ładunek elektryczny i oddziaływać z polami elektromagnetycznymi. Jednak w tej książce będziemy zajmowali się jedynie zagadnieniami czysto mechanicznymi.

zasada zachowania pędu

$$\left[\mathfrak{P}(\mathcal{P}, t) \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{F}(\mathcal{P}, t) dt, \quad (1.1.5)$$

zasada zachowania momentu pędu (krętu)

$$\left[\mathfrak{M}(\mathcal{P}, t) \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{T}(\mathcal{P}, t) dt. \quad (1.1.6)$$

W powyższych postulatach $[f(\mathcal{P}, t)]_{t_1}^{t_2} \equiv f(\mathcal{P}, t_2) - f(\mathcal{P}, t_1)$ dla dowolnej funkcji $f(\mathcal{P}, t)$. Zasady zachowania (1.1.4)–(1.1.6) tworzą formalną bazę mechaniki ośrodków ciągłych.

Masa ciała jest rozumiana jako własność materii lub substancji, określająca ilość materii w ciele. Wielkość ta jest funkcją struktury wewnętrznej materiału. Zakłada się, że masa każdej części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} jest dodatnim skalarzem, $\mathfrak{M}(\mathcal{P}, t) > 0$, a prawo (1.1.4) orzeka, że masa ciała i każdej jego części jest stała, nie może się zwiększać lub zanikać i jest niezmiennicza ze względu na stan ruchu ciała. W istocie, prawo zachowania masy nie jest prawem fizycznym, lecz raczej definicją ciała jako zamkniętego układu mechanicznego.

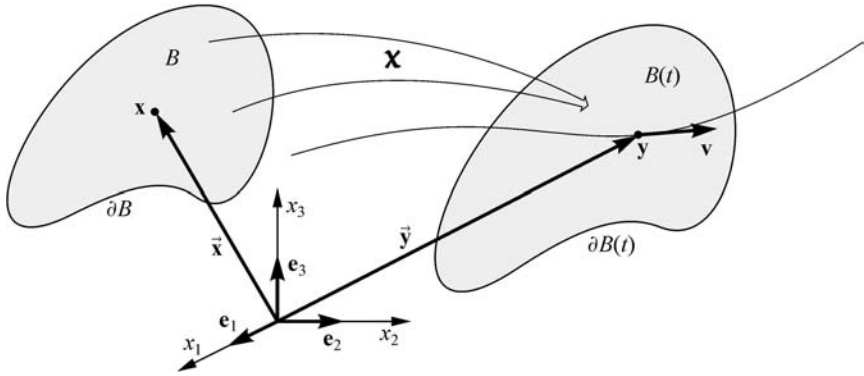
Pęd i moment pędu są podstawowymi miarami ruchu ciała, a prawa (1.1.5) i (1.1.6) są znane jako prawa Eulera mechaniki klasycznej. Orzekają one, że w *inercjalnych* układach odniesienia zmiana pędu $\mathfrak{P}(\mathcal{P}, t)$ i momentu pędu $\mathfrak{M}(\mathcal{P}, t)$ każdej części ciała w trakcie jego ruchu w przedziale czasu $[t_1, t_2]$ są równe, odpowiednio, całkowitemu impulsowi siły $\mathfrak{F}(\mathcal{P}, t)$ i całkowitemu impulsowi momentu $\mathfrak{T}(\mathcal{P}, t)$, działającymi na tę część ciała w tym przedziale czasu.

1.1.5. Ruch ośrodka ciągłego

Ruch ciała może być zdefiniowany jako sekwencja konfiguracji w przestrzeni fizycznej. Jednoparametrową rodzinę $\{B(t)\}$ konfiguracji przestrzennych nazywa się wówczas *ruchem* ciała.

Ruch może być matematycznie opisany na wiele różnych sposobów. Do najbardziej przydatnych należą: (i) opis materialny, (ii) opis odniesienia, (iii) opis przestrzenny, (iv) opis względny, (v) opis konwekcyjny. Wybór opisu ruchu wynika z typu rozważanego problemu, ale w wielu przypadkach wybór ten nie jest oczywisty. Zazwyczaj opis ruchu narzuca stopień trudności formułowania równań dynamiki i równań konstytutywnych zagadnienia.

W tej książce ograniczymy się do *względneho* opisu ruchu ciała, formułowanego względem dowolnie ustalonej konfiguracji odniesienia B . Taka, dowolnie wyróżniona i niezależna od czasu, konfiguracja służy identyfikacji cząstek ciała, a jego



Rys. 1.1.5. Opis ruchu ciała względem konfiguracji odniesienia.

ruch względem tej konfiguracji jest opisany przez odwzorowanie

$$\boldsymbol{\chi}: B \times T \rightarrow \mathcal{E}, \quad (\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{y} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1.7)$$

gdzie $\mathbf{y} \in B(t)$ jest miejscem w przestrzeni zajmowanym w chwili t przez cząstkę materialną, która w konfiguracji odniesienia zajmowała miejsce $\mathbf{x} \in B$. Tutaj T oznacza przedział czasu, w którym rozważamy ruch ciała.

Obszar B łącznie z brzegiem ∂B muszą spełniać te same warunki regularności jak każda konfiguracja przestrzenna $B(t)$ ciała. Natomiast o odwzorowaniu $\boldsymbol{\chi}$ zakłada się, że jest ono wzajemnie jednoznaczne i odpowiednio regularne. Dodatkowo zwykle zakłada się, że $\boldsymbol{\chi}$ jest odwzorowaniem ciągłym w sensie Lipschitza względem obu argumentów. Takie założenie gwarantuje, że $\mathbf{y} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)$ jest różniczkalne dla prawie wszystkich $\mathbf{x} \in B$ i prawie wszystkich $t \in T$.

Oznaczając przez $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, t)$ wektor wodzący miejsca $\mathbf{y} \in B(t)$ i biorąc pod uwagę (1.1.7), ruch ciała względem konfiguracji odniesienia można również zapisać w postaci $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$. Wówczas pole prędkości ciała jest określone przez pochodną $\dot{\vec{\mathbf{y}}} = \dot{\vec{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}, t)$ względem czasu przy ustalonym \mathbf{x} :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\vec{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}, t) \equiv \left. \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \right|_{\mathbf{x}=\text{const}}. \quad (1.1.8)$$

Opis ruchu ciała przez odwzorowanie $\boldsymbol{\chi}$ lub wektor wodzący $\vec{\mathbf{y}}$ są, oczywiście, całkowicie równoważne, a przy ustalonym układzie odniesienia w przestrzeni fizycznej można je utożsamiać. Zauważmy jednak, że przeciwdziedzina odwzorowania $\boldsymbol{\chi}$ jest przestrzeń punktowa \mathcal{E} , a odwzorowania $\vec{\mathbf{y}}$ — przestrzeń wektorowa E . Przyjęte tutaj rozróżnienie pomiędzy punktami przestrzeni \mathcal{E} i ich wektorami wodzącymi ułatwi przejrzyste formułowanie mechaniki powłok.

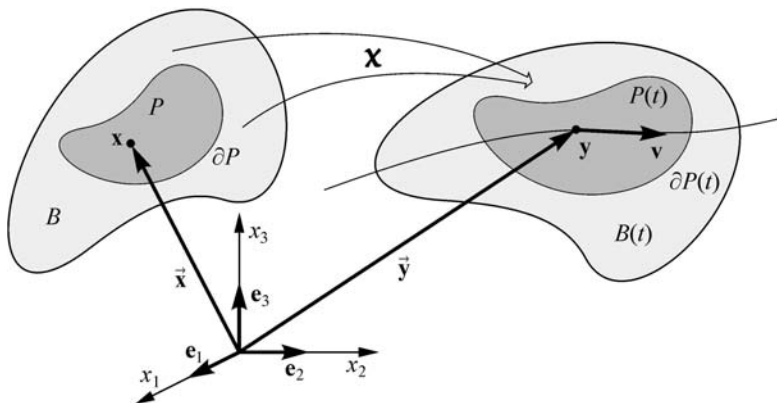
1.1.6. Klasyczna mechanika ośrodków ciągłych

W mechanice ośrodków ciągłych przyjmuje się, że masa jest funkcją absolutnie ciągłą względem miary objętości (miary \mathcal{L}^2). Przy tym założeniu istnieje gęstość

masy $\rho_0(\mathbf{x})$, mierzona na jednostkę objętości konfiguracji odniesienia B , a masa każdej części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} wynosi

$$\mathfrak{M}(\mathcal{P}, t) = \iiint_P \rho_0 \, dv, \quad (1.1.9)$$

gdzie $P \subset B$ jest obszarem zajmowanym przez \mathcal{P} w konfiguracji odniesienia.



Rys. 1.1.6. Gęstość pędu i momentu pędu ciała.

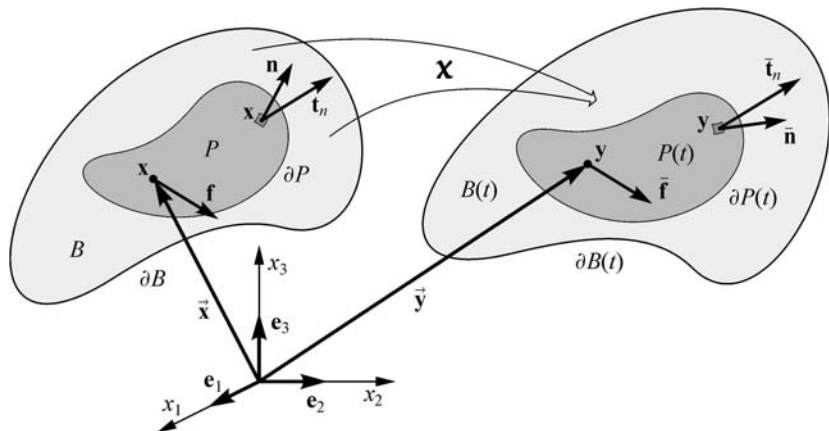
Gęstość pędu ciała jest zwykle definiowana jako iloczyn gęstości masy $\rho_0(\mathbf{x})$ i prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, z jaką ciało przemieszcza się w przestrzeni fizycznej. Natomiast kręt ciała definiuje się jako moment pędu. Tak więc, pęd i moment pędu dla każdego \mathcal{P} przyjmuje się w postaci

$$\mathfrak{P}(\mathcal{P}, t) = \iiint_P \rho_0 \mathbf{v} \, dv, \quad \mathfrak{M}(\mathcal{P}, t) = \iiint_P \rho_0 \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{v} \, dv. \quad (1.1.10)$$

Jednak, z punktu widzenia ogólniejszych teorii fizycznych, tak określone postacie pędu i momentu pędu powinny być traktowane jako pewien rodzaj zależności konstytutywnych. Ten fakt odgrywa istotną rolę przy formułowaniu mechaniki powłok.

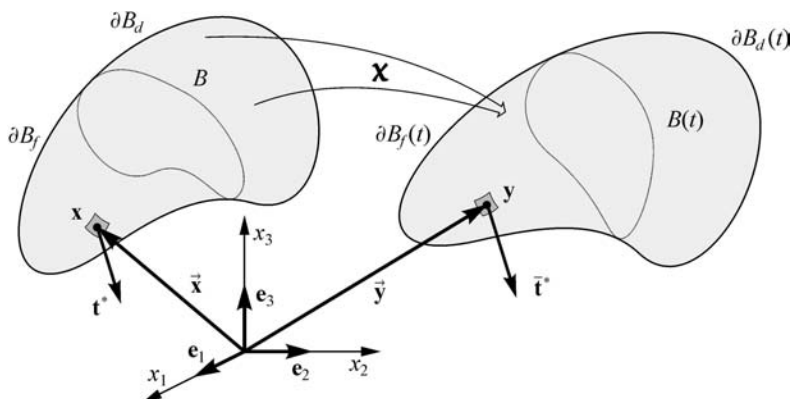
Na każdą część \mathcal{P} ciała \mathcal{B} działają siły zewnętrzne i wewnętrzne. Siły zewnętrzne to siły *masowe* (lub *objętościowe*), których wartości są zazwyczaj proporcjonalne do masy (objętości) części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} , oraz siły *powierzchniowe*, przyłożone bezpośrednio do brzegu ∂B . Siły wewnętrzne pochodzą od oddziaływań krótkiego zasięgu między cząstkami ciała. W mechanice ośrodków ciągłych takie oddziaływania uwzględnia się w postaci wektorów naprężeń wewnętrznych, które są siłami działającymi na powierzchniach ∂P wewnątrz ciała \mathcal{B} .

W opisie odniesienia wektor gęstości sił masowych (objętościowych) oznaczać będziemy przez $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, a wektor gęstości sił kontaktowych przez $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t)$,



Rys. 1.1.7. Siły działające na dowolne podcało.

rys. 1.1.7. Będziemy również zakładali, że na części ∂B_f brzegu ∂B zadany jest wektor sił powierzchniowych $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$, rys. 1.1.8.



Rys. 1.1.8. Zewnętrzne siły brzegowe działające na ciało.

Jeśli więc brzeg ∂P obszaru, zajmowanego przez rozważaną część ciała w ustalonej konfiguracji odniesienia, ma część wspólną z brzegiem ∂B_f obszaru ciała, to całkowita siła i całkowity moment działające na \mathcal{P} dane są następującymi zależnościami:

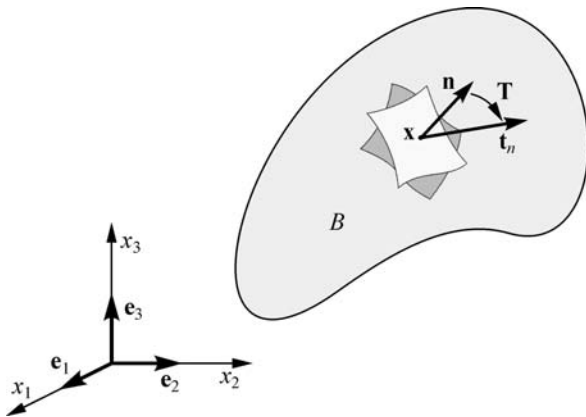
$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\mathcal{P}, t) &= \iiint_P \mathbf{f} \, dv + \iint_{\partial P \setminus \partial B_f} \mathbf{t}_n \, da + \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{t}^* \, da, \\ \mathfrak{T}(\mathcal{P}, t) &= \iiint_P \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f} \, dv + \iint_{\partial P \setminus \partial B_f} \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{t}_n \, da + \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{t}^* \, da. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Podstawiając (1.1.9)–(1.1.11) do (1.1.4)–(1.1.6), otrzymamy zasady mechaniki wyrażone przez pola określone na konfiguracji odniesienia ciała.

Przypomnijmy, że pierwotne wielkości fizyczne, występujące w prawach mechaniki (1.1.4)–(1.1.6), odnoszą się do samego ciała i jego części, a nie do obszarów w przestrzeni fizycznej. Dlatego można je również wyrazić przez pola określone na konfiguracji aktualnej ciała, to znaczy na obszarze $B(t)$, lub na dowolnej innej konfiguracji.

1.1.7. Postulat i twierdzenie Cauchy'ego

W mechanice ośrodków ciągłych ważną rolę odgrywa wektor sił kontaktowych $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t)$, który w opisie odniesienia wyraża oddziaływanie jednej części ciała na drugą przez wspólną powierzchnię kontaktu. Zgodnie z fundamentalnym postulatem Cauchy'ego, wektor $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t)$ w dowolnym punkcie $\mathbf{x} \in \partial P$ zależy od powierzchni ∂P jedynie poprzez jednostkowy wektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, normalny do ∂P .



Rys. 1.1.9. Postulat Cauchy'ego.

Wówczas dowodzi się, przy pewnych założeniach o ciągłości, istnienia tensora naprężeń $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ takiego, że

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (1.1.12)$$

Tensor $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ jest nazywany *pierwszym tensorem naprężeń Pioli–Kirchhoffa*, rys. 1.1.9.

Wykorzystując twierdzenie (1.1.12) oraz wprowadzając pewne założenia o ciągłości i różniczkowalności wszystkich pól występujących w zasadach mechaniki ośrodka ciągłego, można otrzymać ich lokalne postacie, por. p. 2.1.2.

1.2. Podstawowe koncepcje mechaniki powłok

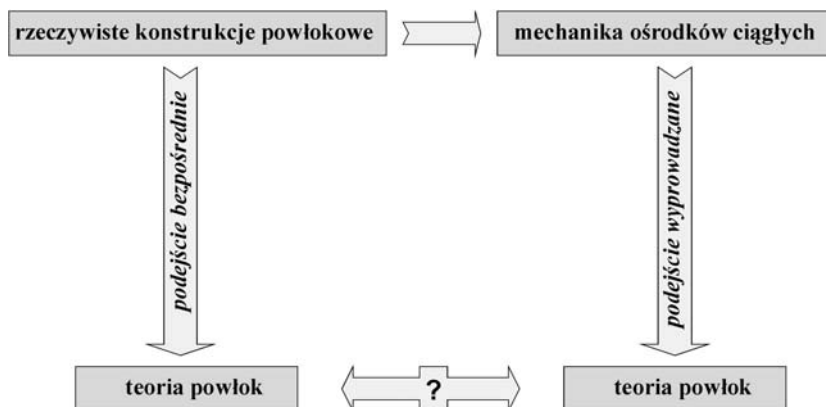
1.2.1. Podejścia stosowane w teorii powłok

Wielkości kinematyczne i dynamiczne ciał materialnych, będące przedmiotem badań mechaniki ośrodków ciągłych, są reprezentowane przez pola skalarne, wektorowe i tensorowe określone na konfiguracjach przestrzennych ciała, czyli pewnych obszarach trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Pola te są więc funkcjami *trzech zmiennych przestrzennych i czasu*.

Jeśli rozważane ciało ma szczególne własności geometryczne, to jego kinematykę i dynamikę można opisać przez pola określone wyłącznie na pewnej wyróżnionej powierzchni. Mechanika powłok jest właśnie teorią formułowaną w taki sposób. Zalety takiej szczególnej teorii są oczywiste: wszystkie pola występujące w mechanice powłok zależą jedynie od *dwóch zmiennych przestrzennych i czasu*. W wielu przypadkach umożliwia to w ogóle analizę zadania, rozwiązanie analityczne którego jako zadania trójwymiarowego nie byłoby możliwe.

W teorii powłok wyróżnia się dwa główne podejścia (rys. 1.2.1). Pierwsze podejście, nazywane *bezpośrednim*, zapoczątkowane przez braci COSSERAT [1908, 1909], zostało rozwinięte m.in. w pracach: ALMANZI [1932], ERICKSEN i TRUESDELL [1957], COHEN i DASILVA [1966], GREEN, LAWS i NAGHDI [1968], GREEN i NAGHDI [1974], GURTIN i MURDOCH [1975], MURDOCH i COHEN [1979], FERRARESE [1979], ŽILIN [1982], COHEN i WANG [1989] oraz podsumowane w NAGHDI [1972], KAJUK [1987], SZKUTIN [1988], ALTENBACH i ŽILIN [1988], ZUBOV [1997], RUBIN [2000], gdzie podana jest obszerna bibliografia. To podejście polega na traktowaniu powłoki jako dwuwymiarowego kontinuum materialnego wyposażonego w pewne własności kinematyczne i dynamiczne, a całą teorię buduje się całkowicie niezależnie od mechaniki trójwymiarowego ośrodka ciągłego.

W drugim podejściu, nazywanym *wyprowadzanym*, powłoka jest traktowana jako ciało trójwymiarowe o pewnej szczególnej geometrii kształtu. Następnie



Rys. 1.2.1. Podejścia stosowane przy formułowaniu mechaniki powłok.

teorię trójwymiarową takiego ciała redukuje się w „rozsądny” sposób do teorii dwuwymiarowej, w której wszystkie pola opisane są już na pewnej powierzchni podstawowej powłoki. Taka redukcja wymiaru po grubości może być wykonana w różny sposób. Najczęściej do opisu deformacji i stanu naprężenia po grubości powłoki wprowadza się różne więzy, por. np. prace LOVE [1889, 1927], MUSZTARI i GALIMOW [1957], KOITER [1960], WOŹNIAK [1966], PIETRASZKIEWICZ [1971, 1979a, 1980a, 1989], GALIMOW [1977], ZUBOW [1982], CZERNYCH [1983, 1986], BAŞAR i KRÄTZIG [1985], SIMO i FOX [1989], SCHIECK, PIETRASZKIEWICZ i STUMPF [1992], NOWOŻYŁOW, CZERNYCH i MICHAJŁOWSKIJ [1991], VALID [1981, 1995], KRÄTZIG [1993], CZERNYCH i KABRIC [2002]. Nieznane reakcje tych więzów są najczęściej pomijane milczeniem. W niektórych pracach są one jednak uwzględniane w jawny sposób, a możliwość i skutki ewentualnego pominięcia ich wpływu są analizowane, por. np. WOŹNIAK i KLEIBER [1982], KLEIBER i WOŹNIAK [1991], ANTMAN [1995]. Używana jest też metoda rozwinięcia pól trójwymiarowych po grubości, np. KIL’CZEWSKIJ [1963], KRÄTZIG [1971], NAGHDI [1972], AMBARCUMIAN [1974], LIBRESCU [1975], HAMMEL [1978], NIEMISZ i CHOMA [1991]. W przypadku materiału liniowo sprężystego, efektywne są również metody asymptotyczne, np. GOL’DENWEJZER [1976], BERDICZEWSKIJ [1980, 1983], CIARLET [2000].

Podejście bezpośrednie do formułowania mechaniki powłok jest szczególnie atrakcyjne z matematycznego punktu widzenia, a poprawność tak sformułowanej teorii można zweryfikować jedynie na drodze doświadczalnej. Natomiast podejście wyprowadzane nawiązuje od samego początku do trójwymiarowego opisu powłoki i w tym sensie może wydawać się bardziej przekonujące z inżynierskiego punktu widzenia. Oba powyższe podejścia mają ten sam cel — zbudowanie kompletnej teorii powłok — i często prowadzą do podstawowych równań, których formalna postać jest identyczna. Jednak, jak to zauważyli ERICKSEN i TRUESDELL [1957], podobne wielkości fizyczne, pojawiające się w równaniach podstawowych obu podejść, są definiowane w różny sposób, a tym samym mają różny sens fizyczny. Dlatego porównywanie teorii powłok formułowanych na podstawie tych dwóch różnych podejść jest raczej trudne (rys. 1.2.1).

1.2.2. Podejście przyjęte w tej książce

Podejście przyjęte w tej książce należy uznać raczej za podejście mieszane. Zostało ono zapoczątkowane przez REISSNER [1974, 1982] i SIMMONDS [1984a, 1997a], rozwinięte m.in. w pracach LIBAI i SIMMONDS [1983, 1998], MAKOWSKI i STUMPF [1990, 1994], CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i STUMPF [1992, 1997], oraz rozszerzone na zagadnienia dynamiki w CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i PIETRASZKIEWICZ [2000, 2002], LUBOWIECKA [2001], LUBOWIECKA i CHRÓŚCIELEWSKI [2002], MAKOWSKI i PIETRASZKIEWICZ [2002].

Traktując powłokę jako ciało materialne w sensie mechaniki ośrodków ciągłych, schemat postępowania w ramach przyjętego tu podejścia naszkicowano na rys. 1.2.2.



Rys. 1.2.2. Schemat formułowania mechaniki powłok.

Zgodnie z zamieszczonym schematem, w podejściu mieszanym zasady mechaniki dla powłok formułowane są w sposób *ściśły*, przez bezpośrednie przedstawienie ogólnych zasad mechaniki ośrodków ciągłych na powierzchni podstawowej powłoki. Formułowane w ten sposób globalne zasady mechaniki powłok wyrażone są przez wypadkowe pola sił i momentów przekrojowych, określone już na powierzchni podstawowej powłoki i uzyskane przez ścisłe scalkowanie po grubości powłoki odpowiednich pól trójwymiarowych. Z tych powierzchniowych zasad globalnych wynikają następnie lokalne równania ruchu oraz dynamiczne warunki brzegowe i warunki ciągłości na krzywych osobliwych.

W kolejnych krokach postępowania, z lokalnych postaci zasad mechaniki powłok formułuje się tożsamość całkowitą, której w szczególności można nadać sens fizyczny powierzchniowej zasady pracy wirtualnej. Przyporządkowuje ona wypadkowym wielkościom dynamicznym odpowiadające im energetycznie, w sensie pracy wirtualnej, powierzchniowe wielkości kinematyczne. Te pola mają sens fizyczny uśrednionych energetycznie po grubości wirtualnych przesunięć i obrotów oraz wirtualnych odkształceń i zgięć, które są określone tylko na powierzchni podstawowej powłoki.

Z tych wirtualnych pól kinematycznych formułuje się następnie odpowiadające im powierzchniowe pola całkowitych przesuńc i obrotów, opisujące lokalne przemieszczenie powłoki, oraz pola całkowitych odkształceń i zgieć, opisujące lokalny stan deformacji w powłoce. Te miary przemieszczeń i deformacji w powłoce formułowane są jako wielkości powierzchniowe, nie mające bezpośredniego odniesienia do trójwymiarowych pól przemieszczeń i odkształceń w powłoce traktowanej jako ciało trójwymiarowe. Taka energetycznie określona, dwuwymiarowa kinematyka powłoki wynika w sposób *jednoznaczny* ze ścisłych równań dynamiki powłok i dynamicznych warunków ubocznych oraz nie zawiera żadnych uproszczeń.

Następnie formułowane są równania konstytutywne, wiążące wprowadzone powierzchniowe pola dynamiczne i kinematyczne. Równania konstytutywne mechaniki powłok są relacjami fizycznymi, opartymi na badaniach eksperymentalnych, które zawsze są obarczone pewnym błędem, podobnie jak i równania konstytutywne mechaniki ośrodka ciągłego. Równania konstytutywne zamykają układ zależności mechaniki powłok i umożliwiają formułowanie różnych zagadnień początkowo-brzegowych, które są następnie podstawą analizy zadań szczegółowych.

Jak wynika z powyższego opisu, zastosowane w tej książce podejście do formułowania nieliniowej mechaniki powłok nie jest ani czysto wyprowadzanym, ani czysto bezpośrednim i zawiera elementy obu tych głównych postępowań. Tak zbudowana nieliniowa mechanika powłok jest *dynamicznie i kinematycznie ścisłym* odpowiednikiem dwuwymiarowym analogicznych zależności trójwymiarowych mechaniki ośrodka ciągłego.

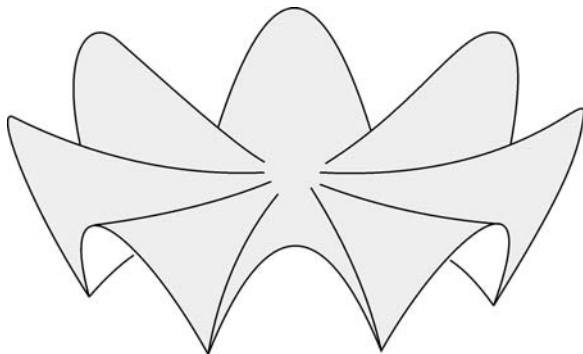
W dalszej części tego rozdziału omawiamy bardziej szczegółowo poszczególne kroki tego schematu postępowania.

1.2.3. Regularne ciało materialne typu powłoka

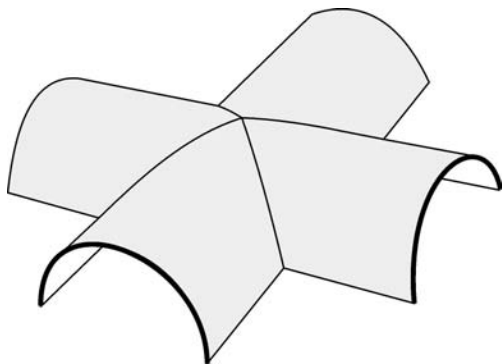
Powłoką nazywa się zwykle trójwymiarowe ciało materialne, którego jeden wymiar przestrzenny jest dużo mniejszy od dwóch pozostałych. Tym charakterystycznym wymiarem jest *grubość* powłoki. Jednak sama wielkość grubości powłoki nie jest najważniejszym czynnikiem przy formułowaniu dynamicznie i kinematycznie ścisłej teorii powłok według schematu z rys. 1.2.2.

W literaturze poświęconej teorii powłok najczęściej rozważa się regularne konstrukcje powłokowe, które można modelować matematycznie przy pomocy gładkiej powierzchni geometrycznej. Jednak już najprostsze przykłady rzeczywistych konstrukcji powłokowych, naszkicowane na rys. 1.2.3 i rys. 1.2.4, wykluczają możliwość ich modelowania pojedynczą powierzchnią geometryczną.

Ogólnie mówiąc, ciało typu powłoka (powłokopodobne) można określić przez trzy podstawowe cechy identyfikujące: powierzchnię podstawową, grubość i brzeg. Cechy te wpływają ze specyficznej geometrii kształtu konstrukcji nazywanych potocznie powłokami.



Rys. 1.2.3. Szkic rzeczywistej konstrukcji powłokowej.



Rys. 1.2.4. Inny przykład rzeczywistej konstrukcji powłokowej.

Rozważmy dowolnie ustaloną konfigurację odniesienia B pewnego ciała materialnego. Zakładamy przy tym, że B jest obszarem regularnym w sensie wymaganym w mechanice ośrodków ciągłych. Ciało materialne, którego konfiguracją odniesienia jest obszar B , nazywać będziemy *powłoką*, jeśli spełnione są pewne warunki, które sukcesywnie postaramy się precyzować.

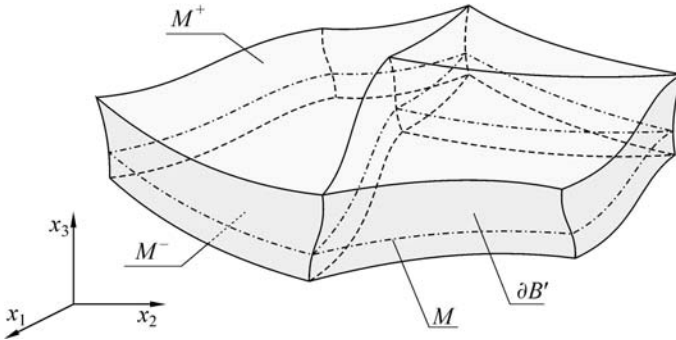
Dla trójwymiarowego ciała powłokopodobnego przyjmuje się, że brzeg ∂B obszaru B jest sumą trzech części: powierzchni *górnej* M^+ , powierzchni *dolnej* M^- i powierzchni *bocznej* $\partial B'$. Obszar B spełniający ten warunek pokazano na rys. 1.2.5. Zakładamy, że powierzchnie dolna i górna powłoki nie mają punktów wspólnych. Przyjęte założenia można zapisać w postaci

$$\partial B = M^+ \cup M^- \cup \partial B' \quad M^+ \cap M^- = \emptyset. \quad (1.2.1)$$

W przypadku powłok zamkniętych powierzchnia boczna jest zbiorem pustym. Dodatkowo zakładamy, że:

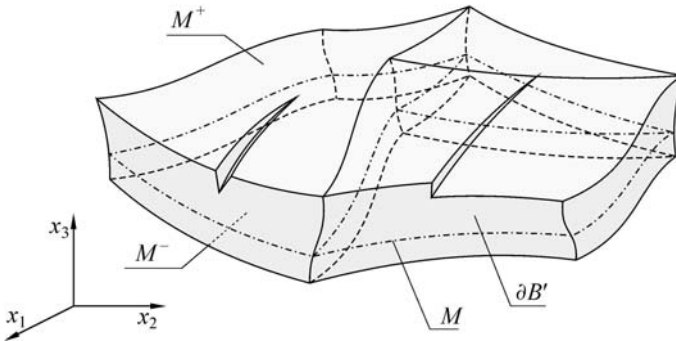
- 1) powierzchnie M^\pm powłoki są powierzchniami, w sensie definicji matematycznej, kawałkami gładkimi i spójnymi;

- 2) powierzchnia boczna powłoki $\partial B'$ jest również kawałkami gładka, ale niekoniecznie spójna, tzn. $\partial B'$ może składać się z pewnej liczby kawałkami gładkich i spójnych powierzchni.



Rys. 1.2.5. Konfiguracja odniesienia ciała typu powłoka.

Przykład obszaru naszkicowanego na rys. 1.2.5 spełnia wszystkie powyższe warunki. Warunki te są również spełnione w przypadku naszkicowanym na rys. 1.2.6. Natomiast z punktu widzenia formułowania samej teorii powłok są to dwa bardzo różne przykłady. Do problemu tego będziemy wielokrotnie powracać w dalszych rozważaniach.



Rys. 1.2.6. Konfiguracja odniesienia ciała typu powłoka.

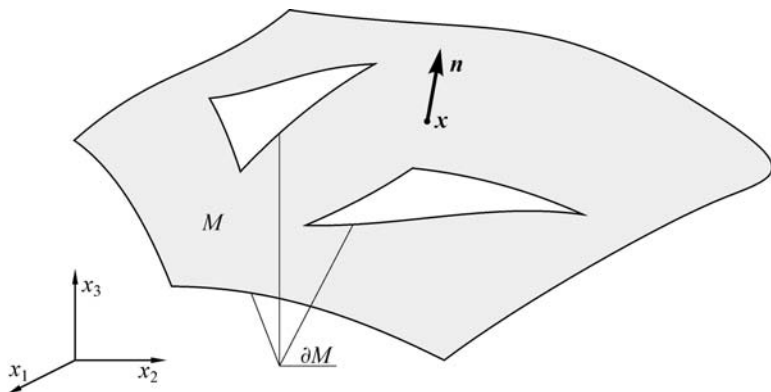
1.2.4. Powierzchnia podstawowa w konfiguracji odniesienia powłoki

Powierzchnią podstawową M powłoki w ustalonej konfiguracji odniesienia, na której będą formułowane wszystkie zależności nieliniowej mechaniki powłok, może być dowolnie wyróżniona powierzchnia zawarta między M^- a M^+ .

Wybór powierzchni podstawowej jest podyktowany głównie typem zagadnienia, które ma być analizowane. W przypadku powłok jednorodnych, cienkich, o stałej lub wolno zmiennej grubości powierzchnia M jest zwykle wybierana jako

powierzchnia środkowa obszaru B . W przypadku powłok niejednorodnych (np. warstwowych, zbrojonych, wykonanych jako mieszaniny kilku składników), cechujących się mikrostrukturą, znaczną lub znacząco zmienną grubością, w zagadnieniach dużych odkształceń lub problemach kontaktowych wygodniejszą w użyciu może okazać się powierzchnia ważona według rozkładu masy po grubości, lub inna rozsądnie określona powierzchnia, w tym również powierzchnie M^- lub M^+ .

Najprostszą klasą powłok są powłoki *regularne*. Oznacza to, że powierzchnią podstawową powłoki regularnej jest regularna (również wielospójna) powierzchnia geometryczna M , co najmniej klasy C^1 , a jej brzeg ∂M jest skończoną sumą krzywych zamkniętych. Każda taka krzywa brzegowa jest odcinkami klasy C^1 i nie zawiera punktów osobliwych typu „szpicy”. W przypadku powłok zamkniętych brzeg powierzchni podstawowej jest zbiorem pustym. Zakładając dodatkowo, że M jest powierzchnią zorientowaną, jednostkowy wektor normalny do M będziemy oznaczać przez n .



Rys. 1.2.7. Wielospójna powierzchnia gładka.

Założenie, że M jest powierzchnią klasy C^1 , w wielu zagadnieniach mechaniki powłok jest zarówno zbyt silne jak i niepożądane, a nawet niepotrzebne. W dalszym ciągu będziemy jedynie zakładali, że M jest powierzchnią lokalnie ciągłą w sensie Lipschitza. Założenie to gwarantuje, że wektor wodzący $\vec{x} = \vec{x}(\mathbf{x})$ jako odwzorowanie $\vec{x}: M \rightarrow E$ jest różniczkowalny prawie wszędzie na M i ma przedłużenie tej samej klasy na domknięcie $\text{cl } M = M \cup \partial M$. Różniczkowalność prawie wszędzie oznacza istnienie powierzchniowego gradientu⁴ $\nabla \vec{x}(\mathbf{x})$ wektora wodzącego we wszystkich punktach $\mathbf{x} \in M$, z wyjątkiem zbioru punktów powierzchni M , których miara powierzchniowa jest równa zero.

Przykładem powierzchni ciągłych w sensie Lipschitza są powierzchnie kawałkami regularne (rys. 1.2.8). Powierzchnię $M \subset E$ w przestrzeni euklidesowej

⁴ Definicje operatorów różniczkowych na powierzchni oraz ich własności są omawiane w p. 1.4.3.

nazywamy *kawałkami regularną*, jeśli składa się ona ze skończonej liczby płatów regularnych $M^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$,

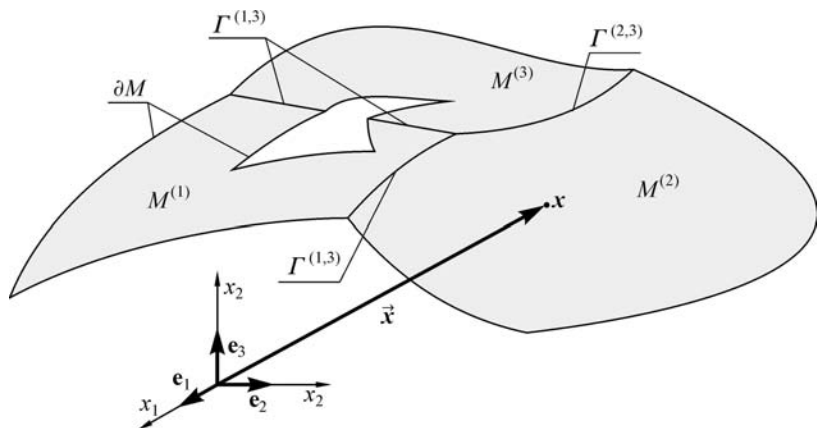
$$M = \bigcup_{k=1}^n \left(M^{(k)} \cup \partial M^{(k)} \right), \quad (1.2.2)$$

o następujących własnościach:

1. Każdy płat $M^{(k)}$ jest ograniczoną, spójną (również wielospójną) i gładką powierzchnią klasy C^m , $m \geq 1$, której brzeg $\partial M^{(k)}$ składa się ze skończonej liczby gładkich krzywych Jordana, zorientowanych zgodnie z $M^{(k)}$ i nie zawierających punktów osobliwych typu „szpicy”.
2. Żadne dwa płaty $M^{(k)}$ nie mają wspólnych punktów wewnętrznych.
3. Dwa płaty $M^{(k)}$ i $M^{(l)}$ mogą mieć co najwyżej kawałkami gładką krzywą $\Gamma^{(k,l)}$, jako wspólną część brzegów

$$\Gamma^{(k,l)} = \partial M^{(k)} \cap \partial M^{(l)}, \quad k \neq l. \quad (1.2.3)$$

4. Dwie krzywe $\Gamma^{(k,l)}$ mogą mieć co najwyżej jeden wspólny punkt.



Rys. 1.2.8. Kawałkami gładka konfiguracja odniesienia powierzchni podstawowej powłoki.

Sumę mnogościową wszystkich krzywych zdefiniowanych przez (1.2.3), będących wspólnymi częściami brzegów *dwóch* sąsiednich płatów regularnych powierzchni, oznaczamy będziemy przez Γ i nazywać *zbiorem krawędzi* (krzywą osobliwą) powierzchni kawałkami gładkiej.

1.2.5. Opis konfiguracji odniesienia ciała typu powłoka

Obszar B zajmowany przez ciało typu powłoka w ustalonej konfiguracji odniesienia możemy wyobrazić sobie jako jednoparametrową rodzinę powierzchni

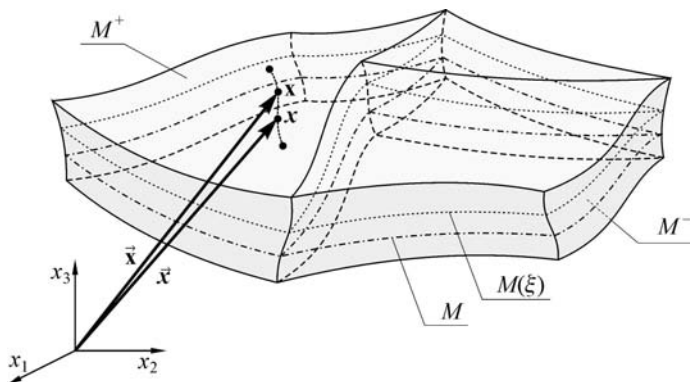
$M(\xi)$, gdzie ξ jest współrzędną po grubości powłoki. Przyjmując, że powierzchnia podstawowa M w konfiguracji odniesienia jest dowolnie umiejscowiona w obszarze B , wektor wodzący $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ typowego punktu $\mathbf{x} \in B$ można zapisać w postaci

$$\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \xi), \quad \xi \in [-h_0^-(\mathbf{x}), +h_0^+(\mathbf{x})], \quad (1.2.4)$$

gdzie $\mathbf{x} \in M$, natomiast $h_0^\pm(\mathbf{x}) \geq 0$ są nieujemnymi funkcjami spełniającymi warunek

$$h_0(\mathbf{x}) \equiv h_0^-(\mathbf{x}) + h_0^+(\mathbf{x}) > 0. \quad (1.2.5)$$

Zdefiniowana w ten sposób funkcja $h_0(\mathbf{x})$ określa *grubość* powłoki w konfiguracji odniesienia.



Rys. 1.2.9. Konfiguracja odniesienia ciała typu powłoka.

Wektory wodzące powierzchni granicznych mają postać

$$\vec{\mathbf{x}}^\pm(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \pm h_0^\pm(\mathbf{x})), \quad (1.2.6)$$

natomiast powierzchnia boczna jest opisana wektorem wodzącym

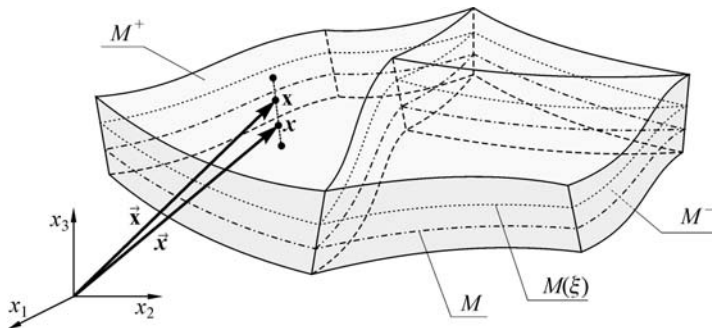
$$\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \xi), \quad (1.2.7)$$

gdzie punkty $\mathbf{x} \in \partial M = M \cap \partial B'$ mogą być określone również parametrem długości łuku s wzdłuż brzegu ∂M , $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$. Wektor wodzący (1.2.7) jest więc funkcją dwóch zmiennych: s i ξ .

W wielu przypadkach wektor wodzący (1.2.4) można przyjąć w postaci (patrz rys. 1.2.10)

$$\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \xi) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \xi \mathbf{t}_0(\mathbf{x}), \quad \xi \in [-h_0^-(\mathbf{x}), +h_0^+(\mathbf{x})], \quad (1.2.8)$$

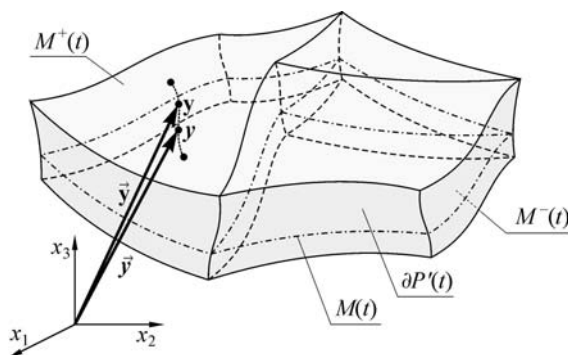
gdzie $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ jest polem wektorów jednostkowych, definiującym pierwotnie prostokątne przekroje poprzeczne powłoki i jej brzegu $\partial B'$. Dlatego $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ nie może być polem stycznym do M .



Rys. 1.2.10. Konfiguracja odniesienia ciała typu powłoka przy założeniu (1.2.8).

Najczęściej $t_0(\mathbf{x})$ jest przyjmowane jako pole prostopadłe do M , gdyż w zdecydowanej większości zadań inżynierskich powierzchnia brzegowa $\partial B'$ jest nie tylko prostokreślna, lecz również ortogonalna do M wzdłuż ∂M . Określenie pola $t_0(\mathbf{x})$, jako niekoniecznie jednostkowego i prostopadłego do M , wprowadził WOŹNIAK [1966], co może być wygodne przy analizie powłok załamanych, por. CHRÓŚCIELEWSKI [1996], CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i STUMPF [1997]. Pole wektorów $t_0(\mathbf{x})$ może być określone w sposób ciągły na całej kawałkami gładkiej powierzchni M , włączając w to krawędzie i wierzchołki.

Zauważmy, że jeśli nawet konfigurację odniesienia powłoki można opisać zależnością (1.2.8), to taki prostokreślny opis konfiguracji aktualnej tej samej powłoki nie jest już na ogół możliwy (rys. 1.2.11).



Rys. 1.2.11. Konfiguracja aktualna ciała typu powłoka.

1.3. Całkowe zasady mechaniki powłok

1.3.1. Ogólna postać przekrojowych zasad mechaniki powłok

Zgodnie z koncepcją przyjętą w poprzednim podrozdziale, poniżej sformułujemy zasady mechaniki dla powłok w taki sposób, aby były one *ściłą implikacją*

trójwymiarowych zasad mechaniki ośrodka ciągłego. Takie zasady mechaniki powłok można formalnie sformułować w sposób następujący:

Oznaczmy przez \mathcal{S} reprezentujące powłokę dwuwymiarowe kontinuum, a przez \mathcal{P} tę jego część, która odpowiada części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} . Wtedy dla każdej wielkości dynamicznej, występującej w zasadach mechaniki (1.1.4)–(1.1.6), odpowiednią wielkość w teorii powłok definiuje się następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathcal{P}, t) &\equiv \mathfrak{M}(\mathcal{P}, t), \\ \mathbf{p}(\mathcal{P}, t) &\equiv \mathfrak{P}(\mathcal{P}, t), & \mathbf{f}(\mathcal{P}, t) &\equiv \mathfrak{F}(\mathcal{P}, t), \\ \mathbf{m}(\mathcal{P}, t) &\equiv \mathfrak{M}(\mathcal{P}, t), & \mathbf{t}(\mathcal{P}, t) &\equiv \mathfrak{T}(\mathcal{P}, t). \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Te formalne definicje mówią nam, że każdej wielkości dynamicznej, przypisanej dowolnej części \mathcal{P} ciała trójwymiarowego \mathcal{B} , odpowiada jednoznacznie wielkość dynamiczna, przypisana części \mathcal{P} powłoki \mathcal{S} , oraz że wielkości te są liczbowo sobie równe. Zasadnicza różnica między wielkościami występującymi po obu stronach (1.3.1) polega na tym, że wielkości trójwymiarowe po prawej stronie równań (1.3.1) są określone na części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} , natomiast wielkości sprowadzone po lewej stronie równań (1.3.1) są określone na odpowiedniej części \mathcal{P} powłoki \mathcal{S} , rozumianej jako dwuwymiarowe kontinuum.

Wykorzystując formalne definicje (1.3.1), zasady mechaniki (1.1.4)–(1.1.6) przepisane dla powłok przyjmują postać:

Zasada zachowania masy: każda część \mathcal{P} powłoki ma masę $\mathbf{m}(\mathcal{P}, t)$, która jest wielkością niezmienniczą względem ruchu,

$$[\mathbf{m}(\mathcal{P}, t)]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (1.3.2)$$

Zasada zachowania pędu: istnieje inercjalny układ odniesienia, w którym zmiana pędu $\mathbf{p}(\mathcal{P}, t)$ części \mathcal{P} powłoki w trakcie jej ruchu w przedziale czasu $[t_1, t_2]$ jest równa całkowitemu impulsowi siły $\mathbf{f}(\mathcal{P}, t)$, działającej na \mathcal{P} w rozważanym przedziale czasu,

$$[\mathbf{p}(\mathcal{P}, t)]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(\mathcal{P}, t) dt. \quad (1.3.3)$$

Zasada zachowania momentu pędu (krętu): istnieje inercjalny układ odniesienia, w którym zmiana momentu pędu (krętu) $\mathbf{m}(\mathcal{P}, t)$ części \mathcal{P} powłoki w trakcie jej ruchu w przedziale czasu $[t_1, t_2]$ jest równa całkowitemu impulsowi momentu $\mathbf{t}(\mathcal{P}, t)$, działającego na \mathcal{P} w rozważanym przedziale czasu,

$$[\mathbf{m}(\mathcal{P}, t)]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{t}(\mathcal{P}, t) dt. \quad (1.3.4)$$

Zależności (1.3.2)–(1.3.4) są poszukiwanymi zasadami mechaniki powłok, wprowadzonymi tutaj na drodze trywialnej. Formalnie, wyłączając dziedzinę, powłokowe prawa przekrojowe mają taką samą postać jak odpowiednie prawa wyjściowej teorii trójwymiarowej. Istota problemu sprowadza się teraz do wykazania, że wszystkie wielkości występujące w (1.3.2)–(1.3.4) można rzeczywiście wyrazić w sposób *ściśły* przez pola określone jedynie na powierzchni podstawowej powłoki.

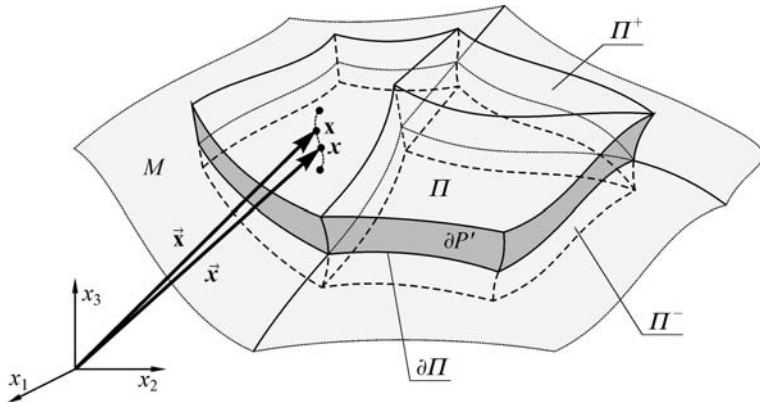
1.3.2. Regularne podciało materialne typu powłoka

Niech \mathcal{P} będzie częścią ciała \mathcal{B} typu powłoka, które w konfiguracji odniesienia zajmuje obszar $P \subset B$, o takich samych własnościach jak obszar B zajmowany przez \mathcal{B} . Tak więc, brzeg ∂P składa się z trzech rozłącznych części: powierzchni granicznych $\Pi^\pm \subset M^\pm$ i powierzchni bocznej $\partial P'$,

$$\partial P = \Pi^+ \cup \Pi^- \cup \partial P'. \quad (1.3.5)$$

Ponadto, niech Π oznacza część powierzchni podstawowej powłoki w konfiguracji odniesienia, która odpowiada części P obszaru B i niech $\partial \Pi$ oznacza brzeg Π . Tak więc, Π i $\partial \Pi$ są zdefiniowane następująco:

$$\Pi = M \cap P, \quad \partial \Pi = M \cap \partial P'. \quad (1.3.6)$$



Rys. 1.3.1. Obszar zajmowany przez podciało typu powłoka w konfiguracji odniesienia.

Poza tymi formalnymi definicjami, nie wprowadzamy tu *żadnych* założeń. Rozważane ciało typu powłoka może być wykonane z dowolnego materiału, może być ono również niejednorodne, np. mieć strukturę warstwową lub być mieszaniną dowolnej liczby różnych materiałów. Nie nakładamy tu również *żadnych* ograniczeń ani na deformację rozważanego ciała, ani też na jego grubość.

1.3.3. Gęstości masy, pędu i momentu pędu

W opisie względem konfiguracji odniesienia masa części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} , wyrażona przez gęstość masy $\rho_0(\mathbf{x})$, dana jest wzorem (1.1.9). W teorii powłok, *przekrojową gęstość masy* $m_0(\mathbf{x})$, mierzoną na jednostkę powierzchni M , definiujemy w sposób naturalny:

$$\iint_{\Pi} m_0 \, da \equiv \iiint_P \rho_0 \, dv. \quad (1.3.7)$$

Sens fizyczny tej definicji jest raczej oczywisty i nie wymaga komentarzy. Podstawowe założenie mechaniki ośrodków ciągłych wymaga, aby gęstość masy była dodatnia, $\rho_0(\mathbf{x}) > 0$, oraz aby była ona zdefiniowana prawie wszędzie, poza być może podzbiorami obszaru B , których miara Lebesgue'a jest równa zero. Definicja (1.3.7) wraz z klasycznym twierdzeniem teorii całki implikuje, że również przekrojowa gęstość masy ma te same własności, tzn. $m_0(\mathbf{x}) > 0$, i jest ona dobrze zdefiniowana we wszystkich punktach $\mathbf{x} \in M$, z wyjątkiem być może podzbiorów powierzchni M , których miara Hausdorffa jest równa zero.

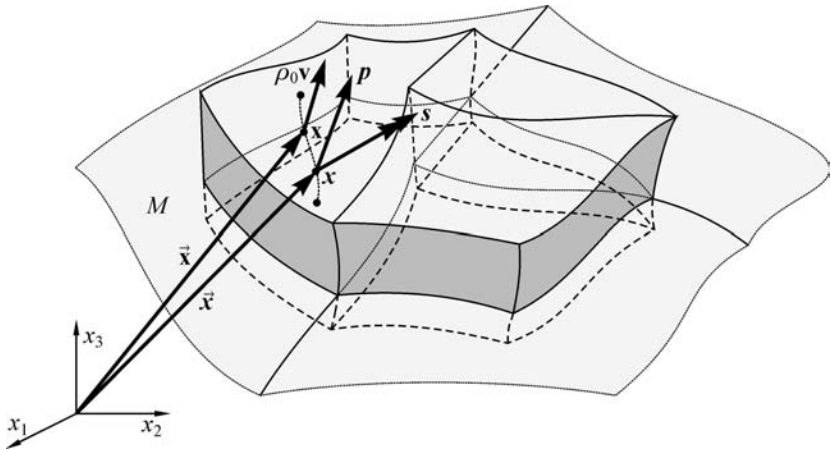
W mechanice ośrodków ciągłych pęd i moment pędu ciała są zdefiniowane przez iloczyn gęstości masy i prędkości ciała, por. (1.1.10). Jednak na tym etapie wyprowadzenia przekrojowych praw powłokowych brak jest nawet jasnej koncepcji pojęcia prędkości powłoki. Problem ten można jednak na razie ominąć, definiując *przekrojową gęstość pędu* $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ i *przekrojową gęstość momentu pędu* $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$, mierzone na jednostkę pola powierzchni podstawowej M , następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} \mathbf{p} \, da &\equiv \iiint_P \rho_0 \mathbf{v} \, dv, \\ \iint_{\Pi} (\mathbf{s} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \, da &\equiv \iiint_P \rho_0 \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{v} \, dv. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Ponieważ powierzchniowa gęstość masy m_0 jest jednoznacznie określona przez (1.3.7), można również używać zamiennie gęstości pędu i momentu pędu, $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t)$ i $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, mierzonych na jednostkę masy. Wówczas

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = m_0(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = m_0(\mathbf{x})\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t). \quad (1.3.9)$$

W ogólnej mechanice powłok nie można oczekiwać prostych definicji dla $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$, analogicznych do tych występujących po prawej stronie (1.3.8). Wyrażenia na $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ powinny być tu określone przez dodatkowe relacje konstytutywne, sprzęgające te pola dynamiczne ze zmiennymi konfiguracyjnymi i kinematycznymi powłoki. Takie relacje będziemy nazywali *kinetycznymi równaniami konstytutywnymi*.



Rys. 1.3.2. Przekrojowe gęstości pędów.

1.3.4. Przekrojowe siły i momenty

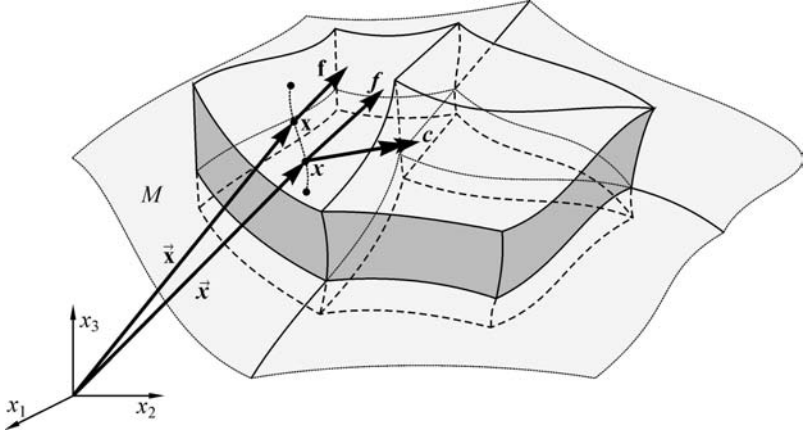
W dalszych rozważaniach wartości sił kontaktowych na powierzchniach granicznych M^\pm oznaczać będziemy przez $\pm \mathbf{t}_n^\pm = \mathbf{t}_n(\mathbf{x}^\pm, t)$, gdzie znak minus wynika z przyjętej konwencji oznaczeń.

Uwzględniając (1.3.5), całkowitą siłę $\mathfrak{F}(\mathcal{P}, t)$ i całkowity moment $\mathfrak{T}(\mathcal{P}, t)$, działające na ciało typu powłoka, można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}(\mathcal{P}, t) &= \iiint_P \mathbf{f} \, dv + \iint_{\Pi^+} \mathbf{t}_n^+ \, da^+ - \iint_{\Pi^-} \mathbf{t}_n^- \, da^- \\
 &\quad + \iint_{\partial P' \setminus \partial B_f} \mathbf{t}_n \, da^* + \iint_{\partial P' \cap \partial B_f} \mathbf{t}^* \, da^*, \\
 \mathfrak{T}(\mathcal{P}, t) &= \iiint_P \bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{f} \, dv + \iint_{\Pi^+} \bar{\mathbf{y}}^+ \times \mathbf{t}_n^+ \, da^+ - \iint_{\Pi^-} \bar{\mathbf{y}}^- \times \mathbf{t}_n^- \, da^- \\
 &\quad + \iint_{\partial P' \setminus \partial B_f} \bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{t}_n \, da^* + \iint_{\partial P' \cap \partial B_f} \bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{t}^* \, da^*.
 \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Siły masowe (objętościowe) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ i siły kontaktowe \mathbf{t}_n^\pm , działające na powierzchniach granicznych powłoki, są zwykle traktowane jako dane obciążenia zewnętrzne. Mogą więc być wspólnie ujęte w definicjach *przekrojowego wektora sił powierzchniowych* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ i *przekrojowego wektora momentów powierzchniowych* $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Pi} \mathbf{f} \, da &\equiv \iiint_P \mathbf{f} \, dv + \iint_{\Pi^+} \mathbf{t}_n^+ \, da^+ - \iint_{\Pi^-} \mathbf{t}_n^- \, da^-, \\
 \iint_{\Pi} (\mathbf{c} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f}) \, da &\equiv \iiint_P \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f} \, dv + \iint_{\Pi^+} \vec{\mathbf{y}}^+ \times \mathbf{t}_n^+ \, da^+ \\
 &\quad - \iint_{\Pi^-} \vec{\mathbf{y}}^- \times \mathbf{t}_n^- \, da^-.
 \end{aligned} \tag{1.3.11}$$



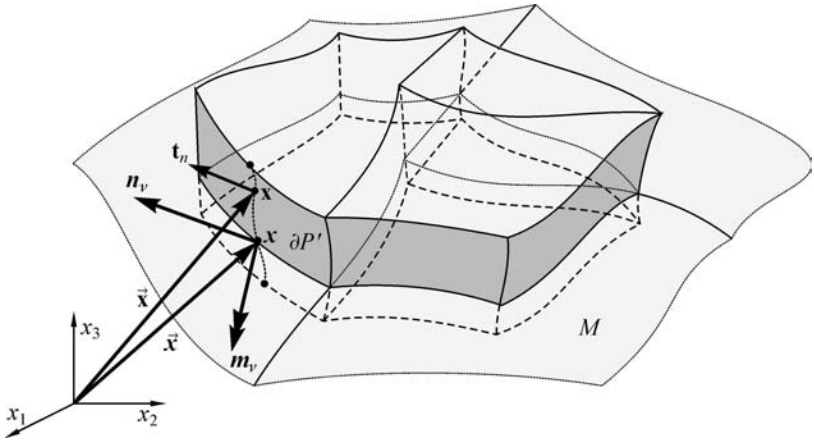
Rys. 1.3.3. Przekrojowe wektory sił i momentów powierzchniowych.

Siły kontaktowe $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t)$, działające na powierzchni bocznej $\partial P'$, określają naprężenie wewnętrzne w ciele. Wektor sił przekrojowych $\mathbf{n}_\nu(\mathbf{x}, t)$ oraz wektor momentów przekrojowych $\mathbf{m}_\nu(\mathbf{x}, t)$ wzdłuż $\partial \Pi = \partial P' \cap M$ są zdefiniowane następująco:

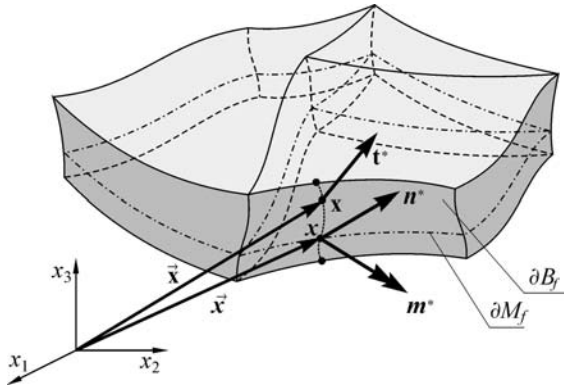
$$\begin{aligned}
 \int_{\partial \Pi} \mathbf{n}_\nu \, dl &\equiv \iint_{\partial P'} \mathbf{t}_n \, da^*, \\
 \int_{\partial \Pi} (\mathbf{m}_\nu + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}_\nu) \, dl &\equiv \iint_{\partial P'} \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{t}_n \, da^*.
 \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

W podobny sposób definiuje się *przekojową siłę* i *przekojowy moment obciążeń brzegowych*, działających na powierzchnię boczną $\partial M_f = M \cap \partial B'_f$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial M_f} \mathbf{n}^* \, dl &\equiv \iint_{\partial B'_f} \mathbf{t}^* \, da^*, \\
 \int_{\partial M_f} (\mathbf{m}^* + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}^*) \, dl &\equiv \iint_{\partial B'_f} \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{t}^* \, da^*.
 \end{aligned} \tag{1.3.13}$$



Rys. 1.3.4. Wektory sił i momentów przekrojowych.



Rys. 1.3.5. Przekrojowe wektory sił i momentów obciążeń brzegowych.

1.3.5. Całkowe prawa mechaniki powłok

Prostą konsekwencją powyższych definicji są następujące postacie sprowadzonych wielkości dynamicznych:

Masa dowolnej części powłoki dana jest wyrażeniem

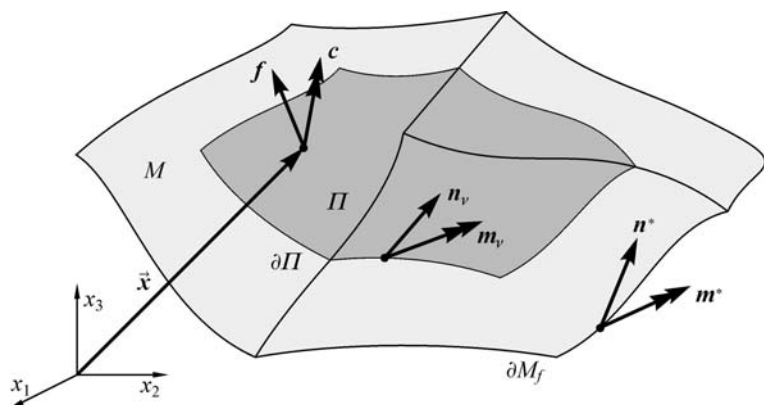
$$\mathbf{m}(\mathcal{P}, t) = \iint_{\Pi} m_0 da. \quad (1.3.14)$$

Pęd i moment pędu dowolnej części powłoki mają postać

$$\mathbf{p}(\mathcal{P}, t) = \iint_{\Pi} \mathbf{p} da, \quad \mathbf{m}(\mathcal{P}, t) = \iint_{\Pi} (s + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) da, \quad (1.3.15)$$

natomiast całkowita siła i całkowity moment, działające na dowolną część powierzchni podstawowej, przyjmują postać (rys. 1.3.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi} \mathbf{f} \, da + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{n}_\nu \, dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{n}^* \, dl, \\ \mathbf{t}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi} (\mathbf{c} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f}) \, da + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{m}_\nu + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}_\nu) \, dl \\ &\quad + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{m}^* + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}^*) \, dl. \end{aligned} \quad (1.3.16)$$



Rys. 1.3.6. Przekrojowe siły i momenty działające na dowolną część powłoki.

Powyższe wyniki stanowią istotny krok na drodze do sformułowania kompletnego układu równań nieliniowej mechaniki powłok. Wyniki te zostały tu otrzymane bez żadnych założeń upraszczających, które tak wymownie są zawsze przypisywane różnym teoriom powłok. Warto również zwrócić uwagę, że w powyższych wzorach grubość powłoki nie odgrywa żadnego znaczenia.

Podstawiając do (1.3.1) otrzymane wyrażenia (1.3.14)–(1.3.16) dla sprawdzanych do powierzchni podstawowej wielkości dynamicznych, otrzymujemy:

zasadę zachowania masy

$$\left[\iint_{\Pi} m_0 \, da \right]_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (1.3.17)$$

zasadę zachowania pędu

$$\left[\iint_{\Pi} \mathbf{p} \, da \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_{\Pi} \mathbf{f} \, da + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{n}_\nu \, dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{n}^* \, dl \right\} dt, \quad (1.3.18)$$

zasadę zachowania momentu pędu

$$\left[\iint_{\Pi} (\mathbf{s} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \, da \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_{\Pi} (\mathbf{c} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f}) \, da + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{m}_\nu + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}_\nu) \, dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{m}^* + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}^*) \, dl \right\} dt. \quad (1.3.19)$$

Z dotychczasowych rozważań wylania się więc koncepcja powłoki jako dwuwymiarowego kontinuum materialnego, reprezentowanego przez powierzchnię podstawową wyposażoną w cechy układu dynamicznego, którego ruchem w przestrzeni fizycznej rządzą zasady mechaniki (1.3.17)–(1.3.19).

Przyjęcie zasad mechaniki wyrażonych w postaci całkowej, jako punktu wyjścia formułowania teorii powłok, ma tę istotną zaletę, że wymagane warunki formalno-matematyczne są najślabszymi z możliwych. Istotnie, aby zasady (1.3.17)–(1.3.19) miały sens, wystarcza by powierzchnia M i jej brzeg ∂M były na tyle regularne, aby całka powierzchniowa i całka krzywoliniowa mogły być zdefiniowane (w sensie teorii miary). Natomiast wszystkie pola występujące w tych zasadach mogą być jedynie polami całkowanymi, czyli nie muszą być nawet polami ciągłymi.

Zasady mechaniki powłok (1.3.17)–(1.3.19), otrzymane tutaj jako ścisłe konsekwencje zasad mechaniki ośrodka ciągłego, mogą być również traktowane jako podstawowe postulaty dynamiczne nieliniowej teorii powłok. Przyjmując taki punkt widzenia, dalsze formułowanie teorii powłok może postępować bez odwoływania się do teorii trójwymiarowej. Właśnie takie podejście przyjmiemy w części dalszych rozważań, a do związków z teorią trójwymiarową powrócimy w podrozdziale 1.8.

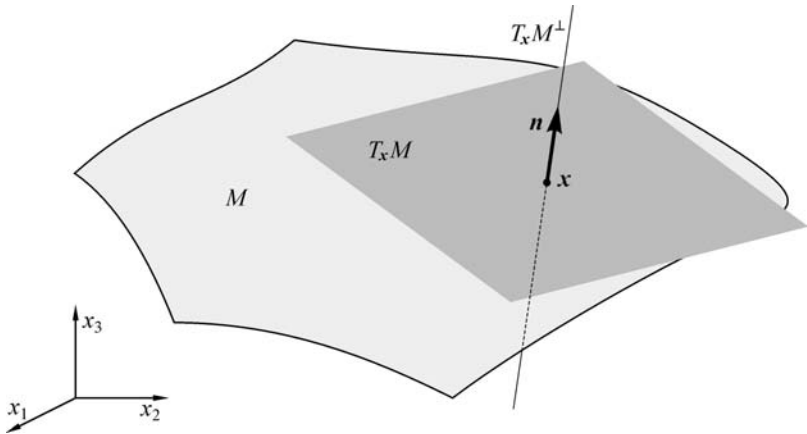
1.4. Lokalne równania ruchu i dynamiczne warunki uboczne

1.4.1. Konfiguracja odniesienia powierzchni podstawowej

Z całkowej postaci zasad zachowania masy, pędu i momentu pędu dla powłok (1.3.17)–(1.3.19) możemy teraz wyprowadzić odpowiadające im postacie lokalne. Wymaga to jednak sformułowania szeregu założeń natury czysto matematycznej,

które muszą być spełnione przez wszystkie wielkości występujące w tych zasadach. Odpowiednie założenia muszą być również przyjęte w odniesieniu do powierzchni podstawowej powłoki, co wymaga wprowadzenia szeregu definicji i sformułowania odpowiednich twierdzeń. Musimy również uściślić niektóre pojęcia z rachunku tensorowego na powierzchni.

Założmy chwilowo, że powierzchnia podstawowa M w konfiguracji odniesienia powłoki jest powierzchnią gładką. Wówczas w każdym punkcie wewnętrznym $\mathbf{x} \in M$ możemy zdefiniować płaszczyznę styczną do M , która jest graficznym przedstawieniem przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{x}}M$ w danym punkcie $\mathbf{x} \in M$ powierzchni (rys. 1.4.1). Zauważmy, że $T_{\mathbf{x}}M$ jest dwuwymiarową podprzestrzenią wektorową przestrzeni translacyjnej $E = T_{\mathbf{x}}\mathcal{E}$, a iloczyn skalarny wektorów z przestrzeni E indukuje iloczyn skalarny wektorów z przestrzeni $T_{\mathbf{x}}M$.



Rys. 1.4.1. Przestrzeń styczna i przestrzeń normalna.

Niech $L(T_{\mathbf{x}}M, E)$ oznacza przestrzeń wektorową wszystkich odwzorowań liniowych $T_{\mathbf{x}}M$ w E . Ponieważ $T_{\mathbf{x}}M$ i E są przestrzeniami wektorowymi z iloczynem skalarnym, więc przestrzeń wektorową $L(T_{\mathbf{x}}M, E)$ możemy utożsamiać z przestrzenią tensorową $E \otimes T_{\mathbf{x}}M$, gdzie \otimes oznacza iloczyn tensorowy przestrzeni wektorowych. Faktycznie, obie przestrzenie są izomorficzne, tak samo jak przestrzeń $L(T_{\mathbf{x}}M, T_{\mathbf{x}}M)$ odwzorowań liniowych $T_{\mathbf{x}}M$ w siebie jest izomorficzna z przestrzenią tensorową $T_{\mathbf{x}}M \otimes T_{\mathbf{x}}M$:

$$L(T_{\mathbf{x}}M, E) \simeq E \otimes T_{\mathbf{x}}M, \quad L(T_{\mathbf{x}}M, T_{\mathbf{x}}M) \simeq T_{\mathbf{x}}M \otimes T_{\mathbf{x}}M, \quad (1.4.1)$$

gdzie \simeq oznacza izomorfizm przestrzeni wektorowych. Na mocy izomorfizmów (1.4.1) możemy w dalszych rozważaniach korzystać ze wszystkich znanych definicji i twierdzeń klasycznego rachunku tensorowego. Poniżej ograniczymy się więc do przytoczenia kilku najczęściej wykorzystywanych dalej definicji.

Dla dowolnego tensora $\mathbf{S} \in E \otimes T_{\mathbf{x}}M$ istnieje dokładnie jeden tensor $\mathbf{S}^T \in T_{\mathbf{x}}M \otimes E$, nazywany *transpozycją* tensora \mathbf{S} , taki że

$$\mathbf{S}\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}^T\mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{u} \in T_{\mathbf{x}}M, \quad \mathbf{w} \in E. \quad (1.4.2)$$

Iloczyn skalarny w przestrzeni tensorowej $E \otimes T_{\mathbf{x}}M$ jest zdefiniowany następująco:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{S}^T\mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{T}^T), \quad \forall \mathbf{S}, \mathbf{T} \in E \otimes T_{\mathbf{x}}M. \quad (1.4.3)$$

Zauważmy, że $\mathbf{S}^T\mathbf{T} \in T_{\mathbf{x}}M \otimes T_{\mathbf{x}}M$, natomiast $\mathbf{S}\mathbf{T}^T \in E \otimes E$, w obu więc przypadkach operacja *ślada* tensora (ang. *trace*) jest dobrze zdefiniowana.

Jeśli M jest powierzchnią zorientowaną, przestrzeń wektorową E w każdym punkcie $\mathbf{x} \in M$ można przedstawić jako sumę prostą \oplus dwóch przestrzeni wektorowych (rys. 1.4.1)

$$E = T_{\mathbf{x}}\mathcal{E} = T_{\mathbf{x}}M \oplus T_{\mathbf{x}}M^{\perp}, \quad (1.4.4)$$

gdzie $T_{\mathbf{x}}M$ jest przestrzenią dwuwymiarową styczną do M w punkcie $\mathbf{x} \in M$, a $T_{\mathbf{x}}M^{\perp}$ jest przestrzenią jednowymiarową ortogonalną do $T_{\mathbf{x}}M$. Z (1.4.4) wynika, że w każdym punkcie gładkiej powierzchni M są dobrze zdefiniowane dwa operatory liniowe

$$\mathbf{I}_0(\mathbf{x}): T_{\mathbf{x}}M \rightarrow E, \quad \mathbf{P}_0(\mathbf{x}): E \rightarrow T_{\mathbf{x}}M. \quad (1.4.5)$$

Operator *inkluzji* $\mathbf{I}_0(\mathbf{x})$ odwzorowuje każdy wektor styczny $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{x}}M$ na siebie, lecz traktowany już jako element przestrzeni wektorowej $E = T_{\mathbf{x}}\mathcal{E}$, to znaczy $\mathbf{I}_0(\mathbf{x})\mathbf{u} \in E$. Z kolei, operator *projekcji* $\mathbf{P}_0(\mathbf{x})$ wzdłuż wektora normalnego $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ do powierzchni M w punkcie $\mathbf{x} \in M$ przyporządkowuje każdemu wektorowi $\mathbf{w} \in E$ jego składową styczną $\mathbf{P}_0(\mathbf{x})\mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}}M$. Przestrzeń normalna $T_{\mathbf{x}}M^{\perp}$ jest więc zdefiniowana następująco:

$$T_{\mathbf{x}}M^{\perp} = \{\mathbf{w} \in E \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{I}_0\mathbf{u} = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in T_{\mathbf{x}}M\}. \quad (1.4.6)$$

Zależność między operatorami liniowymi (tensorami) $\mathbf{I}_0(\mathbf{x})$ i $\mathbf{P}_0(\mathbf{x})$ oraz tensorami jednostkowymi $\mathbf{1}_0(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}M \otimes T_{\mathbf{x}}M$ i $\mathbf{1} \in E \otimes E$ ilustruje następujący diagram.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightleftharpoons{\mathbf{1}} & E \\ \mathbf{I}_0(\mathbf{x}) \uparrow & & \downarrow \mathbf{P}_0(\mathbf{x}) \\ T_{\mathbf{x}}M & \xrightleftharpoons{\mathbf{1}_0(\mathbf{x})} & T_{\mathbf{x}}M \end{array}$$

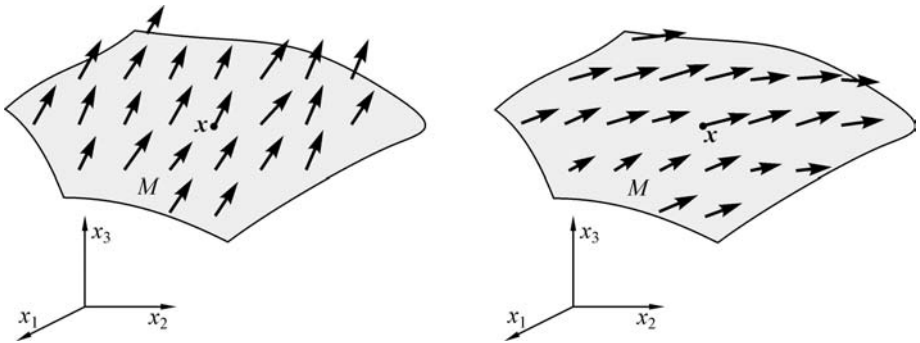
Rys. 1.4.2. Kanoniczne operatory w regularnym punkcie powierzchni.

Wprowadzone tutaj pojęcia operatorów kanonicznych i różniczkowe operatory na powierzchniach, wprowadzone w p. 1.4.3, są szczegółowo omawiane w pracach GURTIN i MURDOCH [1975], MURDOCH [1976], MURDOCH i COHEN [1979], MAN i COHEN [1986] oraz MURDOCH [1990].

1.4.2. Pola tensorowe na powierzchni

Niech M będzie daną powierzchnią w przestrzeni euklidesowej \mathcal{E} . Odwzorowanie $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$, które każdemu punktowi $\mathbf{x} \in M$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą, nazywamy *polem skalarnym* na M . Podobnie, odwzorowanie $\mathbf{u}: M \rightarrow E$ nazywamy *przestrzennym polem wektorowym* na M . Zbiory wszystkich pól skalarnych i pól wektorowych na M oznaczać będziemy, odpowiednio, przez $C(M, \mathbb{R})$ i $C(M, E)$. Te definicje nie nakładają żadnych ograniczeń na M : nie musi być ona ani powierzchnią gładką, ani nawet orientowalną. Jednak własności pól powierzchniowych, a w szczególności ich różniczkowalność, zależą w istotny sposób od regularności samej powierzchni.

Jeśli M jest powierzchnią gładką co najmniej klasy C^1 , to w każdym jej punkcie istnieje dobrze zdefiniowana przestrzeń styczna $T_{\mathbf{x}}M$. W takim przypadku można zdefiniować *styczne pole wektorowe* na M , tzn. pole wektorowe takie, że $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}M$ w każdym punkcie $\mathbf{x} \in M$. Zbiór wszystkich takich pól oznaczać będziemy przez $C(TM)$.

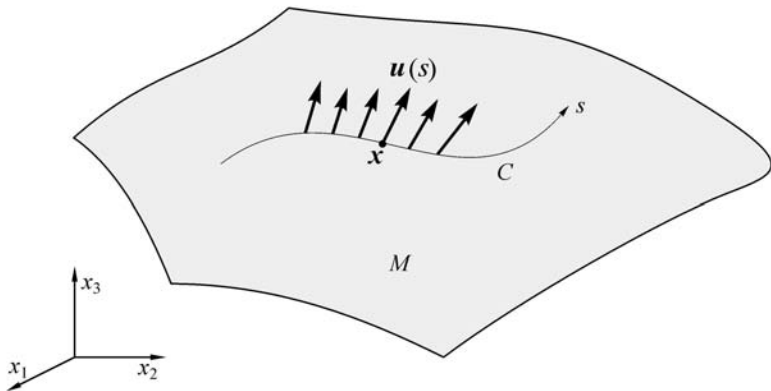


Rys. 1.4.3. Przestrzenne i styczne pole wektorowe na powierzchni.

1.4.3. Powierzchniowe operatory różniczkowe

Załóżmy, że M jest powierzchnią gładką klasy C^m , $m \geq 1$, bez brzegu. Każdy punkt $\mathbf{x} \in M$ jest więc punktem wewnętrznym tej powierzchni. Niech $\mathbf{u}: M \rightarrow E$ będzie danym polem wektorowym na M , a $C \subset M$ krzywą gładką określoną wektorem wodzącym w postaci parametrycznej $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(s)$. Wówczas pole $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, rozpatrywane wzdłuż krzywej C , jest polem wektorowym zależnym również od skalarnego parametru s , rys. 1.4.4:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(s)). \quad (1.4.7)$$



Rys. 1.4.4. Pole wektorowe wzdłuż krzywej na powierzchni.

Wektor $\vec{x}'(\mathbf{x}) \equiv \frac{d}{ds}\vec{x}(\mathbf{x}(s))$ jest wektorem stycznym do krzywej C w każdym punkcie $\mathbf{x}(s) \in C$.

Pole wektorowe $\mathbf{u}: M \rightarrow E$ nazywamy *różniczkowalnym* w punkcie $\mathbf{x} \in M$, jeśli istnieje odwzorowanie liniowe $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}): T_{\mathbf{x}}M \rightarrow E$ takie, że⁵

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) \vec{x}'(\mathbf{x}), \quad (1.4.8)$$

dla każdej krzywej C przechodzącej przez ten punkt. Jeśli $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$ istnieje, to jest jednoznacznie określone i wówczas mówimy, że odwzorowanie liniowe (tensor)

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in L(T_{\mathbf{x}}M, E) \simeq E \otimes T_{\mathbf{x}}M \quad (1.4.9)$$

jest *powierzchniowym gradientem* tego pola w danym punkcie.

Pole wektorowe $\mathbf{u}: M \rightarrow E$ nazywamy *różniczkowalnym* na powierzchni M , jeśli jest różniczkowalne w każdym jej punkcie. Wówczas powierzchniowy gradient jest polem tensorowym na M , a więc odwzorowaniem

$$\nabla \mathbf{u}: M \rightarrow L(T_{\mathbf{x}}M, E) \simeq E \otimes T_{\mathbf{x}}M, \quad \mathbf{x} \rightarrow \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (1.4.10)$$

Mówimy, że $\mathbf{u}: M \rightarrow E$ jest *polem wektorowym klasy C^1* na M , jeśli jest ono różniczkowalne, a powierzchniowy gradient $\nabla \mathbf{u}$ jest polem ciągłym. Jeśli pola wektorowe $\mathbf{u}: M \rightarrow E$ i $\mathbf{w}: M \rightarrow E$ są różniczkowalne, wówczas pole $\lambda \mathbf{u} + \mathbf{w}$ jest również różniczkowalne na M dla każdej liczby rzeczywistej λ oraz

$$\nabla(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{w}) = \lambda \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{w}. \quad (1.4.11)$$

⁵W tej książce zachowujemy klasyczne oznaczenia ∇ i Div dla operatorów w trzech wymiarach, natomiast odpowiadające im operatory na powierzchni M oznaczamy kursywą: ∇ , Div .

W szczególnym przypadku pola skalarnego $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$, definicja (1.4.8) przyjmuje postać

$$\phi'(x) = \nabla \phi(x) \cdot \vec{x}'(x). \quad (1.4.12)$$

Wektor wodzący \vec{x} powierzchni M jest polem wektorowym, $\vec{x}: M \rightarrow E$, oraz różniczkowalnym, jeśli powierzchnia jest gładka. Wówczas

$$\vec{x}'(x) = (\nabla \vec{x}(x))\vec{x}'(x) = \mathbf{I}_0(x)\vec{x}'(x). \quad (1.4.13)$$

Tak więc, gradient powierzchniowy wektora wodzącego jest po prostu operatorem inkluzji.

Jeśli $\mathbf{u} \in C^k(TM)$, $k \geq 1$, jest polem wektorowym klasy C^k , to operator powierzchniowej dywergencji $Div \mathbf{u} \in C^{k-1}(M)$ jest polem skalarnym zdefiniowanym punktowo przez

$$Div \mathbf{u}(x) = \text{tr}(\nabla \mathbf{u}(x)). \quad (1.4.14)$$

Ponieważ $\nabla \mathbf{u} \in C^{k-1}(TM \otimes TM)$ jest stycznym polem tensorowym, więc jego ślad jest dobrze zdefiniowany. Dla dowolnych pól $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in C^1(TM)$ i każdej liczby rzeczywistej $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$Div(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{w}) = \lambda Div \mathbf{u} + Div \mathbf{w}. \quad (1.4.15)$$

Jeśli $\mathbf{S} \in C^k(E \otimes TM)$, to pole tensorowe $Div \mathbf{S} \in C^{k-1}(M, E)$ jest zdefiniowane przez zależność

$$(Div \mathbf{S}) \cdot \mathbf{k} = Div(\mathbf{S}^T \mathbf{k}), \quad \forall \mathbf{k} \in E. \quad (1.4.16)$$

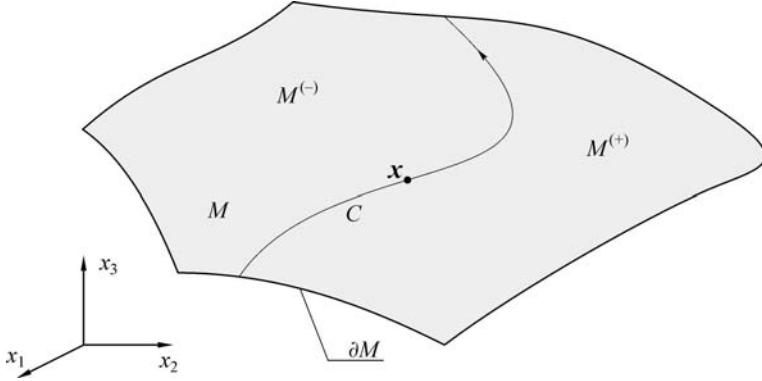
Ponieważ $\mathbf{S}^T \mathbf{k}$ jest stycznym polem wektorowym dla każdego stałego wektora $\mathbf{k} \in E$, więc prawa strona jest dobrze zdefiniowana.

Założenie, że M jest powierzchnią klasy C^1 jest zarówno zbyt silne jak i niepożądane, a nawet niepotrzebne. W wielu przypadkach wystarczy założyć, że M jest powierzchnią lokalnie ciąglą w sensie Lipschitza. Założenie to gwarantuje, że wektor wodzący $\vec{x} = \vec{x}(x)$, jako odwzorowanie $\vec{x}: M \rightarrow E$, jest różniczkowalny prawie wszędzie na M oraz ma przedłużenie tej samej klasy na domknięcie $\text{cl } M = M \cup \partial M$. Różniczkowalność prawie wszędzie oznacza istnienie powierzchniowego gradientu $\nabla \vec{x}(x)$ wektora wodzącego we wszystkich punktach $x \in M$, z wyjątkiem zbioru punktów powierzchni M , których miara powierzchniowa jest równa zero. Mniej formalnie oznacza to, że prawie we wszystkich punktach $x \in M$ istnieje przestrzeń styczna $T_x M$ do powierzchni M , geometrycznie reprezentowana przez płaszczyznę styczną.

1.4.4. Krzywe osobliwe względem pól powierzchniowych

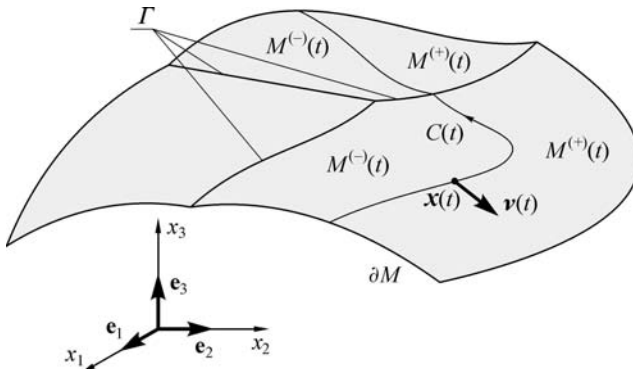
Niech $\boldsymbol{\eta}(x, t)$ będzie pewnym polem (być może zależnym od czasu) o wartościach w dowolnej przestrzeni wektorowej F , w tym również E lub \mathbb{R} . Załóżmy, że pole $\boldsymbol{\eta}(x, t)$ jest określone we wszystkich punktach powierzchni M , z wyjątkiem być może punktów należących do izolowanych krzywych.

Niech krzywa C dzieli powierzchnię M na dwie rozłączne części $M^{(-)}$ i $M^{(+)}$, będąc jednocześnie częścią ich wspólnych brzegów, rys. 1.4.5. Jeśli $C \subset M$ jest krzywą, wzdłuż której pole $\eta(\mathbf{x}, t)$ nie jest ciągle, ale ma skończone obustronne granice $\eta^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)$ w każdym punkcie $\mathbf{x} \in C$ to mówimy, że C jest *krzywą osoblwą* względem pola $\eta(\mathbf{x}, t)$. Aby pole $\eta(\mathbf{x}, t)$, dla którego C jest krzywą osoblwą, miało granice $\eta^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)$, potrzeba i wystarcza, aby $\eta(\mathbf{x}, t)$ było ciągle we wnętrzach $M^{(-)}$ i $M^{(+)}$ oraz miało ciągle przedłużenia na domknięcia.



Rys. 1.4.5. Stacjonarna krzywa osoblwa względem pola na powierzchni.

Powyzsze definicje odnoszą się również do ogólniejszej sytuacji, gdy $C(t)$ jest krzywą zależną od czasu, a M nie jest powierzchnią gładką, rys. 1.4.6. Takie krzywe $C(t)$ nazywać będziemy *krzywymi ruchomymi* (dynamicznymi). Dziela one powierzchnię M na dwie rozłączne części $M^{(-)}(t)$ i $M^{(+)}(t)$, które również zależą wówczas od czasu. Jeśli $C(t) \subset M$ jest krzywą ruchomą, wzdłuż której pole $\eta(\mathbf{x}, t)$ nie jest ciągle, ale ma skończone obustronne granice $\eta^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)$ w każdym punkcie $\mathbf{x} \in C(t)$, to mówimy, że $C(t)$ jest *ruchomą krzywą osoblwą* względem pola $\eta(\mathbf{x}, t)$.



Rys. 1.4.6. Ruchoma krzywa osoblwa względem pola na powierzchni.

Jeśli $C(t)$ jest ruchomą krzywą osobliwą względem pola $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$, to *skok* $\llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket$ tego pola w punktach $\mathbf{x} \in C(t)$ jest zdefiniowany następująco:

$$\llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\eta}^{(+)}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\eta}^{(-)}(\mathbf{x}, t). \quad (1.4.17)$$

Podstawy termodynamiki powłok z ruchomymi krzywymi osobliwymi opracowali MAKOWSKI i PIETRASZKIEWICZ [2002]. Ruchome krzywe osobliwe mogą modelować powierzchniowe nieciągłe zjawiska dynamiczne jak np. ruch czoła fali powierzchniowej, ruch granic przekształcenia fazowego (por. EREMEYEV i PIETRASZKIEWICZ [2004]), dynamikę pęknięć w powłoce itp. W tej książce ograniczamy się tylko do przedstawienia teorii *stacjonarnych* krzywych osobliwych.

Założmy, że pole $\boldsymbol{\eta}: M \rightarrow F$ jest różniczkowalne na M , z wyjątkiem być może punktów należących do krzywej C . Wówczas $\nabla \boldsymbol{\eta}$ istnieje we wszystkich punktach należących do $\text{int } M^{(-)}$ i $\text{int } M^{(+)}$. Jeśli ponadto $\nabla \boldsymbol{\eta}$ ma jednostronne granice we wszystkich punktach należących do C i granice te są skończone, to skok powierzchniowego gradientu $\nabla \boldsymbol{\eta}$ jest zdefiniowany następująco:

$$\llbracket \nabla \boldsymbol{\eta} \rrbracket(\mathbf{x}) = (\nabla \boldsymbol{\eta})^{(+)}(\mathbf{x}) - (\nabla \boldsymbol{\eta})^{(-)}(\mathbf{x}). \quad (1.4.18)$$

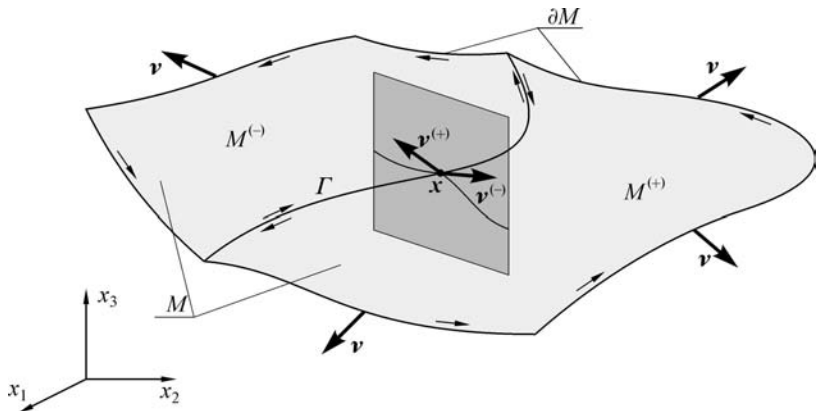
Jeśli pole $\boldsymbol{\eta}$ i jego powierzchniowe gradienty aż do rzędu $k - 1$ włącznie są ciągle wzdłuż C , lecz gradienty rzędu k i wyższego rzędu doznają skoku na C , to C nazywa się *krzywą osobliwą rzędu k* względem pola $\boldsymbol{\eta}$. Oznacza to, że $\llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket = \mathbf{0}$ i $\llbracket \nabla^{(l)} \boldsymbol{\eta} \rrbracket = \mathbf{0}$ dla $l = 1, 2, \dots, k - 1$, natomiast $\llbracket \nabla^{(k)} \boldsymbol{\eta} \rrbracket \neq \mathbf{0}$. Najsilniejszą osobliwością jest więc osobliwość rzędu zero, w którym to przypadku samo pole $\boldsymbol{\eta}$ nie jest polem ciągłym wzdłuż krzywej C .

Założmy, że M jest powierzchnią gładką. Pole $\boldsymbol{\eta}$ na M jest kawałkami ciągle na M , jeśli istnieje podział $\{M^{(1)}, \dots, M^{(p)}\}$ powierzchni M taki, że ograniczenie pola $\boldsymbol{\eta}$ do każdego $M^{(k)}$ jest ciągle i ma ciągle rozszerzenia do domknięcia $\text{cl } M^{(k)} = M^{(k)} \cup \partial M^{(k)}$. Mniej oczywistym jest precyzyjne sformułowanie ograniczeń nakładanych na $M^{(k)}$. W istocie, nie istnieje w literaturze matematycznej formalna teoria pól kawałkami gładkich, z wyjątkiem przypadku pól określonych na przestrzeni jednowymiarowej.

Pole $\boldsymbol{\eta}: M \rightarrow F$ jest *kawałkami gładkie* na $\text{cl } M = M \cup \partial M$, jeśli istnieje podział $\{M^{(1)}, \dots, M^{(n)}\}$ powierzchni M taki, że dla każdego $M^{(k)}$ gradient $\nabla \boldsymbol{\eta}$ istnieje w $\text{int } M^{(k)}$ i jest on ciągły na $\text{cl } M = M \cup \partial M$.

Przykładem stacjonarnych krzywych osobliwych względem pól tensorowych na powierzchni są krawędzie Γ powierzchni kawałkami gładkich. Jeśli $\boldsymbol{S}(\mathbf{x}, t)$ jest polem tensorowym na M takim, że $\boldsymbol{S}(\mathbf{x}, t) \in E \otimes T_{\mathbf{x}}M$ w każdym regularnym punkcie powierzchni kawałkami gładkiej, to lewo- i prawostronne granice w punkcie krzywej osobliwej, będącej krawędzią tej powierzchni, są zdefiniowane następująco (rys. 1.4.7):

$$\mathbf{s}_{\nu}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{S}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\nu}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t). \quad (1.4.19)$$



Rys. 1.4.7. Definiowanie skoku pola na powierzchni kawałkami gładkiej.

Wówczas skok tego pola wzdłuż krawędzi definiujemy następująco:

$$[s_\nu] = [S\nu] = s_\nu^{(+)} + s_\nu^{(-)}. \quad (1.4.20)$$

W szczególnym przypadku, gdy M jest powierzchnią gładką, a orientacja C jest zgodna z orientacją $\partial M^{(-)}$, wówczas $\nu = \nu^{(-)} = -\nu^{(+)}$ i definicja (1.4.20) redukuje się do postaci

$$[s_\nu] = S^{(+)}\nu^{(+)} + S^{(-)}\nu^{(-)} = -S^{(+)}\nu + S^{(-)}\nu = -\llbracket S \rrbracket \nu. \quad (1.4.21)$$

1.4.5. Twierdzenia całkowe dla pól powierzchniowych

Niech $M \subset \mathcal{E}$ będzie płatem regularnym, spójnym, lecz niekoniecznie jedno-spójnym, którego brzeg ∂M jest skończoną sumą kawałkami gładkich krzywych zamkniętych zorientowanych zgodnie z M i nie zawierających punktów osobliwych typu „szpicy”. Jeśli \mathbf{u} jest polem wektorów stycznych na M , tj. $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}M$ w każdym punkcie $\mathbf{x} \in M$, klasy C^1 lub wyższej na $\text{int } M$ i mającym przedłużenie tej samej klasy na domknięcie $\text{cl } M = M \cup \partial M$, to

$$\int_{\partial M} \mathbf{u} \cdot \nu \, dl = \iint_M \text{Div } \mathbf{u} \, da, \quad (1.4.22)$$

gdzie $\nu(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}M$ jest jednostkowym wektorem zewnętrznej normalnej do brzegu w każdym punkcie regularnym $\mathbf{x} \in \partial M$.

W przypadku wielospójnego płata powierzchni regularnej M , całka wzdłuż brzegu ∂M w twierdzeniu (1.4.22) jest sumą całek po wszystkich krzywych zamkniętych Γ_k tworzących brzeg:

$$\int_{\partial M} \mathbf{u} \cdot \nu \, dl = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} \mathbf{u} \cdot \nu \, dl. \quad (1.4.23)$$

Jako konsekwencję (1.4.22), przy tych samych założeniach można udowodnić szereg twierdzeń dla innych pól powierzchniowych. W szczególności, jeśli $\mathbf{S}(\mathbf{x}) \in E \otimes T_{\mathbf{x}}M$ jest polem tensorowym, to

$$\int_{\partial M} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl = \iint_M \text{Div } \mathbf{S} \, da. \quad (1.4.24)$$

Jeśli M jest powierzchnią zamkniętą $\partial M = \emptyset$, wówczas całka wzdłuż brzegu znika.

Niech $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in E$ będzie przestrzennym polem wektorowym na M a $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ polem tensorowym jak wyżej. Wówczas jako konsekwencje twierdzenia (1.4.24) słuszne są następujące zależności:

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \mathbf{u} \otimes \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl &= \iint_M \{ \mathbf{u} \otimes (\text{Div } \mathbf{S}) + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{S}^T \} \, da, \\ \int_{\partial M} \mathbf{u} \cdot \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl &= \iint_M \{ \mathbf{u} \cdot (\text{Div } \mathbf{S}) + \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u} \} \, da, \\ \int_{\partial M} \mathbf{u} \wedge \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl &= \iint_M \{ \mathbf{u} \wedge (\text{Div } \mathbf{S}) + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{S}^T - \mathbf{S} (\nabla \mathbf{u})^T \} \, da, \\ \int_{\partial M} \mathbf{u} \times \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl &= \iint_M \{ \mathbf{u} \times (\text{Div } \mathbf{S}) - \text{ad}^{-1}((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{S}^T - \mathbf{S} (\nabla \mathbf{u})^T) \} \, da, \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

gdzie \wedge jest iloczynem zewnętrznym wektorów. Przypomnijmy (zob. RYMARZ [1993]), że iloczyn zewnętrzny \wedge dwóch wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ jest tensorem skośnie symetrycznym zdefiniowanym następująco: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$. We wzorze (1.4.25)₄ operator $\text{ad}: E \rightarrow E \wedge E$ jest odwzorowaniem przestrzeni wektorowej E w przestrzeń tensorów skośnie symetrycznych $E \wedge E$, które dowolnemu wektorowi \mathbf{w} przyporządkowuje tensor skośnie symetryczny \mathbf{W} taki, że $\mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$ dla każdego wektora \mathbf{u} . Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowany operator ad jest izomorfizmem algebr Liego E i $E \wedge E$. W algebrze Liego E klasyczny iloczyn wektorowy spełnia rolę nawiasu Liego, natomiast w algebrze Liego $E \wedge E$ nawias Liego jest komutatorem. Przypomnijmy również, że komutator dwóch tensorów \mathbf{A} i \mathbf{B} jest zdefiniowany jako $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}$. Zauważmy przy tym, że jeśli \mathbf{A} i \mathbf{B} są tensorami skośnie symetrycznymi, to $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ jest również tensorem skośnie symetrycznym.

1.4.6. Uogólnione twierdzenia całkowe

Niech $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ będzie pewnym polem całkwalnym na regularnej powierzchni M . Warunek całkwalności nie wymaga, aby pole $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ było ciągłe. Jeśli krzywa

$C \subset M$ jest zbiorem osobliwym względem tego pola i miara powierzchniowa Hausdorffa zbioru C jest równa zeru, $\mathcal{H}^2(C) = 0$, to dla każdego $\Pi \subset M$ mamy

$$\iint_{\Pi} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t) \, da = \iint_{\Pi \setminus C} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t) \, da. \quad (1.4.26)$$

Niech Γ będzie stacjonarną krzywą osobliwą względem pola tensorowego $\mathbf{S} \in C(E \otimes TM)$, która dzieli M na dwie rozłączne części $M^{(-)}$ i $M^{(+)}$, rys. 1.4.5. Załóżmy, że \mathbf{S} jest polem różniczkowalnym w punktach wewnętrznych $M^{(-)}$ i $M^{(+)}$ oraz ma skończone granice w punktach regularnych krzywej C . Zgodnie z (1.4.26), całkę po powierzchni M z powierzchniowej dywergencji pola \mathbf{S} możemy przedstawić jako sumę całek po $M^{(-)}$ i $M^{(+)}$:

$$\iint_M \text{Div } \mathbf{S} \, da = \iint_{M \setminus C} \text{Div } \mathbf{S} \, da = \iint_{M^{(-)}} \text{Div } \mathbf{S} \, da + \iint_{M^{(+)}} \text{Div } \mathbf{S} \, da. \quad (1.4.27)$$

Stosując twierdzenie (1.4.24) oddzielnie na $M^{(-)}$ i $M^{(+)}$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \iint_{M^{(-)}} \text{Div } \mathbf{S} \, da &= \int_{\partial M^{(-)} \setminus C} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl + \int_C \mathbf{S}^{(-)} \boldsymbol{\nu}^{(-)} \, dl, \\ \iint_{M^{(+)}} \text{Div } \mathbf{S} \, da &= \int_{\partial M^{(+)} \setminus C} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl + \int_C \mathbf{S}^{(+)} \boldsymbol{\nu}^{(+)} \, dl. \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

Podstawienie (1.4.28) do (1.4.27) prowadzi do

$$\iint_{M \setminus C} \text{Div } \mathbf{S} \, da = \int_{\partial M} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl + \int_C (\mathbf{S}^{(-)} \boldsymbol{\nu}^{(-)} + \mathbf{S}^{(+)} \boldsymbol{\nu}^{(+)}) \, dl. \quad (1.4.29)$$

Wykorzystując teraz definicje (1.4.19) i (1.4.20), mamy

$$\iint_{M \setminus C} \text{Div } \mathbf{S} \, da = \int_{\partial M} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl + \int_C [\mathbf{S} \boldsymbol{\nu}] \, dl. \quad (1.4.30)$$

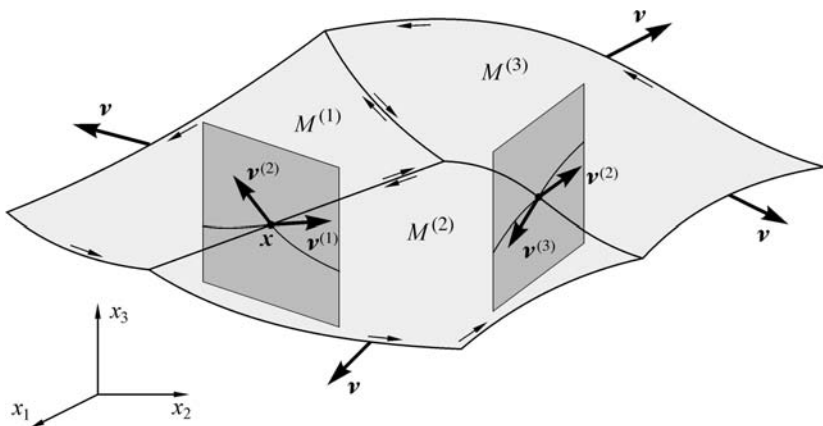
Przyjmując, że krzywa C ma orientację zgodną z $\partial M^{(-)}$, wówczas $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^{(-)} = -\boldsymbol{\nu}^{(+)}$ i z (1.4.30) otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl &= \iint_{M \setminus C} \text{Div } \mathbf{S} \, da - \int_C [\mathbf{S} \boldsymbol{\nu}] \, dl \\ &= \iint_{M \setminus C} \text{Div } \mathbf{S} \, da + \int_C \llbracket \mathbf{S} \rrbracket \boldsymbol{\nu} \, dl. \end{aligned} \quad (1.4.31)$$

Twierdzenie (1.4.31), wyprowadzone tu dla powierzchni regularnej M , można uogólnić na przypadek powierzchni kawałkami gładkich. Niech M będzie kawałkami gładką powierzchnią klasy C^r , $r \geq 1$, z brzegiem ∂M zorientowanym zgodnie z M . Wówczas zbiór krawędzi Γ (stacjonarna krzywa osobiwa) jest zdefiniowany jako suma wszystkich krzywych $\Gamma^{(k,l)}$, $k \neq l$, będących wspólnym brzegiem każdych dwóch sąsiednich i rozłącznych płatów $M^{(k)}$ i $M^{(l)}$, rys. 1.4.8. Tak więc,

$$M = \bigcup_{k=1}^n \text{cl } M^{(k)}, \quad \Gamma = \bigcup_{k,l=1, k \neq l}^n \Gamma^{(k,l)}. \quad (1.4.32)$$

W każdym regularnym punkcie $\mathbf{x} \in \Gamma^{(k,l)}$ są określone jednostkowe wektory normalne $\mathbf{n}^{(k)}$ i $\mathbf{n}^{(l)}$, wynikające z orientacji $M^{(k)}$ i $M^{(l)}$. Również jednostkowe wektory $\boldsymbol{\nu}^{(k)}$ oraz $\boldsymbol{\nu}^{(l)}$ są określone w przestrzeniach stycznych $T_{\mathbf{x}}M^{(k)}$ i $T_{\mathbf{x}}M^{(l)}$.



Rys. 1.4.8. Powierzchnia kawałkami gładka.

Niech $\mathbf{S} \in C(F \otimes TM)$ będzie polem tensorowym na kawałkami gładkiej powierzchni M takim, że istnieją wszystkie skończone granice jednostronne w punktach należących do zbioru krawędzi Γ

$$\mathbf{s}_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{S}^{(k)}(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}^{(k)}(\mathbf{x}). \quad (1.4.33)$$

Wówczas całkę powierzchniową dywergencji pola \mathbf{S} po całej powierzchni M możemy zapisać jako sumę całek po płatach $M^{(k)}$:

$$\iint_M \text{Div } \mathbf{S} \, da = \iint_{M \setminus \Gamma} \text{Div } \mathbf{S} \, da = \sum_{k=1}^n \iint_{M^{(k)}} \text{Div } \mathbf{S} \, da. \quad (1.4.34)$$

Z twierdzenia (1.4.24) zastosowanego do każdego płata oddzielnie mamy

$$\iint_{M^{(k)}} \text{Div } \mathbf{S} \, da = \int_{\partial M^{(k)}} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl = \int_{\partial M^{(k)} \setminus \Gamma} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl + \int_{\partial M^{(k)} \cap \Gamma} \mathbf{S}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)} \, dl, \quad (1.4.35)$$

i sumując po wszystkich płatach otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \iint_{M^{(k)}} \operatorname{Div} \mathbf{S} \, da &= \sum_{k=1}^n \int_{\partial M^{(k)} \setminus \Gamma} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl \\ &+ \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^n \int_{\partial M^{(k)} \cap \Gamma^{(k,l)}} (\mathbf{S}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)} + \mathbf{S}^{(l)} \boldsymbol{\nu}^{(l)}) \, dl. \end{aligned} \quad (1.4.36)$$

Uwzględniając następnie, że

$$\sum_{k=1}^n \int_{\partial M^{(k)} \setminus \Gamma} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl = \int_{\partial M} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl \quad (1.4.37)$$

oraz

$$\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^n \int_{\partial M^{(k)} \cap \Gamma^{(k,l)}} (\mathbf{S}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)} + \mathbf{S}^{(l)} \boldsymbol{\nu}^{(l)}) \, dl = \int_{\Gamma} (\mathbf{S}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)} + \mathbf{S}^{(l)} \boldsymbol{\nu}^{(l)}) \, dl, \quad (1.4.38)$$

z (1.4.36) otrzymujemy

$$\iint_{M \setminus \Gamma} \operatorname{Div} \mathbf{S} \, da = \int_{\partial M} \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl + \int_{\Gamma} [\mathbf{S} \boldsymbol{\nu}] \, dl, \quad (1.4.39)$$

gdzie skok pola \mathbf{S} w każdym regularnym punkcie $\mathbf{x} \in \Gamma^{(k,l)}$, $k \neq l$, krawędzi dwóch sąsiednich płatów powierzchni M jest zdefiniowany następująco:

$$[\mathbf{s} \boldsymbol{\nu}] = [\mathbf{S} \boldsymbol{\nu}] = \mathbf{S}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)} + \mathbf{S}^{(l)} \boldsymbol{\nu}^{(l)}. \quad (1.4.40)$$

Przy tych samych założeniach, jako konsekwencje twierdzenia (1.4.39) mamy następujące twierdzenia:

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \mathbf{u} \otimes \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl &= \iint_M \{ \mathbf{u} \otimes (\operatorname{Div} \mathbf{S}) + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{S}^T \} \, da - \int_{\Gamma} [\mathbf{u} \otimes \mathbf{S} \boldsymbol{\nu}] \, dl, \\ \int_{\partial M} \mathbf{u} \cdot \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl &= \iint_M \{ (\operatorname{Div} \mathbf{S}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u} \} \, da - \int_{\Gamma} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{S} \boldsymbol{\nu}] \, dl, \\ \int_{\partial M} \mathbf{u} \wedge \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \, dl &= \iint_M \{ \mathbf{u} \wedge (\operatorname{Div} \mathbf{S}) + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{S}^T - \mathbf{S} (\nabla \mathbf{u})^T \} \, da \\ &- \int_{\Gamma} [\mathbf{u} \wedge \mathbf{S} \boldsymbol{\nu}] \, dl, \end{aligned} \quad (1.4.41)$$

$$\int_{\partial M} \mathbf{u} \times \mathbf{S}\boldsymbol{\nu} \, dl = \iint_M \{ \mathbf{u} \times (\text{Div } \mathbf{S}) - \text{ad}^{-1}((\nabla \mathbf{u})\mathbf{S}^T - \mathbf{S}(\nabla \mathbf{u})^T) \} \, da - \int_{\Gamma} [\mathbf{u} \times \mathbf{S}\boldsymbol{\nu}] \, dl, \quad (1.4.41)_4$$

dla dowolnego pola wektorowego $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ i dowolnego pola tensorowego $\mathbf{S}(\mathbf{x}) \in C(E \otimes T_{\mathbf{x}}M)$.

W (1.4.41)₁ skok z iloczynu tensorowego dwóch pól w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma^{(k,l)}$, $k \neq l$, jest zdefiniowany następująco:

$$[\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}\boldsymbol{\nu}] = \mathbf{u}^{(k)} \otimes \mathbf{S}^{(k)}\boldsymbol{\nu}^{(k)} + \mathbf{u}^{(l)} \otimes \mathbf{S}^{(l)}\boldsymbol{\nu}^{(l)}. \quad (1.4.42)$$

Definicja ta stosuje się również do iloczynu skalarnego, zewnętrznego i wektorowego dwóch pól wektorowych.

Jeśli M jest powierzchnią gładką, to w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma^{(k,l)}$, $k \neq l$, krzywej osobiwej wektory zewnętrznej normalni spełniają następujące zależności:

$$\boldsymbol{\nu}^{(k)} \equiv \boldsymbol{\nu}^{(-)} = \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu}^{(l)} \equiv \boldsymbol{\nu}^{(+)} = -\boldsymbol{\nu}. \quad (1.4.43)$$

W tym przypadku $[\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}\boldsymbol{\nu}] = -[[\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}]\boldsymbol{\nu}]$, gdzie skok $[[\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}]]$ jest zdefiniowany wzorem (1.4.17).

1.4.7. Opis ruchu powierzchni podstawowej powłoki

Odpowiednie założenia o regularności muszą być poczynione również w stosunku do ruchu powierzchni podstawowej powłoki i do wszystkich pól występujących w trzech zasadach mechaniki powłok.

Względem konfiguracji odniesienia M , ruch powierzchni podstawowej jest opisany przez odwzorowanie $\boldsymbol{\chi}: M \times T \rightarrow \mathcal{E}$, które, wyrażone w terminach wektorów wodzących, przyjmuje postać

$$\vec{\boldsymbol{y}}(\mathbf{x}, t) = \vec{\boldsymbol{x}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1.4.44)$$

gdzie pole $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ jest *wektorem przesunięcia* powierzchni podstawowej.

Jeśli (1.4.44) jest różniczkowalne względem czasu, to pole *prędkości* $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej powłoki jest zdefiniowane jako

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\vec{\boldsymbol{y}}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t). \quad (1.4.45)$$

Zakładając, że odwzorowanie (1.4.44) jest różniczkowalne na M , otrzymamy również

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \vec{\boldsymbol{y}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I}_0(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.4.46)$$

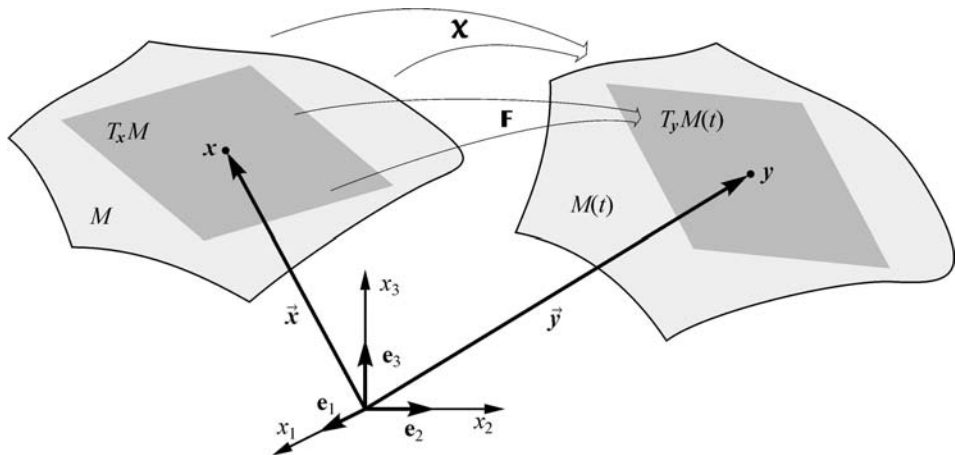
Pole $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ nazywamy *gradientem deformacji* powierzchni podstawowej.

Zauważmy, że pole prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ może istnieć we wszystkich punktach powierzchni M , łącznie z punktami należącymi do zbioru jej krawędzi Γ , ale gradient deformacji $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ jest określony jedynie w punktach regularnych M .

Gradient deformacji $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ jest odwzorowaniem liniowym (tensorem) przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{x}}M$ w przestrzeń $E \simeq T_{\mathbf{y}}\mathcal{E}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \in E \otimes T_{\mathbf{x}}M$, gdzie $\mathbf{y} = \chi(\mathbf{x}, t)$. Jeśli $\mathbf{y} \in M(t)$ jest punktem regularnym to

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I}(\chi(\mathbf{x}, t), t)\mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1.4.47)$$

gdzie $\mathbf{F} \in T_{\mathbf{y}}M(t) \otimes T_{\mathbf{x}}M$ jest *stycznym gradientem deformacji* powierzchni podstawowej powłoki, natomiast $\mathbf{I}(\mathbf{y}, t) \in E \otimes T_{\mathbf{y}}M(t)$ jest operatorem inkluzji w punkcie $\mathbf{y} = \chi(\mathbf{x}, t)$.



Rys. 1.4.9. Styczny gradient deformacji powierzchni podstawowej powłoki.

1.4.8. Lokalne prawa dynamiki

Jeśli powierzchnia podstawowa powłoki zawiera jedynie stacjonarne krzywe osobliwe typu zbioru krawędzi Γ , to w opisie odniesienia zasada zachowania masy jest spełniona tożsamościowo. Zakładając bowiem, że masa $\mathbf{m}(\mathcal{P}, t)$ dowolnej części powłoki jest funkcją różniczkowalną względem czasu, zasadę zachowania masy (1.3.17) można zapisać w postaci

$$\left[\iint_{\Pi} m_0 da \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{d}{dt} \iint_{\Pi} m_0 da \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_{\Pi} \dot{m}_0 da \right\} dt. \quad (1.4.48)$$

Zakładając następnie, że gęstość masy $m_0(\mathbf{x})$ jest funkcją ciągłą prawie wszędzie, zasada zachowania masy przyjmuje postać

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_{\Pi} \dot{m}_0 da \right\} dt = 0. \quad (1.4.49)$$

Ze względu na dowolność podobszaru $\Pi \subset M$, znikanie całki powierzchniowej wymaga, aby $\dot{m}_0 = 0$, co jest tu spełnione automatycznie, ponieważ gęstość masy $m_0(\mathbf{x})$ z definicji nie zależy od czasu.

Jeśli pęd $\mathbf{p}(\mathcal{P}, t)$ i moment pędu $\mathbf{m}(\mathcal{P}, t)$, czyli lewe strony w zasadach (1.3.3) i (1.3.4), są funkcjami różniczkowalnymi względem czasu, to te dwie zasady mechaniki powłok można zapisać w postaci

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\dot{\mathbf{p}}(\mathcal{P}, t) - \mathbf{f}(\mathcal{P}, t)\} dt = \mathbf{0}, \quad \int_{t_1}^{t_2} \{\dot{\mathbf{m}}(\mathcal{P}, t) - \mathbf{t}(\mathcal{P}, t)\} dt = \mathbf{0}. \quad (1.4.50)$$

Stąd

$$\mathbf{b}(\mathcal{P}, t) \equiv \dot{\mathbf{p}}(\mathcal{P}, t) - \mathbf{f}(\mathcal{P}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{l}(\mathcal{P}, t) \equiv \dot{\mathbf{m}}(\mathcal{P}, t) - \mathbf{t}(\mathcal{P}, t) = \mathbf{0}. \quad (1.4.51)$$

Jeśli $\mathbf{p}(\mathcal{P}, t)$ i $\mathbf{m}(\mathcal{P}, t)$ nie są różniczkowalne w dyskretnych chwilach czasowych, to z (1.3.18) i (1.3.19) można otrzymać dodatkowe warunki dla impulsów.

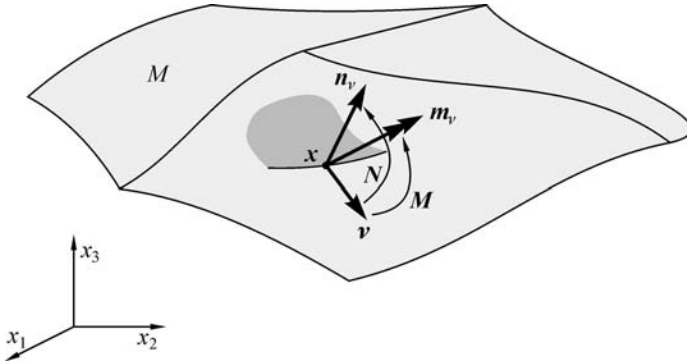
Zakładając, że $\mathbf{p}(\mathcal{P}, t)$ i $\mathbf{m}(\mathcal{P}, t)$ są różniczkowalne względem czasu, a zbiór krawędzi Γ jest stacjonarną krzywą osobiłą na M , zgodnie z (1.4.26) otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\Pi} \mathbf{p} da &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \dot{\mathbf{p}} da, \\ \frac{d}{dt} \iint_{\Pi} (\mathbf{s} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) da &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\vec{\mathbf{y}}} \times \mathbf{p} + \vec{\mathbf{y}} \times \dot{\mathbf{p}}) da. \end{aligned} \quad (1.4.52)$$

Podstawiając teraz (1.4.52) do (1.3.18) i (1.3.19) oraz uwzględniając (1.4.26), zasady zachowania pędu i momentu pędu powłoki zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{p}}) da + \int_{\partial \Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{n}_\nu dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{n}^* dl &= \mathbf{0}, \\ \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \mathbf{c} - (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\vec{\mathbf{y}}} \times \mathbf{p}) + \vec{\mathbf{y}} \times (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{p}}) \} da & \\ + \int_{\partial \Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{m}_\nu + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}_\nu) dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{m}^* + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}^*) dl &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.4.53)$$

Do wyprowadzenia lokalnych równań pola, wyrażających zasady zachowania pędu i momentu pędu, niezbędne są również pewne hipotezy dotyczące natury wewnętrznych sił i momentów kontaktowych w powłoce. Hipotezy te łączą się z koncepcją powierzchniowych miar naprężeń w powłoce.



Rys. 1.4.10. Postulat Cauchy'ego w teorii powłok.

Fizyczna interpretacja wektorów sił i momentów przekrojowych $\mathbf{n}_\nu(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{m}_\nu(\mathbf{x}, t)$ występujących w (1.4.53) wynika z ich definicji (1.3.12). Niech $\mathbf{x} \in M$ będzie punktem regularnym krzywej $\partial\Pi$. Podejście niewiele różniące się od używanego w mechanice ośrodka ciągłego przy wyprowadzeniu wzoru (1.1.12) pozwala wykazać, że istnieje *tensor przekrojowych sił* $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i *tensor przekrojowych momentów* $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, takie że

$$\mathbf{n}_\nu(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{m}_\nu(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}). \quad (1.4.54)$$

Pola $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ są określone jedynie w punktach regularnych powierzchni podstawowej powłoki.

Wykorzystując ten analog twierdzenia Cauchy'ego (1.4.54) dla powłok (który można również udowodnić na podstawie zasad zachowania (1.4.53)) oraz twierdzenie (1.4.39), mamy

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{n}_\nu \, dl &= \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \, dl = \int_{\partial\Pi} \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \, dl - \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \, dl \\ &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \text{Div } \mathbf{N} \, da - \int_{\Pi \cap \Gamma} [\mathbf{n}_\nu] \, dl - \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \, dl. \end{aligned} \quad (1.4.55)$$

Na tej samej podstawie

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{m}_\nu \, dl &= \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \, dl \\ &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \text{Div } \mathbf{M} \, da - \int_{\Pi \cap \Gamma} [\mathbf{m}_\nu] \, dl - \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \, dl. \end{aligned} \quad (1.4.56)$$

Zakładając dodatkowo, że deformacja powierzchni podstawowej jest różniczkowalna prawie wszędzie, z twierdzenia (1.4.41)₄ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Pi\setminus\partial M_f} \bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \, dl &= \int_{\partial\Pi} \bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \, dl - \int_{\partial\Pi\cap\partial M_f} \bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \, dl \\
 &= \iint_{\Pi\setminus\Gamma} \{ \text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) + \bar{\mathbf{y}} \times (\text{Div } \mathbf{N}) \} \, da \\
 &\quad - \int_{\Pi\cap\Gamma} [\bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}_\nu] \, dl - \int_{\partial\Pi\cap\partial M_f} \bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \, dl. \tag{1.4.57}
 \end{aligned}$$

Podstawiając teraz (1.4.55)–(1.4.57) do (1.4.53), ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Pi\setminus\Gamma} (\text{Div } \mathbf{N} + \mathbf{f} - \dot{\mathbf{p}}) \, da - \int_{\Pi\cap\Gamma} [\mathbf{n}_\nu] \, dl + \int_{\partial\Pi\cap\partial M_f} (\mathbf{n}^* - \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}) \, dl &= \mathbf{0}, \\
 \iint_{\Pi\setminus\Gamma} \{ \text{Div } \mathbf{M} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) + \mathbf{c} - (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\bar{\mathbf{y}}} \times \mathbf{p}) \\
 + \bar{\mathbf{y}} \times (\text{Div } \mathbf{N} + \mathbf{f} - \dot{\mathbf{p}}) \} \, da - \int_{\Pi\cap\Gamma} ([\mathbf{m}_\nu] + [\bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}_\nu]) \, dl \\
 + \int_{\partial\Pi\cap\partial M_f} \{ \mathbf{m}^* - \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} + \bar{\mathbf{y}} \times (\mathbf{n}^* - \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}) \} \, dl &= \mathbf{0}. \tag{1.4.58}
 \end{aligned}$$

Ponieważ prawa mechaniki muszą być spełnione jednocześnie, z (1.4.58) wynikają następujące zależności lokalne:

równania ruchu

$$\begin{aligned}
 \text{Div } \mathbf{N} + \mathbf{f} &= \dot{\mathbf{p}}, \\
 \text{Div } \mathbf{M} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) + \mathbf{c} &= \dot{\mathbf{s}} + \dot{\bar{\mathbf{y}}} \times \mathbf{p}, \tag{1.4.59}
 \end{aligned}$$

wyrażające dynamiczne warunki równowagi w postaci różniczkowej w punktach regularnych $\mathbf{x} \in M\setminus\Gamma$,

dynamiczne warunki brzegowe

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}^*, \quad \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{m}^* \tag{1.4.60}$$

w punktach regularnych $\mathbf{x} \in \partial M_f$ części brzegu powłoki oraz

dynamiczne warunki ciągłości

$$[\mathbf{n}_\nu] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{m}_\nu] + [\bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}_\nu] = \mathbf{0} \tag{1.4.61}$$

w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma$.

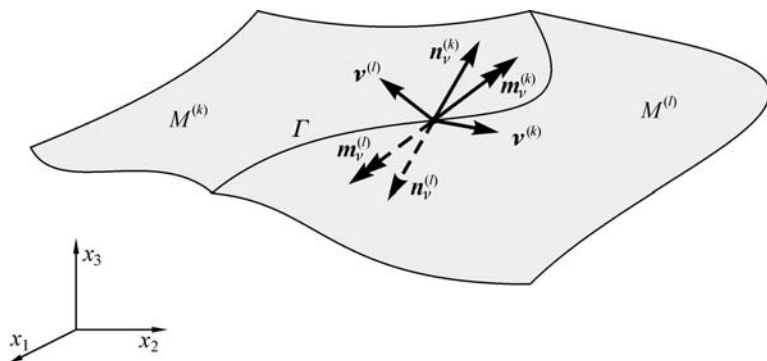
W ogólnym przypadku, funkcja ruchu $\vec{y}(\mathbf{x}, t)$ może nie być funkcją ciągłą wzdłuż krzywej osobiwej Γ . Gdy Γ jest zbiorem stacjonarnych krawędzi powierzchni kawałkami gładkiej M , brak ciągłości $\vec{y}(\mathbf{x}, t)$ na Γ oznacza, że podczas ruchu następuje pęknięcie powłoki wzdłuż Γ . Jeśli chcemy wykluczyć możliwość powstania takiego pęknięcia, to musimy założyć $[\vec{y}(\mathbf{x}, t)] = \mathbf{0}$. Wówczas dynamiczne warunki ciągłości (1.4.61) upraszczają się do postaci

$$[\mathbf{n}_\nu] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{m}_\nu] = \mathbf{0}. \quad (1.4.62)$$

Zapisane w postaci jawnej, z uwzględnieniem definicji (1.4.40), warunki ciągłości (1.4.62) na przykładowej powierzchni dwupłatowej przyjmują postać (rys. 1.4.11)

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}_\nu] &\equiv \mathbf{n}_\nu^{(k)} + \mathbf{n}_\nu^{(l)} = \mathbf{N}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)} + \mathbf{N}^{(l)} \boldsymbol{\nu}^{(l)} = \mathbf{0}, \\ [\mathbf{m}_\nu] &\equiv \mathbf{m}_\nu^{(k)} + \mathbf{m}_\nu^{(l)} = \mathbf{M}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)} + \mathbf{M}^{(l)} \boldsymbol{\nu}^{(l)} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (1.4.63)$$

słuszną w punktach należących do wspólnej krawędzi $\Gamma^{(k,l)}$ dwóch sąsiednich płatów regularnych powierzchni kawałkami gładkiej M .

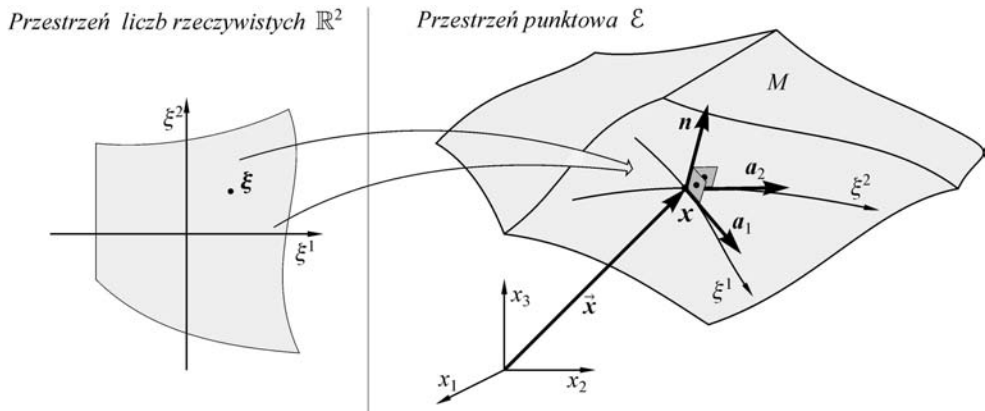


Rys. 1.4.11. Dynamiczne warunki ciągłości.

1.4.9. Parametryczny opis powierzchni podstawowej powłoki

W dotychczasowych rozważaniach świadomie unikaliśmy wprowadzania układów współrzędnych, aby nie sugerować, że rezultaty naszych rozważań zależą w jakimś sensie od wyboru takich układów.

W analizie równań i zależności lokalnych, w otoczeniu punktów regularnych powierzchni podstawowej powłoki można wprowadzić opis parametryczny, tj. wyrażony przez współrzędne powierzchniowe. Jeśli $\mathbf{x} \in M$ jest punktem regularnym, to istnieje otwarte otoczenie $N \subset M$ tego punktu oraz dyfeomorficzne odwzorowanie $\varphi: N \rightarrow U$ tego otoczenia na pewien zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^2$, które każdemu punktowi $\mathbf{x} \in M$ przyporządkowuje parę liczb rzeczywistych (ξ^1, ξ^2) , nazywanych *współrzędnymi powierzchniowymi* tego punktu.



Rys. 1.4.12. Parametryczny opis powierzchni podstawowej.

Jeśli $\{\xi^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$, jest dowolnie wybranym układem współrzędnych powierzchniowych na M , to wektor wodzący M można zapisać jako $\vec{x} = \vec{x}(\xi^\alpha)$. Wówczas wektory bazy naturalnej oraz bazy odwrotnej w $\mathbf{x} \in M$ można wyliczyć z klasycznych wzorów

$$\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_0(\mathbf{x})\vec{x}_{,\alpha}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_\beta(\mathbf{x}) = \delta_\beta^\alpha, \quad (1.4.64)$$

gdzie $\mathbf{P}_0(\mathbf{x})$ jest kanonicznym operatorem projekcji. Wzór (1.4.64) uwzględnia fakt, że pochodne cząstkowe $\vec{x}_{,\alpha}(\mathbf{x})$ wektora wodzącego są elementami przestrzeni wektorowej $E \simeq T_{\mathbf{x}}\mathcal{E}$, natomiast wektory $\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x})$ bazy naturalnej są elementami przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{x}}M$.

Dla dowolnie wybranego układu współrzędnych powierzchniowych na M , operator inkluzji $\mathbf{I}_0(\mathbf{x})$ dany jest wyrażeniem

$$\mathbf{I}_0(\mathbf{x}) = \nabla \vec{x}(\mathbf{x}) = \vec{x}_{,\alpha}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{x}). \quad (1.4.65)$$

Wzór (1.4.65) wyraża ogólną regułę obliczania powierzchniowego gradientu dowolnego pola wektorowego, w przypadku powierzchni danej w postaci parametrycznej. Zauważmy jednak, że istnienie pochodnych cząstkowych $\vec{x}_{,\alpha}(\mathbf{x})$ jest warunkiem koniecznym, lecz nie wystarczającym istnienia gradientu $\nabla \vec{x}(\mathbf{x})$. Dodatkowo musimy zakładać, że pochodne cząstkowe $\vec{x}_{,\alpha}(\mathbf{x})$ są ciągłe na powierzchni M .

Współrzędne tensora metrycznego powierzchni M w dowolnie przyjętym układzie współrzędnych można obliczyć ze wzorów

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta, \quad a = \det[a_{\alpha\beta}] > 0. \quad (1.4.66)$$

Tak więc, powierzchniowy tensor jednostkowy w dowolnym punkcie $\mathbf{x} \in M$ można wyrazić jako iloczyn tensorowy wektorów bazy naturalnej i bazy odwrotnej, $\mathbf{1}_0 = \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha$.

Wykorzystując symbole permutacyjne $\epsilon^{\alpha\beta}$, takie że $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1/\sqrt{a}$, $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$, jednostkowy wektor normalny do powierzchni danej w postaci parametrycznej można obliczyć ze wzoru

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\vec{x}_{,\alpha} \times \vec{x}_{,\beta}. \quad (1.4.67)$$

Szczegółowy opis geometrii powierzchni regularnych w przestrzeni euklidesowej zawierają klasyczne monografie matematyczne, np. EISENHART [1947], KAGAN [1947], DO CARMO [1976], a w zakresie potrzebnym w teorii powłok np. GREEN i ZERNA [1968], NAGHDI [1963], CZERNYCH [1964], PIETRASZKIEWICZ [1977], BAŞAR i KRÄTZIG [1985, 2001].

Jeśli funkcja ruchu $\chi(\mathbf{x}, t)$ jest klasy C^1 lub wyższej, to dowolnie wybrany układ współrzędnych na powierzchni podstawowej M w konfiguracji odniesienia generuje układ współrzędnych na powierzchni podstawowej $M(t)$ w konfiguracji aktualnej. Taki układ współrzędnych przeniesionych przez ruch nazywany jest *układem współrzędnych konwekcyjnych*. Wówczas wektor wodzący $\vec{y}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni $M(t)$ można traktować również jako funkcję wektorową współrzędnych $\{\xi^\alpha\}$. Deformację powierzchni podstawowej powłoki można wtedy opisać następująco:

$$\vec{y}(\xi^\alpha, t) = \vec{y}(\mathbf{x}(\xi^\alpha), t) = \vec{x}(\xi^\alpha) + \mathbf{u}(\xi^\alpha, t). \quad (1.4.68)$$

Wówczas z ogólnej reguły obliczania powierzchniowego gradientu wynika, że gradient deformacji $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \vec{y}(\mathbf{x}, t)$ dany jest wzorem

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \vec{y}_{,\alpha}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{x}). \quad (1.4.69)$$

Wzór (1.4.69) pozostaje słusznym również wtedy, gdy powierzchnia $M(t)$ będzie dana w postaci parametrycznej $\vec{y} = \vec{y}(\zeta^\alpha, t)$, gdzie $\{\zeta^\alpha\}$ są współrzędnymi powierzchniowymi wybranymi na $M(t)$ niezależnie od współrzędnych konwekcyjnych $\{\xi^\alpha\}$. Jednak, zgodnie z przyjętą tutaj konwencją, przecinkiem po symbolu pola oznaczamy pochodne cząstkowe tego pola względem współrzędnych konwekcyjnych $\{\xi^\alpha\}$, a nie względem $\{\zeta^\alpha\}$. Pochodne cząstkowe względem $\{\zeta^\alpha\}$ można obliczyć z reguły różniczkowania funkcji złożonej, np. $\partial \vec{y} / \partial \zeta^\beta = \vec{y}_{,\alpha}(\partial \xi^\alpha / \partial \zeta^\beta)$.

1.4.10. Lokalne zasady dynamiki powłok we współrzędnych powierzchniowych

Jeśli powierzchnia M jest dana w postaci parametrycznej, to tensor przekrojowych sił $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i tensor przekrojowych momentów $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, jako odwzorowania liniowe przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{x}}M$ w przestrzeń E , można wyrazić przez iloczyny tensorowe wektorów sił przekrojowych $\mathbf{n}^\alpha(\mathbf{x}, t)$ i momentów przekrojowych $\mathbf{m}^\alpha(\mathbf{x}, t)$ oraz wektorów bazy naturalnej:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n}^\alpha(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}^\alpha(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}). \quad (1.4.70)$$

Zauważmy, że $\mathbf{n}^\alpha(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{m}^\alpha(\mathbf{x}, t)$ są wektorami przestrzennymi, to znaczy elementami przestrzeni wektorowej E .

Operator powierzchniowej dywergencji z tensorów (1.4.70) można obliczyć ze wzoru

$$\text{Div } \mathbf{N} = \mathbf{n}^\alpha|_\alpha = \mathbf{n}^\alpha{}_{,\alpha} - \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda \mathbf{n}^\alpha, \quad (1.4.71)$$

gdzie $()|_\alpha$ jest symbolem pochodnej kowariantnej, a $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ są symbolami Christoffela, obliczonymi dla przyjętego układu współrzędnych powierzchniowych.

Wykorzystując (1.4.69) i (1.4.70), otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{NF}^T - \mathbf{FN}^T &= (\mathbf{n}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha)(\mathbf{a}^\beta \otimes \vec{\mathbf{y}}_{,\beta}) - (\vec{\mathbf{y}}_{,\beta} \otimes \mathbf{a}^\beta)(\mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha) \\ &= \mathbf{n}^\alpha \otimes \vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} - \vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} \otimes \mathbf{n}^\alpha = \mathbf{n}^\alpha \wedge \vec{\mathbf{y}}_{,\alpha}. \end{aligned} \quad (1.4.72)$$

Z podstawowej własności odwzorowania ad otrzymujemy wówczas

$$\text{ad}^{-1}(\mathbf{NF}^T - \mathbf{FN}^T) = \text{ad}^{-1}(\mathbf{n}^\alpha \wedge \vec{\mathbf{y}}_{,\alpha}) = -\mathbf{n}^\alpha \times \vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} = \vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha. \quad (1.4.73)$$

Wykorzystując (1.4.71) i (1.4.73), lokalne równania ruchu (1.4.59) zapisane we współrzędnych powierzchniowych przyjmują więc postać

$$\mathbf{n}^\alpha|_\alpha + \mathbf{f} = \dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{m}^\alpha|_\alpha + \vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha + \mathbf{c} = \dot{\mathbf{s}} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}. \quad (1.4.74)$$

Jednostkowy wektor $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ zewnętrznej normali do brzegu ∂M , jako wektor z przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{x}}M$, ma reprezentację $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \nu_\alpha(\mathbf{x})\mathbf{a}^\alpha(\mathbf{x})$ i stąd

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}^\alpha(\mathbf{x}, t)\nu_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}^\alpha(\mathbf{x}, t)\nu_\alpha(\mathbf{x}). \quad (1.4.75)$$

Dynamiczne warunki brzegowe (1.4.60) można więc zapisać w postaci

$$\mathbf{n}^\alpha(\mathbf{x}, t)\nu_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{n}^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{m}^\alpha(\mathbf{x}, t)\nu_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{m}^*(\mathbf{x}, t). \quad (1.4.76)$$

W większości publikacji i monografii z dziedziny nieliniowej mechaniki powłok stosuje się zapis tensorowy w składowych względem baz powierzchniowego układu współrzędnych, por. np. WOŹNIAK [1966], NAGHDI [1972], LIBRESCU [1975], PIETRASZKIEWICZ [1979b, 2001b], BAŞAR i KRÄTZIG [1985], CIARLET [2000]. Choć w tej książce stosujemy konsekwentnie zwarty zapis absolutny, jest jednak oczywiste, że wszystkie wyprowadzone tutaj zależności można również przedstawić przez składowe w wybranej bazie powierzchniowej.

1.5. Tożsamość całkowa i zasada pracy wirtualnej

1.5.1. Podstawowy problem kinematyczny teorii powłok

Własności fizyczne powłoki, wynikające z całkowych zasad mechaniki, określone są przez przekrojową gęstość masy, przekrojowe gęstości pędu i momentu pędu oraz sprowadzone powierzchniowe i kontaktowe siły i momenty. Wielkości te całkowicie charakteryzują powłokę z dynamicznego punktu widzenia. Ponadto, lokalne równania ruchu łącznie z dynamicznymi warunkami ubocznymi (brzego-

wymi, początkowymi i ciągłości), wynikającymi z całkowych zasad mechaniki, stanowią kompletny układ dynamicznych równań pola i warunków ubocznych. Natomiast charakterystyka kinematyczna powłoki jest jeszcze daleka od kompletnej.

Jedynym pojęciem kinematycznym, przewijającym się przez dotychczasowe rozważania, jest pojęcie ruchu powierzchni podstawowej powłoki, który jest definiowany w przestrzeni fizycznej \mathcal{E} jako jednoparametrowa rodzina powierzchni geometrycznych kawałkami gładkich $M(t)$. Kinematyka powłoki, zdeterminowana jedynie przez kinematykę jej powierzchni podstawowej, jest jednak zbyt uboga w stosunku do własności dynamicznych, w które wyposażona jest powierzchnia $M(t)$.

Lokalne równania równowagi dynamicznej, które możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}} &\equiv \operatorname{Div} \mathbf{N} + \mathbf{f} - \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \\ \tilde{\mathbf{c}} &\equiv \operatorname{Div} \mathbf{M} + \operatorname{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) + \mathbf{c} - (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) = \mathbf{0}\end{aligned}\quad (1.5.1)$$

w każdym punkcie regularnym $\mathbf{x} \in M \setminus \Gamma$ powierzchni podstawowej, stanowią układ sześciu niezależnych, skalarnych równań różniczkowych cząstkowych. Również dynamiczne warunki brzegowe

$$\tilde{\mathbf{n}} \equiv \mathbf{n}^* - \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{m}} \equiv \mathbf{m}^* - \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \quad (1.5.2)$$

oraz dynamiczne warunki ciągłości

$$[\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] + [\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] = \mathbf{0} \quad (1.5.3)$$

wymagają spełnienia sześciu niezależnych skalarnych warunków, odpowiednio, w punktach $\mathbf{x} \in \partial M_f$ części brzegu i w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma$ zbioru krawędzi powierzchni podstawowej. Wydaje się więc naturalnym i rozsądnym oczekiwanie, że pełna charakterystyka kinematyczna powłoki, tak jak jej charakterystyka dynamiczna, powinna być wynikiem wyprowadzenia spójnego z równaniami (1.5.1)–(1.5.3). Nie powinna ona wynikać z dodatkowych założeń i postulatów kinematycznych o przewidywanym rozkładzie odkształceń lub naprężeń po grubości ciała powłokopodobnego, tak chętnie używanych w literaturze do formułowania różnych wariantów teorii powłok.

Już REISSNER [1974, 1982] zauważył, że za podstawę formułowania nieliniowej statyki powłok regularnych wystarczy przyjąć dwuwymiarowe równania równowagi sił i momentów typu (1.5.1) (bez sił bezwładności). Postulując następnie powierzchniową zasadę pracy wirtualnej wykazano, że energetycznie odpowiadającymi tym równaniom równowagi powierzchniowe miary przemieszczeń i odkształceń są miarami zaproponowanymi w SIMMONDS i DANIELSON [1972]. Dla szczególnej definicji powierzchni podstawowej, która jest powierzchnią ważoną według rozkładu masy po grubości powłoki w konfiguracji odkształconej, oraz dla szczególnych postaci przekrojowych gęstości pędu $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ i momentu pędu $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$, odpowiednie równania dynamiki powłok typu (1.5.1) i (1.5.2) podali LIBAI i SIMMONDS [1983]. Przez bezpośrednie całkowanie po grubości powłoki odpowiednich

zasad termomechaniki ośrodka ciągłego, SIMMONDS [1984a] sformułował ściśle postacie czterech zasad termomechaniki powłok regularnych, obejmujące również równania dynamiki powłok (1.5.1) i (1.5.2). Dla tych równań dynamiki sformułowano spójne z nimi powierzchniowe miary odkształceń powłoki.

W ramach ogólnej mechaniki powłok, w tym rozdziale powyższe wyniki rozszerzymy najpierw na nieregularne powłoki, modelowane powierzchniami kawałkami gładkimi, zakładając jednak, że podczas ruchu konstrukcji regularne płyty powłoki są na sztywno połączone wzdłuż zbioru krawędzi.

W rozdziale 3 niektóre wyniki uzyskane tutaj dla powłok kawałkami regularnych rozszerzymy na ogólną dynamikę tzw. powłok strukturalnych, złożonych z powłok wielopłatowych i prętów kawałkami regularnych. W ramach takiego ogólnego modelu konstrukcji inżynierskich przedstawimy również podstawy modelowania połączeń między płytami powłoki.

1.5.2. Konstrukcja tożsamości całkowej

Oznaczmy przez $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ dwa dowolne pola wektorowe na powierzchni podstawowej M , będące odwzorowaniami $M \times T$ w E . Będziemy jedynie zakładać, że pola te są ciągłe we wszystkich punktach regularnych M łącznie z brzegiem ∂M . Dopuszczamy jednak, że pola te mogą nie być ciągłe na stacjonarnym zbiorze krawędzi $\Gamma \subset M$ powierzchni kawałkami gładkiej M , gdzie te pola nie są w ogóle zdefiniowane.

Rozważmy wyrażenie

$$G(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) \equiv \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{w}) \, da + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{w}) \, dl, \quad (1.5.4)$$

gdzie $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Na mocy (1.5.1) i (1.5.2) mamy

$$\int_{t_1}^{t_2} \{G(\mathcal{P}, t; \mathbf{w})\} \, dt = 0, \quad (1.5.5)$$

dla dowolnego obszaru $\Pi \subset M$ i każdego przedziału czasu $[t_1, t_2]$. Podane dalej rozważania można traktować jako czysto formalną konstrukcję matematyczną, w której pola wektorowe \mathbf{v} i \mathbf{w} nie muszą mieć żadnej interpretacji fizycznej.

Biorąc pod uwagę definicje (1.5.1) siły $\tilde{\mathbf{f}}$ i momentu $\tilde{\mathbf{c}}$, całkę powierzchniową w (1.5.4) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{w}) \, da &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \text{Div } \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} + \text{Div } \mathbf{M} \cdot \mathbf{w} \\ &+ \text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) \cdot \mathbf{w} \} \, da \\ &+ \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) \, da - \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} + (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \} \, da. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Założmy, że pola wektorowe $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ oraz tensor przekrojowych sił $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i tensor przekrojowych momentów $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ spełniają założenia uogólnionego twierdzenia o dywergencji na powierzchni kawałkami gładkiej (p. 1.4.6). Wówczas korzystając z (1.4.41)₂ otrzymamy

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\text{Div } \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v} \, da &= - \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} \, da + \int_{\Pi \cap \Gamma} [\mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] \, dl \\ &+ \int_{\partial \Pi \setminus \partial M} \mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M} \mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, dl, \\ \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\text{Div } \mathbf{M}) \cdot \mathbf{w} \, da &= - \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \, da + \int_{\Pi \cap \Gamma} [\mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}] \, dl \\ &+ \int_{\partial \Pi \setminus \partial M} \mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w} \, dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M} \mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w} \, dl. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Dopuszczamy tutaj, że brzeg $\partial \Pi$ rozważanej części $\Pi \subset M$ powierzchni podstawowej może mieć część wspólną z częścią brzegu ∂M całej powierzchni M . Podstawiając (1.5.7) do (1.5.6), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{w}) \, da &= - \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - (\text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T)) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \} \, da \\ &+ \int_{\Pi \cap \Gamma} ([\mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}]) \, dl \\ &+ \int_{\partial \Pi \setminus \partial M} (\mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) \, dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M} (\mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) \, dl \\ &+ \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) \, da - \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} + (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \} \, da. \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Wykorzystując następnie definicje (1.5.2) siły $\tilde{\mathbf{n}}$ i momentu $\tilde{\mathbf{m}}$, całkę krzywoliniową wzdłuż części ∂M_f brzegu w wyrażeniu (1.5.4) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{w}) \, dl &= \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{w}) \, dl \\ &- \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) \, dl. \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Podstawiając teraz (1.5.9) i (1.5.8) do (1.5.4), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
G(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) &= - \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} + (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \} da \\
&\quad - \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - (\text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T)) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \} da \\
&\quad + \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{w}) dl \\
&\quad + \int_{\Pi \cap \Gamma} ([\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}]) dl + \int_{\partial \Pi \setminus \partial M} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) dl \\
&\quad + \iint_{\partial \Pi \cap \partial M_d} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) dl. \tag{1.5.10}
\end{aligned}$$

W przekształceniach prowadzących do (1.5.10) wykorzystaliśmy lokalne równania ruchu (1.5.1) i dynamiczne warunki brzegowe (1.5.2), a ponadto że $\partial M = \partial M_f \cap \partial M_d$.

Jeśli pola $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ są różniczkowalne względem czasu w punktach powierzchni M , w których są określone, wówczas

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} + (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}) \\
&\quad + (\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} - \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{w}} \\
&= \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}) \\
&\quad - \{ \mathbf{p} \cdot (\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{w}) + \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{w}} \}. \tag{1.5.11}
\end{aligned}$$

Pierwszy składnik w wyrażeniu (1.5.10) można więc zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
\iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} + (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \} da &= \frac{d}{dt} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}) da \\
&\quad - \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \mathbf{p} \cdot (\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{w}) + \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{w}} \} da. \tag{1.5.12}
\end{aligned}$$

Wykorzystując (1.5.12) i całkując względem czasu wyrażenie (1.5.10) w przedziale $[t_1, t_2]$, ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \{G(\mathcal{P}, t; \mathbf{w})\} dt &= - \left[\iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}) da \right]_{t_1}^{t_2} \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \mathbf{p} \cdot (\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{w}) + \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{w}} \} da \right\} dt \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - (\text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T)) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \} da \right\} dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{w}) dl \right\} dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\partial \Pi \setminus \partial M} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) dl \right\} dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\partial \Pi \cap \partial M_d} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) dl \right\} dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Pi \cap \Gamma} (\mathbf{[N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + \mathbf{[M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}]) dl \right\} dt. \tag{1.5.13}
\end{aligned}$$

Dla uproszczenia zapisu i późniejszej interpretacji fizycznej, zapiszmy (1.5.13) w zwartej formie

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \{G(\mathcal{P}, t; \mathbf{w})\} dt &= - \left[\iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}) da \right]_{t_1}^{t_2} \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ G_d(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) - G_i(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) + G_e(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) \right. \\
&\left. + G_k(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) + G_b(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) + G_\Gamma(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) \right\} dt, \tag{1.5.14}
\end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 G_d(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) &\equiv \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \mathbf{p} \cdot (\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{w}) + \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{w}} \} da, \\
 G_i(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) &\equiv \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - (\text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T)) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \} da, \\
 G_e(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) &\equiv \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{w}) dl, \\
 G_k(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) &\equiv \int_{\partial \Pi \setminus \partial M} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) dl, \\
 G_b(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) &\equiv \int_{\partial \Pi \cap \partial M_d} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) dl, \\
 G_\Gamma(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) &\equiv \int_{\Pi \cap \Gamma} ([\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}]) dl.
 \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

Oznaczając przez $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \text{ad } \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ tensor skośnie symetryczny, którego wektorem osiowym jest $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, mamy

$$\text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) \cdot \mathbf{W} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{W}\mathbf{F}. \tag{1.5.16}$$

Wówczas wyrażenie $G_i(\mathcal{P}, t; \mathbf{w})$ można zapisać w postaci

$$G_i(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) \equiv \iint_{\Pi \setminus \Gamma} w da, \tag{1.5.17}$$

gdzie $w(\mathbf{x}, t)$ jest funkcją skalarną zdefiniowaną następująco:

$$\begin{aligned}
 w &\equiv \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - \{ \text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) \} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \\
 &= \mathbf{N} \cdot (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{W}\mathbf{F}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w}.
 \end{aligned} \tag{1.5.18}$$

Ponieważ zachodzi (1.5.5), wynikiem tych formalnych rozważań jest więc następująca tożsamość całkowa:

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_1}^{t_2} \{ G_d(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) - G_i(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) + G_e(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) + G_k(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) + G_b(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) \\
 &\quad + G_\Gamma(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) \} dt - \left[\iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}) da \right]_{t_1}^{t_2} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.5.19}$$

Tożsamość całkowa (1.5.19) wyraża następujące twierdzenie: jeśli spełnione są lokalne równania równowagi dynamicznej (1.5.1) i dynamiczne warunki brzegowe (1.5.2), to równanie (1.5.19) jest spełnione tożsamościowo dla każdych dwóch pól wektorowych $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, spełniających założone warunki regularności. Twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe, co łatwo udowodnić powtarzając całe postępowanie w odwrotnej kolejności.

Tożsamość (1.5.19) otrzymaliśmy na drodze czysto formalnych przekształceń matematycznych, wprowadzając dwa dowolne pola wektorowe, którym nie przypisaliśmy dotąd żadnego znaczenia fizycznego. Wobec tego, również równaniu (1.5.19) nie możemy przypisywać na razie określonego sensu fizycznego.

1.5.3. Zasada pracy wirtualnej

Tożsamość całkowa (1.5.19) jest słuszna, w szczególności, dla całej powłoki wielopłatowej, tzn. gdy $\mathcal{P} \equiv \mathcal{S}$.

Pola $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ możemy również zinterpretować, w szczególności, jako kinematycznie dopuszczalne pola *wirtualnych przesunięć i obrotów*, spełniające warunki $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ na ∂M_d . Wtedy $G_b(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) = 0$, a z definicji (1.5.15)₄ otrzymamy $G_k(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) \equiv 0$. Wyrażeniu $G_e(\mathcal{S}, t; \mathbf{w})$ z (1.5.15)₃ można teraz nadać sens fizyczny *zewnątrznej pracy wirtualnej*, wykonanej przez obciążenia powierzchniowe i brzegowe, a wyrażeniu $G_i(\mathcal{S}, t; \mathbf{w})$ sens fizyczny *wewnętrznej pracy wirtualnej*, w którym $\nabla \mathbf{v} - \mathbf{WF}$ i $\nabla \mathbf{w}$ mogą być teraz interpretowane jako *wirtualne miary odkształceń* powłoki energetycznie spójne z miarami naprężeń \mathbf{N} i \mathbf{M} . Przy takiej interpretacji pól $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ oraz wyrażeń $G_e(\mathcal{S}, t; \mathbf{w})$ i $G_i(\mathcal{S}, t; \mathbf{w})$, tożsamość całkowa (1.5.19) wyraża następującą *zasadę pracy wirtualnej* dla całej powłoki, nazywaną również *zasadą prac przygotowanych*:

$$\int_{t_1}^{t_2} \{G_d(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) - G_i(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) + G_e(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) + G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w})\} dt - \left[\iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}) da \right]_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (1.5.20)$$

gdzie teraz

$$G_d(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) \equiv \iint_{M \setminus \Gamma} \{ \mathbf{p} \cdot (\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{w}) + \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{w}} \} da, \quad (1.5.21)$$

$$G_i(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) \equiv \iint_{M \setminus \Gamma} \{ \mathbf{N} \cdot (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{WF}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \} da,$$

$$G_e(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) \equiv \iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{w}) dl, \quad (1.5.21)$$

$$G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) \equiv \int_{M \cap \Gamma} ([\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}]) dl. \quad [\text{cont.}]$$

Zasada pracy wirtualnej (1.5.20) została tutaj sformułowana dla ogólnego przypadku dynamiki powłoki wielopłatowej o powierzchni podstawowej M kawałkami gładkiej, przy dopuszczeniu nieciągłej deformacji $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej powłoki i nieciągłych pól wirtualnych przemieszczeń $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ na stacjonarnej krzywej osobliwej Γ .

Dla rozważanej tu kawałkami gładkiej powierzchni podstawowej możemy dodatkowo założyć ciągłość funkcji ruchu na Γ , tzn. $[\bar{\mathbf{y}}] = \mathbf{0}$. Przy tym założeniu dynamiczne warunki ciągłości upraszczają się do postaci (1.4.62). Możemy ponadto założyć, że również wirtualne pola wektorowe przesunięć \mathbf{v} i obrotów \mathbf{w} są ciągłe na całej powierzchni M , tzn. $[\mathbf{v}] = \mathbf{0}$ i $[\mathbf{w}] = \mathbf{0}$ wzdłuż Γ . Przez te dodatkowe założenia wykluczamy możliwość pojawienia się nieciągłej deformacji podczas ruchu powłoki, zarówno typu pęknięcia (nieciągłość translacyjna) jak i typu złamania (nieciągłość obrotowa) powierzchni podstawowej wzdłuż krzywej osobliwej Γ . Przy tych dodatkowych założeniach

$$[\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}] = [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] \cdot \mathbf{v} + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (1.5.22)$$

na mocy uproszczonych dynamicznych warunków ciągłości (1.4.62). Wtedy z (1.5.22) i (1.5.15) wynika, że również $G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) = 0$. W tym szczególnym przypadku zasada pracy wirtualnej (1.5.20) upraszcza się do postaci

$$\int_{t_1}^{t_2} \{G_d(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) - G_i(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) + G_e(\mathcal{S}, t; \mathbf{w})\} dt - \left[\iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}) da \right]_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (1.5.23)$$

gdzie poszczególne człony są określone przez (1.5.21) przy teraz ciągłej funkcji ruchu $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ i ciągłych polach wirtualnych przemieszczeń $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ na całej powierzchni podstawowej M , łącznie ze zbiorem krawędzi Γ .

Istotną zaletą zasady pracy wirtualnej (1.5.20) lub (1.5.23) jest to, że lokalne równania ruchu i dynamiczne warunki brzegowe są tu wyrażone w równoważnej postaci za pomocą jednego wyrażenia całkowitego. Zasada pracy wirtualnej

stanowi dobry punkt wyjścia do formułowania zasad wariacyjnych ogólnej nieliniowej mechaniki powłok, zarówno globalnych jak i przyrostowych, które z kolei stanowią podstawę analizy numerycznej zagadnień początkowo-brzegowych mechaniki powłok metodą elementów skończonych (patrz część II tej książki).

1.6. Kinematyka powłoki i kinematyczne warunki uboczne

1.6.1. Prędkości rzeczywiste powłoki

Sformułowana w p. 1.5.2 tożsamość całkowa (1.5.19) jest konsekwencją całkowych zasad zachowania pędu (1.3.18) i momentu pędu (1.3.19) powłoki, które z kolei są ścisłą implikacją zasad zachowania mechaniki ośrodka ciągłego. W tym sensie sformułowaną tożsamość (1.5.19) możemy traktować jako wiarygodny etap pośredni na drodze do zbudowania kompletnej teorii powłok.

Tożsamość (1.5.19) jest spełniona dla dowolnych pól wektorowych $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, spełniających wymagane warunki regularności. W szczególności, musi być ona spełniona również dla *ruchu rzeczywistego* powłoki. Wówczas dowolne pole wektorowe $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ możemy utożsamić z rzeczywistym polem prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej, a dowolne pole wektorowe $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ z rzeczywistym (choć na razie nieokreślonym) polem prędkości obrotowej przekroju poprzecznego powłoki, oznaczanym zwykle przez $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$.

Wprowadzając formalne podstawienia

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \equiv \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t), \quad (1.6.1)$$

wyrażenie (1.5.5), które stanowiło punkt wyjścia do sformułowania tożsamości (1.5.19), przyjmuje teraz postać

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \boldsymbol{\omega}) da + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\omega}) dl \right\} dt = 0. \quad (1.6.2)$$

W (1.6.2), $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ i $\tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ mają fizyczny wymiar siły, odpowiednio na jednostkę powierzchni i jednostkę długości, a $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ma fizyczny wymiar prędkości. Dlatego iloczyny skalarne $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v}$ oraz $\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}$ mają fizyczny wymiar *mocy* (prędkości wykonywania pracy). Podobnie, $\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}, t)$ i $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, t)$ w (1.6.2) mają fizyczny wymiar momentu, odpowiednio na jednostkę powierzchni i jednostkę długości, a iloczyny skalarne $\tilde{\mathbf{c}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ oraz $\tilde{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ muszą mieć również fizyczny wymiar mocy. W rezultacie, wektor $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ musi rzeczywiście mieć fizyczny wymiar prędkości obrotowej.

W ruchu rzeczywistym powłoki tożsamość (1.5.19) przyjmuje postać

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \mathbf{p} \cdot (\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{y}} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} \} da - \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \sigma da + G_e(\mathcal{P}, t; \mathbf{v}) \right\} dt - \left[\iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\omega}) da \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\partial \Pi \setminus \partial M} (\mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}) dl + G_b(\mathcal{P}, t; \mathbf{v}) + G_\Gamma(\mathcal{P}, t; \mathbf{v}) \right\} dt = 0, \quad (1.6.3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} G_e(\mathcal{P}, t; \mathbf{v}) &\equiv \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\omega}) da + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^* \cdot \boldsymbol{\omega}) dl, \\ G_b(\mathcal{P}, t; \mathbf{v}) &\equiv \int_{\partial \Pi \cap \partial M_d} (\mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}) dl, \\ G_\Gamma(\mathcal{P}, t; \mathbf{v}) &\equiv \int_{\Pi \cap \Gamma} \{ [\mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}] \} dl, \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

natomiast pole skalarne $\sigma(\mathbf{x}, t)$ otrzymamy, podstawiając (1.6.1) do (1.5.18):

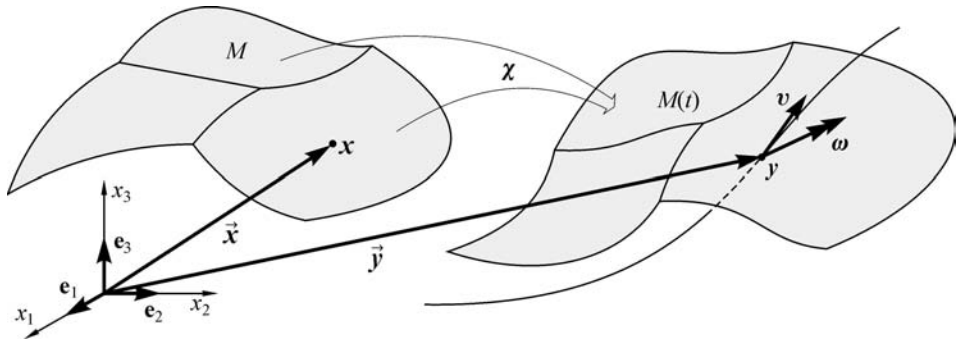
$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - \text{ad}^{-1}(\mathbf{N} \mathbf{F}^T - \mathbf{F} \mathbf{N}^T) \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \\ &= \mathbf{N} \cdot (\nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Tutaj $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) = \text{ad} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ jest tensorem skośnie symetrycznym prędkości obrotowej, którego wektorem osiowym jest $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$.

Przy podstawieniu (1.6.1) do (1.6.2) druga całka w wynikającej tożsamości (1.6.3) ma teraz sens fizyczny *efektywnej mocy* (prędkości pracy), wykonywanej przez przekrojowe miary naprężeń wewnętrznych powłoki. W tym kontekście pole skalarne $\sigma(\mathbf{x}, t)$ przyjmuje sens fizyczny powierzchniowej *gęstości efektywnej mocy* miar naprężeń powłoki.

1.6.2. Chwilowe konfiguracje powłoki

Wykorzystując wyniki rozważań poprzedniego podrozdziału, można teraz przystąpić do wyjaśnienia struktury kinematycznej powłoki, jako dwuwymiarowego kontinuum materialnego. Poszukiwana struktura kinematyczna musi bowiem być



Rys. 1.6.1. Pola prędkości powłoki.

zgodna ze strukturą dynamiczną, która jest jednoznacznie zdeterminowana przez zasady zachowania mechaniki.

Jeśli ruch powierzchni podstawowej powłoki względem dowolnie wybranej konfiguracji odniesienia M jest opisany odwzorowaniem $\chi(\cdot, t): M \rightarrow M(t)$, to $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ należy rozumieć jako pola określone na $M(t)$ i zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{v}(\chi(\mathbf{x}, t), t), \quad \boldsymbol{\omega}(\chi(\mathbf{x}, t), t), \quad (1.6.6)$$

gdzie $\mathbf{y} = \chi(\mathbf{x}, t)$ jest miejscem w przestrzeni fizycznej, zajmowanym przez cząstkę powierzchni podstawowej powłoki w konfiguracji aktualnej, a $\mathbf{x} \in M$ jest miejscem tej samej cząstki, zajmowanym w konfiguracji odniesienia.

Pola $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ muszą być różniczkowalne względem obu argumentów dla prawie wszystkich $\mathbf{x} \in M$ i prawie wszystkich chwil t . Wniosek ten wynika z konstrukcji tożsamości całkowej, prowadzącej do (1.5.19), co fizycznie gwarantuje energetyczną zgodność kinematyki powłoki z zasadami mechaniki, wyrażonymi w postaci całkowo-impulsowej. Jest to istotny wynik naszych dotychczasowych rozważań, do którego będziemy powracali w dalszej części książki.

1.6.3. Rzeczywisty ruch powłoki

Sens kinematyczny pola $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ jest oczywisty: jest to pole prędkości cząstek powierzchni podstawowej powłoki podczas jej ruchu. W szczególności, jeśli ruch powierzchni podstawowej jest opisany wektorem wodzącym $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$, to pole prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ jest określone przez pochodną $\dot{\vec{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}, t)$ względem czasu:

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (1.6.7)$$

Tak więc, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ w każdej chwili t jest wektorem stycznym do trajektorii (krzywej w przestrzeni fizycznej) ruchu cząstki powierzchni podstawowej, która w konfiguracji odniesienia zajmowała miejsce $\mathbf{x} \in M$ (zob. rys. 1.6.1).

Można jednak przyjąć również odmienny punkt widzenia. Załóżmy mianowicie, że nie wektor wodzący $\vec{y}(\mathbf{x}, t)$, lecz pole prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ jest wielkością znaną. Wówczas problem opisu rzeczywistego ruchu powierzchni podstawowej sprowadza się do znalezienia odwzorowania $\vec{y}: M \times T \rightarrow E$, spełniającego liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu (1.6.7). Przy dowolnie ustalonym $\mathbf{x} \in M$, ogólne rozwiązanie równania (1.6.7) ma postać

$$\vec{y}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad (1.6.8)$$

gdzie $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$ jest prędkością cząstek $M(t)$ w dowolnie ustalonej chwili początkowej (tutaj przyjęto $t = 0$, odpowiadającą konfiguracji odniesienia).

W podobny sposób, traktując jako znane pole prędkości obrotowej $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$, lub równoważne mu pole tensorów skośnie symetrycznych $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) = \text{ad } \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$, poszukajmy takiego odwzorowania $\mathbf{T}: M \times T \rightarrow E \otimes E$, które spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) \mathbf{T}(\mathbf{x}, t). \quad (1.6.9)$$

Przy dowolnie ustalonym $\mathbf{x} \in M$, jest to liniowe równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu, podobne do (1.6.7). Z teorii takich równań różniczkowych wynika, że ogólnym rozwiązaniem (1.6.9) jest tensor nieosobliwy $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ mający reprezentację

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{T}_0(\mathbf{x}), \quad (1.6.10)$$

gdzie $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ jest tensorem obrotu, $\det \mathbf{Q} = +1$, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, a $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ tensorem nieosobliwym już niezależnym od czasu. Tensory nieosobliwe $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$, spełniające $\det \mathbf{T} \neq 0$ i $\det \mathbf{T}_0 \neq 0$, mogą być nazwane *tensorami struktury* powłoki, odpowiednio, w konfiguracji aktualnej i konfiguracji odniesienia.

Uwzględniając że $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{T}_0$ i $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{Q}^T$, otrzymamy

$$\dot{\mathbf{T}} \mathbf{T}^{-1} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = \boldsymbol{\Omega}. \quad (1.6.11)$$

Można wykazać, że aby równania różniczkowe (1.6.7) i (1.6.9) miały rozwiązania (1.6.8) i (1.6.10), potrzeba i wystarcza aby pola $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ były jedynie ciągłe w sensie Lipschitza na $M \times T$, a nie klasy C^1 , jak to się zwykle zakłada.

Ponieważ $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ są jedynymi polami w (1.6.2) energetycznie sprzężonymi ze ścisłymi zależnościami mechaniki powłok, pola $\vec{y}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ całkowicie opisują ruch powłoki w przestrzeni fizycznej. Stąd wynika, że modelem kinematycznym powłoki, energetycznie spójnym ze ścisłymi równaniami mechaniki, jest dwuwymiarowe kontinuum materialne, którego konfiguracja przestrzenna w każdej chwili $t \in T$ jest całkowicie określona przez powierzchnię podstawową $M(t) = \boldsymbol{\chi}(M, t)$ i dodatkowe pole tensorów struktury $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ określone na tej powierzchni. W szczególności, powierzchnia podstawowa M i niezależne od czasu pole tensorów struktury $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ całkowicie określają konfigurację odniesienia powłoki.

1.6.4. Wektor przesunięcia i wektory kierunkowe

Do opisu ruchu powłoki potrzeba więc dwóch odwzorowań: $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$. Wyrażone przez wektor przesunięcia $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej i tensor obrotu $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$, odwzorowania te możemy zapisać w postaci

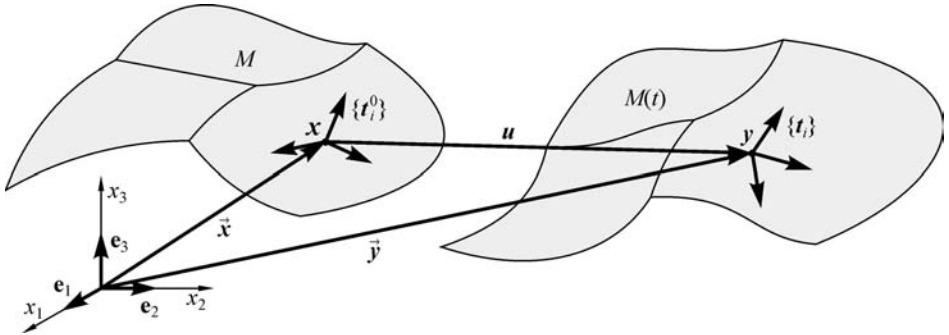
$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{T}_0(\mathbf{x}). \quad (1.6.12)$$

Ponieważ $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ jest tensorem nieosobliwym, można go równoważnie wyrazić poprzez trójkę liniowo niezależnych wektorów

$$\{t_i^0(\mathbf{x})\} \equiv \{t_1^0(\mathbf{x}), t_2^0(\mathbf{x}), t_3^0(\mathbf{x})\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.6.13)$$

Wektory $t_i^0(\mathbf{x})$ zwane są *wektorami kierunkowymi* konfiguracji odniesienia powłoki.

Podobnie, tensor $\mathbf{T}(\mathbf{y}, t)$ można wyrazić poprzez trójkę liniowo niezależnych wektorów kierunkowych $\{t_i(\mathbf{y}, t)\}$, związanych z punktami $\mathbf{y} \in M(t)$ powierzchni podstawowej w konfiguracji aktualnej, przy czym $\mathbf{y} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)$. Dlatego trójkę wektorów $\{t_i\}$ i tensor \mathbf{T} możemy traktować również jako pola określone na M , co zapisujemy w postaci $\{t_i(\mathbf{x}, t)\}$ i $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$.



Rys. 1.6.2. Pole przesunięć i wektory kierunkowe.

Do dalszych rozważań wygodnie jest wprowadzić trójki wektorów odwrotnych $\{t_i^0(\mathbf{x})\}$ i $\{t^i(\mathbf{x}, t)\}$, spełniających warunki

$$t_i^0(\mathbf{x}) \cdot t_j^0(\mathbf{x}) = \delta_j^i, \quad t^i(\mathbf{x}, t) \cdot t_j(\mathbf{x}, t) = \delta_j^i, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.6.14)$$

Między wprowadzonymi tu trójkami wektorów kierunkowych istnieje następująca prosta zależność, wynikająca z (1.6.10):

$$t_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) t_i^0(\mathbf{x}), \quad t^i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) t_i^0(\mathbf{x}), \quad (1.6.15)$$

Ponieważ $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ jest tensorem obrotu, to

$$t_i(\mathbf{x}, t) \cdot t_i(\mathbf{x}, t) = t_i^0(\mathbf{x}) \cdot t_i^0(\mathbf{x}), \quad t^i(\mathbf{x}, t) \cdot t^i(\mathbf{x}, t) = t_i^0(\mathbf{x}) \cdot t_i^0(\mathbf{x}). \quad (1.6.16)$$

Tak więc, zarówno wektory $\mathbf{t}_i(\mathbf{x}, t)$ jak i wektory $\mathbf{t}^i(\mathbf{x}, t)$ zachowują swoje pierwotne długości i wzajemne kąty podczas ruchu powłoki.

Różniczkując (1.6.15) względem czasu i uwzględniając (1.6.11), otrzymamy

$$\dot{\mathbf{t}}_i = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{t}_i^0 = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{t}_i^0 = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{t}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}_i. \quad (1.6.17)$$

Ponadto, tensor obrotu $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ można zapisać w postaci

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}_i(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{t}_0^i(\mathbf{x}) = \mathbf{t}^i(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{t}_i^0(\mathbf{x}). \quad (1.6.18)$$

Z różniczkowania (1.6.18) względem czasu i zależności $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ obowiązującej dla dowolnych dwóch wektorów \mathbf{a} i \mathbf{b} wynika, że

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{t}}_i \otimes \mathbf{t}_0^i = \dot{\mathbf{t}}^i \otimes \mathbf{t}_i^0, \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{t}_0^i \otimes \mathbf{t}_i = \mathbf{t}_i^0 \otimes \mathbf{t}^i. \quad (1.6.19)$$

Stąd tensor prędkości obrotowej $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)$, wyrażony przez wektory kierunkowe, przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T &= (\dot{\mathbf{t}}_i \otimes \mathbf{t}_0^i) (\mathbf{t}_j^0 \otimes \mathbf{t}^j) = (\dot{\mathbf{t}}^i \otimes \mathbf{t}_i^0) (\mathbf{t}_0^j \otimes \mathbf{t}_j) \\ &= \dot{\mathbf{t}}_i \otimes \mathbf{t}^i = \dot{\mathbf{t}}^i \otimes \mathbf{t}_i. \end{aligned} \quad (1.6.20)$$

Ponieważ jednak $\boldsymbol{\Omega}$ jest tensorem skośnie symetrycznym, otrzymamy również

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{t}}_i \wedge \mathbf{t}^i) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{t}}^i \wedge \mathbf{t}_i), \quad (1.6.21)$$

a wektor prędkości obrotowej, wyrażony przez pochodne po czasie wektorów kierunkowych, przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2} \text{ad}^{-1}(\dot{\mathbf{t}}_i \wedge \mathbf{t}^i) = -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{t}}_i \times \mathbf{t}^i \\ &= \frac{1}{2} \text{ad}^{-1}(\dot{\mathbf{t}}^i \wedge \mathbf{t}_i) = -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{t}}^i \times \mathbf{t}_i. \end{aligned} \quad (1.6.22)$$

Tutaj wykorzystaliśmy własność $\text{ad}^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, słuszną dla dowolnych dwóch wektorów \mathbf{a} i \mathbf{b} .

1.6.5. Reprezentacja materialna pola prędkości obrotowej

Jedną z najbardziej charakterystycznych cech rozważanej ogólnej mechaniki powłok jest pojawienie się tensora obrotu $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ jako niezależnej zmiennej kinematycznej. Ma to szereg konsekwencji, zarówno dla samej teorii powłok, jak i dla metod rozwiązywania zadań równowagi, stateczności i dynamiki konstrukcji powłokowych.

Ponieważ $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ jest tensorem obrotu, musi spełniać następujące warunki:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)^T = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)^T\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{1}. \quad (1.6.23)$$

Różniczkując (1.6.23) względem czasu z uwzględnieniem (1.6.11), pochodną $\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, t)$ można zapisać w jednej z dwóch postaci

$$\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t), \quad (1.6.24)$$

gdzie $\boldsymbol{\Omega}$ i $\boldsymbol{\Omega}$ to tensory skośnie symetryczne. Oznaczając przez $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\omega}$ wektory osiowe odpowiednich tensorów $\boldsymbol{\Omega}$ i $\boldsymbol{\Omega}$, mamy

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = \text{ad } \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}} = \text{ad } \boldsymbol{\omega}. \quad (1.6.25)$$

Z (1.6.24) wynikają następujące zależności:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}^T, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\omega}, \quad (1.6.26)$$

z których druga jest bezpośrednią konsekwencją pierwszej i podstawowej własności odwzorowania $\text{ad}: E \rightarrow E \wedge E$. Pochodne wektorów kierunkowych względem czasu możemy teraz zapisać w postaci

$$\dot{t}_i = \dot{\mathbf{Q}}t_i^0 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}t_i^0 = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega} \times t_i^0). \quad (1.6.27)$$

Tensor $\boldsymbol{\Omega}$ i jego wektor osiowy $\boldsymbol{\omega}$ określają prędkość obrotową powłoki w *reprezentacji przestrzennej*, natomiast tensor $\boldsymbol{\Omega}$ i jego wektor osiowy $\boldsymbol{\omega}$ określają tę samą prędkość obrotową powłoki w *reprezentacji materialnej*.

Ta dwoistość opisu prędkości ruchu obrotowego, znana w mechanice analitycznej ciała sztywnego (por. np. ARNOLD [1981]), ma głębokie konsekwencje również w mechanice powłok. W szczególności, wszystkie zależności mechaniki powłok mogą być przedstawione równoważnie albo w reprezentacji przestrzennej, albo w reprezentacji materialnej. W dotychczasowych rozważaniach dynamicznych używaliśmy różnych zależności i pól formułowanych jedynie w reprezentacji przestrzennej. Jednak w rozważaniach kinematycznych ta dwoistość formułowania mechaniki powłok staje się istotna, ponieważ niektóre pola i zależności kinematyczne mają dobrą interpretację fizyczną właśnie w reprezentacji materialnej, a nie w reprezentacji przestrzennej.

1.6.6. Wektory kierunkowe

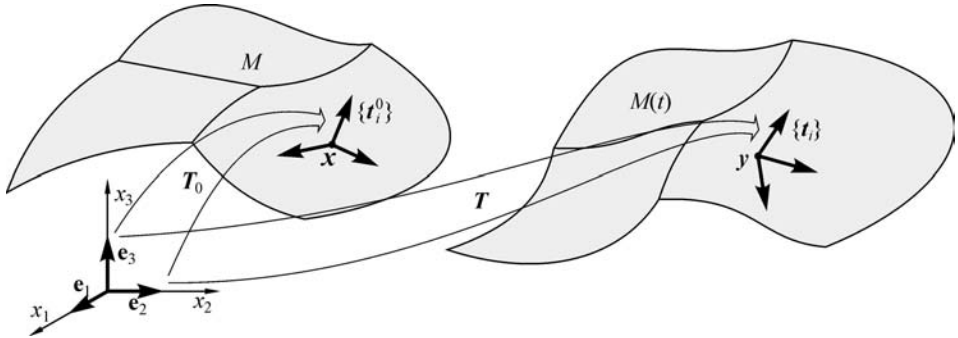
Tensor $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$, a więc i wektory kierunkowe $\{t_i^0(\mathbf{x})\}$ w konfiguracji odniesienia powłoki, można wybrać w zasadzie dowolnie i na wiele różnych sposobów. Na przykład, możemy założyć

$$t_i^0(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_0(\mathbf{x})\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.6.28)$$

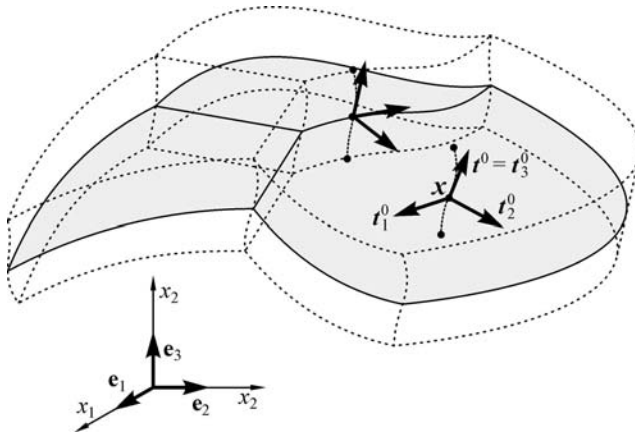
gdzie $\{\mathbf{e}_i\}$ jest ustaloną bazą ortonormalną w przestrzeni fizycznej. Trójka $\{\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x})\}$ nie musi tworzyć bazy ortonormalnej, ponieważ $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ jest dowolnym tensorem nieosobliwym, nie koniecznie tensorem obrotu.

W przypadku przyjęcia (1.6.28), baza w konfiguracji aktualnej dana jest jako

$$\begin{aligned} t_i(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{t}_i^0(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (1.6.29)$$



Rys. 1.6.3. Definicje wektorów kierunkowych względem bazy globalnej.



Rys. 1.6.4. Definicja wektora kierunkowego t^0 stycznie do włókna po grubości powłoki.

Mówiąc o powłoce, mamy na myśli dwuwymiarowe kontinuum materialne, czyli model matematyczny ciała trójwymiarowego, mającego dobrze zdefiniowaną grubość. Jeśli tensor \mathbf{T}_0 jest reprezentowany poprzez trójkę $\{\mathbf{t}_i^0\}$, to wygodnie jest przyjąć, że jeden z wektorów, np. $\mathbf{t}_3^0(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{t}^0(\mathbf{x})$, jest skierowany wzdłuż włókna po grubości powłoki.

Zarówno tensor $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$, jak i trójka $\{\mathbf{t}_i^0\}$ muszą być określone w każdym punkcie powierzchni M , łącznie z brzegiem ∂M i zbiorem krawędzi Γ .

1.6.7. Kinematyczne warunki brzegowe

Z założenia pola $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ mają ciągle przedłużenia analityczne do brzegu ∂M , z wyjątkiem być może skończonej liczby punktów dyskretnych. Założenie to było wykorzystane przy konstrukcji tożsamości całkowej.

Z rozważań przeprowadzonych w poprzednich punktach tego podrozdziału wynika, że brzeg powłoki ∂M w konfiguracji odniesienia jest również całkowicie opisany wektorem wodzącym $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ i polem tensorów struktury $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial M$, a deformacja brzegu jest określona przez

$$\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{T}_0(\mathbf{x}), \quad (1.6.30)$$

gdzie teraz $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$. Wzdłuż części ∂M_f brzegu ∂M spełnione są dynamiczne warunki brzegowe (1.4.60). Natomiast kinematyczne warunki brzegowe na części komplementarnej $\partial M_d = \partial M \setminus \partial M_f$ brzegu przyjmują postać

$$\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbf{y}}^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^*(\mathbf{x}, t), \quad (1.6.31)$$

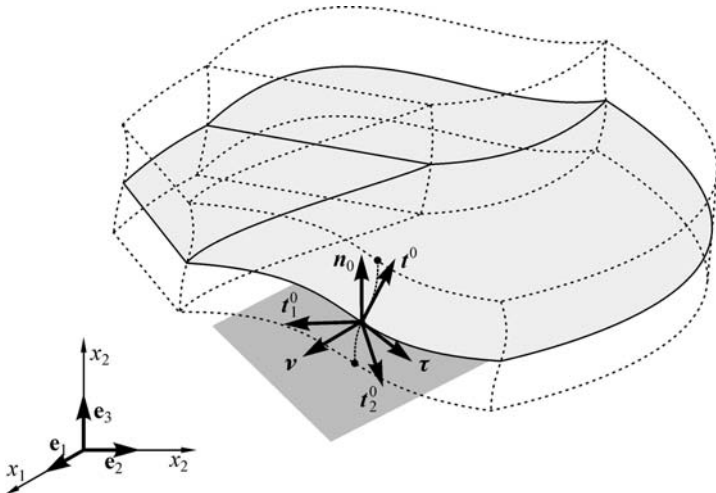
gdzie $\vec{\mathbf{y}}^*$ i \mathbf{T}^* są danymi funkcjami na części brzegu ∂M_d .

Ponieważ brzeg ∂M_d jest opisany przez wektor wodzący $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ i dany tensor $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$, z (1.6.30) wynika, że warunki brzegowe (1.6.31) można również zapisać w równoważnej postaci

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}^*(\mathbf{x}, t), \quad (1.6.32)$$

gdzie \mathbf{u}^* i \mathbf{Q}^* są danymi funkcjami.

Funkcje, po prawej stronie równań (1.6.32), powinny być energetycznie równoważne zadaniu trójwymiarowego warunku brzegowego $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbf{y}}^*(\mathbf{x}, t)$ na



Rys. 1.6.5. Definicja wektorów kierunkowych na brzegu w konfiguracji odniesienia powłoki.

$\mathbf{x} \in \partial B'_d$. To oznacza, że praca na ∂M_d wewnętrznych reakcji sił i momentów przekrojowych $\mathbf{n}_\nu = \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{m}_\nu = \mathbf{M}\boldsymbol{\nu}$, wykonana na polach \mathbf{u}^* , \mathbf{Q}^* , powinna być taka sama jak praca na $\partial B'_d$ wewnętrznej reakcji wektora naprężeń $\mathbf{t}_n = \mathbf{T}\mathbf{n}^*$, wykonana na polu $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$, gdzie $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ jest trójwymiarowym wektorem przesunięcia.

Różne zagadnienia początkowo-brzegowe mechaniki powłok wymagają zadania na brzegu ∂M różnych parami rozłącznych kombinacji sześciu składowych dynamicznych (1.4.60) i/lub kinematycznych (1.6.32) warunków brzegowych w bazie lokalnej $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} brzegu ∂M . W przypadku takich na ogół *mieszanych* warunków brzegowych, podział brzegu ∂M na rozłączne części ∂M_f i ∂M_d należy rozumieć jako dokonany dla każdej z tych sześciu energetycznie spójnych składowych dynamicznych i/lub kinematycznych warunków brzegowych.

1.7. Ogólna teoria odkształceń w powłokach

1.7.1. Uwagi wstępne

Po opisanu kinematyki powłoki, następnym, logicznym krokiem na drodze do sformułowania kompletnej teorii powłok będzie opis jej lokalnej deformacji i odkształceń.

W mechanice ośrodków ciągłych pojęcia lokalnej deformacji i odkształcenia są pojęciami czysto geometrycznymi, całkowicie niezależnymi od własności dynamicznych ciała. Jednak opis deformacji i odkształceń w powłokach różni się istotnie od ich opisu w ciałach trójwymiarowych. Wynika to z trzech powodów:

1. Powłoka jest reprezentowana przez dwuwymiarowe kontinuum, którego konfiguracje przestrzenne są powierzchniami w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Natomiast konfiguracje przestrzenne ciała trójwymiarowego są obszarami tej przestrzeni.
2. Geometria konfiguracji przestrzennych powierzchni podstawowej powłoki nie jest geometrią euklidesową (cechą charakterystyczną powierzchni jest jej krzywizna). Natomiast geometria każdej konfiguracji przestrzennej ciała trójwymiarowego jest taka sama jak otaczającej ją przestrzeni, czyli euklidesowa.
3. Powłoka ma dodatkową wewnętrzną strukturę kinematyczną, związaną z orientacją cząstek materialnych jej powierzchni podstawowej⁶, wyrażoną tensorem struktury. Natomiast cząstki materialne ciała trójwymiarowego

⁶Ta uwaga dotyczy zarówno rozważanej tutaj teorii powłok jak i wielu innych wariantów teorii powłok rozważanych w literaturze. W niektórych wariantach, np. w teorii typu Kirchhoffa-Love'a, cząstki materialne powłoki nie mają dodatkowej struktury kinematycznej (por. podrozdziały 3.6 i 3.7).

mają charakter punktów geometrycznych przestrzeni fizycznej, bez dodatkowej struktury kinematycznej⁷.

W rezultacie, nie tylko zmiany odległości między cząsteczkami powłoki, lecz również zmiany krzywizny jej powierzchni podstawowej oraz zmiany orientacji cząstek tej powierzchni muszą być uwzględniane przy opisie deformacji i odkształceń powłoki.

W poprzednim podrozdziale wykazaliśmy, że ruch powłoki względem dowolnie ustalonej konfiguracji odniesienia jest opisany przez dwa odwzorowania

$$\vec{y}: M \times T \rightarrow E, \quad \mathbf{T}: M \times T \rightarrow E \otimes E. \quad (1.7.1)$$

W ustalonej chwili $t \in T$ odwzorowania (1.7.1) nazywamy *globalną deformacją* powłoki. Jeśli oba odwzorowania (1.7.1) są różniczkowalne, to powierzchniowe gradienty $\nabla \vec{y}(\mathbf{x}, t)$ i $\nabla \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ aproksymują $\vec{y}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ w danym punkcie $\mathbf{x} \in M$ z dokładnością do pierwszego przybliżenia. W tym sensie, $\nabla \vec{y}(\mathbf{x}, t)$ i $\nabla \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ łącznie z $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ zawierają w sobie pełną informację o *lokalnej deformacji* powłoki.

1.7.2. Geometria powierzchni podstawowej powłoki

W geometrii różniczkowej dowodzi się, że pierwsza i druga forma kwadratowa powierzchni określają jednoznacznie gładką powierzchnię z dokładnością do jej położenia w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej⁸. Współczynnikami tych form kwadratowych są składowe tensora metrycznego i tensora krzywizny powierzchni, które z kolei można wyznaczyć analizując zmiany wzdłuż dowolnej krzywej wektora wodzącego powierzchni i jednostkowego wektora do niej normalnego.

W punktach regularnych powierzchni podstawowej M powłoki w konfiguracji odniesienia wektor wodzący $\vec{x}: M \rightarrow E$ jest funkcją różniczkowalną, a jego powierzchniowy gradient definiuje kanoniczny operator inkluzji $\mathbf{I}_0(\mathbf{x}) = \nabla \vec{x}(\mathbf{x})$, będący liniowym odwzorowaniem $\mathbf{I}_0(\mathbf{x}): T_{\mathbf{x}}M \rightarrow E$ przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{x}}M$ w przestrzeń euklidesową E (por. podrozdział 1.4). Istnieje przy tym ścisły związek pomiędzy operatorem $\mathbf{I}_0(\mathbf{x})$ a tensorem metrycznym $\mathbf{1}_0(\mathbf{x})$ powierzchni M . Wynika to z następujących rozważań:

Niech C będzie dowolną krzywą gładką na powierzchni M daną w postaci parametrycznej $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$, gdzie λ jest dowolnym parametrem skalarnym. Wówczas wektor wodzący $\vec{x}(\lambda) = \vec{x}(\mathbf{x}(\lambda))$ jest również funkcją parametru skalarnego λ . Oznaczając przez f' pochodną dowolnej funkcji f względem parametru λ , mamy

$$d\vec{x}(\mathbf{x}) = \vec{x}'(\lambda) d\lambda = (\nabla \vec{x}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}(\mathbf{x}), \quad (1.7.2)$$

⁷Mamy tutaj na myśli jedynie klasyczną mechanikę ośrodka ciągłego. W różnych jej uogólnieniach cząstki materialne są wyposażane w dodatkową strukturę, często identyczną ze strukturą typową dla teorii powłok (zob. np. WOŹNIAK [1969]).

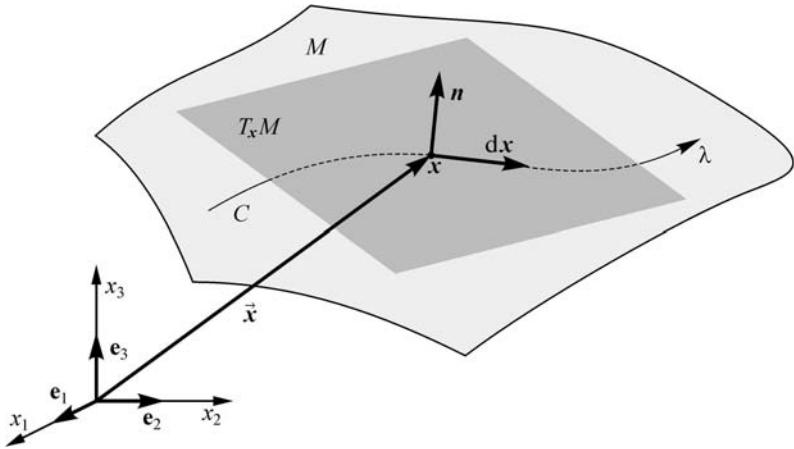
⁸Twierdzenie to odgrywa podstawową rolę w teorii powłok typu Kirchhoffa–Love'a (patrz podrozdziały 3.6 i 3.7).

gdzie $d\mathbf{x}(\mathbf{x})$ jest wektorem stycznym do krzywej C w danym punkcie \mathbf{x} , a więc elementem przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{x}}M$ (rys. 1.7.1). Zauważmy przy tym, że $\vec{\mathbf{x}}'(\mathbf{x})$, jako pochodna wektora wodzącego $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ względem parametru λ , jest elementem trójwymiarowej przestrzeni wektorowej E . Wobec tego, iloczyn skalarny $\vec{\mathbf{x}}' \cdot \vec{\mathbf{x}}'$ jest dobrze zdefiniowany. Wykorzystując (1.7.2), mamy wówczas

$$d\vec{\mathbf{x}} \cdot d\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{I}_0 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{I}_0 d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{I}_0^T \mathbf{I}_0 d\mathbf{x}. \quad (1.7.3)$$

Uwzględniając następnie, że $\mathbf{I}_0^T \mathbf{I}_0 = \mathbf{P}_0 \mathbf{I}_0 = \mathbf{1}_0$ (zob. p. 1.4.1), gdzie $\mathbf{1}_0(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}M \otimes T_{\mathbf{x}}M$ jest tensorem jednostkowym na powierzchni M , z (1.7.3) otrzymujemy

$$d\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot d\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = d\mathbf{x}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}(\mathbf{x}). \quad (1.7.4)$$



Rys. 1.7.1. Pochodna wektora wodzącego wzdłuż krzywej na powierzchni.

Niech $\tau_0(\mathbf{x})$ będzie wektorem jednostkowym wektora $d\mathbf{x}(\mathbf{x})$, a ds_0 długością wzdłuż $d\mathbf{x}(\mathbf{x})$. Wtedy możemy napisać $d\mathbf{x}(\mathbf{x}) = \tau_0(\mathbf{x}) ds_0$. Wówczas zależność (1.7.4) przyjmuje postać formy kwadratowej

$$ds_0^2 = d\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot d\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = d\mathbf{x}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}(\mathbf{x}) = d\mathbf{x}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}(\mathbf{x}), \quad (1.7.5)$$

która definiuje elementarną długość ds_0 każdej krzywej gładkiej C na powierzchni M .

W teorii powłok zakładamy, że każda konfiguracja przestrzenna powłoki jest powierzchnią lokalnie zorientowaną, która musi być rozpatrywana łącznie z ciągłym polem $\mathbf{n}: M \rightarrow E$ jednostkowych wektorów normalnych w $\mathbf{x} \in M$, przy czym $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}M^\perp$. Ponieważ $\|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| = 1$, \mathbf{n} może być rozpatrywany jako pole na M o wartościach w sferze jednostkowej $S^2(E)$ przestrzeni wektorowej E :

$$\mathbf{n}: M \rightarrow S^2(E) \subset E. \quad (1.7.6)$$

W geometrii różniczkowej odwzorowanie (1.7.6) jest nazywane odwzorowaniem normalnym, odwzorowaniem sferycznym lub też odwzorowaniem Gaussa, a zbiór

$$\mathbf{n}(M) = \{ \mathbf{m} \in S^2(E) \mid \mathbf{m} = \mathbf{n}(x) \text{ dla pewnego } x \in M \} \quad (1.7.7)$$

jest nazywany obrazem sferycznym powierzchni zorientowanej M . Jeśli M jest powierzchnią klasy C^2 lub wyższej, to (1.7.6) jest odwzorowaniem różniczkowalnym, a tensor krzywizny⁹ takiej powierzchni definiuje się następująco:

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \equiv -P_0(\mathbf{x})(\nabla \mathbf{n}(\mathbf{x})). \quad (1.7.8)$$

Tensor ten jest odwzorowaniem liniowym przestrzeni stycznej w siebie, $\mathbf{B}_0(\mathbf{x}): T_{\mathbf{x}}M \rightarrow T_{\mathbf{x}}M$. Można również wykazać, że jest on tensorem symetrycznym¹⁰.

Interpretacja geometryczna tensora $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ wynika z analizy zmian wektora $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ wzdłuż dowolnej krzywej. Jeśli krzywa C jest dana w postaci parametrycznej, to pochodna pola (1.7.6) względem parametru λ wyraża się wzorem

$$\mathbf{n}' = (\nabla \mathbf{n})\mathbf{x}' = -I_0\mathbf{B}_0\mathbf{x}', \quad (1.7.9)$$

ponieważ

$$\nabla \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -I_0(\mathbf{x})\mathbf{B}_0(\mathbf{x}). \quad (1.7.10)$$

Niezmienniki główne tensora krzywizny,

$$H = \frac{1}{2}\text{tr } \mathbf{B}_0, \quad K = \det \mathbf{B}_0, \quad (1.7.11)$$

znane są jako krzywizna średnia i krzywizna Gaussa powierzchni M .

Tensor $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ odgrywa istotną rolę w teorii powłok typu Kichhoffa–Love'a (por. podrozdział 3.6). W rozważanej tutaj ogólnej teorii powłok nie $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$, lecz inny tensor odgrywa istotniejszą rolę. Wynika to z faktu, że każda konfiguracja przestrzenna powłoki ma dodatkową strukturę wewnętrzną, określoną tensorem struktury \mathbf{T} .

1.7.3. Geometria konfiguracji odniesienia powłoki

W konfiguracji odniesienia powłoka jest reprezentowana nie tylko przez powierzchnię podstawową M , lecz również przez pole tensorów struktury \mathbf{T}_0 dane na tej powierzchni. W rezultacie, geometria konfiguracji odniesienia powłoki jest znacznie bogatsza od geometrii samej powierzchni M .

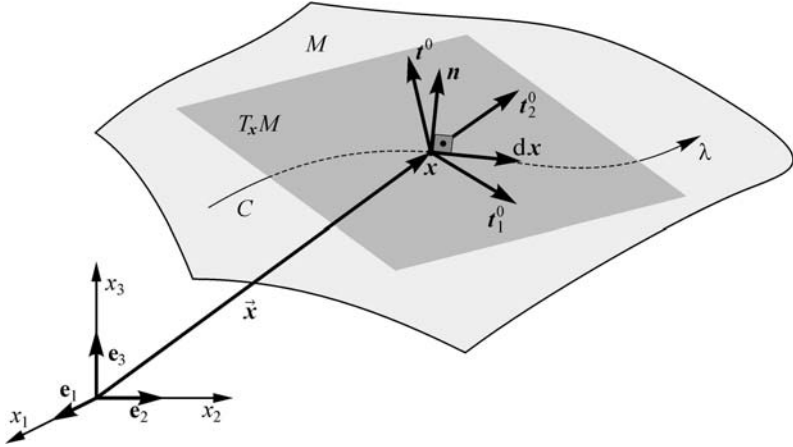
⁹Nie jest to szczęśliwa nazwa, ponieważ tensor krzywizny powierzchni jest obiektem geometrycznym innego rodzaju. W geometrii różniczkowej tensor $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ jest nazywany również operatorem Weingartena.

¹⁰Patrz literaturę cytowaną po (1.4.67).

Rozważmy tensor struktury $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ wzdłuż krzywej C na powierzchni M . Jeśli krzywa jest dana w postaci parametrycznej, to $\mathbf{T}_0(\lambda) = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}(\lambda))$ i pochodną tensora $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ wzdłuż C można zapisać w postaci

$$d\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}'_0 d\lambda = (\nabla \mathbf{T}_0) d\mathbf{x}. \quad (1.7.12)$$

Analiza zmian tensora $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ wzdłuż krzywej C na powierzchni M jest oczywiście równoważna analizie zmian wektorów kierunkowych $\{\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x}, t)\}$ wzdłuż tej krzywej (rys. 1.7.2).



Rys. 1.7.2. Wektory kierunkowe wzdłuż krzywej.

Wprowadźmy tensor

$$\mathbf{D}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) \equiv \{\nabla \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\} \mathbf{T}_0^{-1}(\mathbf{x}), \quad (1.7.13)$$

który zależy w sposób liniowy od wektora stycznego $d\mathbf{x}$. Istnieje więc odwzorowanie liniowe przestrzeni stycznej $T_x M$ w przestrzeń tensorową $E \otimes E$ takie, że

$$\mathbf{D}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) = \mathbf{D}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.7.14)$$

Ponieważ $\mathbf{D}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) \in E \otimes E$ w każdym punkcie powierzchni M , więc część symetryczna i skośnie symetryczna tego tensora są dobrze zdefiniowane w klasyczny sposób

$$\mathbf{D}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) = \mathbf{S}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) + \mathbf{B}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}), \quad (1.7.15)$$

gdzie

$$\mathbf{S}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) + \mathbf{D}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x})^T), \quad (1.7.16)$$

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\{\mathbf{D}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) - \mathbf{D}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x})^T\} = \text{ad } \mathbf{b}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}). \quad (1.7.17)$$

Tutaj $\mathbf{b}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x})$ jest wektorem osiowym tensora skośnie symetrycznego $\mathbf{B}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x})$.

Wektor $\mathbf{b}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x})$ zależy liniowo od wektora stycznego $d\mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}}M$ do krzywej C . Istnieje więc tensor $\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \in E \otimes T_{\mathbf{x}}M$ taki, że

$$\mathbf{b}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.7.18)$$

Tensor $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$, którego nie należy mylić z tensorem zdefiniowanym w (1.7.17), nie zależy od wyboru krzywej na powierzchni i jako taki stanowi, obok tensora (operatora) inkluzji $\mathbf{I}_0(\mathbf{x}) = \nabla \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$, podstawową miarę lokalnej geometrii konfiguracji odniesienia powłoki. W szczególności, jeśli tensor $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ jest reprezentowany poprzez wektory kierunkowe $\{\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x})\}$, to pochodne tych wektorów w kierunku wektora stycznego $d\mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}}M$ wyrażają się następującymi wzorami:

$$d\mathbf{t}_i^0 = \mathbf{D}_0 \mathbf{t}_i^0 = (\mathbf{S}_0 + \mathbf{B}_0) \mathbf{t}_i^0 = \mathbf{S}_0 \mathbf{t}_i^0 + \mathbf{b}_0 \times \mathbf{t}_i^0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.7.19)$$

gdzie $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x})$ i $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x})$ są, odpowiednio, tensorem symetrycznym (1.7.16) oraz wektorem osiowym (1.7.17) tensora skośnie symetrycznego $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x})$.

1.7.4. Geometria konfiguracji aktualnej powłoki

Postępując identycznie jak w p. 1.7.3, możemy teraz wyznaczyć geometrię konfiguracji aktualnej powłoki, to znaczy geometrię powierzchni podstawowej $M(t)$ i geometrię indukowaną przez pole tensora struktury $\mathbf{T}(\mathbf{y}, t)$, określone na tej powierzchni.

Jeśli \overline{C} jest krzywą gładką na $M(t)$ daną w postaci parametrycznej, to tensor struktury $\mathbf{T}(\mathbf{y}, t)$ wzdłuż tej krzywej może być traktowany jako funkcja parametru λ , $\mathbf{T}(\lambda, t) = \mathbf{T}(\mathbf{y}(\lambda, t), t)$. Pochodną tensora $\mathbf{T}(\mathbf{y}, t)$ wzdłuż \overline{C} możemy więc zapisać podobnie do (1.7.12):

$$d\mathbf{T} = \mathbf{T}' d\lambda = (\overline{\nabla} \mathbf{T}) d\mathbf{y}, \quad (1.7.20)$$

gdzie $\overline{\nabla}$ jest operatorem powierzchniowego gradientu na $M(t)$, a $d\mathbf{y} \in T_{\mathbf{y}}M(t)$ jest wektorem stycznym do krzywej \overline{C} .

Definiując następnie tensory $\mathbf{D}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$ i $\mathbf{D}(\mathbf{y}, t)$,

$$\mathbf{D}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y}) \equiv \{ \overline{\nabla} \mathbf{T}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \} \mathbf{T}(\mathbf{y}, t)^{-1} = \mathbf{D}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (1.7.21)$$

których odpowiednikami w konfiguracji odniesienia są tensory (1.7.13) i (1.7.14), część symetryczną i skośnie symetryczną tensora $\mathbf{D}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$ oznaczать będziemy, odpowiednio, przez $\mathbf{S}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$ i $\mathbf{B}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$.

Ponieważ wektor osiowy $\mathbf{b}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$ tensora $\mathbf{B}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$,

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y}) = \text{ad}^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y}), \quad (1.7.22)$$

zależy liniowo od wektora stycznego $d\mathbf{y} \in T_{\mathbf{y}}M(t)$, istnieje tensor $\mathbf{B}(\mathbf{y}, t) \in E \otimes T_{\mathbf{y}}M(t)$ odwzorowujący przestrzeń styczną $T_{\mathbf{y}}M(t)$ w przestrzeń E taki, że

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}. \quad (1.7.23)$$

Tensor $\mathbf{B}(\mathbf{y}, t)$, obok tensora (operatora) inkluzji $\mathbf{I}(\mathbf{y}, t) = \overline{\nabla} \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, t)$, stanowi podstawową miarę lokalnej geometrii konfiguracji aktualnej powłoki.

Jeśli tensor $\mathbf{T}(\mathbf{y}, t)$ jest reprezentowany poprzez wektory kierunkowe $\{t_i(\mathbf{y}, t)\}$, to pochodne tych wektorów wzdłuż krzywej \overline{C} , czyli w kierunku wektora stycznego $d\mathbf{y} \in T_{\mathbf{y}}M(t)$, wyrażają się następującymi wzorami:

$$dt_i = D t_i = (\mathbf{S} + \mathbf{B}) t_i = S t_i + \mathbf{b} \times t_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.7.24)$$

gdzie $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$ i $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$ są, odpowiednio, tensorem symetrycznym (1.7.16) oraz wektorem osiowym (1.7.17) tensora skośnie symetrycznego $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$.

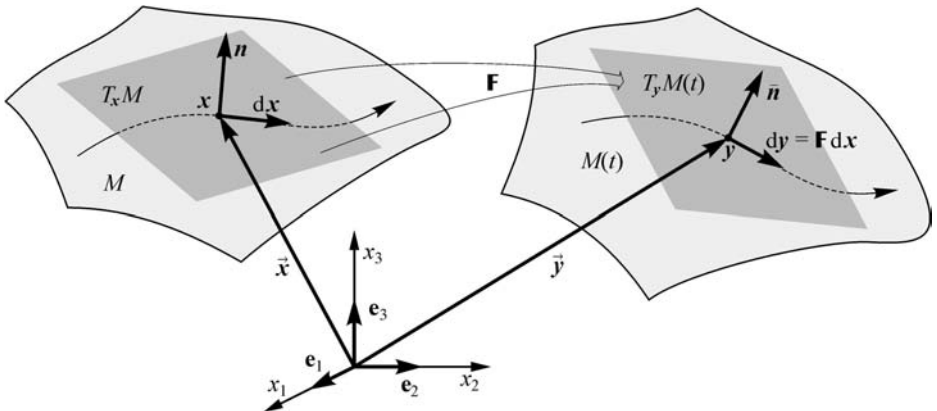
1.7.5. Lokalna deformacja powłoki

Wykorzystując zależności wynikające z analizy geometrii konfiguracji odniesienia, podane w p. 1.7.3, i z identycznej analizy geometrii konfiguracji aktualnej powłoki, podanej w p. 1.7.4, możemy teraz wprowadzić odpowiednie powłokowe miary odkształceń.

Przyjmijmy, że krzywa $\overline{C} = \chi(C, t)$ w konfiguracji aktualnej $M(t)$ powierzchni podstawowej powłoki jest obrazem, przez funkcję deformacji (rys. 1.7.3), krzywej C na powierzchni podstawowej M w konfiguracji odniesienia. Pochodna funkcji ruchu $\mathbf{y} = \chi(\mathbf{x}, t)$ wzdłuż krzywej C ma postać

$$d\mathbf{y} = \mathbf{F} d\mathbf{x}, \quad (1.7.25)$$

gdzie $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ jest stycznym gradientem deformacji powierzchni podstawowej powłoki (patrz p. 1.4.7).



Rys. 1.7.3. Lokalna deformacja pierwszego rzędu powierzchni podstawowej powłoki.

Wykorzystując zależność (1.7.24), wektor osiowy $\mathbf{b}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$ w konfiguracji aktualnej powłoki możemy teraz zapisać w postaci

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \mathbf{B}(\mathbf{y}, t) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.7.26)$$

Zależności (1.7.25) i (1.7.26) mogą stanowić podstawę do definiowania różnych lokalnych miar odkształceń powłoki. Takich możliwych miar jest, oczywiście, nieskończenie wiele. Wśród różnych lokalnych miar odkształceń, które można zdefiniować na podstawie zależności (1.7.25) i (1.7.26), istnieją powłokowe miary odkształceń naturalnie wyróżnione przez ściśle lokalne równania dynamiki powłok.

1.7.6. Naturalne miary odkształceń powłoki

Analizując tożsamość całkową (1.6.2) w szczególnym przypadku ruchu rzeczywistego powłoki (1.6.1), w p. 1.6.1 wykazaliśmy, że druga całka w (1.6.3) wyraża się przez pole skalarne

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N} \cdot (\nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}, \quad (1.7.27)$$

które ma sens fizyczny powierzchniowej gęstości efektywnej mocy naprężeń powłoki.

Z (1.7.27) wynika, że dwa tensory

$$\mathbf{E}^\circ(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{K}^\circ(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t), \quad (1.7.28)$$

mają sens powłokowych *miar prędkości odkształceń*, energetycznie sprzężonych z przekrojowymi miarami naprężeń $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ w powłoce. Miary $\mathbf{E}^\circ(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}^\circ(\mathbf{x}, t)$ należy więc traktować jako najbardziej *naturalne* miary prędkości odkształceń powłoki, ponieważ definicje tych miar (1.7.28) wynikają *bezpośrednio* i w sposób *jednoznaczny* ze ścisłych zasad zachowania pędu i momentu pędu powłoki. Miary $\mathbf{E}^\circ(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}^\circ(\mathbf{x}, t)$ są wyrażone w (1.7.28) przez gradienty wektorów prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$. Naszym zadaniem jest teraz sformułowanie takich powierzchniowych miar odkształceń powłoki $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$, których odpowiednio zdefiniowane pochodne po czasie $(\cdot)^\circ$ byłyby równe miarom prędkości odkształceń (1.7.28).

Pochodną wektora wodzącego $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ w kierunku stycznym do dowolnej krzywej C otrzymujemy w postaci

$$d\vec{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.7.29)$$

W szczególności, zależność (1.7.29) w konfiguracji odniesienia przy $t = 0$ ma postać (1.7.2). Tak więc, względną zmianę długości wektora stycznego do krzywej C podczas deformacji powłoki można określić przez

$$\begin{aligned} d\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) d\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \\ = \{ \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{I}_0(\mathbf{x}) \} d\mathbf{x} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.7.30)$$

Podobnie wektory $\mathbf{b}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$ i $\mathbf{b}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x})$, określone przez (1.7.26) i (1.7.18), są wektorowymi miarami lokalnej geometrii konfiguracji aktualnej i odniesienia powłoki, obliczonymi w kierunku krzywej C . Względną zmianę tej miary wektorowej podczas deformacji powłoki można określić przez

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{y}, t; \mathbf{F} d\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) \\ = \{ \mathbf{B}(\mathbf{y}, t)\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \} d\mathbf{x} \equiv \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.7.31)$$

Z zależności (1.7.30) i (1.7.31) wynika, że tensory $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ zdefiniowane wzorami

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} - \mathbf{Q}\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}\mathbf{F} - \mathbf{Q}\mathbf{I}_0, \quad \mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{F} - \mathbf{Q}\mathbf{B}_0 \quad (1.7.32)$$

są *naturalnymi miarami odkształceń* powłoki.

Tensory $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ są odwzorowaniami liniowymi przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{x}}M$ w przestrzeń euklidesową E . Geometryczna interpretacja naturalnych miar odkształceń (1.7.32) wynika z analizy geometrii konfiguracji odniesienia i konfiguracji aktualnej powłoki oraz funkcji ruchu $\mathbf{y} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{T}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$. Miarę $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ nazywamy *tensorem odkształcenia* powłoki, a miarę $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ *tensorem zginania* powłoki.

Pokażmy, że naturalne miary prędkości odkształceń (1.7.28) są tzw. *współobrotowymi* pochodnymi względem czasu z naturalnych miar odkształceń (1.7.32), zdefiniowanymi następująco:

$$\mathbf{E}^\circ = \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^T \mathbf{E}) \right), \quad \mathbf{K}^\circ = \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^T \mathbf{K}) \right). \quad (1.7.33)$$

Różniczkując tensor $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ względem czasu, otrzymamy

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{I}_0. \quad (1.7.34)$$

Uwzględniając następnie, że

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt} \nabla \dot{\mathbf{y}} = \nabla \dot{\mathbf{y}} = \nabla \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}, \quad (1.7.35)$$

pochodną (1.7.34) tensora \mathbf{E} możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{I}_0 &= \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}\mathbf{I}_0 = \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{F} - \mathbf{E}) \\ &= \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{F} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{E} = \mathbf{E}^\circ + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1.7.36)$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję (1.7.28)₁ tensora prędkości odkształcenia \mathbf{E}° .

Z drugiej strony, wprost z definicji pochodnej współobrotowej (1.7.33)₁ mamy

$$\mathbf{E}^\circ = \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^T \mathbf{E}) \right) = \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{E}) = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{E}. \quad (1.7.37)$$

Uwzględniając $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$, pamiętając definicję (1.6.11) tensora prędkości obrotowej oraz biorąc pod uwagę zależność

$$\boldsymbol{\Omega}^T = (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T)^T = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = -\boldsymbol{\Omega}, \quad (1.7.38)$$

z (1.7.38) i (1.7.36)₄ otrzymujemy

$$\mathbf{E}^\circ = \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^T \mathbf{E}) \right) = \dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{E} = \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F}, \quad (1.7.39)$$

a więc wyrażenie identyczne (1.7.28).

W analogicznym do (1.7.37) i (1.7.39) postępowaniu łatwo wykazać zależność

$$\mathbf{K}^\circ = \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^T \mathbf{K}) \right) = \dot{\mathbf{K}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{K}. \quad (1.7.40)$$

Pozostaje jedynie udowodnić, że

$$\dot{\mathbf{K}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{K} = \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t). \quad (1.7.41)$$

W tym celu uwzględnimy w definicji (1.7.21) następujący związek pomiędzy powierzchniowymi gradientami tensorów struktury w konfiguracji aktualnej i konfiguracji odniesienia powierzchni podstawowej:

$$d\mathbf{T} = (\bar{\nabla} \mathbf{T}) d\mathbf{y} = (\nabla \mathbf{T}) d\mathbf{x}, \quad (1.7.42)$$

który wynika z reguły różniczkowania funkcji złożonej. Obliczając teraz powierzchniowy gradient z tensora $\mathbf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{T}_0$, tensor $\mathbf{D}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y})$, określony przez (1.7.21), możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (\nabla \mathbf{T} d\mathbf{x}) \mathbf{T}^{-1} = ((\nabla \mathbf{Q} d\mathbf{x}) \mathbf{T}_0 + \mathbf{Q} (\nabla \mathbf{T}_0 d\mathbf{x})) \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{Q}^T \\ &= (\nabla \mathbf{Q} d\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} (\nabla \mathbf{T}_0 d\mathbf{x}) \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{Q}^T \\ &= (\nabla \mathbf{Q} d\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \mathbf{D}_0 \mathbf{Q}^T, \end{aligned} \quad (1.7.43)$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję (1.7.13) tensora $\mathbf{D}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x})$. Ponieważ \mathbf{Q} jest tensorem obrotu, tensor

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) \equiv \{\nabla \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}\} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)^T \quad (1.7.44)$$

jest tensorem skośnie symetrycznym. Wobec tego, biorąc część skośnie symetryczną z (1.7.43) otrzymamy

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)^T, \quad (1.7.45)$$

a stąd

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y}) = \text{ad}^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{y}, t; d\mathbf{y}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x}). \quad (1.7.46)$$

Tutaj $\mathbf{b}_0(\mathbf{x}; d\mathbf{x})$ jest wektorem osiowym wyrażonym wzorem (1.7.18), natomiast

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) \equiv \text{ad}^{-1} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.7.47)$$

Z (1.7.46) otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{y}, t; \mathbf{F} d\mathbf{x}) &= \mathbf{B}(\mathbf{y}, t) \mathbf{F} d\mathbf{x} \\ &= \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (1.7.48)$$

co prowadzi do definicji (1.7.32)₂.

Ponieważ wektor styczny $d\mathbf{x}$ nie zależy od czasu, różniczkując (1.7.47) względem czasu mamy

$$\dot{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) \equiv \text{ad}^{-1} \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.7.49)$$

Z kolei różniczkując (1.7.44), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) &= \left(\frac{d}{dt} (\nabla \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \right) \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}, t) + (\nabla \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}) \frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}, t)) \\ &= (\nabla \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}, t) + (\nabla \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}) \dot{\mathbf{Q}}^T(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.7.50)$$

Uwzględniając następnie, że $\dot{\mathbf{Q}}^T = (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q})^T = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega}^T = -\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega}$ oraz

$$(\nabla \dot{\mathbf{Q}}) d\mathbf{x} = (\nabla (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q})) d\mathbf{x} = ((\nabla \boldsymbol{\Omega}) d\mathbf{x}) \mathbf{Q} + \boldsymbol{\Omega} ((\nabla \mathbf{Q}) d\mathbf{x}), \quad (1.7.51)$$

wyrażenie (1.7.50) dla pochodnej tensora $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x})$ przedstawiamy w postaci

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, t; \nabla \mathbf{x}) &= (((\nabla \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) ((\nabla \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x})) \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - (\nabla \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)^T \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) \\ &= ((\nabla \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) ((\nabla \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - (\nabla \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)^T \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.7.52)$$

Biorąc następnie pod uwagę zależność (1.7.44) dla tensora $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x})$, ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) &= (\nabla \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) \mathbf{K}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) - \mathbf{K}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) \\ &= (\nabla \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} + [\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t), \mathbf{K}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x})], \end{aligned} \quad (1.7.53)$$

gdzie $[\cdot, \cdot]$ jest komutatorem tensorów skośnie symetrycznych (zob. str. 58).

Z (1.7.49) i (1.7.53) oraz po uwzględnieniu (1.7.47) mamy więc

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) &= \text{ad}^{-1} (((\nabla \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}) + [\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t), \mathbf{K}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x})]) \\ &= \text{ad}^{-1} (((\nabla \text{ad } \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}) + [\text{ad } \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t), \text{ad } \mathbf{k}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x})]) \\ &= ((\nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) \mathbf{K}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (1.7.54)$$

a w rezultacie

$$\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) \mathbf{K}(\mathbf{x}, t), \quad (1.7.55)$$

ponieważ (1.7.54) jest spełnione dla każdego wektora $d\mathbf{x}$. Wykorzystaliśmy tutaj własności operatora ad jako izomorfizmu algebr Liego wektorów osiowych i tensorów skośnie symetrycznych (zob. str. 58). Zapisując teraz (1.7.55) w postaci

$$\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \quad (1.7.56)$$

oraz porównując ją z (1.7.41) widzimy więc, że rzeczywiście $\mathbf{K}^\circ(\mathbf{x}, t) = \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$.

1.7.7. Miary odkształceń i naprężeń powłoki w reprezentacji materialnej

W analizie kinematyki powłoki (podrozdział 1.6) wykazaliśmy, że jedną z podstawowych cech rozważanej tu ogólnej teorii powłok jest istnienie dwóch równoważnych reprezentacji wszystkich zależności kinematycznych. Jest to naturalną konsekwencją faktu, że tensor obrotu $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ jest, obok wektora przesunięcia $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, podstawową zmienną kinematyczną ogólnej mechaniki powłok.

Niech $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ będą tensorami zdefiniowanymi następująco:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{K}(\mathbf{x}, t), \quad (1.7.57)$$

gdzie $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ są naturalnymi miarami odkształceń (1.7.32). Podstawiając (1.7.57) do (1.7.33), otrzymamy

$$\mathbf{E}^\circ = \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{E}) \right) = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{K}^\circ = \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{K}) \right) = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{K}}. \quad (1.7.58)$$

Podstawiając teraz (1.7.58) do (1.7.27), otrzymujemy następujące wyrażenie na gęstość efektywnej mocy naprężeń:

$$\sigma = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}^\circ + \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}^\circ = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{K}}, \quad (1.7.59)$$

gdzie tensory $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, zdefiniowane jako

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{N}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{M}(\mathbf{x}, t), \quad (1.7.60)$$

są przekrojowymi miarami naprężeń powłoki energetycznie sprzężonymi z miarami odkształceń powłoki $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$.

Wprowadzone w (1.7.57) tensory $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ są naturalnymi miarami odkształceń powłoki, wyrażonymi w reprezentacji materialnej. Podobnie, wprowadzone w (1.7.60) tensory $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ są przekrojowymi miarami naprężeń powłoki, wyrażonymi w reprezentacji materialnej.

Wprowadzone w (1.7.32) naturalne miary odkształceń powłoki nie są jedyne, które spełniałyby warunki (1.7.33). Łatwo zauważyć, że każde miary odkształceń powłoki, określone przez dodanie do $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ dowolnych stacjonarnych (niezależnych od czasu) pól tensorowych, również będą spełniały warunki (1.7.33). Jednak tylko wprowadzone w (1.7.32) naturalne miary odkształceń powłoki przyjmują wartości zerowe w konfiguracji odniesienia dla $t = 0$. Z tego powodu będą one preferowane w dalszej części tej książki.

1.7.8. Przesunięcia i parametry obrotów

Konfiguracja odniesienia powłoki jest całkowicie określona przez wektor wodzący $\vec{x}(\mathbf{x})$ powierzchni podstawowej i tensor struktury $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$. Dlatego wyrażenia

$$\vec{y}(\mathbf{x}, t) = \vec{x}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{T}_0(\mathbf{x}) \quad (1.7.61)$$

są równoważnym opisem ruchu powłoki względem wybranej konfiguracji odniesienia.

Wektor $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ma trzy niezależne składowe względem dowolnie wybranej bazy. Natomiast tensor obrotu $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ ma dziewięć składowych względem dowolnie wybranej bazy, które jednak muszą spełniać sześć zależności

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)^T = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)^T\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{1}. \quad (1.7.62)$$

Interpretując to geometrycznie, tensor obrotu jest izometrycznym odwzorowaniem $\mathbf{Q}: E \rightarrow E$ przestrzeni E w siebie, zachowującym jeden punkt i orientację. Oznacza to, że muszą być spełnione dwa następujące warunki:

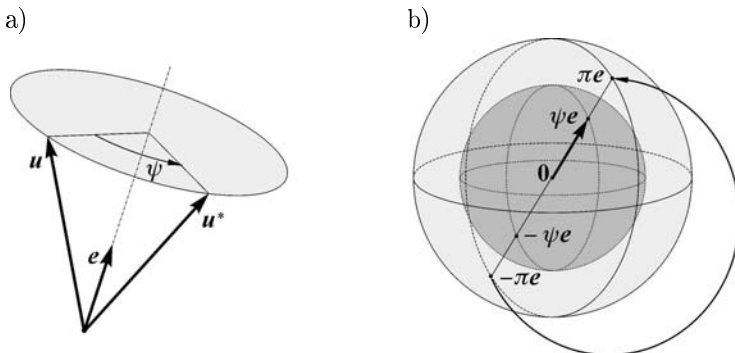
$$\mathbf{Q}\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (\mathbf{Q}\mathbf{a} \times \mathbf{Q}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{Q}\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad (1.7.63)$$

dla dowolnych trzech wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E$.

Na mocy twierdzenia Eulera, każde takie odwzorowanie izometryczne jest określone przez oś obrotu o wersorze kierunkowym \mathbf{e} i kąt obrotu ψ , rys. 1.7.4. Oś obrotu \mathbf{Q} jest określona wektorem własnym \mathbf{e} tensora \mathbf{Q} , odpowiadającym wartości własnej $+1$. Słuszne są zależności

$$\mathbf{Q}\mathbf{e} = +1\mathbf{e}, \quad \cos \psi = \frac{1}{2}(\text{tr } \mathbf{Q} - 1). \quad (1.7.64)$$

Reprezentacja tensora obrotu (1.7.64), wyrażona przez wektor jednostkowy wzdłuż osi obrotu i kąt obrotu, nie jest jednak jednoznaczna, rys. 1.7.4 b.



Rys. 1.7.4. Twierdzenie Eulera i topologia grupy obrotów.

Oznaczając przez $\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ tensor skośnie symetryczny, którego wektorem osiowym jest wektor \mathbf{e} , tensor obrotu \mathbf{Q} można wyrazić funkcją wykładniczą

$$\mathbf{Q} = \exp(\psi \widehat{\mathbf{E}}), \quad \widehat{\mathbf{E}} = \text{ad } \mathbf{e}, \quad (1.7.65)$$

która dla dowolnego tensora \mathbf{A} jest zdefiniowana absolutnie zbieżnym szeregiem

$$\exp \mathbf{A} = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 + \dots \quad (1.7.66)$$

Wykorzystując następnie twierdzenie Cayleya–Hamiltona można wykazać, że szereg (1.7.66) ma następującą skończoną postać, podaną już w pracy GIBBS [1884]:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} + \sin \psi \widehat{\mathbf{E}} + (1 - \cos \psi) \widehat{\mathbf{E}}^2. \quad (1.7.67)$$

Zależności odwrotne, wyrażające \mathbf{e} i ψ przez \mathbf{Q} , można wyznaczyć rozwiązując układ czterech równań algebraicznych

$$\sin \psi \widehat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T), \quad \cos \psi = \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{Q} - 1), \quad (1.7.68)$$

które wynikają wprost z (1.7.67).

Ponieważ $\mathbf{Q}^2 = \exp(2\psi \widehat{\mathbf{E}})$, wzór na $\widehat{\mathbf{E}}$ można przedstawić również w alternatywnej postaci (por. PIETRASZKIEWICZ i BADUR [1983])

$$\widehat{\mathbf{E}} = -\frac{1}{2 \sin \psi} \{ (1 + 2 \cos \psi) \mathbf{1} - 2(1 + \cos \psi) \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 \}. \quad (1.7.69)$$

Wygodną parametryzację tensora \mathbf{Q} można otrzymać przy zastosowaniu różnych uogólnionych wektorów obrotu skończonego. Dla dowolnej funkcji $\phi = \phi(\psi)$, monotonicznie rosnącej względem kąta obrotu ψ oraz takiej że $\psi(0) = 0$, uogólniony wektor obrotu skończonego jest określony zależnościami

$$\phi = \phi(\psi) \mathbf{e}, \quad \Phi = \text{ad } \phi = \phi(\psi) \widehat{\mathbf{E}}. \quad (1.7.70)$$

Podstawiając (1.7.70) do (1.7.67) otrzymamy

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} + \alpha \Phi + \beta \Phi^2, \quad \alpha = \frac{\sin \psi}{\phi(\psi)}, \quad \beta = \frac{1 - \cos \psi}{\phi(\psi)^2}. \quad (1.7.71)$$

Przy powyższych założeniach funkcja $\phi = \phi(\psi)$ ma jednoznaczną funkcję odwrotną $\psi = \psi(\phi)$, co pozwala wyrazić \mathbf{Q} jedynie przez ϕ .

W literaturze opracowano wiele różnych sposobów parametryzacji tensora obrotu \mathbf{Q} , z których każdy może być wygodniejszy od innych w określonych zastosowaniach szczegółowych. Przeglądy różnych parametryzacji można znaleźć np. w ŁURIE [1961], BEATTY [1977], ROONEY [1977], GUO ZHONG-HENG [1981], ARGYRIS [1982], PIETRASZKIEWICZ i BADUR [1983], ALTMAN [1986], ARGYRIS i POTERASU [1993], ATLURI i CAZZANI [1995], BORRI, TRAINELLI i BOTTASSO [2000], GÉRADIN i CARDONA [2001], gdzie podana jest obszerna literatura źródłowa.

Spośród wielu możliwych parametryzacji obrotów celowym jest poszukiwanie takich, które prowadzą do możliwie najprostszych związków między tensorem obrotu \mathbf{Q} a przyjętymi parametrami. Na przykład, jako kryterium wyboru parametryzacji można przyjąć żądanie, aby odpowiednie związki nie zawierały funkcji trygonometrycznych. Okazuje się, że istnieje dokładnie jeden wektor obrotu skończonego, określony z dokładnością do stałego mnożnika, który spełnia ten warunek. Wektor ten, nazywany wektorem obrotu skończonego Rodriguesa, jest zdefiniowany wzorem

$$\boldsymbol{\theta} = \operatorname{tg}(\psi/2) \mathbf{e}. \quad (1.7.72)$$

Odpowiadający mu tensor skośnie symetryczny ma postać

$$\boldsymbol{\Theta} = \operatorname{ad} \boldsymbol{\theta} = \operatorname{tg}(\psi/2) \widehat{\mathbf{E}}. \quad (1.7.73)$$

Podstawiając (1.7.73) do (1.7.67) oraz wykorzystując klasyczne tożsamości trygonometryczne łatwo sprawdzić, że tensor obrotu \mathbf{Q} można zapisać w następującej postaci:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{1} + \Lambda(\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^2), \quad \Lambda \equiv 2(1 + \|\boldsymbol{\theta}\|^2)^{-1}. \quad (1.7.74)$$

Tutaj $\|\boldsymbol{\theta}\| = \sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}}$ oznacza normę euklidesową wektora obrotu skończonego (1.7.72).

1.7.9. Wyrażenia na prędkości obrotowe

Jeśli tensor obrotu \mathbf{Q} jest wyrażony przez dowolny uogólniony wektor obrotu skończonego $\boldsymbol{\phi}$,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\phi}(x, t)), \quad (1.7.75)$$

to pochodną $\dot{\mathbf{Q}}$ względem czasu możemy zapisać w postaci

$$\dot{\mathbf{Q}} = (\partial_{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{Q}) \dot{\boldsymbol{\phi}}. \quad (1.7.76)$$

Podstawiając (1.7.76) do wyrażeń

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = ((\partial_{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{Q}) \dot{\boldsymbol{\phi}}) \mathbf{Q}^T, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^T ((\partial_{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{Q}) \dot{\boldsymbol{\phi}}), \quad (1.7.77)$$

wektory osiowe tych tensorów skośnie symetrycznych można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\phi}) \dot{\boldsymbol{\phi}}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\phi}) \dot{\boldsymbol{\phi}}, \quad (1.7.78)$$

gdzie $\mathbf{H}(\boldsymbol{\phi})$ i $\mathbf{H}(\boldsymbol{\phi})$ są liniowymi operatorami (tensorami), przyporządkowującymi wektorowi $\boldsymbol{\phi}$ odpowiednie wektory prędkości obrotowej $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\omega}$.

Jawną postać tych operatorów można wyznaczyć dla każdej postaci uogólnionego wektora obrotu skończonego $\boldsymbol{\phi}$. Mają one jednak na ogół dość złożoną

postać i zawierają funkcje trygonometryczne. Jeśli jednak przyjmiemy wektor obrotu skończonego Rodriguesa, określony jak w (1.7.72), to operatory $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ i $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ przyjmują prostą postać

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda(\mathbf{1} + \boldsymbol{\Theta}), \quad \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda(\mathbf{1} - \boldsymbol{\Theta}). \quad (1.7.79)$$

W tym szczególnym przypadku dla wektorów prędkości obrotowej otrzymamy wzory

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \Lambda(\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}), \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \Lambda(\dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad (1.7.80)$$

nie zawierające funkcji trygonometrycznych. Można również wykazać że, z dokładnością do stałego mnożnika, jest to jedyny wektor posiadający tę własność.

1.7.10. Zależności kinematyczne

Jeśli wektor wodzący $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej w konfiguracji aktualnej wyrazimy przez wektor przesunięcia $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, wówczas gradient deformacji $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ można zapisać w postaci

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I}_0(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1.7.81)$$

gdzie $\mathbf{I}_0(\mathbf{x})$ jest operatorem inkluzji w konfiguracji odniesienia, a $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ oznacza powierzchniowy gradient pola przesunięć.

Podstawiając (1.7.81) do (1.7.32)₁, tensor odkształcenia powłoki $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ przyjmuje postać

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}_0 + \nabla \mathbf{u} - \mathbf{Q}\mathbf{I}_0 = \nabla \mathbf{u} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q})\mathbf{I}_0. \quad (1.7.82)$$

W szczególnym przypadku parametryzacji obrotów przez wektor obrotu skończonego Rodriguesa (1.7.72), zależności kinematyczne dla miar odkształceń powłoki (1.7.32) wyrażają się następująco:

$$\mathbf{E} = \nabla \mathbf{u} - \Lambda(\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^2)\mathbf{I}_0, \quad \mathbf{K} = \Lambda(\mathbf{1} + \boldsymbol{\Theta})\nabla \boldsymbol{\theta}. \quad (1.7.83)$$

Tutaj wykorzystaliśmy postać (1.7.79)₁ operatora $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$.

Jeśli powierzchnia podstawowa M w konfiguracji odniesienia powłoki dana jest w postaci parametrycznej (por. podrozdział 1.4), to miary odkształceń powłoki w reprezentacji przestrzennej możemy wyrazić przez wektory miar odkształceń

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\kappa}_\alpha(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{x}). \quad (1.7.84)$$

Wówczas z (1.7.84) otrzymamy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha &= \mathbf{u}_{,\alpha} - \Lambda(\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^2)\vec{\mathbf{x}}_{,\alpha} = \mathbf{u}_{,\alpha} - \Lambda\{\boldsymbol{\theta} \times \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha} + \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha})\}, \\ \boldsymbol{\kappa}_\alpha &= \Lambda(\mathbf{1} + \boldsymbol{\Theta})\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} = \Lambda(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}). \end{aligned} \quad (1.7.85)$$

Odpowiednie miary odkształceń powłoki w reprezentacji materialnej mają postać

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\kappa}_\alpha(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{x}), \quad (1.7.86)$$

gdzie wektory miar odkształceń w reprezentacji przestrzennej i materialnej powiązane są zależnościami

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad \boldsymbol{\kappa}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\kappa}_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (1.7.87)$$

Zależności te wynikają wprost z (1.7.57) i klasycznej tożsamości tensorowej

$$\mathbf{A}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{A}\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \quad (1.7.88)$$

która zachodzi dla dowolnych wektorów \mathbf{a} i \mathbf{b} oraz dowolnego tensora \mathbf{A} .

1.8. Przekrojowe wielkości dynamiczne

1.8.1. Parametryczny opis konfiguracji odniesienia ciała typu powłoka

W dotychczasowych rozważaniach sformułowaliśmy całkowite postacie zasad mechaniki, sprowadzonych do powierzchni podstawowej powłoki. Przyjmując pewne dodatkowe założenia odnośnie regularności obszaru B ciała w konfiguracji odniesienia i deformacji powłoki jako ciała trójwymiarowego, wyprowadzimy obecnie jawną postać każdej wielkości dynamicznej, która pojawiła się w zasadach zachowania mechaniki powłok (1.3.17)–(1.3.19).

Dla wygody dalszych rozważań przypomnijmy wszystkie definicje wykorzystane w podrozdziale 1.3:

$$\iint_{\Pi} m_0 \, da \equiv \iiint_P \rho_0 \, dv, \quad (1.8.1)$$

$$\iint_{\Pi} \mathbf{p} \, da \equiv \iiint_P \rho_0 \mathbf{v} \, dv, \quad \iint_{\Pi} (\mathbf{s} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \, da \equiv \iiint_P \rho_0 \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{v} \, dv.$$

$$\iint_{\Pi} \mathbf{f} \, da \equiv \iiint_P \mathbf{f} \, dv + \iint_{\Pi^+} \mathbf{t}_n^+ \, da^+ - \iint_{\Pi^-} \mathbf{t}_n^- \, da^-,$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} (\mathbf{c} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f}) \, da &\equiv \iiint_P \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f} \, dv + \iint_{\Pi^+} \vec{\mathbf{y}}^+ \times \mathbf{t}_n^+ \, da^+ \\ &\quad - \iint_{\Pi^-} \vec{\mathbf{y}}^- \times \mathbf{t}_n^- \, da^-, \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

$$\int_{\partial\Pi} \mathbf{n}_\nu dl \equiv \iint_{\partial P'} \mathbf{t}_n da^*, \quad \int_{\partial\Pi} (\mathbf{m}_\nu + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}_\nu) dl \equiv \iint_{\partial P'} \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{t}_n da^*. \quad (1.8.3)$$

$$\int_{\partial M_f} \mathbf{n}^* dl \equiv \iint_{\partial B'_f} \mathbf{t}^* da^*, \quad \int_{\partial M_f} (\mathbf{m}^* + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}^*) dl \equiv \iint_{\partial B'_f} \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{t}^* da^*. \quad (1.8.4)$$

W powyższych definicjach $P \subset B$ jest obszarem zajmowanym przez dowolną część ciała, a $\Pi = P \cap M$ odpowiadającym P obszarem powierzchni podstawowej M , $\partial P'$ jest powierzchnią boczną obszaru P , a $\partial\Pi = \partial P' \cap M$ odpowiadającym $\partial P'$ brzegiem części Π powierzchni M . Ponadto, $\partial B'_f$ oznacza tę część powierzchni bocznej obszaru B , na której zadane są zewnętrzne obciążenia.

Przyjmując, że powierzchnia podstawowa M w konfiguracji odniesienia jest dowolnie umiejscowiona w obszarze B , wektor wodzący $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ typowego punktu $\mathbf{x} \in B$ można zapisać w postaci

$$\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \xi), \quad \xi \in [-h_0^-(\mathbf{x}), +h_0^+(\mathbf{x})], \quad (1.8.5)$$

gdzie $\mathbf{x} \in M$ jest odpowiadającym $\mathbf{x} \in B$ punktem powierzchni podstawowej, ξ jest współrzędną po grubości powłoki, a $h_0^\pm(\mathbf{x}) \geq 0$ są nieujemnymi funkcjami spełniającymi warunek

$$h_0(\mathbf{x}) \equiv h_0^-(\mathbf{x}) + h_0^+(\mathbf{x}) > 0. \quad (1.8.6)$$

Funkcja $h_0(\mathbf{x})$ zdefiniowana w ten sposób określa *grubość* powłoki w konfiguracji odniesienia.

Zgodnie z (1.8.5), wektory wodzące powierzchni granicznych M^\pm mają postać

$$\vec{\mathbf{x}}^\pm(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \pm h_0^\pm(\mathbf{x})), \quad (1.8.7)$$

natomiast powierzchnia boczna $\partial P'$ obszaru P jest opisana wektorem wodzącym

$$\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \xi), \quad \xi \in [-h_0^-(\mathbf{x}), +h_0^+(\mathbf{x})], \quad (1.8.8)$$

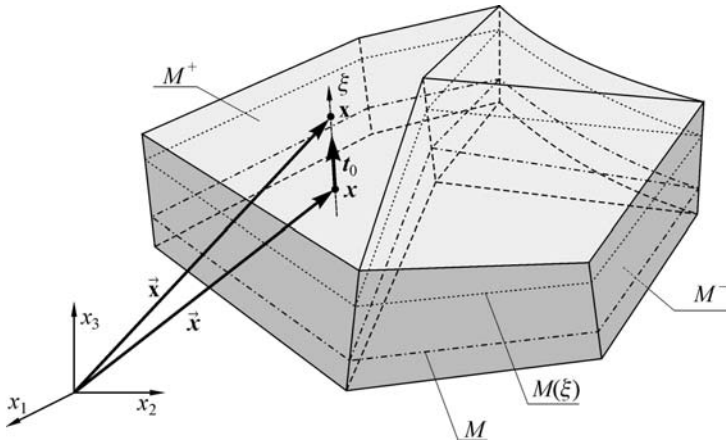
gdzie punkty $\mathbf{x} \in \partial\Pi = M \cap \partial P'$ mogą być określone parametrem długości łuku s wzdłuż brzegu $\partial\Pi$: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$. Tak więc, wektor wodzący (1.8.8) powierzchni bocznej $\partial P'$ można traktować jak funkcję zmiennych s i ξ .

W wielu przypadkach wektor wodzący (1.8.5) można przyjąć w postaci

$$\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \xi) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \xi \mathbf{t}_0(\mathbf{x}), \quad (1.8.9)$$

gdzie $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ jest polem wektorów *jednostkowych*, określających przekroje poprzeczne powłoki w konfiguracji odniesienia. Zauważmy, że pole wektorów $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ może być zdefiniowane w sposób ciągły na całej wielopłatowej powierzchni M , włączając w to krawędzie i wierzchołki.

Opis konfiguracji odniesienia B przez przyjęcie wektora wodzącego w postaci (1.8.9) oznacza ograniczenie się do przypadku, gdy powierzchnia boczna $\partial B'$ jest powierzchnią prostokreślną (rys. 1.8.1). W dalszej części tej książki ograniczymy się wyłącznie do takiego przypadku początkowej powierzchni brzegowej powłoki.



Rys. 1.8.1. Konfiguracja odniesienia ciała typu powłoka z prostokreślną powierzchnią boczną.

1.8.2. Układy współrzędnych i zależności geometryczne

Lokalnie obszar B można opisać parametrycznie, wprowadzając krzywoliniowy układ współrzędnych $\{\xi^i\}$, $i = 1, 2, 3$. Wówczas wektor wodzący $\vec{\mathbf{x}}$ możemy rozpatrywać jako funkcję wektorową trzech zmiennych, $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(\xi^i)$.

Z dowolnie przyjętym układem współrzędnych krzywoliniowych związane są następujące wielkości geometryczne:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \vec{\mathbf{x}}_{,i}, & \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j &= \delta_j^i, \\ g_{ij} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, & g^{ij} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j, & g &= \det(g_{ij}), \\ \epsilon_{ijk} &= (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}_k, & \epsilon^{ijk} &= (\mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j) \cdot \mathbf{g}^k. \end{aligned} \quad (1.8.10)$$

Tutaj i dalej przecinkiem oznaczamy pochodne cząstkowe względem współrzędnych ξ^i , natomiast δ_j^i jest symbolem Kroneckera, tzn. $\delta_j^i = 1$ jeśli $i = j$ oraz $\delta_j^i = 0$ jeśli $i \neq j$.

Powierzchnię podstawową $M \subset B$ możemy lokalnie sparametryzować, wprowadzając krzywoliniowy układ współrzędnych powierzchniowych $\{\xi^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$. Oba układy współrzędnych — przestrzenny i powierzchniowy — mogą być wybrane całkowicie niezależnie. Wygodnie i rozsądnie jest jednak wybrać współrzędne przestrzenne $\{\xi^i\} = \{\xi^\alpha, \xi\}$ w taki sposób, aby warunek $\xi^3 \equiv \xi = 0$ określał powierzchnię podstawową M , a dwie pozostałe współrzędne były współrzędnymi powierzchniowymi na M . Wówczas różniczkowy element objętości dv obszaru B i różniczkowy element pola da powierzchni M można wyliczyć ze wzorów:

$$dv = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi, \quad da = \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2, \quad (1.8.11)$$

gdzie przyjmujemy konwencję $d\xi \equiv d\xi^3$ oraz

$$\sqrt{g} = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3, \quad \sqrt{a} = (\vec{\mathbf{x}}_{,1} \times \vec{\mathbf{x}}_{,2}) \cdot \mathbf{n}. \quad (1.8.12)$$

Wykorzystując zależności

$$\sqrt{g} = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3 = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \sqrt{a} (\mathbf{g}_\alpha \times \mathbf{g}_\beta) \cdot \mathbf{g}_3, \quad (1.8.13)$$

wprowadźmy następujący niezmiennik $\mu(\mathbf{x}, \xi)$:

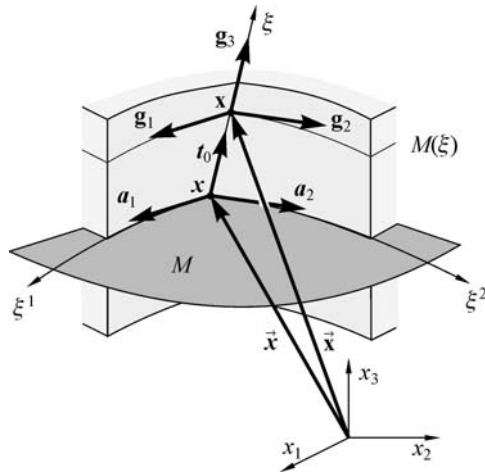
$$\mu \equiv \sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} (\mathbf{g}_\alpha \times \mathbf{g}_\beta) \cdot \mathbf{g}_3. \quad (1.8.14)$$

Wówczas różniczkowy element objętości dv obszaru B i różniczkowy element pola da powierzchni M są powiązane zależnością

$$dv = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi = \mu d\xi da. \quad (1.8.15)$$

W szczególności, gdy wektor wodzący dany jest przez (1.8.9), mamy (rys. 1.8.2)

$$\mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}, \xi) = \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha}(\mathbf{x}) + \xi \mathbf{t}_{0,\alpha}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{g}_3(\mathbf{x}, \xi) = \mathbf{t}_0(\mathbf{x}). \quad (1.8.16)$$



Rys. 1.8.2. Wektory baz naturalnych w przestrzeni ciała typu powłoka.

Wówczas niezmiennik $\mu(\mathbf{x}, \xi)$, określony wzorem (1.8.14), otrzymujemy w następującej postaci:

$$\mu \equiv \sqrt{\frac{g}{a}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_0 + \xi \epsilon^{\alpha\beta} (\vec{\mathbf{x}}_{,\alpha} \times \mathbf{t}_{0,\alpha}) \cdot \mathbf{t}_0 + \frac{1}{2} \xi^2 \epsilon^{\alpha\beta} (\mathbf{t}_{0,\alpha} \times \mathbf{t}_{0,\beta}) \cdot \mathbf{t}_0. \quad (1.8.17)$$

Wektory bazy odwrotnej można teraz wyznaczyć rozwiązując układ równań $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i$, co prowadzi do

$$\mathbf{g}^\beta = \mu^{-1} \epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{t}_0 \times \mathbf{g}_\alpha, \quad \mathbf{g}^3 = \frac{1}{2} \mu^{-1} \epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \times \mathbf{g}_\beta. \quad (1.8.18)$$

Z (1.8.7) i (1.8.8) można wyznaczyć zależności pomiędzy odpowiednimi elementami różniczkowymi pola da^\pm i da^* powierzchni granicznych M^\pm i powierzchni bocznej $\partial P'$ oraz odpowiadającymi im elementami różniczkowymi pola da powierzchni podstawowej i długości dl krzywej brzegowej $\partial\Pi$. Zależności te zapiszemy w postaci

$$da^\pm = \alpha^\pm da, \quad da^* = \mu^* d\xi dl, \quad (1.8.19)$$

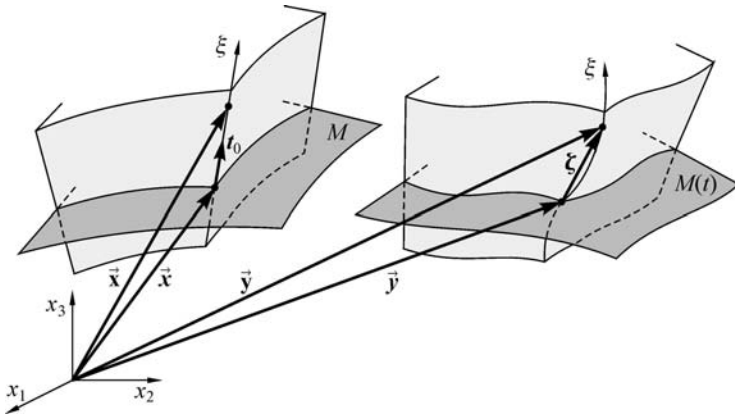
gdzie współczynniki α^\pm i μ^* można wyliczyć ze wzorów wektorowych $da^\pm = \mathbf{g}_1^\pm \times \mathbf{g}_2^\pm d\xi^1 d\xi^2$ i $da^* = \bar{\mathbf{x}}_{,s}^* \times \bar{\mathbf{x}}_{,\xi}^* ds d\xi$.

1.8.3. Formalna reprezentacja trójwymiarowej deformacji powłoki

Jeśli konfiguracja odniesienia B jest opisana wektorem wodzącym (1.8.9), to wektor wodzący dowolnego punktu $\mathbf{y} \in B(t)$ w konfiguracji aktualnej można formalnie zapisać w postaci (rys. 1.8.3)

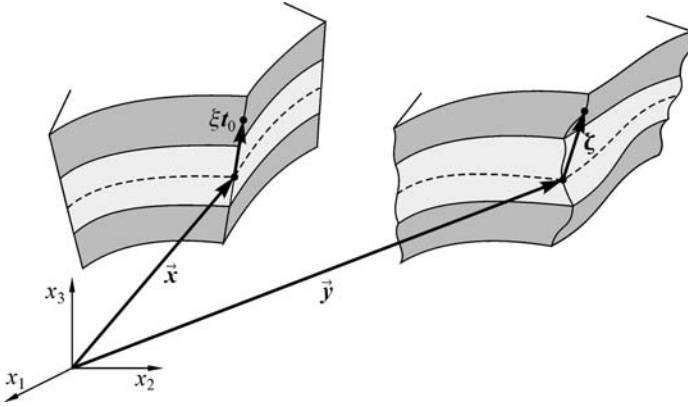
$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t), \quad (1.8.20)$$

gdzie $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t)$ jest wektorem określającym położenie punktu obszaru powłoki względem odpowiadającego mu punktu powierzchni podstawowej $M(t)$.



Rys. 1.8.3. Formalna reprezentacja deformacji powłoki.

Dla ustalonego $\mathbf{x} \in M$ i dowolnej chwili t zakładamy, że $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t)$ jest funkcją odcinkami gładką względem współrzędnej ξ . Dopuszczamy więc tutaj ogólną deformację powłoki o dowolnej strukturze po grubości, tak jak to naszkicowano na rys. 1.8.4. Zwróćmy uwagę, że we wszystkich dotychczasowych rozważaniach nie wykluczaliśmy np. powłok warstwowych, zbrojonych, będących kompozycją różnych materiałów, pękających lub degradujących się podczas deformacji itd. Otrzymane dotąd podstawowe równania i zależności mechaniki powłok odnoszą się również do takich zagadnień ogólnych powłok.



Rys. 1.8.4. Odcinkami gładka formalna reprezentacja deformacji powłoki.

1.8.4. Przekrojowe wielkości dynamiczne

Wykorzystując zależność (1.8.15), całkę po dowolnym podobszarze P konfiguracji odniesienia można zapisać w postaci

$$\iiint_P (\cdot) dv = \iint_{\Pi} \left(\int_{-h_0^-(\mathbf{x})}^{+h_0^+(\mathbf{x})} (\cdot) \mu d\xi \right) da, \quad (1.8.21)$$

gdzie wyrażenie podcałkowe (\cdot) musi jedynie spełniać warunek całkowalności.

Zastosowanie ogólnego wzoru (1.8.21) do definicji (1.8.1)₁ przekrojowej gęstości masy $m_0(\mathbf{x})$ daje

$$m_0 = \int_{-}^{+} \rho_0 \mu d\xi, \quad \int_{-}^{+} (\cdot) d\xi \equiv \int_{-h_0^-(\mathbf{x})}^{+h_0^+(\mathbf{x})} (\cdot) d\xi. \quad (1.8.22)$$

Wykorzystując formalną reprezentację (1.8.20) trójwymiarowej deformacji powłoki, przy zastosowaniu ogólnego wzoru (1.8.21) do definicji (1.8.1)_{2,3} powierzchniowej gęstości pędu $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ i momentu pędu $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{v} \mu d\xi, \\ \mathbf{s} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p} &= \int_{-}^{+} \rho_0 \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{v} \mu d\xi = \int_{-}^{+} \rho_0 \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{v} \mu d\xi + \vec{\mathbf{y}} \times \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{v} \mu d\xi. \end{aligned} \quad (1.8.23)$$

Z porównania (1.8.23)₂ i (1.8.23)₁ wynika, że

$$\mathbf{s} = \int_{-}^{+} \rho_0 \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{v} \mu \, d\xi. \quad (1.8.24)$$

Wykorzystanie zależności geometrycznych (1.8.19)₁ pozwala wyrazić całki po powierzchniach granicznych Π^\pm przez całkę po powierzchni podstawowej

$$\iint_{\Pi^\pm} (\cdot) \, da^\pm = \iint_{\Pi} \alpha^\pm (\cdot) \, da. \quad (1.8.25)$$

Stosując wzory (1.8.21) i (1.8.25) do definicji (1.8.2) oraz wykorzystując (1.8.20), otrzymujemy następujące wyrażenia na przekrojowe wektory sił i momentów powierzchniowych:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \int_{-}^{+} \mathbf{f} \mu \, d\xi + \alpha^+ \mathbf{t}_n^+ - \alpha^- \mathbf{t}_n^-, \\ \mathbf{c} &= \int_{-}^{+} \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{f} \mu \, d\xi + \alpha^+ \boldsymbol{\zeta}^+ \times \mathbf{t}_n^+ - \alpha^- \boldsymbol{\zeta}^- \times \mathbf{t}_n^-. \end{aligned} \quad (1.8.26)$$

Całkę po powierzchni bocznej $\partial P'$ można sprowadzić do całki wzdłuż krzywej $\partial \Pi = \partial P' \cap M$ na powierzchni M korzystając z zależności

$$\iint_{\partial P'} (\cdot) \, da = \int_{\partial \Pi} \left\{ \int_{-}^{+} (\cdot) \mu^* \, d\xi \right\} dl, \quad (1.8.27)$$

gdzie wykorzystaliśmy zależność geometryczną (1.8.19)₂. Jeśli $\mathbf{x} \in \partial P'$ jest punktem powierzchni bocznej, to przekrojowa siła $\mathbf{n}_\nu(\mathbf{x}, t)$ i przekrojowy moment $\mathbf{m}_\nu(\mathbf{x}, t)$ w punkcie $\mathbf{x} \in \partial \Pi$ są zdefiniowane przez (1.8.3), gdzie $\mathbf{x} \in \partial \Pi = \partial P' \cap M$. Wykorzystując (1.8.27) i (1.8.20) otrzymujemy

$$\mathbf{n}_\nu = \int_{-}^{+} \mathbf{t}_n \mu^* \, d\xi, \quad \mathbf{m}_\nu = \int_{-}^{+} \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{t}_n \mu^* \, d\xi. \quad (1.8.28)$$

Podobnie, przekrojowa siła i przekrojowy moment obciążeń brzegowych, działających na powierzchnię boczną powłoki, dane są wzorami

$$\mathbf{n}^* = \int_{-}^{+} \mathbf{t}^* \mu^* \, d\xi, \quad \mathbf{m}^* = \int_{-}^{+} \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{t}^* \mu^* \, d\xi. \quad (1.8.29)$$

W ten sposób wszystkie pola powierzchniowe, występujące w zasadach zachowania mechaniki powłok (1.3.17)–(1.3.19), zostały wyrażone w sposób *ściśle* przez bezpośrednie całkowanie po grubości powłoki odpowiednich pól trójwymiarowych mechaniki ośrodka ciągłego. W tym sprowadzeniu zagadnienia trójwymiarowego do dwuwymiarowego nie korzystaliśmy z *żadnych* założeń upraszczających. Całkowane tu po grubości powłoki pola trójwymiarowe nie muszą być ani gładkie, ani nawet ciągłe, a jedynie całkowalne. Jest to najslabsze z możliwych wymagań w stosunku do takich pól.

1.8.5. Tensory przekrojowych sił i momentów

Jeśli $\mathbf{x} \in B$ jest dowolnym punktem wewnętrznym w obszarze konfiguracji odniesienia ciała, to naprężenie na powierzchni $\partial P'$, przechodzącej przez ten punkt i zorientowanej jednostkowym wektorem normalnym $\mathbf{n}^*(\mathbf{x})$, jest określone wektorem naprężeń nominalnych $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t)$. Przy uwzględnieniu postulatu Cauchy'ego (1.1.12), definicje (1.3.12) przyjmują postać

$$\int_{\partial \Pi} \mathbf{N} \boldsymbol{\nu} dl = \iint_{\partial P'} \mathbf{T} \mathbf{n}^* da^*,$$

$$\int_{\partial \Pi} (\mathbf{M} \boldsymbol{\nu} + \bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{N} \boldsymbol{\nu}) dl = \iint_{\partial P'} \bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{T} \mathbf{n}^* da^*.$$
(1.8.30)

Jeśli $\{\xi^i\}$ jest dowolnie wybranym układem współrzędnych krzywoliniowych w obszarze konfiguracji odniesienia B , to pierwszy tensor naprężeń Pioli–Kirchhoffa $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ można wyrazić w postaci

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}^i(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{t}^\alpha(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{t}^3(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{g}_3(\mathbf{x}).$$
(1.8.31)

Z (1.8.19) można następnie wyznaczyć zależności pomiędzy zorientowanym różniczkowym elementem pola $\mathbf{n}^* da^*$ powierzchni bocznej $\partial P'$ a zorientowanym różniczkowym elementem długości $\boldsymbol{\nu} dl$ wzdłuż krzywej brzegowej $\partial \Pi$. Zapisując tensory przekrojowych sił $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i momentów $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ w postaci

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n}^\alpha(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}^\alpha(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}),$$
(1.8.32)

dla przekrojowych wektorów sił i momentów otrzymamy

$$\mathbf{n}^\alpha = \int_{-}^{+} \mathbf{t}^\alpha \boldsymbol{\mu} d\xi, \quad \mathbf{m}^\alpha = \int_{-}^{+} \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{t}^\alpha \boldsymbol{\mu} d\xi.$$
(1.8.33)

W powyższym wyprowadzeniu wykorzystaliśmy postulat Cauchy'ego (zob. GURTIN i MURDOCH [1975]) w odniesieniu do trójwymiarowego wektora naprężeń $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t)$. Istnienie tensorów przekrojowych sił i momentów $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ oraz $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ można również wykazać bez wykorzystania trójwymiarowego postulatu Cauchy'ego.

Rozdział 2

Równania konstytutywne i zagadnienia szczegółowe

2.1. Równania konstytutywne mechaniki ośrodków ciągłych

2.1.1. Istota równań konstytutywnych

Omawiane w poprzednim rozdziale zasady mechaniki oraz wynikające z nich lokalne równania ruchu i warunki uboczne a także sformułowane tam zależności kinematyczne są zależnościami ogólnymi, obowiązującymi we wszystkich procesach dynamicznych. Dotyczy to zarówno mechaniki ośrodków ciągłych, jak i mechaniki powłok. Podane zależności nie stanowią jednak zamkniętego układu równań, gdyż liczba równań nie jest wystarczająca do wyznaczenia niezależnych pól występujących w tych układach równań. Brakującym elementem teorii są tzw. *równania konstytutywne*. Ten czysto matematyczny fakt posiada oczywistą interpretację fizyczną.

Najprostsze doświadczenia dowodzą, że dwa ciała o identycznym kształcie poddane działaniu jednakowych sił deformują się odmiennie, o ile nie są wykonane z identycznych materiałów. Mówimy więc, że różne materiały charakteryzują się odmiennymi własnościami mechanicznymi, opisywanymi przez równania konstytutywne.

Różnorodność cech mechanicznych materiałów jest faktem doświadczalnym. Dlatego zasadniczą rolę przy formułowaniu równań konstytutywnych odgrywają badania eksperymentalne. Żaden eksperyment nie może jednak dostarczyć użytecznych informacji o własnościach mechanicznych materiałów o ile nie został on świadomie zaplanowany i odpowiednio przeprowadzony. Pierwszym więc krokiem na drodze do formułowania równań konstytutywnych musi być teoria takich równań, w ramach której można opracować odpowiednią metodologię eksperymentu.

Podstawy teorii równań konstytutywnych w mechanice ośrodka ciągłego opracowane zostały w pracach NOLL [1958], COLEMAN i NOLL [1963] i COLEMAN [1964]. Są one obszernie omawiane m.in. w znanych monografiach TRUESDELL i NOLL [1965], WANG i TRUESDELL [1973] oraz monografiach polskich PERZYNA [1966], RYMARZ [1993], OSTROWSKA-MACIEJEWSKA [1994] i HANYGA [1991]. Celem tego podrozdziału jest jedynie bardzo pobieżne przypomnienie podstawowych koncepcji i definicji tej teorii, które będą pomocne przy formułowaniu równań konstytutywnych nieliniowej mechaniki powłok.

2.1.2. Procesy dynamiczne

W mechanice ośrodka ciągłego (podrozdział 1.1) proces dynamiczny jest określony przez następujące zmienne: gęstość masy $\rho_0(\mathbf{x})$, funkcję deformacji $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)$, tensor naprężeń $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, zewnętrzną siłę objętościową $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, zewnętrzną siłę powierzchniową $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ działającą na części ∂B_f brzegu ciała, wartość funkcji deformacji $\boldsymbol{\chi}^*(\mathbf{x}, t)$ zadaną na części komplementarnej ∂B_d brzegu ciała oraz wartości początkowe $\boldsymbol{\chi}_0(\mathbf{x})$ i $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ w chwili $t = 0$ funkcji deformacji i prędkości.

Zakłada się, że zmienne $(\rho_0, \mathbf{f}, \mathbf{t}^*, \boldsymbol{\chi}^*, \boldsymbol{\chi}_0, \mathbf{v}_0)$ są *danymi* rozważanego problemu, natomiast $(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{T})$ muszą być wyznaczone z *rozwiązania* zagadnienia początkowo-brzegowego problemu.

Powyższe zmienne spełniają *lokalne równania ruchu*

$$\text{Div } \mathbf{T} + \mathbf{f} = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{T} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{T}^T, \quad (2.1.1)$$

gdzie Div jest trójwymiarowym operatorem dywergencji, a pole prędkości i przestrzenny gradient deformacji wyznaczają się z funkcji deformacji

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.1.2)$$

gdzie ∇ jest operatorem przestrzennego gradientu. Równania ruchu (2.1.1), łącznie z *dynamicznym warunkiem brzegowym*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) \quad (2.1.3)$$

zadany na części ∂B_f brzegu, *kinematycznym warunkiem brzegowym*

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\chi}^*(\mathbf{x}, t) \quad (2.1.4)$$

zadany na części komplementarnej $\partial B_d = \partial B \setminus \partial B_f$ brzegu oraz *warunkami początkowymi* w chwili $t = 0$

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\chi}_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad (2.1.5)$$

zadanymi na całym obszarze łącznie z brzegiem, stanowią podstawowy układ równań i warunków ubocznych mechaniki ośrodka ciągłego. Układ ten nie zależy ani od specyficznych własności mechanicznych materiału, ani od szczególnej postaci deformacji.

Łatwo zauważyć, że powyższy układ zależności nie jest wystarczający do wyznaczenia dwunastu pól skalarnych $(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{T})$ z sześciu niezależnych równań pola (2.1.1). Do jednoznacznego sformułowania zagadnienia początkowo-brzegowego potrzeba dalszych sześciu zależności, wyrażających $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ przez $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)$, które są zwane *równaniami konstytutywnymi*. Ponieważ tensor naprężeń $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ ma dziewięć niezależnych składowych, wszystkie szczególne postacie równań konstytutywnych powinny tożsamościowo spełniać trzy równania więzów, narzucone przez lokalną postać $(2.1.1)_2$ zasady zachowania momentu pędu.

2.1.3. Podstawy teorii równań konstytutywnych

Teorię równań konstytutywnych buduje się przyjmując szereg postulatów które, jak się zakłada, są fizycznie uzasadnione.

W ramach procesów czysto mechanicznych do najważniejszych należą postulaty: a) determinizmu, b) obiektywności materiałowej, c) lokalnego działania, d) zanikającej pamięci i e) współobecności. Postulaty te nie są prawami fizycznymi, a jedynie rozsądnymi wskazówkami pomocnymi przy formułowaniu różnych klas równań konstytutywnych.

Postulat determinizmu orzeka, że naprężenie wewnątrz ciała jest wyznaczone przez całą historię deformacji ciała. Oznacza to, że tensor naprężeń $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ w cząstce \mathbf{x} w chwili t jest całkowicie określony przez funkcjonal materiałowy $\mathcal{J}_{\tau=0}^{\infty}$, którego argumentem jest historia deformacji $\mathbf{x}^t(\mathbf{z}, \tau)$ wszystkich cząstek $\mathbf{z} \in B$ ciała:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{J}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{x}^t(\mathbf{z}, \tau); \mathbf{x}), \quad (2.1.6)$$

gdzie

$$\mathbf{x}^t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{x}(\mathbf{x}, t - \tau), \quad \tau \in [0, +\infty). \quad (2.1.7)$$

Naprężenie w chwili aktualnej zależy więc od ruchu całego ciała we wszystkich chwilach wcześniejszych, ale nie późniejszych. Materiały o tej własności nazywane są *materiałami z pamięcią*.

Ruch ciała i panujące w nim naprężenia opisywane są zwykle w przestrzeni fizycznej względem pewnego inercjalnego układu odniesienia. Jednak własności mechaniczne ciała nie powinny zależeć od wyboru układu odniesienia. Dlatego, zgodnie z postulatem obiektywności materiałowej, naprężenia wewnątrz ciała postrzegane we wszystkich inercjalnych układach odniesienia powinny być takie same¹. Jeśli więc \mathbf{x}^t i $\mathbf{x}^{t'}$ są historiami ruchu, opisanymi w dwóch różnych układach odniesienia powiązanych odwzorowaniem (1.1.3), to spełnienie zasady obiektywności materiałowej wymaga, aby funkcjonal konstytutywny w równaniu (2.1.6) spełniał warunek

$$\mathcal{J}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{x}^{t'}(\mathbf{z}, \tau); \mathbf{x}) = \mathcal{J}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{x}^t(\mathbf{x}, t)(\mathbf{z}, \tau); \mathbf{x}). \quad (2.1.8)$$

Równanie konstytutywne (2.1.6) jest dodatkowo ograniczane przez możliwe symetrie materiału, jeśli materiał takie symetrie posiada, oraz przez pewne dodatkowe wymagania, nazywane *ograniczeniami konstytutywnymi*, które zapewniają, że sformułowane równanie konstytutywne „rozsądnie” modeluje rzeczywiste własności mechaniczne badanego materiału.

¹ Istnieją pewne kontrowersje wokół tego postulatu i jego fizycznej zasadności. Kontrowersje te odnoszą się w głównej mierze do zagadnień dynamiki gazów oraz zagadnień elektromagnetycznych (patrz HANYGA [1991]), którymi się tu nie będziemy zajmowali.

2.1.4. Niektóre szczególne klasy materiałów

Postulat lokalnego działania zakłada, że jedynie ruch dowolnie małego otoczenia danej cząstki materialnej ma wpływ na panujące w niej naprężenia.

Ważną i dobrze zbadaną klasą materiałów są tak zwane *materiały proste*, których równanie konstytutywne ma postać

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{J}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{F}^t(\mathbf{x}, \tau); \mathbf{x}), \quad (2.1.9)$$

gdzie $\mathbf{F}^t(\mathbf{x}, \tau) = \nabla \mathbf{X}^t(\mathbf{x}, t)$ jest historią przestrzennego gradientu deformacji w tym samym punkcie $\mathbf{x} \in B$. Równanie konstytutywne (2.1.9) spełnia zarówno postulat determinizmu, jak i postulat lokalnego działania. Funkcjonał $\mathcal{J}_{\tau=0}^{\infty}$ nie może być jednak zupełnie dowolny, ponieważ równanie (2.1.9) musi dodatkowo spełniać zasadę obiektywności materiałowej.

Wprowadźmy drugi tensor naprężeń Pioli–Kirchhoffa zależnością

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\mathbf{T}(\mathbf{x}, t). \quad (2.1.10)$$

Z zasady zachowania momentu pędu (2.1.1)₂ wynika, że $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ jest tensorem symetrycznym. Ponadto, tensor ten zachowuje swoją postać przy przejściu od jednego układu odniesienia do drugiego. Wobec tego, równanie konstytutywne

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{S}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{C}^t(\mathbf{x}, \tau); \mathbf{x}), \quad (2.1.11)$$

gdzie $\mathbf{C}^t(\mathbf{x}, \tau)$ jest historią prawego tensora odkształcenia Cauchy–Greena $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, spełnia tożsamościowo zasadę obiektywności materiałowej.

Równanie (2.1.11) ma jednak nadal zbyt ogólną postać, aby mogło być użytecznym w zastosowaniach inżynierskich. Wprowadza się więc dodatkowy postulat zanikającej pamięci, zgodnie z którym deformacje ciała, które miały miejsce w dalekiej przeszłości, mają mniejszy wpływ na aktualny stan naprężeń panujący w ciele, niż deformacje z bliskiej przeszłości².

W granicznym przypadku materiał nazywa się *sprężystym (pierwszego rzędu)*, jeśli w ogóle nie ma pamięci. Naprężenia w takim materiale są całkowicie określone przez aktualny stan odkształceń, a równanie konstytutywne materiału sprężystego ma postać zależności funkcyjnej, a nie funkcjonalnej:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{J}(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}), \quad (2.1.12)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{S}(\mathbf{C}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}). \quad (2.1.13)$$

W przypadku materiału sprężystego dowolny proces mechaniczny ciała jest całkowicie odwracalny. Podczas deformacji ciała sprężystego praca wykonana przez obciążenia zewnętrzne jest akumulowana w postaci energii odkształcenia.

²Postać matematyczna tego postulatu oraz wynikające z niego konsekwencje są szczegółowo omawiane w monografii PERZYNA [1966].

W teorii materiałów sprężystych przyjmuje się, że istnieje beznapężeniowy stan naturalny do którego ciało powraca po zdjęciu obciążeń zewnętrznych. Przy przyjęciu stanu naturalnego ciała jako jego konfiguracji odniesienia, funkcje konstytutywne \mathcal{T} i \mathcal{S} mają własność $\mathcal{T}(\mathbf{0}; \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ i $\mathcal{S}(\mathbf{0}; \mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Własność odwracalności procesu mechanicznego dla materiału sprężystego nie wyklucza zależności funkcji materiałowej od wyższych gradientów deformacji. W szczególności, równanie konstytutywne

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{T}(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}). \quad (2.1.14)$$

definiuje *materiał sprężysty drugiego rzędu*, itd.

Szczególną klasę prostych materiałów sprężystych stanowią *materiały hipersprężyste*, dla których istnieje funkcja skalarna

$$W = W(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}), \quad (2.1.15)$$

nazywana *gęstością energii sprężystej*, taka że³

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{T}(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{F}} W(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}), \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{S}(\mathbf{C}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{C}} \widehat{W}(\mathbf{C}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Równania konstytutywne postaci (2.1.16) są naturalnym wynikiem spełnienia zasady zachowania energii w procesach czysto mechanicznych.

Teoria grup symetrii materiałowych stanowi podstawę innej klasyfikacji materiałów. Szczególnie ważną klasę materiałów stanowią *materiały izotropowe*. W szczególnym przypadku *izotropowego materiału hipersprężystego* dowodzi się, że funkcja energii sprężystej (2.1.15) zależy od tensora odkształceń Cauchy–Greena jedynie poprzez jego niezmienniki główne

$$\widehat{W}(\mathbf{C}; \mathbf{x}) = \widehat{W}(I_1, I_2, I_3; \mathbf{x}), \quad (2.1.17)$$

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \{(\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr } \mathbf{C}^2\}, \quad I_3 = \det \mathbf{C}. \quad (2.1.18)$$

Charakterystyczną cechą fizyczną niektórych materiałów jest znikomo mała zmiana objętości w procesie deformacji. Materiałami o tej własności są, na przykład, materiały gumopodobne. Nieściśliwość oznacza, że objętość obszaru przestrzeni fizycznej, zajmowanego przez dowolnie małą część ciała w konfiguracji odniesienia, jest równa objętości obszaru zajmowanego przez tę samą część ciała w każdej innej konfiguracji. Warunek nieściśliwości ma postać

$$\Gamma(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)) \equiv \det \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - 1 = 0, \quad (2.1.19)$$

³Materiał sprężysty jest często nazywany materiałem sprężystym w sensie Cauchy'ego, a materiał hipersprężysty materiałem sprężystym w sensie Greena.

która wynika z interpretacji geometrycznej wyznacznika dowolnego odwzorowania liniowego przestrzeni euklidesowej w siebie. Jest to więc warunek czysto geometryczny. Nieściśliwość materiału, jako jego cecha fizyczna, musi więc być ujęta w odpowiednim równaniu konstytutywnym⁴.

Warunek nieściśliwości jest najbardziej znanym przykładem *więzów materiałowych*, traktowanych jako ograniczenia narzucone na równania konstytutywne. Więzy materiałowe muszą również spełniać zasadę obiektywności materiałowej. Pozwala to zapisać warunek nieściśliwości (2.1.19) w równoważnej postaci

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)) \equiv \det \mathbf{C}(\mathbf{x}, t) - 1 = 0. \quad (2.1.20)$$

Istnienie więzów materiałowych wymaga istnienia w ciele hipotetycznego stanu naprężeń własnych, które wymuszają ruch ciała zgodnie z ograniczeniem (2.1.19).

2.2. Równania konstytutywne mechaniki powłok

2.2.1. Uwagi wstępne

W mechanice powłok równania konstytutywne pełnią podobną rolę jak w mechanice ośrodków ciągłych: opisują własności mechaniczne powłok szczególnego typu. Z matematycznego punktu widzenia są one niezbędne do zamknięcia dotychczas sformułowanych równań i zależności mechaniki powłok. Są jednak istotne różnice między rolą równań konstytutywnych w mechanice powłok i w mechanice ośrodka ciągłego.

Równania konstytutywne mechaniki ośrodka ciągłego opisują wyłącznie własności mechaniczne materiału. W mechanice powłok rola równań konstytutywnych jest bardziej złożona. Zauważmy, że np. powłoki o różnej grubości, zarówno jednorodne jak i warstwowe, są opisane tymi samymi równaniami dynamiki oraz zależnościami kinematycznymi i warunkami ubocznymi. Dlatego równania konstytutywne powłok muszą ujmować nie tylko własności mechaniczne materiału, lecz również np. grubość powłoki, strukturę wewnętrzną powłoki po grubości i geometrię powierzchni podstawowej. W mechanice powłok pojawia się ponadto dodatkowa konieczność ustalenia tzw. *kinetycznych równań konstytutywnych* dla powierzchniowych gęstości pędu i momentu pędu powłoki. W klasycznej mechanice ciał trójwymiarowych zależności dla przestrzennych gęstości pędu i momentu pędu przyjmuje się zgodnie z prawami Newtona.

Równania konstytutywne mechaniki powłok mogą być formułowane na dwa sposoby, analogicznie do dwóch podstawowych podejść przy formułowaniu innych zależności mechaniki powłok. W podejściu *bezpośrednim* postuluje się równania konstytutywne od razu w postaci dwuwymiarowej. To podejście wymaga opraco-

⁴Można również przyjąć ogólniejsze spojrzenie, traktując warunek nieściśliwości jako ograniczenie dopuszczalnych deformacji ciała (zob. WOŹNIAK [1985]). Deformacje takie nazywa się wówczas *izochorycznymi*.

wania metodologii eksperymentu, który umożliwiłaby doświadczalne wyznaczenie funkcji i stałych konstytutywnych występujących w postulowanych zależnościach. Podejście *wyprowadzane* wymaga znajomości odpowiednich trójwymiarowych równań konstytutywnych. Wówczas problem sprowadza się do opracowania metodologii redukcji tych równań do postaci dwuwymiarowej, spójnej z definicjami dynamicznych wielkości przekrojowych i dwuwymiarową kinematyką powłoki. Podejście wyprowadzane jest najczęściej stosowane w mechanice powłok.

Podejście wyprowadzane do równań konstytutywnych mechaniki powłok przypomina jednak kwadraturę koła. Z jednej strony, budujemy teorię trójwymiarowych równań konstytutywnych jako zależności pomiędzy wybranym tensorem naprężeń a energetycznie sprzężonym z nim tensorem odkształceń. Następnie jednak stałe i funkcje materiałowe, pojawiające się w tych zależnościach trójwymiarowych, wyznaczamy z eksperymentu najczęściej jedno- lub dwuwymiarowego, w którym mierzymy jedynie pewne *uśrednione* wielkości przekrojowe, a więc właśnie te występujące w teoriach niższego wymiaru — prętów, płyt i powłok. W końcu, tak doświadczalnie zweryfikowane, przybliżone trójwymiarowe równania konstytutywne uznajemy za „ścisle” i ponownie redukujemy do postaci dwuwymiarowej, zgodnej ze strukturą pozostałych zależności kinematycznych i dynamicznych mechaniki powłok.

Niezależnie od tego, które z tych dwóch podejść będziemy stosowali, postać powłokowych równań konstytutywnych używanych w analizie konkretnego zadania nie może być sprzeczna z formalną dwuwymiarową strukturą mechaniki powłok.

2.2.2. Procesy dynamiczne w powłokach

Rozważając zasady budowania równań konstytutywnych mechaniki powłok, będziemy wzorowali się na teorii równań konstytutywnych rozwiniętej w mechanice ośrodków ciągłych i naszkicowanej w podrozdziale 2.1.

W mechanice powłok kompletna lista zmiennych, występujących w ogólnych zależnościach, składa się z następujących pól:

- gęstości masy $m_0(\mathbf{x})$,
- funkcji deformacji $\chi(\mathbf{x}, t)$ i pola tensorów struktury $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$,
- gęstości pędu $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ i momentu pędu $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t)$,
- tensorów przekrojowych sił $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i momentów $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$,
- powierzchniowych wektorów sił $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ i momentów $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$,
- brzegowej siły $\mathbf{n}^*(\mathbf{x}, t)$ i momentu $\mathbf{m}^*(\mathbf{x}, t)$ danych na części ∂M_f brzegu powłoki,
- wartości deformacji $\chi^*(\mathbf{x}, t)$ i tensora struktury $\mathbf{T}^*(\mathbf{x}, t)$ danych na części ∂M_d brzegu powłoki,
- początkowych wartości pól χ_0 , \mathbf{T}_0 , \mathbf{v}_0 , Ω_0 określonych w całym obszarze M , łącznie z brzegiem ∂M .

Powyższe zmienne muszą spełniać:

lokalne równania ruchu w punktach regularnych M

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \mathbf{N} + \mathbf{f} &= \dot{\mathbf{p}}, \\ \operatorname{Div} \mathbf{M} + \operatorname{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) + \mathbf{c} &= \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{v} \times \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

dynamiczne i kinematyczne warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{n}^*, & \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{m}^*, & \text{na } \partial M_f, \\ \boldsymbol{\chi} &= \boldsymbol{\chi}^*, & \mathbf{T} &= \mathbf{T}^*, & \text{na } \partial M_d, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

oraz *warunki początkowe* w chwili $t = 0$

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_0, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{v}_0, \quad \dot{\mathbf{T}} \mathbf{T}^{-1} = \boldsymbol{\Omega}_0. \quad (2.2.3)$$

Zmienne występujące w (2.2.1)–(2.2.3) można pogrupować zależnie od roli, jaką one pełnią w mechanice powłok. W typowym zagadnieniu analizy powłok zakłada się, że zmienne

$$(m_0, \mathbf{f}, \mathbf{c}, \mathbf{n}^*, \mathbf{m}^*, \boldsymbol{\chi}^*, \mathbf{T}^*, \boldsymbol{\chi}_0, \mathbf{T}_0, \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \quad (2.2.4)$$

są *danymi* rozważanego problemu, natomiast pozostałe zmienne

$$(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{T}, \mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{N}, \mathbf{M}) \quad (2.2.5)$$

muszą być wyznaczone jako *rozwiązania* tego problemu. Całkowita liczba nieznanych pól skalarnych (2.2.5) wynosi zatem $3 + 3 + 3 + 3 + 6 + 6 = 24$, a do ich wyznaczenia dysponujemy jedynie liczbą $3 + 3 = 6$ równań ruchu (2.2.1).

Zgodnie z ogólną ideą mechaniki, *zmiennymi niezależnymi* w (2.2.1)–(2.2.3) są pola kinematyczne $(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{T})$, natomiast zmienne dynamiczne $(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{N}, \mathbf{M})$ muszą być dodatkowo określone przez *równania konstytutywne*, wiążące te zmienne ze zmiennymi kinematycznymi $(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{T})$.

2.2.3. Ogólna postać równań konstytutywnych

W chwili aktualnej t stan naprężeń powłoki w dowolnej cząstce, która w konfiguracji odniesienia zajmowała miejsce $\mathbf{x} \in M$, określają tensor przekrojowych sił $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i tensor przekrojowych momentów $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$.

W mechanice powłok odpowiednikiem ogólnego równania konstytutywnego (2.1.6) mechaniki ośrodków ciągłych są dwa równania konstytutywne

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{N}_{\tau=0}^{\infty}(\boldsymbol{\chi}^t(\mathbf{z}, \tau), \mathbf{T}^t(\mathbf{z}, \tau); \mathbf{x}, \mathbf{T}_0(\mathbf{z})), \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{M}_{\tau=0}^{\infty}(\boldsymbol{\chi}^t(\mathbf{z}, \tau), \mathbf{T}^t(\mathbf{z}, \tau); \mathbf{x}, \mathbf{T}_0(\mathbf{z})), \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

gdzie $\mathbf{z} \in M$. W (2.2.6), $\mathcal{N}_{\tau=0}^{\infty}$ i $\mathcal{M}_{\tau=0}^{\infty}$ są funkcjonalami historii ruchu całej powłoki, którą definiuje się analogicznie do (2.1.7)

$$\boldsymbol{\chi}^t(\mathbf{x}, \tau) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t - \tau), \quad \mathbf{T}^t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t - \tau), \quad \tau \in [0, +\infty). \quad (2.2.7)$$

Funkcjonały $\mathcal{N}_{\tau=0}^{\infty}$ i $\mathcal{M}_{\tau=0}^{\infty}$ ujmują więc zarówno własności mechaniczne materiału powłoki jak i geometrię powierzchni podstawowej M oraz strukturę powłoki po grubości.

Podczas gdy w klasycznej mechanice ośrodków ciągłych zależność (2.1.6) jest jedynym wymaganym równaniem konstytutywnym, w mechanice powłok gęstości pędu $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ i momentu pędu $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ muszą również być określone przez tzw. *kinetyczne równania konstytutywne* o podobnej do (2.2.6) postaci

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{p}_{t=0}^{\infty}(\chi^t(\mathbf{z}, \tau), \mathbf{T}^t(\mathbf{z}, \tau); \mathbf{x}, \mathbf{T}_0(\mathbf{z})), \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{s}_{t=0}^{\infty}(\chi^t(\mathbf{z}, \tau), \mathbf{T}^t(\mathbf{z}, \tau); \mathbf{x}, \mathbf{T}_0(\mathbf{z})).\end{aligned}\quad (2.2.8)$$

Równania konstytutywne (2.2.6) i (2.2.8) są zgodne z postulatami determinizmu i współobecności, ale równania (2.2.6) muszą dodatkowo spełniać postulat obiektywności materiałowej. Natomiast gęstości pędu $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ i momentu pędu $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ nie są wielkościami obiektywnymi, dlatego równania (2.2.8) nie mogą być niezmiennicze względem wyboru układu odniesienia.

Zależność funkcyjna w (2.2.6) i (2.2.8) od punktu \mathbf{x} oznacza możliwą *niejednorodność* powierzchniową własności fizycznych powłoki, a zależność od tensora struktury $\mathbf{T}_0(\mathbf{z})$ w dowolnym punkcie $\mathbf{z} \in M$ oznacza zależność od geometrii konfiguracji odniesienia powłoki poprzez tensor $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ i jego gradienty powierzchniowe dowolnego rzędu.

O ile funkcyjna materiałowa w równaniu trójwymiarowym (2.1.6) definiuje wyłącznie fizyczne własności materiału, to funkcyjna w równaniach (2.2.6) i (2.2.8) zależy nie tylko od własności materiału, z którego wykonana jest powłoka, lecz uwzględniają również pewne cechy geometryczne i strukturalne samej powłoki. Wielkościami geometrycznymi, które muszą być uwzględnione w równaniach konstytutywnych mechaniki powłok, są grubość powłoki i geometria jej powierzchni podstawowej, a w szczególności tensor metryczny i tensor krzywizny powierzchni M . Wielkości te, nie będąc cechami fizycznymi materiału, nie mają odpowiedników w równaniu konstytutywnym ciał trójwymiarowych. Cechy strukturalne po grubości powłoki, takie jak np. warstwowość lub mieszanina różnych materiałów, muszą być również uwzględnione w równaniach konstytutywnych mechaniki powłok, na co wskazuje obecność w (2.2.6) i (2.2.8) tensorów struktury.

W następnych punktach 2.2.4–2.2.9 omówimy wybrane postacie materiałowych równań konstytutywnych mechaniki powłok, a do kinetycznych równań konstytutywnych wrócimy w p. 2.2.10.

2.2.4. Powłoki z materiału prostego

Zgodnie z definicją (2.1.9) materiału prostego, materiał powłoki będziemy nazywali *prostym*, jeśli równania konstytutywne (2.2.6) zawierają historie wielkości kinematycznych

$$\nabla \chi(\mathbf{x}, t), \mathbf{T}(\mathbf{x}, t), \nabla \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2.9)$$

jako jedyne zmienne konstytutywne.

Z ogólnej teorii odkształceń w powłokach wynika, że równoważny opis lokalnej deformacji powłoki dostarczają powierzchniowe miary odkształceń $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$. Wobec tego, ogólne równania konstytutywne powłoki wykonanej z materiału prostego można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) &= \mathfrak{N}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{E}^t(\mathbf{x}, \tau), \mathbf{K}^t(\mathbf{x}, \tau); \mathbf{x}, \mathbf{T}_0(\mathbf{x})), \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) &= \mathfrak{M}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{E}^t(\mathbf{x}, \tau), \mathbf{K}^t(\mathbf{x}, \tau); \mathbf{x}, \mathbf{T}_0(\mathbf{x})), \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

gdzie $\mathfrak{N}_{\tau=0}^{\infty}$ i $\mathfrak{M}_{\tau=0}^{\infty}$ są znanymi funkcjonalami swoich argumentów. Postać (2.2.10) jest zgodna nie tylko z postulatem determinizmu, lecz również z postulatami lokalnego działania i współobecności.

Równania konstytutywne (2.2.10) muszą spełniać postulat obiektywności materiałowej który, podobnie jak w mechanice ośrodków ciągłych, nakłada istotne ograniczenia na dopuszczalne postacie funkcjonałów materiałowych.

Przy zmianie układu odniesienia powierzchniowe miary odkształceń i naprężeń podlegają następującym transformacjom:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \mathbf{O}(t)\mathbf{N}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \mathbf{O}(t)\mathbf{M}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \mathbf{O}(t)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \mathbf{O}(t)\mathbf{K}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

gdzie $\mathbf{O}(t)$ jest zależnym od czasu tensorem ortogonalnym, związanym z przejściem od jednego układu odniesienia do drugiego (patrz podrozdział 1.1). Na mocy zasady obiektywności materiałowej, funkcjonały w równaniach (2.2.10) muszą więc spełniać warunki

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{E}^t(\tau), \mathbf{K}^t(\tau)) &= \mathbf{O}(t)^T \mathfrak{N}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{O}^t(\tau)\mathbf{E}^t(\tau), \mathbf{O}^t(\tau)\mathbf{K}^t(\tau)), \\ \mathfrak{M}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{E}^t(\tau), \mathbf{K}^t(\tau)) &= \mathbf{O}(t)^T \mathfrak{M}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{O}^t(\tau)\mathbf{E}^t(\tau), \mathbf{O}^t(\tau)\mathbf{K}^t(\tau)), \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

dla wszystkich tensorów ortogonalnych $\mathbf{O}(t)$. Dla uproszczenia zapisu, we wszystkich wielkościach w (2.2.12) pominięto argument \mathbf{x} , a zależność od tensora struktury \mathbf{T}_0 włączono do definicji funkcjonałów.

Ograniczenia na funkcjonały, wynikające z (2.2.12), a w konsekwencji i na postać równań konstytutywnych, będą spełnione tożsamościowo, jeśli równania konstytutywne (2.2.10) zapiszemy w równoważnej postaci przez tensory miar naprężeń i odkształceń w reprezentacji materialnej

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) &= \tilde{\mathfrak{N}}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{E}^t(\mathbf{x}, \tau), \mathbf{K}^t(\mathbf{x}, \tau); \mathbf{x}), \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) &= \tilde{\mathfrak{M}}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{E}^t(\mathbf{x}, \tau), \mathbf{K}^t(\mathbf{x}, \tau); \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Biorąc pod uwagę zależności między miarami naprężeń i odkształceń w reprezentacjach przestrzennej i materialnej

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{N}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{M}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{K}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

łatwo zauważyć, że funkcjonały konstytutywne w (2.2.10) i (2.2.13) są powiązane następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{N}}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{E}^t(\tau), \mathbf{K}^t(\tau)) &= \mathbf{Q}(t)^T \mathbf{N}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{Q}^t(\tau) \mathbf{E}^t(\tau), \mathbf{Q}^t(\tau) \mathbf{K}^t(\tau)), \\ \tilde{\mathbf{M}}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{E}^t(\tau), \mathbf{K}^t(\tau)) &= \mathbf{Q}(t)^T \mathbf{M}_{\tau=0}^{\infty}(\mathbf{Q}^t(\tau) \mathbf{E}^t(\tau), \mathbf{Q}^t(\tau) \mathbf{K}^t(\tau)).\end{aligned}\quad (2.2.15)$$

Uwzględniając reguły transformacyjne (2.2.11), z (2.2.14) wynika, że tensory powłokowych miar naprężeń i odkształceń w reprezentacji materialnej zachowują swoją postać przy przejściu od jednego układu odniesienia do drugiego. Dlatego równania konstytutywne (2.2.13) spełniają automatycznie postulat obiektywności materiałowej. Jest to sytuacja analogiczna do równania konstytutywnego (2.1.11) w mechanice środków ciągłych, wyrażonego przez drugi tensor naprężeń Pioli–Kirchhoffa i tensor odkształceń Cauchy–Greena.

2.2.5. Powłoki sprężyste i hipersprężyste

Przez analogię do trójwymiarowej definicji prostego materiału sprężystego (2.1.12), powłokę z materiału prostego nazywamy *sprężystą*, jeśli jej własności mechaniczne nie wykazują pamięci. Innymi słowy, przekrojowe miary naprężeń powłoki sprężystej w chwili aktualnej t , w dowolnym punkcie $\mathbf{x} \in M$ powierzchni podstawowej, zależą wyłącznie od aktualnych wartości miar odkształceń w tym punkcie.

Równania konstytutywne powłok sprężystych przyjmują więc postać

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{K}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}), \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{M}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{K}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}).\end{aligned}\quad (2.2.16)$$

W (2.2.16), \mathbf{N} i \mathbf{M} są *funkcjami* (a nie funkcjonałami) swoich argumentów. Te funkcje konstytutywne muszą spełniać postulat obiektywności materiałowej. Postulat ten jest spełniony tożsamościowo, jeśli równania konstytutywne (2.2.16) wyrazimy w reprezentacji materialnej

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(\mathbf{x}, t) &= \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{K}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}), \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) &= \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{K}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}),\end{aligned}\quad (2.2.17)$$

gdzie funkcje $\tilde{\mathbf{N}}$ i $\tilde{\mathbf{M}}$ są określone przez funkcje \mathbf{N} i \mathbf{M} z zależności wynikających z (2.2.15).

W teorii powłok sprężystych zakłada się zwykle, że wśród wszystkich możliwych konfiguracji powłoki istnieją również takie, którym odpowiada zerowy stan przekrojowych miar naprężeń. Jeśli jedną z takich konfiguracji przyjmiemy za konfigurację odniesienia, to funkcje w równaniach konstytutywnych (2.2.17) będą spełniać warunki

$$\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \mathbf{x}) = \mathbf{0}.\quad (2.2.18)$$

Zauważmy, że jeśli powłoka jako ciało trójwymiarowe jest wykonana z materiału sprężystego o równaniu konstytutywnym (2.1.12), to nie ma podstaw aby z tego wnioskować, że odpowiednie materiałowe równania konstytutywne powłoki będą miały postać (2.2.17). Proces redukcji zasad mechaniki z trzech do dwóch wymiarów generuje pewne elementy nielokalności. Możemy więc oczekiwać, że odpowiadające (2.1.12) materiałowe równania konstytutywne powłoki mogą być rozszerzone do postaci zawierających również pierwsze powierzchniowe gradienty powłokowych miar odkształceń

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}, \nabla \mathbf{E}, \nabla \mathbf{K}; \mathbf{x}), \\ \mathbf{M} &= \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}, \nabla \mathbf{E}, \nabla \mathbf{K}; \mathbf{x}).\end{aligned}\tag{2.2.19}$$

Równania konstytutywne tej postaci i możliwe ich uogólnienia, uwzględniające gradienty dowolnego rzędu, doprowadziłyby jednak do nielokalnej teorii powłok sprężystych wyższych rzędów, która w tej książce nie będzie rozważana.

Szczególną klasę powłok sprężystych stanowią powłoki, których własności mechaniczne są wyznaczone przez funkcję skalarną

$$\Phi = \Phi(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{K}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}),\tag{2.2.20}$$

zwaną *funkcją* (powierzchniowej gęstości) *energii sprężystej*. Jeśli taka funkcja skalarna istnieje, to funkcje w równaniach konstytutywnych (2.2.16) są jej pochodnymi względem powłokowych miar odkształceń

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) &= \partial_{\mathbf{E}} \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}), \\ \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) &= \partial_{\mathbf{K}} \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}).\end{aligned}\tag{2.2.21}$$

W zgodzie z mechaniką ośrodków ciągłych, powłokę o tej własności będziemy nazywali *hipersprężystą*.

Funkcja (2.2.20), o ile istnieje, musi spełniać postulat obiektywności materiałowej, co prowadzi do następującego warunku:

$$\Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{O}\mathbf{E}, \mathbf{O}\mathbf{K}; \mathbf{x}).\tag{2.2.22}$$

Jeśli wprowadzimy nową funkcję energii sprężystej wzorem

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) \equiv \Phi(\mathbf{Q}^T \mathbf{E}, \mathbf{Q}^T \mathbf{K}; \mathbf{x}),\tag{2.2.23}$$

to łatwo sprawdzić, że spełnia ona tożsamościowo postulat obiektywności materiałowej. Funkcja $\Phi = \tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x})$ określa również funkcje w równaniach konstytutywnych (2.2.17) zgodnie z zależnościami

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) &= \partial_{\mathbf{E}} \tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}), \\ \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) &= \partial_{\mathbf{K}} \tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}).\end{aligned}\tag{2.2.24}$$

2.2.6. Szczególne warianty równań konstytutywnych

Jeśli $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ jest odwzorowaniem liniowym (tensorem) przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{x}}M$ w trójwymiarową przestrzeń wektorową E , to wykorzystując rozkład przestrzeni trójwymiarowej na sumę prostą przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{x}}M$ i przestrzeni normalnej $T_{\mathbf{x}}M^{\perp}$ (podrozdział 1.4) tensor $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ można przedstawić w postaci

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = I_0(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{a}(\mathbf{x}). \quad (2.2.25)$$

Tutaj $I_0(\mathbf{x})$ jest operatorem inkluzji, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni M , $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ tensorem stycznym (odwzorowaniem liniowym $T_{\mathbf{x}}M$ w siebie), a $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ jest wektorem stycznym (elementem przestrzeni $T_{\mathbf{x}}M$).

Wykorzystując rozkład (2.2.25), tensory przekrojowych sił $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i momentów $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ oraz tensory powłokowych miar odkształceń $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= I_0\mathbf{N} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, & \mathbf{M} &= I_0\mathbf{M} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}, \\ \mathbf{E} &= I_0\mathbf{E} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}, & \mathbf{K} &= I_0\mathbf{K} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Ograniczając dalszą dyskusję do przypadku powłok hipersprężystych, funkcję energii sprężystej (2.2.22) możemy również wyrazić przez powłokowe miary odkształceń, wynikające z dekompozycji (2.2.26)

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{e}, \mathbf{K}, \mathbf{k}; \mathbf{x}), \quad (2.2.27)$$

gdzie funkcja $\bar{\Phi}$ jest jednoznacznie określona przez

$$\bar{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{e}, \mathbf{K}, \mathbf{k}; \mathbf{x}) = \tilde{\Phi}(I_0\mathbf{E} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}, I_0\mathbf{K} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{k}; \mathbf{x}). \quad (2.2.28)$$

Równania konstytutywne (2.2.24) możemy teraz zapisać w równoważnej postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \partial_{\mathbf{E}}\bar{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{e}, \mathbf{K}, \mathbf{k}), & \mathbf{n} &= \partial_{\mathbf{e}}\bar{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{e}, \mathbf{K}, \mathbf{k}), \\ \mathbf{M} &= \partial_{\mathbf{K}}\bar{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{e}, \mathbf{K}, \mathbf{k}), & \mathbf{m} &= \partial_{\mathbf{k}}\bar{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{e}, \mathbf{K}, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Różne szczególne postacie równań konstytutywnych prowadzą do różnych modeli szczególnych w ramach tej samej teorii powłok (zob. np. ALTENBACH i ŽILIN [1988], LIBAI i SIMMONDS [1998]). W szczególności, możliwe postacie funkcji energii sprężystej $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha}, \kappa_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha})$, kwadratowej względem składowych powłokowych miar odkształceń $\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}t^{\beta} + \varepsilon_{\alpha}t$ i $\kappa_{\alpha} = t \times \kappa_{\alpha\beta}t^{\beta} + \kappa_{\alpha}t$, były analizowane w LIBAI i SIMMONDS [1998]. W przypadku niesymetrycznej po grubości struktury powłoki, ogólne wyrażenie dla anizotropowej i algebraicznie jednorodnej funkcji $\bar{\Phi}$ zawiera wiele członów, a jej pełne określenie wymaga znajomości ponad stu stałych materiałowych.

Jeśli przyjmiemy, że Φ nie zależy od punktu $\mathbf{x} \in M$ i krzywizny powierzchni M , a powłoka ma symetryczną strukturę po grubości, to używając teorii niezmienników funkcji tensorowych (por. np. SPENCER [1971]) można wykazać, że funkcja energii sprężystej redukuje się do postaci (EREMEJEV i ZUBOW [2003])

$$\begin{aligned} \Phi = & C_1 \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta} + C_2 \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\beta\alpha} + C_3 \varepsilon_{\alpha}^{\alpha} \varepsilon_{\beta}^{\beta} + C_4 \varepsilon_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} \\ & + D_1 \kappa_{\alpha\beta} \kappa^{\alpha\beta} + D_2 \kappa_{\alpha\beta} \kappa^{\beta\alpha} + D_3 \kappa_{\alpha}^{\alpha} \kappa_{\beta}^{\beta} + D_4 \kappa_{\alpha} \kappa^{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

gdzie $C_K, D_K, K = 1, 2, 3, 4$, są stałymi wyznaczanymi z badań doświadczalnych.

2.2.7. Powłoki liniowo sprężyste

Powłokę nazywamy *liniowo sprężystą*, jeśli tensory przekrojowych sił i momentów są liniowymi funkcjami powłokowych miar odkształceń. Ma to miejsce, w szczególności, gdy odkształcenia w przestrzeni powłoki, jako ciała trójwymiarowego, są wszędzie małe.

W reprezentacji przestrzennej równania konstytutywne powłok liniowo sprężystych przyjmują postać

$$\mathbf{N} = \mathbb{C}_1[\mathbf{E}] + \mathbb{C}_3[\mathbf{K}], \quad \mathbf{M} = \mathbb{C}_4[\mathbf{E}] + \mathbb{C}_2[\mathbf{K}], \quad (2.2.31)$$

co w reprezentacji materialnej można wyrazić jako

$$\mathbf{N} = \mathbb{C}_1[\mathbf{E}] + \mathbb{C}_3[\mathbf{K}], \quad \mathbf{M} = \mathbb{C}_4[\mathbf{E}] + \mathbb{C}_2[\mathbf{K}]. \quad (2.2.32)$$

Tutaj tensory sprężystości \mathbb{C}_I i $\mathbb{C}_I, I = 1, 2, 3, 4$, są odwzorowaniami liniowymi przestrzeni tensorowej $E \otimes T_{\mathbf{x}} M$ w siebie. Tensory sprężystości są na ogół zależne również od $\mathbf{x} \in M$, co wynika głównie z na ogół zmiennej wartości krzywizny powierzchni M .

Jeśli tensory sprężystości \mathbb{C}_I spełniają warunki

$$\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_1^T, \quad \mathbb{C}_4 = \mathbb{C}_4^T, \quad \mathbb{C}_3 = \mathbb{C}_2^T, \quad (2.2.33)$$

to istnieje kwadratowa funkcja energii sprężystej o postaci

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbb{C}_1[\mathbf{E}] + \mathbf{E} \cdot \mathbb{C}_3[\mathbf{K}] + \mathbf{K} \cdot \mathbb{C}_4[\mathbf{E}] + \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbb{C}_2[\mathbf{K}]. \quad (2.2.34)$$

W teorii izotropowych powłok sprężystych można wykazać, że z dokładnością do uproszczeń wynikających z pominięcia stosunku grubości powłoki do najmniejszego promienia krzywizny powierzchni podstawowej, *konsekwentne pierwsze przybliżenie* do energii odkształcenia powłoki przyjmuje znacznie uproszczoną postać. Wtedy tensor przekrojowych sił zależy wyłącznie od tensora odkształceń, a tensor przekrojowych momentów zależy wyłącznie od tensora zgieć. Równania konstytutywne ogólnej teorii powłok zgodne z tą własnością mają postać

$$\mathbf{N} = \mathbb{C}[\mathbf{E}], \quad \mathbf{M} = \mathbb{D}[\mathbf{K}], \quad (2.2.35)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia $\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}_1$ i $\mathbb{D} \equiv \mathbb{C}_2$.

Szczególne równania konstytutywne o tej własności zostały zaproponowane w pracach CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i STUMPF [1992] oraz CHRÓŚCIELEWSKI [1996] (por. WAN i WEINITSCHKE [1988]) w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^\alpha &= N^{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta + Q^\alpha \mathbf{t}, & \mathbf{m}^\alpha &= \mathbf{t} \times M^{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta + M^\alpha \mathbf{t}, \\ N^{\alpha\beta} &= C [(1-\nu)\varepsilon^{\alpha\beta} + \nu A^{\alpha\beta} \varepsilon_\kappa^\kappa], & Q^\alpha &= \frac{1}{2} \alpha_s C (1-\nu) \varepsilon^\alpha, \\ M^{\alpha\beta} &= D [(1-\nu)\kappa^{\alpha\beta} + \nu A^{\alpha\beta} \kappa_\kappa^\kappa], & M^\alpha &= \alpha_t D (1-\nu) \kappa^\alpha, \\ C &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

gdzie E jest modułem Younga a ν współczynnikiem Poissona izotropowego materiału sprężystego, h grubością powłoki, natomiast α_s i α_t są współczynnikami poprzecznego ścinania i owinięcia.

Poszerzone w stosunku do (2.2.36) równania konstytutywne, ujmujące również sprzężenia pomiędzy powłokowymi miarami odkształceń, można otrzymać w ramach tzw. *drugiego przybliżenia* do energii odkształcenia sprężystego powłoki, por. PIETRASZKIEWICZ [1979b], BADUR [1984].

2.2.8. Kinetyczne równania konstytutywne w mechanice powłok

Kinetyczne równania konstytutywne powłok wykonanych z materiału prostego można przyjąć, zgodnie z zasadą współobecności, w postaci analogicznej do (2.2.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{p}_{\tau=0}^\infty(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t), \mathbf{E}^t(\mathbf{x}, \tau), \mathbf{K}^t(\mathbf{x}, \tau); \mathbf{x}, \mathbf{T}_0(\mathbf{x})), \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{s}_{\tau=0}^\infty(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t), \mathbf{E}^t(\mathbf{x}, \tau), \mathbf{K}^t(\mathbf{x}, \tau); \mathbf{x}, \mathbf{T}_0(\mathbf{x})), \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

gdzie $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ są polami prędkości translacyjnej i obrotowej powłoki w aktualnej chwili t .

W mechanice powłok sprężystych równania konstytutywne dla gęstości pędu i momentu pędu przyjmują postać następujących zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{p}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t), \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{K}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}), \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{s}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t), \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{K}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

Równania (2.2.38) zależą więc nie tylko od pól prędkości powierzchni podstawowej, lecz również od powłokowych miar odkształceń. Takie zależności mogą być potrzebne w teorii odkształceń skończonych grubych powłok gumopodobnych.

W wielu jednak przypadkach wystarczy przyjąć równania (2.2.38) w znacznie uproszczonej postaci. W szczególności, wydaje się rozsądnym przyjąć, że funkcje

\mathbf{p} i \mathbf{s} zależą w sposób *liniowy* od pól prędkości. Wówczas równania konstytutywne (2.2.38) upraszczają się do postaci

$$\mathbf{p} = \mathbf{J}_1(\mathbf{E}, \mathbf{K})\mathbf{v} + \mathbf{J}_3(\mathbf{E}, \mathbf{K})\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{J}_4(\mathbf{E}, \mathbf{K})\mathbf{v} + \mathbf{J}_2(\mathbf{E}, \mathbf{K})\boldsymbol{\omega}, \quad (2.2.39)$$

gdzie $\mathbf{J}_A = \mathbf{J}_A(\mathbf{E}, \mathbf{K})$, $A = 1, 2, 3, 4$, są danymi funkcjami tensorowymi miar odkształceń.

Przyjmując kinetyczne równania konstytutywne w postaci (2.2.39) oraz zakładając, że tensory $\mathbf{J}_A = \mathbf{J}_A(\mathbf{E}, \mathbf{K})$ spełniają warunki analogiczne do (2.2.33), można wykazać istnienie funkcji gęstości energii kinetycznej, mierzonej na jednostkę pola powierzchni podstawowej M , o postaci

$$\kappa(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{E}, \mathbf{K}) = \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_1\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_3\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_4\mathbf{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_2\boldsymbol{\omega}. \quad (2.2.40)$$

W tym przypadku kinetyczne równania konstytutywne wynikają z zależności

$$\mathbf{p} = \partial_{\mathbf{v}}\kappa(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{E}, \mathbf{K}), \quad \mathbf{s} = \partial_{\boldsymbol{\omega}}\kappa(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{E}, \mathbf{K}). \quad (2.2.41)$$

Szczególnie prostą postać kinetycznych równań konstytutywnych otrzymamy zakładając dodatkowo, że \mathbf{J}_A są tensorami niezależnymi od miar odkształceń:

$$\mathbf{p} = \mathbf{J}_1\mathbf{v} + \mathbf{J}_3\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{J}_4\mathbf{v} + \mathbf{J}_2\boldsymbol{\omega}. \quad (2.2.42)$$

W tym przypadku \mathbf{J}_A można nazwać *tensorami bezwładności* przekrojów poprzecznych powłoki.

Dodatkowe przyjęcie \mathbf{J}_A w uproszczonej postaci

$$\mathbf{J}_1 = m_0\mathbf{1}, \quad \mathbf{J}_2 = I_0\mathbf{1}, \quad \mathbf{J}_3 = \mathbf{J}_4 = \mathbf{0}, \quad (2.2.43)$$

gdzie m_0 jest powierzchniową gęstością masy, a I_0 skalarnym współczynnikiem bezwładności przekroju poprzecznego powłoki, prowadzi do klasycznych wyrażeń dla gęstości pędu i momentu pędu, używanych najczęściej w mechanice powłok, por. np. ZHILIN [1976], LIBAI i SIMMONDS [1983, 1998], ALTENBACH i ŻILIN [1988], SIMMONDS [2001].

2.3. Zagadnienia początkowo-brzegowe powłok sprężystych

2.3.1. Formułowanie zagadnień mechaniki powłok

Z matematycznego punktu widzenia, analiza różnorodnych zadań konstrukcji powłokowych sprowadza się do sformułowania i rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego w dynamice lub zagadnienia brzegowego w statyce. Zagadnienia statyczne mogą być również traktowane jako szczególny przypadek zagadnień dynamicznych.

W największym uproszczeniu, sformułowanie zagadnienia początkowo-brzegowego mechaniki powłok wymaga:

- danych problemu,
- układu równań opisujących problem,
- warunków ubocznych (brzegowych, początkowych i ciągłości).

Postać zagadnienia początkowo-brzegowego i możliwe sposoby analizy zadań szczegółowych mechaniki powłok zależą w istotny sposób od przyjętych równań konstytutywnych. Z kolei, wybór równań konstytutywnych jest podyktowany naturą badanego zadania. Z tego punktu widzenia, zagadnienia szczegółowe mechaniki powłok można podzielić na dwie obszerne klasy: zagadnienia sprężyste i zagadnienia niesprężyste. Ta druga klasa obejmuje m.in. analizę powłok plastycznych, lepkosprężystych, sprężysto-lepkoplastycznych itp., ale także zalicza się tu zwyczajowo np. zagadnienia kontynualnej teorii pęknięcia i zniszczenia konstrukcji powłokowych. Każde z tych zagadnień wymaga sformułowania odmiennych równań konstytutywnych i zastosowania odmiennych, właściwych tylko temu zagadnieniu metod analizy.

W dalszej części tej książki ograniczymy się tylko do przedstawienia i analizy nieliniowych zagadnień sprężystych dla powłok wielopłatowych. Dla wygody dalszych rozważań, poniżej przypominamy wcześniej wyprowadzone zależności zagadnienia początkowo-brzegowego nieliniowej mechaniki powłok sprężystych, uzupełnione o dodatkowe komentarze.

2.3.2. Konfiguracja odniesienia i opis ruchu powłoki

W ramach rozpatrywanej teorii powłok, konfiguracja odniesienia jest całkowicie określona przez wektor wodzący $\vec{x}(\mathbf{x})$ powierzchni podstawowej M i zadane na tej powierzchni pole nieosobliwych tensorów struktury $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$. Te pola muszą spełniać pewne warunki ciągłości i różniczkowalności omówione w p. 1.2.4 i 1.2.5.

Względem konfiguracji odniesienia ruch powłoki jest całkowicie opisany przez odwzorowania $\vec{y}: M \times T \rightarrow E$ i $\mathbf{T}: M \times T \rightarrow E \otimes E$. Wprowadzając wektor przesunięcia \mathbf{u} powierzchni podstawowej i tensor obrotu \mathbf{Q} , ruch powłoki względem konfiguracji odniesienia może być równoważnie opisany przez (1.6.12)

$$\vec{y}(\mathbf{x}, t) = \vec{x}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{T}_0(\mathbf{x}). \quad (2.3.1)$$

Pola $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ są więc dalej traktowane jako podstawowe niezależne zmienne kinematyczne zagadnienia.

Pochodne \mathbf{u} i \mathbf{Q} względem czasu określają pola prędkości translacyjnej i obrotowej powłoki

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\vec{y}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)^{-1} = \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)^{\text{T}} = \text{ad } \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Jeśli tensor obrotu $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ wyrazimy przez wektor obrotu skończonego Rodriguesa $\boldsymbol{\theta} = \text{ad}^{-1}\boldsymbol{\Theta}$, to tensory miar odkształceń $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ powłoki określone są przez związki kinematyczne (por. p. 1.7.8)

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \nabla \mathbf{u} - \Lambda(\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^2)\mathbf{I}_0, & \mathbf{K} &= \Lambda(\mathbf{1} + \boldsymbol{\Theta})\nabla\boldsymbol{\theta}, \\ \Lambda &\equiv 2(1 + \|\boldsymbol{\theta}\|^2)^{-1}.\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

W tym przypadku wektory przesunięcia $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i obrotu skończonego $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t)$ są podstawowymi zmiennymi niezależnymi zagadnienia.

2.3.3. Równania pola i warunki uboczne

Podstawowymi równaniami pola w analizie każdego zagadnienia szczegółowego nieliniowej mechaniki powłok są *lokalne równania ruchu*

$$\begin{aligned}\text{Div } \mathbf{N} + \mathbf{f} &= \dot{\mathbf{p}}, \\ \text{Div } \mathbf{M} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) + \mathbf{c} &= \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{v} \times \mathbf{p},\end{aligned}\tag{2.3.4}$$

które muszą być spełnione w punktach regularnych $\mathbf{x} \in M \setminus \Gamma$ powierzchni podstawowej.

Warunki uboczne zagadnienia obejmują *dynamiczne warunki brzegowe*

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}^*(\mathbf{x}, t),\tag{2.3.5}$$

w punktach $\mathbf{x} \in \partial M_f$ części brzegu powłoki i *kinematyczne warunki brzegowe*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}^*(\mathbf{x}, t),\tag{2.3.6}$$

w punktach $\mathbf{x} \in \partial M_d = \partial M \setminus \partial M_f$ części komplementarnej brzegu powłoki. Warunki brzegowe (2.3.5) i (2.3.6) muszą być spełnione dla wszystkich chwil $t \in T$ z rozważanego przedziału czasu T , który nie musi być przedziałem skończonym.

Do warunków ubocznych należą również *warunki początkowe*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{Q}_0(\mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), & \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, t_0)\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}, t_0) &= \boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

których spełnienia wymaga się we wszystkich punktach $\mathbf{x} \in M \cup \partial M$ powierzchni podstawowej łącznie z brzegiem, dla ustalonej chwili $t_0 \in T$ (dalej przyjmijmy $t_0 = 0$). Pola powierzchniowe \mathbf{f} i \mathbf{c} w (2.3.4), pola wyróżnione gwiazdką w (2.3.5) i (2.3.6) oraz pola wyróżnione indeksem zero w (2.3.7) są *danymi* zagadnienia.

Zasady mechaniki powłok sformułowane w postaci całkowitej dopuszczają również rozwiązania nieciągłe. Przyczyną pojawienia się takich rozwiązań może być np. skokowa zmiana grubości i/lub własności materiałowych powłoki, bądź nieregularność powierzchni podstawowej typu załomu. W takich przypadkach muszą

być dodatkowo spełnione *dynamiczne warunki ciągłości* (1.4.61) w punktach stacjonarnych krzywych osobliwych $\mathbf{x} \in \Gamma$

$$[\mathbf{n}_\nu] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{m}_\nu] + [\bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}_\nu] = \mathbf{0}. \quad (2.3.8)$$

Energetycznie komplementarne do (2.3.8) *kinematyczne warunki ciągłości* w punktach koherentnych krzywych osobliwych $\mathbf{x} \in \Gamma$ przyjmuje się zwykle w postaci⁵

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{Q}] = \mathbf{0}. \quad (2.3.9)$$

Dla powłok wykonanych z materiału sprężystego *równania konstytutywne* mają postać

$$\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}), \quad \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}). \quad (2.3.10)$$

W dalszej części książki przyjmiemy, że funkcje materiałowe w równaniach konstytutywnych (2.3.10) wyznacza się ze znanej funkcji powierzchniowej gęstości energii sprężystej $\Phi = \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x})$ za pomocą wzorów

$$\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{E}}\Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{K}}\Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}). \quad (2.3.11)$$

Kinetyczne równania konstytutywne powłok sprężystych można przyjąć w zgodnej z (2.3.10) postaci

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}), \quad \mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}). \quad (2.3.12)$$

Dalej wykorzystamy głównie szczególnie prostą postać kinetycznych równań konstytutywnych

$$\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}, \quad \mathbf{s} = I_0\boldsymbol{\omega}, \quad (2.3.13)$$

gdzie $m_0(\mathbf{x})$ jest polem powierzchniowej gęstości masy, a $I_0(\mathbf{x})$ skalarnym polem bezwładności przekroju poprzecznego powłoki w konfiguracji odniesienia.

Lokalne równania ruchu (2.3.4), materiałowe (2.3.10) lub (2.3.11) oraz kinetyczne (2.3.12) lub (2.3.13) równania konstytutywne, definicje prędkości liniowej i obrotowej (2.3.2), zależności kinematyczne (2.3.3), dynamiczne (2.3.5) i kinematyczne (2.3.6) warunki brzegowe, warunki początkowe (2.3.7) oraz dynamiczne (2.3.8) i kinematyczne (2.3.9) warunki ciągłości tworzą razem zamknięty układ zależności zagadnienia początkowo-brzegowego nieliniowej mechaniki powłok sprężystych.

Gdy kinematyczne (2.3.6) (lub dynamiczne (2.3.5)) warunki brzegowe są zadane na całym brzegu ∂M powłoki, to zwykle mówimy o czysto *przemieszczeniowym* (lub czysto *naprężeniowym*) sformułowaniu zagadnienia początkowo-brzegowego. W ogólnym przypadku mówimy o *mieszanym* sformułowaniu zagadnienia początkowo-brzegowego.

Przyjmując szczególne postacie równań konstytutywnych i warunków ubocznych, otrzymamy również szczególną postać zagadnienia początkowo-brzegowego, która może już być przedmiotem analizy numerycznej.

⁵Te warunki wymagają ciągłości pól przesunięć i obrotów w całym obszarze powierzchni podstawowej. Dopuszczają one jednak nieciągłość powierzchniowych gradientów tych pól.

2.3.4. Równania mechaniki powłok w reprezentacji materialnej

W punkcie 2.3.3 zagadnienie początkowo-brzegowe mechaniki powłok sprężystych przedstawiliśmy w reprezentacji przestrzennej. W analizie szeregu zadań konstrukcji powłokowych bardziej odpowiednim może okazać się wykorzystanie podstawowych zależności mechaniki powłok w reprezentacji materialnej.

Wykorzystując zależności (1.7.60) pomiędzy tensorami przekrojowych sił i momentów w reprezentacjach przestrzennej i materialnej

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{N}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{M}(\mathbf{x}, t), \quad (2.3.14)$$

lokalne równania ruchu (2.3.4) możemy zapisać w równoważnej postaci

$$\begin{aligned} \text{Div}(\mathbf{QN}) + \mathbf{f} &= \dot{\mathbf{p}}, \\ \text{Div}(\mathbf{QM}) + \text{ad}^{-1}\{(\mathbf{QN})\mathbf{F}^T - \mathbf{F}(\mathbf{QN})^T\} + \mathbf{c} &= \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{v} \times \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Przy pomocy analogicznych zależności (1.7.57) pomiędzy tensorami miar odkształceń w reprezentacji przestrzennej i materialnej

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{K}(\mathbf{x}, t), \quad (2.3.16)$$

można wykazać, że

$$\begin{aligned} \text{Div}(\mathbf{QN}) &= \mathbf{Q} \{ \text{Div} \mathbf{N} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{KN}^T - \mathbf{NK}^T) \}, \\ \text{Div}(\mathbf{QM}) &= \mathbf{Q} \{ \text{Div} \mathbf{M} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{KM}^T - \mathbf{MK}^T) \}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Z definicji (1.7.32)₁ tensora odkształceń \mathbf{E} oraz (2.3.16)₁ wynika, że

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}(\mathbf{I}_0 + \mathbf{E}). \quad (2.3.18)$$

Wówczas z (2.3.17) i (2.3.14) otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{NF}^T - \mathbf{FN}^T &= \mathbf{QN}(\mathbf{I}_0 + \mathbf{E})^T \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}(\mathbf{I}_0 + \mathbf{E})\mathbf{N}^T \mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q} \{ \mathbf{N}(\mathbf{I}_0 + \mathbf{E})^T - (\mathbf{I}_0 + \mathbf{E})\mathbf{N}^T \} \mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Wyrażenie w nawiasie klamrowym prawej strony (2.3.19) jest tensorem skośnie symetrycznym. Z własności izomorficznego odwzorowania ad otrzymujemy więc

$$\text{ad}^{-1}\{ \mathbf{NF}^T - \mathbf{FN}^T \} = \mathbf{Q} \text{ad}^{-1}\{ \mathbf{N}(\mathbf{I}_0 + \mathbf{E})^T - (\mathbf{I}_0 + \mathbf{E})\mathbf{N}^T \}. \quad (2.3.20)$$

Podstawiając teraz (2.3.17) i (2.3.20) do lokalnych równań ruchu (2.3.15) możemy je zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \text{Div} \mathbf{N} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{KN}^T - \mathbf{NK}^T) + \mathbf{Q}^T \mathbf{f} &= \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{p}}, \\ \text{Div} \mathbf{M} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{KM}^T - \mathbf{MK}^T) + \text{ad}^{-1}\{ \mathbf{N}(\mathbf{I}_0 + \mathbf{E})^T - (\mathbf{I}_0 + \mathbf{E})\mathbf{N}^T \} &+ \mathbf{Q}^T \mathbf{c} = \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Gęstości pędu i momentu pędu w reprezentacji przestrzennej i materialnej są powiązane zależnościami

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q} \mathbf{p}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{Q} \mathbf{s}, \quad (2.3.22)$$

różniczkując które otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{p}) = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{p}), \\ \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{s}) = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{s}). \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Analogicznie do (1.6.26) wprowadźmy również wektory prędkości translacyjnej i obrotowej w reprezentacji materialnej

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.3.24)$$

Powyższe przekształcenia pozwalają przedstawić lokalne równania ruchu (2.3.21) w reprezentacji materialnej

$$\begin{aligned} \text{Div} \mathbf{N} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{K} \mathbf{N}^T - \mathbf{N} \mathbf{K}^T) + \mathbf{f} &= \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}, \\ \text{Div} \mathbf{M} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{K} \mathbf{M}^T - \mathbf{M} \mathbf{K}^T) + \text{ad}^{-1}\{\mathbf{N}(\mathbf{I}_0 + \mathbf{E})^T - (\mathbf{I}_0 + \mathbf{E})\mathbf{N}^T\} &+ \mathbf{c} = \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} + \mathbf{v} \times \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

gdzie powierzchniowe wektory sił i momentów w reprezentacjach przestrzennej i materialnej powiązane są wzorami

$$\mathbf{f} = \mathbf{Q} \mathbf{f}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{Q} \mathbf{c}. \quad (2.3.26)$$

W przypadku powłok sprężystych równania konstytutywne (2.3.10), wyrażone przez wielkości w reprezentacji materialnej, przyjmują postać

$$\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}), \quad \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}), \quad (2.3.27)$$

natomiast kinetyczne równania konstytutywne (2.3.12) mogą być przedstawione jako

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}), \quad \mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}). \quad (2.3.28)$$

W szczególnym przypadku powłok hipersprężystych, energia sprężysta $\Phi = \tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x})$ jest funkcją tensorów miar odkształceń \mathbf{E} i \mathbf{K} , a funkcje materiałowe w równaniach konstytutywnych (2.3.27) dane są przez

$$\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{E}} \tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{K}} \tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}). \quad (2.3.29)$$

Na zagadnienie brzegowe nieliniowej mechaniki powłok w reprezentacji materialnej składają się więc lokalne równania ruchu (2.3.25), materiałowe (2.3.27) lub (2.3.29) oraz kinetyczne (2.3.28) równania konstytutywne, definicje prędkości liniowej i obrotowej wynikające z (2.3.24) i (2.3.2), zależności kinematyczne wynikające z (2.3.16) i (2.3.3), a także odpowiednio wyrażone w reprezentacji materialnej dynamiczne i kinematyczne warunki brzegowe, warunki początkowe oraz dynamiczne i kinematyczne warunki ciągłości.

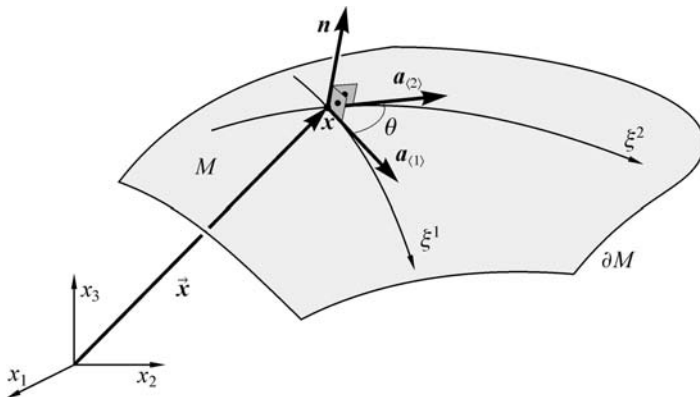
2.4. Podstawowe zależności we współrzędnych fizycznych

2.4.1. Składowe fizyczne wektorowych i tensorowych pól na powierzchni

Stosowanie zapisu absolutnego czyni rozważania ogólne nie tylko bardziej przejrzystymi, lecz również uwalnia od konieczności wprowadzania układu współrzędnych na zbyt wczesnym etapie rozważań.

Wektory i tensory występujące w teorii powłok reprezentują pewne wielkości fizyczne i wobec tego mają określony fizyczny wymiar. Na przykład, wektor przekrojowych sił \mathbf{n}_ν ma wymiar fizyczny N/m (w układzie jednostek SI). Ten sam wymiar fizyczny powinny mieć również wszystkie trzy składowe wektora \mathbf{n}_ν w dowolnie wybranej bazie na powierzchni podstawowej M . Jeśli jednak powierzchnia M dana jest w postaci parametrycznej, a przyjęty układ współrzędnych powierzchniowych jest zupełnie dowolny, to wektory bazy naturalnej mogą mieć różne wymiary. W rezultacie, poszczególne składowe \mathbf{n}_ν względem tych wektorów bazy mogą mieć również różne wymiary fizyczne. Nie ma to znaczenia w rozważaniach ogólnych, ale staje się ważnym przy analizie zadań szczegółowych i interpretacji fizycznej uzyskanych wyników rozwiązań. Tej niedogodności można uniknąć wprowadzając tak zwane *składowe fizyczne* wektorów i tensorów.

Założmy, że powierzchnia podstawowa M w konfiguracji odniesienia powłoki dana jest w postaci parametrycznej $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(\xi^\alpha)$. W ogólnym przypadku taki opis parametryczny można wprowadzić jedynie lokalnie i w takim sensie należy interpretować wszystkie zależności wprowadzone w tym podrozdziale.



Rys. 2.4.1. Jednostkowe wektory styczne do linii współrzędnych.

Przy dowolnym wyborze współrzędnych powierzchniowych $(\xi^\alpha) = (\xi^1, \xi^2)$, wektory jednostkowe związane z wektorami bazy naturalnej definiuje się następująco (rys. 2.4.1):

$$\mathbf{a}_{\langle\alpha\rangle} = \frac{\mathbf{a}_\alpha}{\|\mathbf{a}_\alpha\|} = \frac{\mathbf{a}_\alpha}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}, \quad \mathbf{a}^{\langle\alpha\rangle} = \frac{\mathbf{a}^\alpha}{\|\mathbf{a}^\alpha\|} = \frac{\mathbf{a}^\alpha}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.4.1)$$

Wprowadzając tzw. współczynniki Lamégo,

$$\alpha_\alpha \equiv \sqrt{\vec{x}_{,\alpha} \cdot \vec{x}_{,\alpha}} = \sqrt{a_{\alpha\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.4.2)$$

oraz oznaczając przez θ kąt między wektorami bazy stycznymi do współrzędnych powierzchniowych, mamy

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \vec{x}_{,1} \cdot \vec{x}_{,2} = \alpha_1 \alpha_2 \cos \theta. \quad (2.4.3)$$

Wówczas współrzędne tensora metrycznego powierzchni M można zapisać w postaci

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 \alpha_2 \cos \theta \\ \alpha_1 \alpha_2 \cos \theta & \alpha_2^2 \end{bmatrix}, \quad (2.4.4)$$

$$[a^{\alpha\beta}] = \frac{1}{\sin^2 \theta} \begin{bmatrix} \alpha_1^{-2} & -\alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} \cos \theta \\ -\alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} \cos \theta & \alpha_2^{-2} \end{bmatrix},$$

przy czym

$$a \equiv \det(a_{\alpha\beta}) = \alpha_1^2 \alpha_2^2 (1 - \cos^2 \theta) = \alpha_1^2 \alpha_2^2 \sin^2 \theta. \quad (2.4.5)$$

Wektory jednostkowe określone przez (2.4.1) można przedstawić jako

$$\mathbf{a}_{\langle\alpha\rangle} = \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{a}_\alpha, \quad \mathbf{a}^{\langle\alpha\rangle} = \alpha_\alpha \sin \theta \mathbf{a}^\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.4.6)$$

Dowolne pole wektorowe lub tensorowe na powierzchni M można teraz wyrazić przez składowe określone albo w bazie naturalnej $\{\mathbf{a}_\alpha\}$, albo w bazie wektorów jednostkowych $\{\mathbf{a}_{\langle\alpha\rangle}\}$. W szczególności, dowolny tensor $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \in E \otimes \mathbf{T}_\mathbf{x}M$ można przedstawić w postaci (w obu reprezentacjach obowiązuje umowa sumacyjna)

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{s}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{s}^{\langle\alpha\rangle} \otimes \mathbf{a}_{\langle\alpha\rangle} \\ &= \mathbf{s}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha = \mathbf{s}_{\langle\alpha\rangle} \otimes \mathbf{a}^{\langle\alpha\rangle}. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Wykorzystując zależności (2.4.6), otrzymujemy następujące związki między składowymi tensorowymi a składowymi fizycznymi wektorów \mathbf{s}_α i \mathbf{s}^α tensora \mathbf{S} :

$$\mathbf{s}_\alpha = \alpha_\alpha \sin \theta \mathbf{s}_{\langle\alpha\rangle}, \quad \mathbf{s}^\alpha = \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{s}^{\langle\alpha\rangle}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.4.8)$$

2.4.2. Powierzchniowe operatory różniczkowe we współrzędnych fizycznych

Jeśli $\mathbf{u}: M \rightarrow E$ jest polem wektorowym, różniczkowalnym na powierzchni M danej w postaci parametrycznej, to powierzchniowy gradient tego pola można obliczyć ze wzoru $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{u}_{,\alpha} \otimes \mathbf{a}^\alpha$, gdzie $\mathbf{u}_{,\alpha} \equiv \partial \mathbf{u} / \partial \xi^\alpha$.

Oznaczmy przez ds_α , $\alpha = 1, 2$, różniczkowy element długości łuku wzdłuż krzywych współrzędnych powierzchniowych. Uwzględniając definicję (2.4.2) parametrów Lamégo, mamy

$$ds_\alpha = \alpha_\alpha d\xi^\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.4.9)$$

Wówczas reguła różniczkowania funkcji złożonych, zastosowana do dowolnej funkcji $f(\xi^\alpha)$, pozwala wyrazić pochodne cząstkowe względem współrzędnych ξ^α przez pochodne względem parametrów długości łuku

$$\frac{df}{ds_\alpha} = \frac{d\xi^\alpha}{ds_\alpha} \frac{df}{d\xi^\alpha} = \alpha_\alpha^{-1} \frac{df}{d\xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.4.10)$$

Zastosowanie tego wzoru do pochodnych cząstkowych pola wektorowego \mathbf{u} pozwala wyrazić powierzchniowy gradient $\nabla \mathbf{u}$ w następującej postaci:

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{1}{\alpha_\alpha \sin \theta} \mathbf{u}_{,\alpha} \otimes \mathbf{a}^{(\alpha)} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_\alpha} \otimes \mathbf{a}^{(\alpha)}. \quad (2.4.11)$$

Jeśli pole tensorowe $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \in E \otimes T_{\mathbf{x}}M$ jest różniczkowalne na M , to powierzchniowy operator dywergencji tego pola można obliczyć korzystając ze wzoru

$$Div \mathbf{S} = \mathbf{s}^\alpha |_{,\alpha} = \mathbf{s}^\alpha_{,\alpha} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda \mathbf{s}^\alpha = \mathbf{s}^\alpha_{,\alpha} + \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} \mathbf{s}^\alpha)_{,\alpha}. \quad (2.4.12)$$

Wykorzystując następnie (2.4.5), (2.4.8) i (2.4.10), wzór ten możemy wyrazić przez składowe fizyczne tensora \mathbf{S} .

2.4.3. Geometria konfiguracji odniesienia powłoki

Przy dowolnym układzie współrzędnych powierzchniowych (ξ^α) na M , pole tensorów struktury $\mathbf{T}_0(\xi^\alpha)$ jest polem niezależnym od geometrii powierzchni podstawowej, a jego wybór jest częścią definicji konfiguracji odniesienia powłoki.

W dalszych rozważaniach wygodnie jest przyjąć, że tensor $\mathbf{T}_0(\xi^\alpha)$ jest reprezentowany, w szczególności, przez *ortonormalną* trójkę wektorów kierunkowych $\{\mathbf{t}_i^0(\xi^\alpha)\}$. Wtedy $\mathbf{T}_0(\xi^\alpha)$ staje się tensorem obrotu

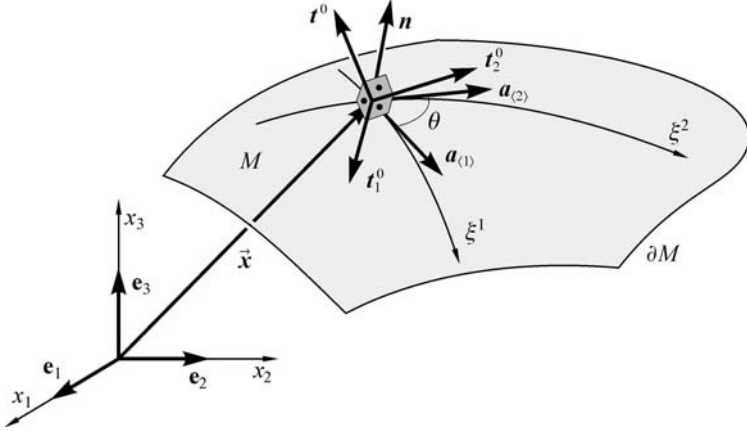
$$\mathbf{T}_0(\xi^\alpha) = \mathbf{t}_i^0(\xi^\alpha) \otimes \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{t}_i^0(\xi^\alpha) = \mathbf{T}_0(\xi^\alpha) \mathbf{e}_i, \quad (2.4.13)$$

gdzie $\mathbf{e}^i \equiv \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, jest ustaloną bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej, rys. 2.4.2.

Pochodne cząstkowe wektora wodzącego $\vec{\mathbf{x}}(\xi^\alpha)$ względem parametrów długości łuku współrzędnych powierzchniowych możemy teraz wyrazić przez składowe względem bazy ortonormalnej $\{\mathbf{t}_i^0\}$:

$$\alpha_\alpha^{-1} \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha} = \nu_{(\alpha 1)}^0 \mathbf{t}_1^0 + \nu_{(\alpha 2)}^0 \mathbf{t}_2^0 + \eta_{(\alpha)}^0 \mathbf{t}^0, \quad (2.4.14)$$

$$\begin{aligned}\nu_{\langle\alpha\beta\rangle}^0 &= \frac{1}{\alpha_\alpha \sin \theta} \vec{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}_\beta^0 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \vec{x}}{\partial s_\alpha} \cdot \mathbf{t}_\beta^0, \\ \eta_{\langle\alpha\rangle}^0 &= \frac{1}{\alpha_\alpha \sin \theta} \vec{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}^0 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \vec{x}}{\partial s_\alpha} \cdot \mathbf{t}^0.\end{aligned}\quad (2.4.15)$$



Rys. 2.4.2. Definicja wektorów kierunkowych poprzez bazę ortonormalną w przestrzeni.

Pochodne wersorów kierunkowych \mathbf{t}_i^0 wzdłuż krzywych współrzędnych można wyrazić wzorem

$$\alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_{i,\alpha}^0 = \mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle}^0 \times \mathbf{t}_i^0, \quad (2.4.16)$$

gdzie wektory $\mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle}^0(\xi^\beta)$ są *wektorami krzywizn* konfiguracji odniesienia powłoki. Wektory $\mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle}^0(\xi^\beta)$ nie określają tutaj krzywizn powierzchni M , lecz krzywizny wynikające z wyposażenia M w dodatkową strukturę przez tensor \mathbf{T}_0 .

Przedstawiając wektory $\mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle}^0$ w bazie \mathbf{t}_i^0 ,

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle}^0 &= \mathbf{t}^0 \times (b_{\langle\alpha 1\rangle}^0 \mathbf{t}_1^0 + b_{\langle\alpha 2\rangle}^0 \mathbf{t}_2^0) + b_{\langle\alpha\rangle}^0 \mathbf{t}^0 \\ &= -b_{\langle\alpha 2\rangle}^0 \mathbf{t}_1^0 + b_{\langle\alpha 1\rangle}^0 \mathbf{t}_2^0 + b_{\langle\alpha\rangle}^0 \mathbf{t}^0,\end{aligned}\quad (2.4.17)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}b_{\langle\alpha 1\rangle}^0 &= -\alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_{1,\alpha}^0 \cdot \mathbf{t}^0 = \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_1^0 \cdot \mathbf{t}_{,\alpha}^0, \\ b_{\langle\alpha 2\rangle}^0 &= -\alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_{2,\alpha}^0 \cdot \mathbf{t}^0 = \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_2^0 \cdot \mathbf{t}_{,\alpha}^0, \\ b_{\langle\alpha\rangle}^0 &= \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_{1,\beta}^0 \cdot \mathbf{t}_2^0 = -\alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_1^0 \cdot \mathbf{t}_{2,\beta}^0.\end{aligned}\quad (2.4.18)$$

Parametry geometryczne $\nu_{\langle\alpha\beta\rangle}^0$ i $\eta_{\langle\alpha\rangle}^0$ oraz składowe wektorów $\mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle}^0$ całkowicie określają lokalną geometrię konfiguracji odniesienia powłoki w ramach rozpatrywanej ogólnej teorii powłok.

2.4.4. Geometria konfiguracji aktualnej i składowe fizyczne miar odkształceń

W opisie ruchu powłoki względem konfiguracji odniesienia, wektor wodzący \vec{y} powierzchni podstawowej $M(t)$ w konfiguracji aktualnej i tensor struktury \mathbf{T} na powierzchni $M(t)$ można traktować jako funkcje konwekcyjnych współrzędnych powierzchniowych (ξ^α) i czasu t .

Podobnie jak \mathbf{T}_0 , tensor \mathbf{T} może być również reprezentowany poprzez wektory kierunkowe, tworzące bazę ortonormalną $\{t_i\}$ zdefiniowaną analogicznie do (2.4.13):

$$\mathbf{T}(\xi^\alpha, t) = t_i(\xi^\alpha, t) \otimes \mathbf{e}^i, \quad t_i(\xi^\alpha, t) = \mathbf{T}(\xi^\alpha, t)\mathbf{e}_i. \quad (2.4.19)$$

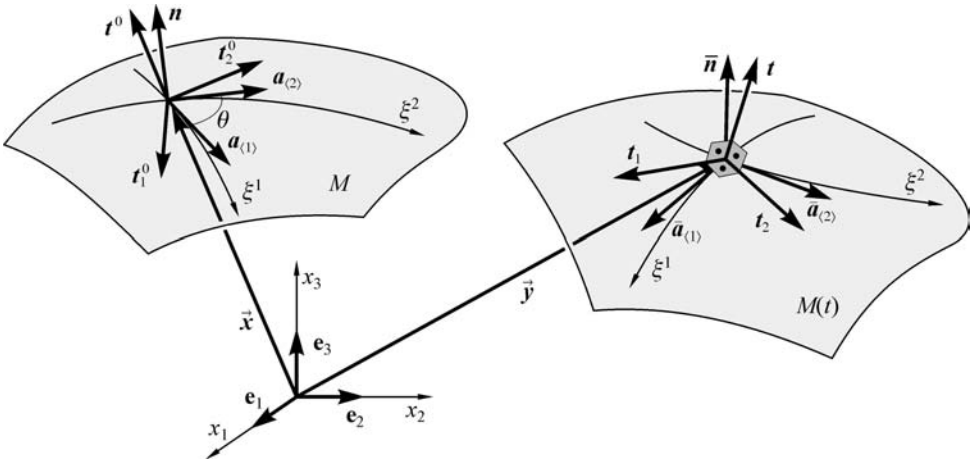
Wówczas pochodne wektora wodzącego $\vec{y}(\xi^\alpha, t)$ względem parametrów długości łuku s_β wyrażać będziemy przez składowe względem bazy $\{t_i\} = \{t_\alpha, t\}$:

$$\alpha_\alpha^{-1} \vec{y}_{,\alpha} = \nu_{\langle\alpha 1\rangle} t_1 + \nu_{\langle\alpha 2\rangle} t_2 + \eta_{\langle\alpha\rangle} t. \quad (2.4.20)$$

Z tej definicji otrzymujemy

$$\nu_{\langle\alpha\beta\rangle} = \alpha_\alpha^{-1} \vec{y}_{,\alpha} \cdot t_\beta, \quad \eta_{\langle\alpha\rangle} = \alpha_\alpha^{-1} \vec{y}_{,\alpha} \cdot t. \quad (2.4.21)$$

Zauważmy, że wektory styczne do linii współrzędnych na powierzchni podstawowej $M(t)$ są określone przez $\bar{a}_\alpha = \mathbf{P} \vec{y}_{,\alpha}$ i są one wektorowo równe pochodnym cząstkowym $\vec{y}_{,\alpha}$, jak to pokazuje rys. 2.4.3, należą jednak do różnych przestrzeni.



Rys. 2.4.3. Baza ortonormalna w konfiguracji aktualnej.

Analogicznie do (2.4.16), pochodne wersorów $t_i(\xi^\alpha, t)$ wzdłuż krzywych współrzędnych wyrażają się przez wektory krzywizny $\mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle}(\xi^\beta, t)$ konfiguracji aktualnej powłoki wzorami

$$\alpha_\alpha^{-1} t_{i,\alpha} = \mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle} \times t_i. \quad (2.4.22)$$

Definiując składowe wektorów $\mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle}$ podobnie jak w (2.4.17), lecz teraz w aktualnej bazie ortonormalnej $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}\}$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle} &= \mathbf{t} \times (b_{\langle\alpha 1\rangle} \mathbf{t}_1 + b_{\langle\alpha 2\rangle} \mathbf{t}_2) + b_{\langle\alpha\rangle} \mathbf{t} \\ &= -b_{\langle\alpha 2\rangle} \mathbf{t}_1 + b_{\langle\alpha 1\rangle} \mathbf{t}_2 + b_{\langle\alpha\rangle} \mathbf{t},\end{aligned}\quad (2.4.23)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}b_{\langle\alpha 1\rangle} &= -\alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_{1,\alpha} \cdot \mathbf{t} = \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_{,\alpha}, \\ b_{\langle\alpha 2\rangle} &= -\alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_{2,\alpha} \cdot \mathbf{t} = \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_{,\alpha}, \\ b_{\langle\alpha\rangle} &= \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_{1,\alpha} \cdot \mathbf{t}_2 = -\alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_{2,\alpha}.\end{aligned}\quad (2.4.24)$$

Jeśli porównamy wprowadzone tutaj wyrażenia z definicjami odpowiednich tensorów krzywizny \mathbf{B}_0 i \mathbf{B} związanych z tensorami struktury \mathbf{T}_0 i \mathbf{T} (podrozdział 1.7), to okazuje się, że (2.4.18) i (2.4.24) są wzorami na obliczanie składowych fizycznych tensorów \mathbf{B}_0 i \mathbf{B} .

Wykorzystując ogólne zależności (2.4.7) i (2.4.8), tensory powłokowych miar odkształceń $\mathbf{E}(\xi^\alpha, t)$ i $\mathbf{K}(\xi^\alpha, t)$ można przedstawić przez składowe fizyczne

$$\mathbf{E} = \varepsilon_{\langle\alpha\rangle} \otimes \mathbf{a}^{\langle\alpha\rangle}, \quad \mathbf{K} = \kappa_{\langle\alpha\rangle} \otimes \mathbf{a}^{\langle\alpha\rangle}, \quad (2.4.25)$$

gdzie

$$\varepsilon_{\langle\alpha\rangle} = \frac{1}{\alpha_\alpha \sin \theta} \varepsilon_\alpha, \quad \kappa_{\langle\alpha\rangle} = \frac{1}{\alpha_\alpha \sin \theta} \kappa_\alpha. \quad (2.4.26)$$

Z definicji tych tensorów (1.7.32) otrzymujemy

$$\varepsilon_{\langle\alpha\rangle} = \alpha_\alpha^{-1} (\vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} - \mathbf{Q} \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha}), \quad \kappa_{\langle\alpha\rangle} = \mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle} - \mathbf{Q} \mathbf{b}_{\langle\alpha\rangle}^0. \quad (2.4.27)$$

Wektory zginania $\kappa_{\langle\alpha\rangle}$ możemy również wyliczyć ze wzoru

$$\mathbf{K}_{\langle\alpha\rangle} = \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{Q}_\alpha \mathbf{Q}^T = \text{ad } \kappa_{\langle\alpha\rangle}. \quad (2.4.28)$$

Składowe fizyczne wektorów miar odkształceń określamy zgodnie z definicjami parametrów geometrycznych:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\langle\alpha\rangle} &= \varepsilon_{\langle\alpha 1\rangle} \mathbf{t}_1 + \varepsilon_{\langle\alpha 2\rangle} \mathbf{t}_2 + \varepsilon_{\langle\alpha\rangle} \mathbf{t}, \\ \kappa_{\langle\alpha\rangle} &= \mathbf{t} \times (\kappa_{\langle\alpha 1\rangle} \mathbf{t}_1 + \kappa_{\langle\alpha 2\rangle} \mathbf{t}_2) + \kappa_{\langle\alpha\rangle} \mathbf{t}.\end{aligned}\quad (2.4.29)$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle} &= \nu_{\langle\alpha\beta\rangle} - \nu_{\langle\alpha\beta\rangle}^0, & \varepsilon_{\langle\alpha\rangle} &= \eta_{\langle\alpha\rangle} - \eta_{\langle\alpha\rangle}^0, \\ \kappa_{\langle\alpha\beta\rangle} &= b_{\langle\alpha\beta\rangle} - b_{\langle\alpha\beta\rangle}^0, & \kappa_{\langle\alpha\rangle} &= b_{\langle\alpha\rangle} - b_{\langle\alpha\rangle}^0.\end{aligned}\quad (2.4.30)$$

Wektory odkształceń $\varepsilon_{\langle\beta\rangle}$, wyrażone przez pole przesunięć i pole obrotów powierzchni podstawowej, mają postać

$$\varepsilon_{\langle\alpha\rangle} = \alpha_\alpha^{-1} (\vec{\mathbf{x}}_{,\alpha} + \mathbf{u}_{,\alpha} - \mathbf{Q} \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha}) = \alpha_\alpha^{-1} \{ \mathbf{u}_{,\alpha} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q}) \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha} \}. \quad (2.4.31)$$

Z (2.4.31) możemy więc otrzymać następujące wzory na obliczanie składowych tych wektorów:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\langle\alpha 1\rangle} &= \varepsilon_{\langle\alpha\rangle} \cdot \mathbf{t}_1 = \{ \mathbf{u}_{,\alpha} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q}) \vec{x}_{,\alpha} \} \cdot \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_1, \\ \varepsilon_{\langle\alpha 2\rangle} &= \varepsilon_{\langle\alpha\rangle} \cdot \mathbf{t}_2 = \{ \mathbf{u}_{,\alpha} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q}) \vec{x}_{,\alpha} \} \cdot \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}_2, \\ \varepsilon_{\langle\alpha\rangle} &= \varepsilon_{\langle\alpha\rangle} \cdot \mathbf{t} = \{ \mathbf{u}_{,\alpha} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q}) \vec{x}_{,\alpha} \} \cdot \alpha_\alpha^{-1} \mathbf{t}.\end{aligned}\quad (2.4.32)$$

Wszystkie wyprowadzone tutaj zależności geometryczne i kinematyczne nie zależą od wyboru parametryzacji obrotów.

2.4.5. Lokalne równania ruchu we współrzędnych fizycznych

W dalszej części tego podrozdziału ograniczymy się do szczególnego przypadku, gdy linie współrzędnych ξ^α tworzą na powierzchni M siatkę *ortogonalną*. W ortogonalnym układzie współrzędnych tensory przekrojowych sił i momentów wyrażone we współrzędnych fizycznych mają postać

$$\mathbf{N} = \mathbf{n}^{\langle 1 \rangle} \otimes \mathbf{a}_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{n}^{\langle 2 \rangle} \otimes \mathbf{a}_{\langle 2 \rangle}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{m}^{\langle 1 \rangle} \otimes \mathbf{a}_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m}^{\langle 2 \rangle} \otimes \mathbf{a}_{\langle 2 \rangle}. \quad (2.4.33)$$

Lokalne równania ruchu można teraz zapisać w następującej formie:

$$\begin{aligned}(\alpha_2 \mathbf{n}^{\langle 1 \rangle})_{,1} + (\alpha_1 \mathbf{n}^{\langle 2 \rangle})_{,2} + \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{b} &= \mathbf{0}, \\ (\alpha_2 \mathbf{m}^{\langle 1 \rangle})_{,1} + (\alpha_1 \mathbf{m}^{\langle 2 \rangle})_{,2} + \alpha_2 \vec{y}_{,1} \times \mathbf{n}^{\langle 1 \rangle} + \alpha_1 \vec{y}_{,2} \times \mathbf{n}^{\langle 2 \rangle} + \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{l} &= \mathbf{0},\end{aligned}\quad (2.4.34)$$

gdzie wektory $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$ są określone zależnościami

$$\mathbf{b} = \mathbf{f} - \dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{c} - (\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{v} \times \mathbf{p}). \quad (2.4.35)$$

Składowe fizyczne wektorów przekrojowych sił i momentów określamy zgodnie z definicjami (2.4.29) składowych fizycznych miar odkształceń:

$$\mathbf{n}^{\langle \alpha \rangle} = N^{\langle \alpha \beta \rangle} \mathbf{t}_\beta + Q^{\langle \alpha \rangle} \mathbf{t}, \quad \mathbf{m}^{\langle \alpha \rangle} = \mathbf{t} \times (M^{\langle \alpha \beta \rangle} \mathbf{t}_\beta) + M^{\langle \alpha \rangle} \mathbf{t}. \quad (2.4.36)$$

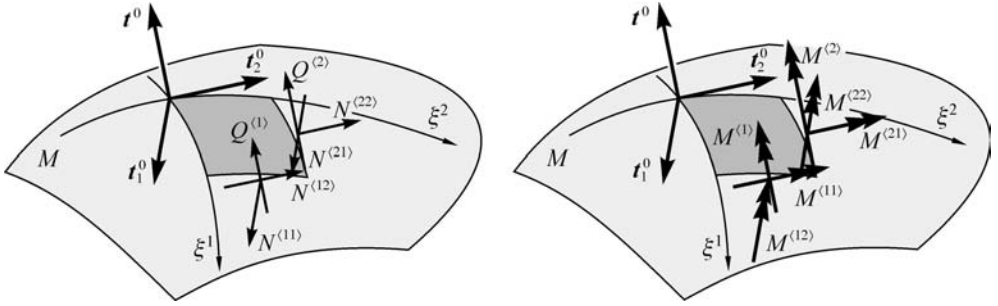
W rozpisanej postaci zależności (2.4.36) prowadzą do

$$\begin{aligned}\mathbf{n}^{\langle 1 \rangle} &= N^{\langle 11 \rangle} \mathbf{t}_1 + N^{\langle 12 \rangle} \mathbf{t}_2 + Q^{\langle 1 \rangle} \mathbf{t}, \\ \mathbf{n}^{\langle 2 \rangle} &= N^{\langle 21 \rangle} \mathbf{t}_1 + N^{\langle 22 \rangle} \mathbf{t}_2 + Q^{\langle 2 \rangle} \mathbf{t}, \\ \mathbf{m}^{\langle 1 \rangle} &= -M^{\langle 12 \rangle} \mathbf{t}_1 + M^{\langle 11 \rangle} \mathbf{t}_2 + M^{\langle 1 \rangle} \mathbf{t}, \\ \mathbf{m}^{\langle 2 \rangle} &= -M^{\langle 22 \rangle} \mathbf{t}_1 + M^{\langle 21 \rangle} \mathbf{t}_2 + M^{\langle 2 \rangle} \mathbf{t}.\end{aligned}\quad (2.4.37)$$

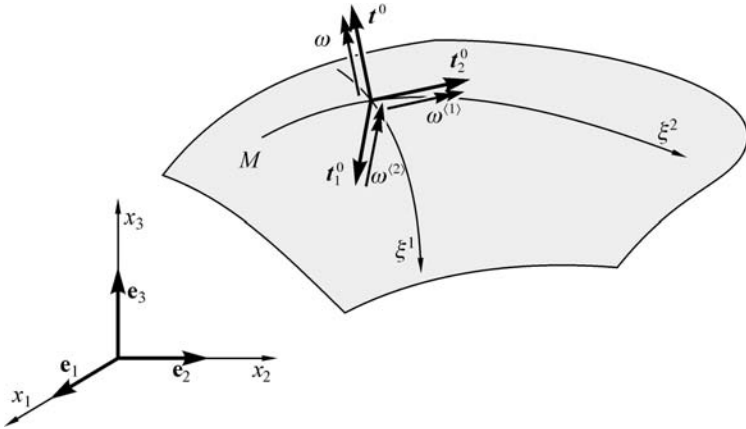
Dodatknie zwroty poszczególnych składowych sił i momentów przekrojowych pokazano na rys. 2.4.4.

Składowe fizyczne wektora prędkości obrotowej wynikają z rozkładu (rys. 2.4.5)

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{t} \times (\omega^{\langle \alpha \rangle} \mathbf{t}_\alpha) + \omega \mathbf{t} = -\omega^{\langle 2 \rangle} \mathbf{t}_1 + \omega^{\langle 1 \rangle} \mathbf{t}_2 + \omega \mathbf{t}. \quad (2.4.38)$$



Rys. 2.4.4. Składowe fizyczne przekrojowych sił i momentów.



Rys. 2.4.5. Składowe fizyczne wektora prędkości obrotowej powłoki.

2.4.6. Równania konstytutywne w składowych fizycznych

Zapisując tensory odkształceń przez składowe fizyczne, jak w (2.4.25), oraz uwzględniając definicje prędkości odkształceń \mathbf{E}° i \mathbf{K}° łatwo wykazać, że

$$\mathbf{E}^\circ = \boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\alpha\rangle}^\circ \otimes \mathbf{a}^{\langle\alpha\rangle}, \quad \mathbf{K}^\circ = \boldsymbol{\kappa}_{\langle\alpha\rangle}^\circ \otimes \mathbf{a}^{\langle\alpha\rangle}, \quad (2.4.39)$$

gdzie wektory prędkości odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\alpha\rangle}^\circ$ oraz $\boldsymbol{\kappa}_{\langle\alpha\rangle}^\circ$ dane są wzorami

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\alpha\rangle}^\circ &= \dot{\varepsilon}_{\langle\alpha 1\rangle} \mathbf{t}_1 + \dot{\varepsilon}_{\langle\alpha 2\rangle} \mathbf{t}_2 + \dot{\varepsilon}_{\langle\alpha\rangle} \mathbf{t}, \\ \boldsymbol{\kappa}_{\langle\alpha\rangle}^\circ &= \mathbf{t} \times (\dot{\kappa}_{\langle\alpha 1\rangle} \mathbf{t}_1 + \dot{\kappa}_{\langle\alpha 2\rangle} \mathbf{t}_2) + \dot{\kappa}_{\langle\alpha\rangle} \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

Uwzględniając rozkład (2.4.25), efektywną moc naprężeń można zapisać również w składowych fizycznych

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{n}^{\langle\alpha\rangle} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\alpha\rangle}^\circ + \mathbf{m}^{\langle\alpha\rangle} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\langle\alpha\rangle}^\circ \\ &= N^{\langle\alpha\beta\rangle} \dot{\varepsilon}_{\langle\alpha\beta\rangle} + Q^{\langle\alpha\rangle} \dot{\varepsilon}_{\langle\alpha\rangle} + M^{\langle\alpha\beta\rangle} \dot{\kappa}_{\langle\alpha\beta\rangle} + M^{\langle\alpha\rangle} \dot{\kappa}_{\langle\alpha\rangle}. \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

Dlatego równania konstytutywne powłok sprężystych dla składowych fizycznych wektorów przekrojowych sił i momentów przyjmują postać

$$\mathbf{n}^{(\alpha)} = \widehat{\mathbf{n}}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\beta\rangle}, \boldsymbol{\kappa}_{\langle\beta\rangle}; \mathbf{x}), \quad \mathbf{m}^{(\alpha)} = \widehat{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\beta\rangle}, \boldsymbol{\kappa}_{\langle\beta\rangle}; \mathbf{x}), \quad (2.4.42)$$

lub w składowych fizycznych odpowiednich tensorów

$$\begin{aligned} N^{(\alpha\beta)} &= \widehat{N}^{(\alpha\beta)}(\varepsilon_{\langle\lambda\kappa\rangle}, \varepsilon_{\langle\lambda\rangle}, \kappa_{\langle\lambda\kappa\rangle}, \kappa_{\langle\lambda\rangle}; \mathbf{x}), \\ Q^{(\alpha)} &= \widehat{Q}^{(\alpha)}(\varepsilon_{\langle\lambda\kappa\rangle}, \varepsilon_{\langle\lambda\rangle}, \kappa_{\langle\lambda\kappa\rangle}, \kappa_{\langle\lambda\rangle}; \mathbf{x}), \\ M^{(\alpha\beta)} &= \widehat{M}^{(\alpha\beta)}(\varepsilon_{\langle\lambda\kappa\rangle}, \varepsilon_{\langle\lambda\rangle}, \kappa_{\langle\lambda\kappa\rangle}, \kappa_{\langle\lambda\rangle}; \mathbf{x}), \\ M^{(\alpha)} &= \widehat{M}^{(\alpha)}(\varepsilon_{\langle\lambda\kappa\rangle}, \varepsilon_{\langle\lambda\rangle}, \kappa_{\langle\lambda\kappa\rangle}, \kappa_{\langle\lambda\rangle}; \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

W przypadku powłok hipersprężystych funkcję energii sprężystej możemy zapisać w postaci

$$\Phi = \widehat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\alpha\rangle}, \boldsymbol{\kappa}_{\langle\alpha\rangle}; \mathbf{x}) = \widehat{\Phi}(\varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle}, \varepsilon_{\langle\alpha\rangle}, \kappa_{\langle\alpha\beta\rangle}, \kappa_{\langle\alpha\rangle}; \mathbf{x}) \quad (2.4.44)$$

a wówczas z (2.4.41)₁ wyznaczmy składowe fizyczne funkcji konstytutywnych

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{n}}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\beta\rangle}, \boldsymbol{\kappa}_{\langle\beta\rangle}; \mathbf{x}) &= \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\alpha\rangle}} \widehat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\beta\rangle}, \boldsymbol{\kappa}_{\langle\beta\rangle}; \mathbf{x}), \\ \widehat{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\beta\rangle}, \boldsymbol{\kappa}_{\langle\beta\rangle}; \mathbf{x}) &= \partial_{\boldsymbol{\kappa}_{\langle\alpha\rangle}} \widehat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\langle\beta\rangle}, \boldsymbol{\kappa}_{\langle\beta\rangle}; \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.4.45)$$

2.5. Relacje między trój- a dwuwymiarowym modelowaniem powłok

2.5.1. Uwagi ogólne

W myśl powszechnie wyrażanych w literaturze opinii, każda teoria powłok jest ze swej natury teorią przybliżoną w stosunku do mechaniki ośrodka ciągłego. W rezultacie, jednym z problemów staje się oszacowanie błędu uzyskanego na podstawie pól powierzchniowych, określonych z rozwiązania zagadnienia mechaniki powłok, w stosunku do nieznanego rozwiązania równań trójwymiarowych mechaniki ośrodka ciągłego. Wskazuje się również, że najbardziej pożądanym byłoby oszacowanie błędu popełnianego przy obliczaniu przemieszczeń i naprężeń w każdym punkcie ciała trójwymiarowego typu powłoka. Zwraca się również uwagę, że błąd w dwuwymiarowych równaniach konstytutywnych zwiększa się w strefie brzegowej, a w odległości od brzegu, rzędu grubości powłoki, równania te przestają w ogóle mieć sens.

Nie można negować przekonania, że mechanika powłok nie może dostarczyć tych samych informacji o rozpatrywanym problemie, co mechanika ośrodka ciągłego. W tym więc sensie jest ona *teorią uboższą*. Ale nie formułuje się przecież

problemu, z jaką dokładnością mechanika ośrodka ciągłego opisuje np. oddziaływania między cząstkami elementarnymi lub nawet między molekułami. Mechanika ośrodka ciągłego jest modelem mechanicznym materii *uśrednionym* w skali znacznie przekraczającej wymiary zarówno cząstek elementarnych, jak i molekuł. Dlatego mechanika ośrodka ciągłego jest *teorią uboższą* od mechaniki kwantowej i dynamiki molekularnej. Analogicznie, mechanika powłok nie może dostarczyć pełnej informacji o rozkładzie np. przemieszczeń i naprężeń w całym powłokopodobnym ciele trójwymiarowym. Czy to jednak oznacza, że teorię powłok można nazwać *teorią przybliżoną*?

W naszym przekonaniu, jest to problem niezbyt szczęśliwie sformułowany. W przedstawionym tu mieszanym podejściu do teorii powłok, lokalne równania dynamiki otrzymano w wyniku *ściśłej redukcji* do powierzchni podstawowej, przez całkowanie po grubości powłoki, zasad mechaniki ośrodka ciągłego. Kinematyka powłoki została dobudowana również w sposób *ściśły*, ale już na poziomie rozważań dwuwymiarowych, a wprowadzone powierzchniowe wielkości kinematyczne reprezentują w sposób *energetycznie uśredniony po grubości* odpowiednie trójwymiarowe pola kinematyczne. W ramach sformułowania powierzchniowego, taka mechanika powłok jest więc teorią *dynamicznie i kinematycznie ścisłą* w takim samym sensie, jak za ścisłą uważa się mechanikę ośrodka ciągłego.

Nie należy więc oczekiwać, aby mechanika powłok mogła dostarczyć pełnej informacji o wielkościach trójwymiarowych, które w tej teorii w ogóle nie występują. Jest to problem *zewnątrzny* w stosunku do mechaniki powłok jako teorii powierzchniowej i jako taki powinien być poza nią rozważany. Nie zmienia to jednak faktu, że informacja o trójwymiarowych rozkładach przemieszczeń i naprężeń po grubości powłoki jest w wielu zadaniach praktycznych ważna lub co najmniej pożądana.

2.5.2. Rozkłady przemieszczeń i naprężeń po grubości powłoki

W mechanice ośrodka ciągłego ruch powłoki jako ciała trójwymiarowego jest opisany względem dowolnie wybranej konfiguracji odniesienia B przez odwzorowanie

$$\bar{\mathbf{y}}: B \times T \rightarrow E, \quad (\mathbf{x}, t) \rightarrow \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.5.1)$$

Natomiast w mechanice powłok ruch tej samej powłoki jako dwuwymiarowego kontinuum materialnego jest opisany przez dwa odwzorowania

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}: M \times T &\rightarrow E, & (\mathbf{x}, t) &\rightarrow \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{T}: M \times T &\rightarrow E \otimes E, & (\mathbf{x}, t) &\rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Problem kinematyki powłoki sprowadza się więc do pytania: jak trójwymiarowa kinematyka (2.5.1) i dwuwymiarowa kinematyka (2.5.2) są, czy też mogą być powiązane ze sobą? Pytanie to zawiera w sobie dwa problemy.

Pierwszy problem można wyrazić następująco: znając $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ należy wyznaczyć $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$. Do określenia $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ przy znanych $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ potrzeba sześciu niezależnych powierzchniowych pól skalarnych, które muszą być wyrażone przez trzy składowe pola przestrzennego $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$. Aby to było możliwe w sposób jednoznaczny, pole $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ powinno spełniać dodatkowe warunki, które jednocześnie nie nakładałyby żadnych ograniczeń na ruch powłoki jako ciała trójwymiarowego. Tych warunków nie należy mylić z upraszczającymi założeniami kinematycznymi typu klasycznych hipotez kinematycznych np. Kirchhoffa–Love’a lub Timoszenko–Reissnera.

Drugi problem jest odwrotny: znając sześć niezależnych powierzchniowych pól skalarnych zawartych w $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ należy wyznaczyć trzy przestrzenne pola skalarne określające $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$. W ogólnym przypadku problem ten również nie może mieć jednoznacznego rozwiązania. Formalnie możemy jedynie zapisać, że

$$\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{P}(\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{T}(\mathbf{x}, t), \nabla \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t), \nabla \mathbf{T}(\mathbf{x}, t), \dots; \mathbf{x}), \quad (2.5.3)$$

gdzie \mathcal{P} jest funkcją swoich argumentów.

Podobnie, stan naprężeń w ciele trójwymiarowym jest opisany przez tensor naprężeń $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, natomiast w ramach teorii powłok stan naprężeń modelowany jest przez dwa powierzchniowe tensory przekrojowe $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$. Ze znanego \mathbf{T} możemy jednoznacznie wyznaczyć \mathbf{N} ze wzorów (1.8.31)–(1.8.33), a do jednoznacznego wyznaczenia \mathbf{M} potrzebna jest znajomość zarówno tensora \mathbf{T} , jak i wektora $\vec{\mathbf{y}}$. Ale ze znanych \mathbf{N} i \mathbf{M} nie można jednoznacznie odtworzyć \mathbf{T} . Możemy znów jedynie formalnie przedstawić \mathbf{T} jako

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{J}(\mathbf{N}(\mathbf{x}, t), \mathbf{M}(\mathbf{x}, t), \nabla \mathbf{N}(\mathbf{x}, t), \nabla \mathbf{M}(\mathbf{x}, t), \dots; \mathbf{x}). \quad (2.5.4)$$

Skonstruowanie funkcji \mathcal{P} i \mathcal{J} , występujących w (2.5.3) i (2.5.4), można więc traktować jako ważny problem określający relacje między mechaniką ośrodka ciągłego a mechaniką powłok. Niestety, w przypadku skończonych przemieszczeń i odkształceń, dowolnego materiału powłoki i jej struktury po grubości oraz dowolnej geometrii powierzchni podstawowej ten ogólny problem nie może mieć jednoznacznego rozwiązania.

W dalszej części tego podrozdziału przedstawimy pewne zależności, które pozwolą jedynie na pełniejszą interpretację pól powierzchniowych mechaniki powłok i ich roli w ewentualnym odzyskiwaniu rozkładu po grubości pól trójwymiarowych mechaniki ośrodka ciągłego.

2.5.3. Formalna reprezentacja trójwymiarowej deformacji powłoki

W podrozdziale 1.8 wykorzystywaliśmy formalną reprezentację wektora wodzącego $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ w postaci

$$\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t), \quad (2.5.5)$$

gdzie $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t)$ jest wektorem, określającym położenie dowolnego punktu $\mathbf{y} \in B(t)$ względem odpowiadającego mu punktu $\mathbf{y} \in M(t)$ powierzchni podstawowej powłoki. Zgodnie z (1.6.12), w (2.5.5) pojawia się w sposób naturalny wektor przesunięć $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej.

Aby wprowadzić do rozważań również tensor obrotu $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$, niech $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \xi, t)$ będzie nową zmienną zdefiniowaną formalnie przez $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t)$ w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{z}(\mathbf{x}, \xi, t). \quad (2.5.6)$$

Podstawiając (2.5.6) do (2.5.5), wektor wodzący $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t)$ możemy zapisać w postaci (rys. 2.5.1)

$$\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{z}(\mathbf{x}, \xi, t). \quad (2.5.7)$$

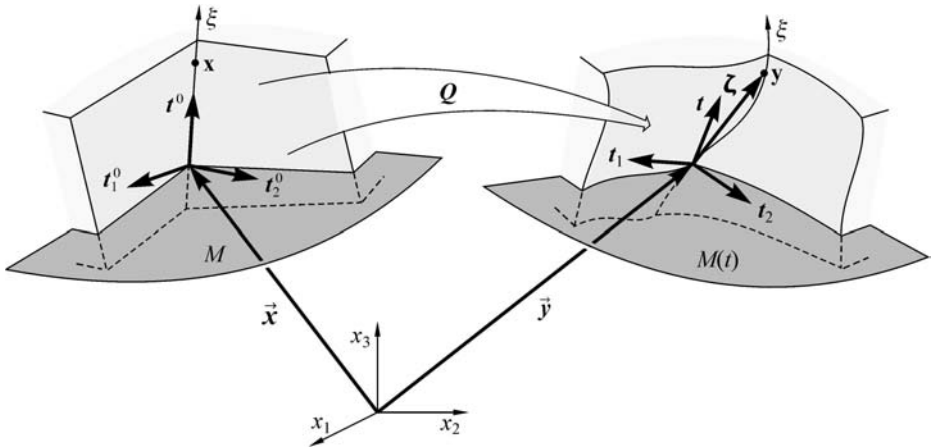
Jeśli wektor wodzący w konfiguracji odniesienia powłoki B można przyjąć jako (podrozdział 1.8)

$$\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \xi) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \xi \mathbf{t}_0(\mathbf{x}), \quad (2.5.8)$$

to również wektor $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \xi, t)$ wygodnie jest przedstawiać jako

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, \xi, t) = \xi \mathbf{t}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t), \quad (2.5.9)$$

gdzie $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t)$ nazywać będziemy *wektorem odkształcenia wewnętrznego*. Zauważmy, że $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ w konfiguracji odniesienia powłoki.



Rys. 2.5.1. Formalna reprezentacja trójwymiarowej deformacji powłoki.

Spośród wprowadzonych tutaj trzech trójwymiarowych wektorów $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t)$, $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \xi, t)$ i $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t)$ tylko jeden jest wielkością niezależną, ale wszystkie pełnią w dalszych rozważaniach różne pożyteczne role pomocnicze.

Wykorzystując (2.5.7) i (2.5.9), pole przesunięć powłoki jako ciała trójwymiarowego

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \xi, t) = \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) - \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \xi) \quad (2.5.10)$$

można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \xi, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \xi t_0(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{z}(\mathbf{x}, \xi, t) \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \xi\{\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{1}\}t_0(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t). \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Pierwsze dwa człony (2.5.11) określają energetycznie uśrednioną *liniową* część rozkładu $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \xi, t)$ po grubości powłoki. Oba człony są całkowicie wyznaczone przez pola powierzchniowe $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$, wynikające z rozwiązania zagadnienia dwuwymiarowego. Dopiero trzeci człon $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t)$ określa *odchyłkę* nieznanego trójwymiarowego rozkładu $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \xi, t)$ od powyższego rozkładu liniowego.

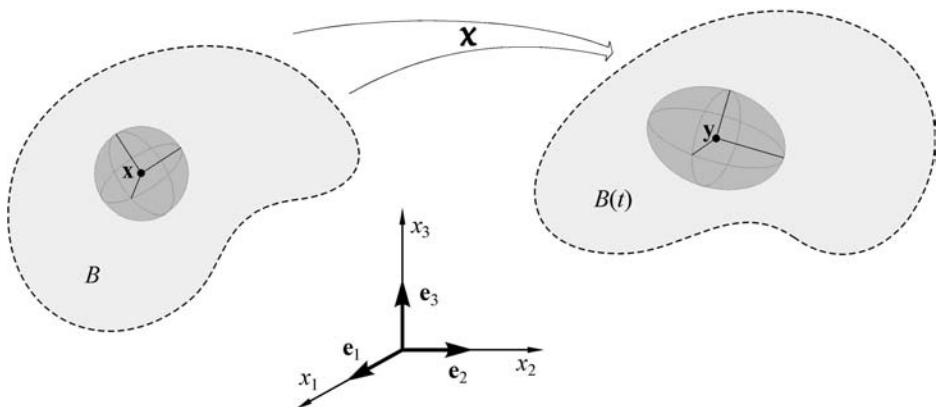
2.5.4. Lokalna deformacja ciała trójwymiarowego

W opisie względem konfiguracji odniesienia B , odwzorowanie $\boldsymbol{\chi}(\cdot, t): B \rightarrow B(t)$ opisuje deformację globalną ciała. Przestrzenny gradient deformacji $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)$, $\det \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) > 0$, aproksymuje to odwzorowanie w otoczeniu każdego punktu \mathbf{x} z dokładnością do pierwszego przybliżenia.

Stosując do $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ rozkład biegunowy, otrzymamy

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)\mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad (2.5.12)$$

gdzie $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ jest tensorem właściwego obrotu, $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, $\det \mathbf{R} = +1$, a $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ jest prawym tensorem rozciągnięcia, symetrycznym, $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$, i dodatnio określonym, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}\mathbf{v} > 0$, dla każdego $\mathbf{v} \in E$. Tensor $\mathbf{U} - \mathbf{1}$ jest więc miarą tego, na ile lokalne rozciągnięcie różni się od sztywnego obrotu ciała. Interpretację geometryczną lokalnej deformacji ciała trójwymiarowego przedstawia rys. 2.5.2.



Rys. 2.5.2. Lokalna deformacja ciała trójwymiarowego.

W terminach normy operatorowej⁶

$$|\mathbf{F} - \mathbf{R}| = |\mathbf{R}(\mathbf{U} - \mathbf{1})| = |\mathbf{U} - \mathbf{1}|. \quad (2.5.13)$$

Wartości własne tensora \mathbf{U} określają rozciągnięcia włókien ciała wzdłuż głównych kierunków odkształcenia.

Jeśli ruch ciała względem konfiguracji odniesienia jest opisany przez pole przesuńnięć $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, to obliczając przestrzenny gradient z (2.5.10) mamy

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (2.5.14)$$

Z rozkładu biegunowego (2.5.12) i z (2.5.14) wynika, że tensor $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ jest funkcją niewymierną przestrzennego gradientu pola przesuńnięć. Dlatego to prawy tensor odkształcenia Cauchy–Greena $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$, zdefiniowany jako

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}, \quad (2.5.15)$$

jest najczęściej przyjmowany jako podstawowa miara lokalnego odkształcenia ciała trójwymiarowego.

2.5.5. Lokalna deformacja ciała typu powłoka

Jak wynika z wcześniejszych rozważań (podrozdział 1.7), lokalna deformacja powłoki jest całkowicie określona przez powierzchniowy gradient deformacji powierzchni podstawowej $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \chi(\mathbf{x}, t)$, tensor struktury $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ i jego powierzchniowy gradient $\nabla \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$. Problem lokalnej deformacji sprowadza się więc do znalezienia relacji między tymi wielkościami a trójwymiarowym gradientem deformacji $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$.

W układzie współrzędnych przestrzennych $\{\xi^i\}$, takich że $\xi^3 \equiv \xi = 0$ określa powierzchnię podstawową $M \in B$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ można zapisać jako

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbf{y}}_{,i}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{g}^i(\mathbf{x}). \quad (2.5.16)$$

Wykorzystując formalną reprezentację (2.5.5) i (2.5.7), dla pochodnych cząstkowych $\vec{\mathbf{y}}_{,i}$ otrzymamy zależności

$$\vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} = \vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} + \boldsymbol{\zeta}_{,\alpha} = \vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} + \mathbf{Q}_{,\alpha} \mathbf{z} + \mathbf{Q} \mathbf{z}_{,\alpha}, \quad \vec{\mathbf{y}}_{,\xi} = \boldsymbol{\zeta}_{,\xi} = \mathbf{Q} \mathbf{z}_{,\xi}. \quad (2.5.17)$$

Biorąc teraz pod uwagę, że

$$\vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} = \vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} + \mathbf{Q}_{,\alpha} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{Q} \mathbf{z}_{,\alpha} \quad (2.5.18)$$

⁶ Normę operatorową tensora \mathbf{A} definiujemy jako $|\mathbf{A}| = \sup(\|\mathbf{A}\mathbf{u}\|/\|\mathbf{u}\|)$ dla wszystkich wektorów $\mathbf{u} \in E$. Dla tensora symetrycznego $|\mathbf{A}|$ jest równa maksymalnej głównej wartości \mathbf{A} . Dla tensora niesymetrycznego $|\mathbf{A}|^2$ jest równy maksymalnej głównej wartości $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Normy operatorowej $|\cdot|$ nie należy mylić z normą euklidesową, oznaczaną przez $\|\cdot\|$. Obie normy są równoważne w sensie matematycznym, przy czym $|\mathbf{1}| = 1$, podczas gdy $\|\mathbf{1}\| = \sqrt{3}$. Przypomnijmy, że dla dowolnego tensora $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$.

oraz wykorzystując definicje powłokowych miar deformacji

$$\vec{y}_{,\alpha} = \mathbf{F}\mathbf{a}_\alpha, \quad \mathbf{K}_\alpha = \mathbf{Q}_{,\alpha}\mathbf{Q}^\mathbf{T} = \text{ad } \boldsymbol{\kappa}_\alpha, \quad (2.5.19)$$

otrzymamy

$$\vec{y}_{,\alpha} = \mathbf{F}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{Q}\mathbf{z}_{,\alpha} = \mathbf{F}\mathbf{a}_\alpha + \boldsymbol{\kappa}_\alpha \times \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{Q}\mathbf{z}_{,\alpha}. \quad (2.5.20)$$

Podstawiając (2.5.20) i (2.5.17)₂ do (2.5.16), trójwymiarowy gradient deformacji możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha\boldsymbol{\zeta}) \otimes \mathbf{g}^\alpha + \mathbf{Q}(\mathbf{z}_{,i} \otimes \mathbf{g}^i). \quad (2.5.21)$$

W analizie lokalnej deformacji bardziej użyteczne jest wyrażenie gradientu \mathbf{F} przez powłokowe miary deformacji w reprezentacji materialnej. Wprowadźmy pola zgodne z (1.7.57) i (1.7.84) dane przez

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha = \mathbf{Q}^\mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{a}_\alpha, \quad \mathbf{K}_\alpha = \mathbf{Q}^\mathbf{T}\mathbf{K}_\alpha\mathbf{Q}, \quad \boldsymbol{\kappa}_\alpha = \mathbf{Q}^\mathbf{T}\boldsymbol{\kappa}_\alpha, \quad (2.5.22)$$

poprzez które pochodne cząstkowe (2.5.20) zapiszemy jako

$$\vec{y}_{,\alpha} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha\mathbf{z} + \mathbf{z}_{,\alpha}), \quad \vec{y}_{,\xi} = \mathbf{Q}\mathbf{z}_{,\xi}. \quad (2.5.23)$$

Wprowadźmy trzy trójwymiarowe wektory $\boldsymbol{\lambda}_j(\mathbf{x}, \xi, t)$

$$\boldsymbol{\lambda}_\alpha \equiv \boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha\mathbf{z} + \mathbf{z}_{,\alpha} = \boldsymbol{\eta}_\alpha + \boldsymbol{\kappa}_\alpha \times \mathbf{z} + \mathbf{z}_{,\alpha}, \quad \boldsymbol{\lambda}_3 \equiv \mathbf{z}_{,\xi}, \quad (2.5.24)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I}_0\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (2.5.25)$$

Wówczas pochodne cząstkowe wektora wodzącego (2.5.17) można przedstawić w postaci

$$\vec{y}_{,i}(\mathbf{x}, \xi, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\lambda}_i(\mathbf{x}, \xi, t). \quad (2.5.26)$$

Dla wektora wodzącego w konfiguracji odniesienia (2.5.8), wektory bazy naturalnej \mathbf{g}_i dane są wzorami

$$\mathbf{g}_\alpha = \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha} = \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha} + \xi\mathbf{t}_{0,\alpha}, \quad \mathbf{g}_3 = \vec{\mathbf{x}}_{,\xi} = \mathbf{t}_0. \quad (2.5.27)$$

Różniczkując (2.5.9)

$$\mathbf{z}_{,\alpha} = \xi\mathbf{t}_{0,\alpha} + \mathbf{e}_{,\alpha} = \mathbf{g}_\alpha - \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha} + \mathbf{e}_{,\alpha}, \quad \mathbf{z}_{,\xi} = \mathbf{t}_0 + \mathbf{e}_{,\xi} = \mathbf{g}_3 + \mathbf{e}_{,\xi}. \quad (2.5.28)$$

i podstawiając to do (2.5.24) otrzymamy

$$\boldsymbol{\lambda}_i(\mathbf{x}, \xi, t) = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, \xi, t) + \boldsymbol{\theta}_i(\mathbf{x}, \xi, t), \quad (2.5.29)$$

gdzie trójwymiarowe wektory $\boldsymbol{\theta}_i(\mathbf{x}, \xi, t)$ są zdefiniowane następująco:

$$\boldsymbol{\theta}_\alpha \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha(\xi t_0 + \mathbf{e}) + \mathbf{e}_{,\alpha}, \quad \boldsymbol{\theta}_3 \equiv \mathbf{e}_{,\xi}. \quad (2.5.30)$$

Na podstawie (2.5.26) i (2.5.29) pochodne cząstkowe $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t)$ można zapisać w postaci

$$\vec{\mathbf{y}}_{,i} = Q\boldsymbol{\lambda}_i = Q(\mathbf{g}_i + \boldsymbol{\theta}_i). \quad (2.5.31)$$

Wstawiając (2.5.31) do (2.5.16) mamy

$$\mathbf{F} = (Q\boldsymbol{\lambda}_j) \otimes \mathbf{g}^j = Q(\boldsymbol{\lambda}_j \otimes \mathbf{g}^j) = Q\{(\mathbf{g}_j + \boldsymbol{\theta}_j) \otimes \mathbf{g}^j\}. \quad (2.5.32)$$

Wprowadźmy tensory

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}, \xi, t) &= \boldsymbol{\lambda}_j(\mathbf{x}, \xi, t) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}, \xi), \\ \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}, \xi, t) &= \boldsymbol{\theta}_j(\mathbf{x}, \xi, t) \otimes \mathbf{g}^j(\mathbf{x}, \xi). \end{aligned} \quad (2.5.33)$$

Mając na uwadze, że $\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^j = \mathbf{1}$, ostatecznie otrzymujemy

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \xi, t) = Q(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}, \xi, t), \quad \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}, \xi, t) = \mathbf{1} + \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}, \xi, t), \quad (2.5.34)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha \mathbf{z}) \otimes \mathbf{g}^\alpha + \nabla \mathbf{z}, \quad (2.5.35)$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha(\xi t_0 + \mathbf{e})\} \otimes \mathbf{g}^\alpha + \nabla \mathbf{e}, \quad \nabla \mathbf{e} = \mathbf{e}_{,\alpha} \otimes \mathbf{g}^\alpha + \mathbf{e}_{,\xi} \otimes \mathbf{g}^3. \quad (2.5.36)$$

Porównując (2.5.34) i (2.5.12), otrzymujemy dwa różne rozkłady biegunowe trójwymiarowego gradientu deformacji

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \xi, t) = \mathbf{R}(\mathbf{x}, \xi, t)\mathbf{U}(\mathbf{x}, \xi, t) = Q(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}, \xi, t). \quad (2.5.37)$$

Ponieważ \mathbf{R} i Q są tensorami obrotu, więc $\det \mathbf{R} = \det Q = +1$, a stąd i

$$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \det \boldsymbol{\Lambda} > 0, \quad (2.5.38)$$

co dowodzi, że $\boldsymbol{\Lambda}$ jest tensorem nieosobliwym. W przeciwieństwie jednak do \mathbf{U} , tensor $\boldsymbol{\Lambda}$ w ogólnym przypadku nie jest tensorem symetrycznym.

Wykorzystując rozkład biegunowy (2.5.12), mamy

$$|\mathbf{F} - \mathbf{R}| = |Q\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{R}| = |Q(\boldsymbol{\Lambda} - Q^T \mathbf{R})| = |\boldsymbol{\Lambda} - Q^T \mathbf{R}|. \quad (2.5.39)$$

Ta zależność wskazuje, że tensor obrotu

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \xi, t) \equiv Q^T(\mathbf{x}, t)\mathbf{R}(\mathbf{x}, \xi, t) \quad (2.5.40)$$

jest, obok tensora $\boldsymbol{\Lambda}$, istotną wielkością w analizie lokalnej deformacji w przestrzeni powłoki. Z (2.5.40) otrzymamy

$$\mathbf{R} = Q\boldsymbol{\Phi}, \quad \mathbf{U} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Phi}^T (\mathbf{1} + \boldsymbol{\Theta}). \quad (2.5.41)$$

Z (2.5.39) wynika natomiast, że

$$|\mathbf{U} - \mathbf{1}| = |\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Phi}| = |\mathbf{1} + \mathbf{\Theta} - \mathbf{\Phi}|. \quad (2.5.42)$$

Podstawiając (2.5.37) i (2.5.34)₂ do (2.5.15), tensor odkształcenia Cauchy–Greena \mathbf{C} możemy teraz wyrazić przez tensory $\mathbf{\Lambda}$ lub $\mathbf{\Theta}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} = \mathbf{1} + \mathbf{\Theta} + \mathbf{\Theta}^T + \mathbf{\Theta}^T \mathbf{\Theta}. \quad (2.5.43)$$

Wartość trójwymiarowego gradientu deformacji $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \xi, t)$, obliczona na powierzchni podstawowej M , tj. dla $\xi = 0$, przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t) &\equiv \mathbf{F}(\mathbf{x}, 0, t) = \mathbf{R}_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{U}_0(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{\Lambda}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) (\mathbf{1} + \mathbf{\Theta}_0(\mathbf{x}, t)), \end{aligned} \quad (2.5.44)$$

co wynika wprost z (2.5.37) i (2.5.34)₂. Tutaj $\mathbf{R}_0(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{R}(\mathbf{x}, 0, t)$, etc. Ponadto, z (2.5.36) i (2.5.25) mamy

$$\mathbf{\Theta}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \otimes \mathbf{I}_0 \mathbf{a}^\alpha + (\nabla \mathbf{e})_0 = (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha) \mathbf{P}_0 + (\nabla \mathbf{e})_0. \quad (2.5.45)$$

Uwzględniając następnie, że $\mathbf{e}(\mathbf{x}, 0, t) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha$ otrzymamy

$$\mathbf{\Theta}_0 = \mathbf{E} \mathbf{P}_0 + (\nabla \mathbf{e})_0, \quad (\nabla \mathbf{e})_0 = (\mathbf{e}, \boldsymbol{\xi})_0 \otimes \mathbf{t}_0. \quad (2.5.46)$$

Powyższe zależności dowodzą, że tensora obrotu $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ nie należy utożsamiać z tensorem obrotu $\mathbf{R}_0(\mathbf{x}, t)$, wynikającym z rozkładu biegunowego trójwymiarowego gradientu deformacji \mathbf{F} na powierzchni podstawowej powłoki. Przypomnijmy, że tensor $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ został wprowadzony w wyniku rozważań energetycznych, natomiast tensor $\mathbf{R}_0(\mathbf{x}, t)$ jest wynikiem rozważań czysto geometrycznych.

2.5.6. Wyrażenia na gęstości pędu i momentu pędu

Wykorzystując wyniki powyższych rozważań, obecnie wyprowadzimy wyrażenia na gęstości pędu i momentu pędu w reprezentacji materialnej.

Wektor prędkości dowolnego punktu materialnego powłoki jest określony przez

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \xi, t) \equiv \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \dot{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{x}, \xi, t), \quad (2.5.47)$$

gdzie $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ jest wektorem prędkości powierzchni podstawowej powłoki.

Podstawiając (2.5.47) do definicji (1.8.23)₁ i (1.8.24), wyrażenia na gęstości pędu i momentu pędu w reprezentacji przestrzennej przyjmują postać

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \left(\int_{-}^{+} \rho_0 \boldsymbol{\mu} \, d\xi \right) \mathbf{v} + \int_{-}^{+} \rho_0 \dot{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{\mu} \, d\xi, \\ \mathbf{s} &= \left(\int_{-}^{+} \rho_0 \dot{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{\mu} \, d\xi \right) \times \mathbf{v} + \int_{-}^{+} \rho_0 \boldsymbol{\zeta} \times \dot{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{\mu} \, d\xi. \end{aligned} \quad (2.5.48)$$

Ponieważ

$$\int_{-}^{+} \rho_0 \dot{\boldsymbol{\zeta}} \mu \, d\xi = \frac{d}{dt} \int_{-}^{+} \rho_0 \boldsymbol{\zeta} \mu \, d\xi, \quad (2.5.49)$$

możemy wprowadzić wielkości $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ i $I_0(\mathbf{x})$ zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} m_0 \boldsymbol{\eta} &\equiv \int_{-}^{+} \rho_0 \boldsymbol{\zeta} \mu \, d\xi, & m_0 I_0 \boldsymbol{\mu} &\equiv \int_{-}^{+} \rho_0 \boldsymbol{\zeta} \times \dot{\boldsymbol{\zeta}} \mu \, d\xi, \\ m_0 I_0 &\equiv \int_{-}^{+} \rho_0 \xi^2 \mu \, d\xi, \end{aligned} \quad (2.5.50)$$

przy pomocy których otrzymujemy

$$\mathbf{p} = m_0(\mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\eta}}), \quad \mathbf{s} = m_0(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{v} + I_0 \boldsymbol{\mu}). \quad (2.5.51)$$

Wyrażenia (2.5.51) na $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$, obok wektora prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i wielkości wektorowej $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$, zawierają wektor $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, t)$, a nie wektor prędkości obrotowej $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ występujący w teorii powłok.

Obliczając pochodną (2.5.6) względem czasu, otrzymujemy

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \dot{Q} \mathbf{z} + Q \dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Omega} Q \mathbf{z} + Q \dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\zeta} + Q \dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\zeta} + Q \dot{\mathbf{z}}. \quad (2.5.52)$$

Podstawiając następnie (2.5.52) do definicji (2.5.50)₂ oraz wykorzystując klasyczną tożsamość wektorową

$$\boldsymbol{\zeta} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\zeta}) = (\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\zeta} = \{(\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \mathbf{1} - \boldsymbol{\zeta} \otimes \boldsymbol{\zeta}\} \boldsymbol{\omega}, \quad (2.5.53)$$

ostatecznie otrzymujemy

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t). \quad (2.5.54)$$

Tutaj tensor bezwładności $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ i pomocniczy wektor $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} m_0 I_0 \mathbf{J} &\equiv \int_{-}^{+} \rho_0 \{(\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \mathbf{1} - \boldsymbol{\zeta} \otimes \boldsymbol{\zeta}\} \mu \, d\xi, \\ m_0 I_0 \mathbf{w} &\equiv Q \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{z} \times \dot{\mathbf{z}} \mu \, d\xi. \end{aligned} \quad (2.5.55)$$

Wyrażenia na przekrojowy pęd i moment pędu przyjmują więc postać

$$\mathbf{p} = m_0(\mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\eta}}), \quad \mathbf{s} = m_0(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{v} + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{w}). \quad (2.5.56)$$

Wyrażenia te mogą być cenna wskazówką przy formułowaniu szczególnych postaci kinetycznych równań konstytutywnych dla \mathbf{p} i \mathbf{s} .

Wykorzystując (2.5.6), pole prędkości (2.5.47) można przedstawić w postaci

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \xi, t) = \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, t)\mathbf{z}(\mathbf{x}, \xi, t) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \xi, t). \quad (2.5.57)$$

Uwzględniając następnie definicje pól prędkości translacyjnej i obrotowej powierzchni podstawowej w reprezentacji materialnej (2.3.24)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t), \quad (2.5.58)$$

wektor prędkości (2.5.57) można zapisać w postaci

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{z} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^T\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}). \quad (2.5.59)$$

Wykorzystując teraz wyrażenie (2.5.59) oraz definicje powierzchniowych gęstości pędu i momentu pędu w reprezentacji przestrzennej (podrozdział 1.8), ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{v} \mu \, d\xi = \mathbf{Q} \int_{-}^{+} \rho_0 (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}) \mu \, d\xi, \\ \mathbf{s} &= \int_{-}^{+} \boldsymbol{\zeta} \times \rho_0 \mathbf{v} \mu \, d\xi = \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{Q}\mathbf{z} \times \mathbf{Q}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}) \mu \, d\xi \\ &= \mathbf{Q} \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{z} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}) \mu \, d\xi. \end{aligned} \quad (2.5.60)$$

Z (2.5.60) wynika więc, że gęstości pędu $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ i momentu pędu $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ w reprezentacji materialnej wyrażają się przez wielkości trójwymiarowe następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{p} = \left(\int_{-}^{+} \rho_0 \mu \, d\xi \right) \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \left(\int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{z} \mu \, d\xi \right) + \frac{d}{dt} \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{z} \mu \, d\xi, \\ \mathbf{s} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{s} = \left(\int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{z} \mu \, d\xi \right) \times \mathbf{v} + \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{z} \times \boldsymbol{\Omega}\mathbf{z} \mu \, d\xi + \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{z} \times \dot{\mathbf{z}} \mu \, d\xi. \end{aligned} \quad (2.5.61)$$

Uwzględniając tożsamość wektorową

$$\mathbf{z} \times \boldsymbol{\Omega}\mathbf{z} = \mathbf{z} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}) = \{(\mathbf{z} \cdot \mathbf{z})\mathbf{1} - \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}\}\boldsymbol{\omega} \quad (2.5.62)$$

oraz przypominając definicje (1.3.7) i (1.8.22)₁ sprowadzonej gęstości masy m_0 , wyrażenia (2.5.61) możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{p} = m_0(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\eta} + \dot{\boldsymbol{\eta}}), \quad \mathbf{s} = m_0(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{v} + \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{w}). \quad (2.5.63)$$

W (2.5.63), $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ jest symetrycznym tensorem zdefiniowanym zależnością

$$m_0 \mathbf{J} = \int_{\bar{}}^+ \rho_0 \{(\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}) \mathbf{1} - \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}\} \mu \, d\xi, \quad (2.5.64)$$

natomiast wektory $\boldsymbol{\eta}$ i \mathbf{w} są określone jako

$$m_0 \boldsymbol{\eta} = \int_{\bar{}}^+ \rho_0 \mathbf{z} \mu \, d\xi, \quad m_0 \mathbf{w} = \int_{\bar{}}^+ \rho_0 \mathbf{z} \times \dot{\mathbf{z}} \mu \, d\xi. \quad (2.5.65)$$

Porównując wyrażenia (2.5.63) i (2.5.56) łatwo zauważyć, że

$$\mathbf{J} = \mathbf{Q} \mathbf{J} \mathbf{Q}^T, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{Q} \mathbf{w} + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.5.66)$$

2.5.7. Przekrojowe siły i momenty w reprezentacji materialnej

Wektor naprężeń $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t)$ w dowolnym punkcie $\mathbf{x} \in \partial P'$ powierzchni bocznej podobszaru P można wyrazić przez pierwszy $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ lub drugi $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ tensory naprężeń Pioli–Kirchhoffa

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.5.67)$$

gdzie $\mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Wykorzystując następnie formalną reprezentację (2.5.7) i wynikający z niej rozkład (2.5.37) przestrzennego gradientu deformacji $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, wektor naprężeń $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t)$ można zapisać w postaci

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{F} \mathbf{s}_n = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{s}_n. \quad (2.5.68)$$

Podstawiając (2.5.68) i (2.5.7) do wyrażen (1.8.28) na przekrojowe wektory sił i momentów, mamy

$$\begin{aligned} n_\nu &= \int_{\bar{}}^+ \mathbf{F} \mathbf{s}_n \mu^* \, d\xi = \int_{\bar{}}^+ \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{s}_n \mu^* \, d\xi = \mathbf{Q} \int_{\bar{}}^+ \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{s}_n \mu^* \, d\xi, \\ m_\nu &= \int_{\bar{}}^+ \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{F} \mathbf{s}_n \mu^* \, d\xi = \int_{\bar{}}^+ \mathbf{Q} \mathbf{z} \times \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{s}_n \mu^* \, d\xi = \mathbf{Q} \int_{\bar{}}^+ \mathbf{z} \times \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{s}_n \mu^* \, d\xi. \end{aligned} \quad (2.5.69)$$

Porównując (2.5.69) z definicjami przekrojowych wektorów sił i momentów w reprezentacji materialnej,

$$n_\nu(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}_\nu(\mathbf{x}, t), \quad m_\nu(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{m}_\nu(\mathbf{x}, t), \quad (2.5.70)$$

otrzymujemy następującą ich postać

$$\mathbf{n}_\nu = \int_{-}^{+} \mathbf{\Lambda} \mathbf{s}_n \mu^* d\xi, \quad \mathbf{m}_\nu = \int_{-}^{+} \mathbf{z} \times \mathbf{\Lambda} \mathbf{s}_n \mu^* d\xi. \quad (2.5.71)$$

Uwzględniając z kolei (2.5.34) i (2.5.9), mamy

$$\mathbf{n}_\nu = \int_{-}^{+} (\mathbf{1} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{s}_n \mu^* d\xi, \quad \mathbf{m}_\nu = \int_{-}^{+} (\xi \mathbf{t}_0 + \mathbf{e}) \times (\mathbf{1} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{s}_n \mu^* d\xi. \quad (2.5.72)$$

W szczególności, wektory przekrojowych sił \mathbf{n}^α i momentów \mathbf{m}^α dane są wzorami

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^\alpha &= \int_{-}^{+} (\mathbf{1} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{s}^\alpha \mu d\xi, \\ \mathbf{m}^\alpha &= \int_{-}^{+} (\xi \mathbf{t}_0 + \mathbf{e}) \times (\mathbf{1} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{s}^\alpha \mu d\xi \\ &= \mathbf{t}_0 \times \left[\int_{-}^{+} \xi (\mathbf{1} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{s}^\alpha \mu d\xi \right] + \int_{-}^{+} \mathbf{e} \times (\mathbf{1} + \mathbf{\Theta}) \mathbf{s}^\alpha \mu d\xi. \end{aligned} \quad (2.5.73)$$

2.6. Przybliżenia w równaniach konstytutywnych

2.6.1. Całkowita energia mechaniczna ciała typu powłoka

W mechanice ośrodków ciągłych całkowita energia $\mathfrak{U}(\mathcal{P}, t)$ dowolnej części ciała jest sumą energii wewnętrznej $\mathfrak{E}(\mathcal{P}, t)$ i energii kinetycznej $\mathfrak{K}(\mathcal{P}, t)$.

Pojęcie energii kinetycznej jest ściśle związane z pojęciem pędu $\mathfrak{P}(\mathcal{P}, t)$, którego gęstość jest definiowana jako iloczyn gęstości masy i prędkości. Gęstość energii kinetycznej określona jest wzorem $\frac{1}{2} \rho \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$, a *energia kinetyczna* dowolnej części ciała wynosi

$$\mathfrak{K}(\mathcal{P}, t) = \frac{1}{2} \iiint_P \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dv = \frac{1}{2} \iiint_P \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv. \quad (2.6.1)$$

Energia kinetyczna ciała trójwymiarowego jest więc określona całkowicie przez wielkości mechaniczne i tym samym należy do pojęć mechaniki, mimo że pojawia się w sposób jawny dopiero w ramach termodynamiki (patrz RYMARZ [1993]).

Innym czysto mechanicznym pojęciem, lecz pojawiającym się również dopiero w termodynamice, jest moc mechaniczna, którą określa się jako moc wszystkich

sił działających na ciało. W klasycznych teoriach ośrodków ciągłych *moc mechaniczna* $\mathfrak{P}(\mathcal{P}, t)$ dowolnej części ciała ma postać

$$\mathfrak{P}(\mathcal{P}, t) = \iiint_P \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dv + \iint_{\partial P \setminus \partial B_f} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} \, da^* + \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{v} \, da^*, \quad (2.6.2)$$

a wyrażenie

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{P}(\mathcal{P}, t) \, dt \quad (2.6.3)$$

określa *całkowaną pracę* wykonaną przez siły działające na dowolną część ciała podczas jego ruchu w przedziale czasu $[t_1, t_2]$. $\mathfrak{P}(\mathcal{P}, t)$ ma więc sens gęstości pracy mechanicznej na jednostkę czasu.

Całkowita moc mechaniczna $\mathfrak{W}(\mathcal{P}, t)$ jest określona jako

$$\mathfrak{W}(\mathcal{P}, t) \equiv \mathfrak{P}(\mathcal{P}, t) - \dot{\mathfrak{K}}(\mathcal{P}, t). \quad (2.6.4)$$

Przy spełnieniu zasad mechaniki ośrodka ciągłego $\mathfrak{W}(\mathcal{P}, t)$ można wyrazić w postaci

$$\mathfrak{W}(\mathcal{P}, t) = \iiint_P \Sigma(\mathbf{x}, t) \, dv, \quad (2.6.5)$$

gdzie pole skalarne

$$\Sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6.6)$$

jest *gęstością mocy naprężeń*.

W nieliniowej mechanice powłok powierzchniowej energii całkowitej nie da się na ogół przedstawić w postaci sumy powierzchniowych energii wewnętrznej i kinetycznej. W istocie, nawet samo istnienie powierzchniowej energii kinetycznej nie jest oczywiste. Z ogólnej analizy przedstawionej w podrozdziale 1.7 wynika jedynie, że w mechanice powłok powierzchniowa gęstość *efektywnej mocy naprężeń* $\sigma(\mathbf{x}, t)$ dana jest przez następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}^\circ(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{K}^\circ(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Jeśli jednak zdefiniujemy przekrojową gęstość mocy naprężeń $\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ jako całkę po grubości powłoki z trójwymiarowej gęstości mocy naprężeń (2.6.6),

$$\iint_{\Pi} \tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) \, da = \iiint_P \Sigma(\mathbf{x}, t) \, dv, \quad (2.6.8)$$

to w ogólnym przypadku możemy jedynie napisać

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \sigma(\mathbf{x}, t) + r(\mathbf{x}, t), \quad (2.6.9)$$

gdzie $\sigma(\mathbf{x}, t)$ jest efektywną mocą naprężeń (2.6.7), natomiast $r(\mathbf{x}, t)$ jest miarą przybliżenia trójwymiarowej mocy naprężeń (2.6.6) przez efektywną moc naprężeń.

2.6.2. Efektywna moc naprężeń

Wykorzystując wyniki rozważań z poprzedniego podrozdziału, wyprowadzimy obecnie wyrażenia na $\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ i $r(\mathbf{x}, t)$.

Z dekompozycji $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}$ i zależności $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Omega}$ wynika, że pochodną $\dot{\mathbf{F}}$ względem czasu możemy zapisać z uwzględnieniem (1.6.25) w postaci

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{\Lambda}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{\Lambda}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Lambda}). \quad (2.6.10)$$

Uwzględniając następnie związek $\mathbf{T} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ pomiędzy pierwszym i drugim tensorem naprężeń Pioli–Kirchhoffa oraz podstawiając (2.6.10) do (2.6.6), mamy

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{\Lambda}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S} \cdot \{\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{\Lambda}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Lambda})\} \\ &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{\Lambda}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}^T \cdot \mathbf{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Na mocy zasady zachowania momentu pędu, tensor \mathbf{S} jest tensorem symetrycznym. Wobec tego

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}^T \cdot \mathbf{\Omega} = \mathbf{0}, \quad (2.6.12)$$

ponieważ $\mathbf{\Omega}$ jest tensorem skośnie symetrycznym. Wtedy wyrażenie (2.6.11) upraszcza się do postaci

$$\Sigma = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{\Lambda}} = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot (\mathbf{\Lambda}^T\dot{\mathbf{\Theta}} + \dot{\mathbf{\Theta}}^T\mathbf{\Lambda}), \quad (2.6.13)$$

gdzie uwzględniliśmy, że $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{1} + \mathbf{\Theta}$ i $\dot{\mathbf{\Lambda}} = \dot{\mathbf{\Theta}}$.

Przyjmijmy teraz, że konfiguracja odniesienia powłoki jako ciała trójwymiarowego jest opisana wektorem wodzącym $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \xi)$, danym przez (2.5.8). Wtedy tensor naprężeń \mathbf{S} i tensor deformacji $\mathbf{\Theta}$ możemy przedstawić jako

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^i \otimes \mathbf{g}_i = \mathbf{s}^\alpha \otimes \mathbf{g}_\alpha + \mathbf{s}^3 \otimes \mathbf{g}_3, \quad \mathbf{\Theta} = \boldsymbol{\theta}_i \otimes \mathbf{g}^i = \boldsymbol{\theta}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\alpha + \boldsymbol{\theta}_3 \otimes \mathbf{g}^3. \quad (2.6.14)$$

Wówczas wyrażenie (2.6.13) na moc mechaniczną powłoki jako ciała trójwymiarowego otrzymujemy w postaci

$$\Sigma = \mathbf{\Lambda}\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{\Theta}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{s}^j \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_j = \mathbf{\Lambda}\mathbf{s}^\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\alpha + \mathbf{\Lambda}\mathbf{s}^3 \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_3, \quad (2.6.15)$$

gdzie

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_\alpha = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\alpha + \dot{\mathbf{k}}_\alpha \times \mathbf{z} + \mathbf{k}_\alpha \times \dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{z}}_{,\alpha}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_3 = \dot{\mathbf{z}}_{,\xi}. \quad (2.6.16)$$

Podstawiając teraz (2.6.16) do (2.6.15) otrzymamy

$$\begin{aligned}\Sigma &= \Lambda \mathbf{s}^\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\alpha + (\mathbf{z} \times \Lambda \mathbf{s}^\alpha) \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha + (\dot{\mathbf{z}} \times \Lambda \mathbf{s}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\kappa}_\alpha + \Lambda \mathbf{s}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{z}}_{,\alpha} + \Lambda \mathbf{s}^3 \cdot \dot{\mathbf{z}}_{,\xi} \\ &= \Lambda \mathbf{s}^\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\alpha + (\mathbf{z} \times \Lambda \mathbf{s}^\alpha) \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha + (\dot{\mathbf{z}} \times \Lambda \mathbf{s}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\kappa}_\alpha + \Lambda \mathbf{S} \cdot \nabla \dot{\mathbf{z}}.\end{aligned}\quad (2.6.17)$$

Uwzględniliśmy tutaj, że

$$\Lambda \mathbf{s}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{z}}_{,\alpha} + \Lambda \mathbf{s}^3 \cdot \dot{\mathbf{z}}_{,\xi} = \Lambda \mathbf{S} \cdot \nabla \dot{\mathbf{z}}. \quad (2.6.18)$$

Całkując wyrażenie (2.6.17) po grubości powłoki oraz uwzględniając definicje przekrojowych sił i momentów w reprezentacji materialnej, ostatecznie otrzymujemy

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{n}^\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\alpha + \mathbf{m}^\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha + \left(\int_{-}^{+} \dot{\mathbf{z}} \times \Lambda \mathbf{s}^\alpha \mu \, d\xi \right) \cdot \boldsymbol{\kappa}_\alpha + \int_{-}^{+} \Lambda \mathbf{S} \cdot \nabla \dot{\mathbf{z}} \mu \, d\xi. \quad (2.6.19)$$

Porównując (2.6.19) z (2.6.9) oraz uwzględniając (2.6.7), otrzymujemy więc

$$r = \left(\int_{-}^{+} \dot{\mathbf{z}} \times \Lambda \mathbf{s}^\alpha \mu \, d\xi \right) \cdot \boldsymbol{\kappa}_\alpha + \int_{-}^{+} \Lambda \mathbf{S} \cdot \nabla \dot{\mathbf{z}} \mu \, d\xi. \quad (2.6.20)$$

2.6.3. Powłoki hipersprężyste

Rozważmy bardziej szczegółowo przypadek powłok wykonanych z materiału hipersprężystego, którego własności mechaniczne są opisane przez trójwymiarową gęstość energii sprężystej $W = W(\mathbf{F}; \mathbf{x})$. W tym szczególnym przypadku gęstość mocy mechanicznej jest równa pochodnej względem czasu z energii sprężystej (patrz RYMARZ [1993])

$$\Sigma(\mathbf{x}, t) = \dot{W}(\mathbf{F}; \mathbf{x}). \quad (2.6.21)$$

Z (2.6.21) i (2.6.6) mamy wówczas

$$(\mathbf{T} - \partial_{\mathbf{F}} W) \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}, \quad (2.6.22)$$

skąd otrzymujemy znane równanie konstytutywne $\mathbf{T} = \partial_{\mathbf{F}} W(\mathbf{F}; \mathbf{x})$ dla materiału hipersprężystego (2.1.16)₁.

Obliczając całkę po grubości powłoki z (2.6.21) i uwzględniając (2.6.9), mamy

$$\sigma + r - \frac{d}{dt} \int_{-}^{+} W \mu \, d\xi = 0. \quad (2.6.23)$$

Definiując przekrojową gęstość $\Phi(\mathbf{x}, t)$ energii sprężystej

$$\Phi \equiv \int_{-}^{+} W(\mathbf{F}; \mathbf{x}) \mu \, d\xi, \quad (2.6.24)$$

z (2.6.23) i (2.6.7) otrzymamy

$$\sigma + r - \dot{\Phi} = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{K}} - \dot{\Phi} + r = 0. \quad (2.6.25)$$

Wykorzystajmy teraz zależność $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}(\mathbf{1} + \mathbf{\Theta})$ pomiędzy gradientem deformacji \mathbf{F} oraz tensorami $\mathbf{\Lambda}$ i $\mathbf{\Theta}$. Wówczas gęstość energii sprężystej $W = W(\mathbf{F}; \mathbf{x})$ możemy zapisać w postaci

$$W(\mathbf{F}; \mathbf{x}) = W(\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}; \mathbf{x}) = W(\mathbf{Q}(\mathbf{1} + \mathbf{\Theta}); \mathbf{x}). \quad (2.6.26)$$

Zasada obiektywności materiałowej wymaga jednak, aby gęstość energii sprężystej była niezmiennicza względem obrotów. Ponieważ $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ jest tensorem obrotu, z (2.6.26) wynika, że

$$W(\mathbf{F}; \mathbf{x}) = \bar{W}(\mathbf{\Lambda}; \mathbf{x}) = \bar{W}(\mathbf{1} + \mathbf{\Theta}; \mathbf{x}). \quad (2.6.27)$$

Wobec tego, definicja (2.6.24) przyjmuje postać

$$\Phi = \int_{-}^{+} \bar{W}(\mathbf{\Lambda}; \mathbf{x}) \mu \, d\xi = \int_{-}^{+} \bar{W}(\mathbf{1} + \mathbf{\Theta}; \mathbf{x}) \mu \, d\xi. \quad (2.6.28)$$

W (2.5.36) wyrażono tensor $\mathbf{\Theta}(\mathbf{x}, \xi, t)$ przez powłokowe miary odkształceń $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$, wektor odkształcenia wewnętrznego $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t)$ i jego przestrzenny gradient. Możemy więc przyjąć, że gęstość energii sprężystej (2.6.27) można przedstawić jako sumę dwóch składników

$$\bar{W}(\mathbf{1} + \mathbf{\Theta}; \mathbf{x}) = \bar{W}'(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) + \bar{W}''(\mathbf{E}, \mathbf{K}, \mathbf{e}, \nabla \mathbf{e}; \mathbf{x}), \quad (2.6.29)$$

z których pierwszy zależy wyłącznie od powłokowych miar odkształceń. Wówczas z definicji (2.6.26) i (2.6.29) mamy

$$\Phi = \bar{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) + R, \quad (2.6.30)$$

gdzie

$$\bar{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) \equiv \int_{-}^{+} \bar{W}'(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) \mu \, d\xi, \quad (2.6.31)$$

$$R \equiv \int_{-}^{+} \bar{W}''(\mathbf{E}, \mathbf{K}, \mathbf{e}, \nabla \mathbf{e}; \mathbf{x}) \mu \, d\xi. \quad (2.6.32)$$

Różniczkując teraz (2.6.30) względem czasu i podstawiając wynik do (2.6.25), otrzymamy

$$(\mathbf{N} - \partial_{\mathbf{E}} \bar{\Phi}) \cdot \dot{\mathbf{E}} + (\mathbf{M} - \partial_{\mathbf{K}} \bar{\Phi}) \cdot \dot{\mathbf{K}} + r - \dot{R} = 0. \quad (2.6.33)$$

Równanie (2.6.33), będące konsekwencją zasady zachowania energii dla trójwymiarowego ciała hipersprężystego, musi być spełnione w każdym procesie czysto mechanicznym. Z tego równania otrzymujemy więc następującą postać równań konstytutywnych dla powłok hipersprężystych:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \partial_{\mathbf{E}} \bar{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \int_{-}^{+} \partial_{\mathbf{E}} \bar{W}'(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) \mu \, d\xi, \\ \mathbf{M} &= \partial_{\mathbf{K}} \bar{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \int_{-}^{+} \partial_{\mathbf{K}} \bar{W}'(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) \mu \, d\xi, \end{aligned} \quad (2.6.34)$$

oraz zależność $r - \dot{R} = 0$, która dostarcza pewnych informacji o przybliżonym charakterze powłokowych równań konstytutywnych (2.6.35) w porównaniu do równań konstytutywnych teorii trójwymiarowej.

Mając na uwadze potencjalne możliwości wykorzystania ogólnych zależności (2.6.34) w analizie numerycznej powłok metodą elementów skończonych, wygodnie będzie zapisać te zależności w nieco zmienionej formie. Gęstość energii sprężystej zapiszmy w postaci

$$W = W(\mathbf{F}; \mathbf{x}) = E \tilde{W}(\mathbf{F}; \mathbf{x}), \quad (2.6.35)$$

gdzie $E > 0$ jest pewną stałą materiałową typu modułu sprężystości Younga.

Wprowadzając współrzędną bezwymiarową $\hat{\xi} \in [-1, +1]$ po grubości powłoki, zdefiniowaną przez

$$\xi = \frac{1}{2} h_0 (\hat{\xi} - \hat{\xi}_*), \quad \hat{\xi}_* \in [-1, +1], \quad (2.6.36)$$

wektor wodzący (2.5.8) przyjmuje formę

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \hat{\xi}) = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} h_0 (\hat{\xi} - \hat{\xi}_*) \mathbf{t}_0(\mathbf{x}), \quad \hat{\xi} \in [-1, +1]. \quad (2.6.37)$$

Parametr $\hat{\xi}_*$ określa tu umiejscowienie powierzchni podstawowej M w obszarze B .

Niezmiennik μ , pojawiający się w całce po grubości powłoki, przyjmuje teraz postać

$$\mu(\mathbf{x}, \hat{\xi}) = 1 - 2h_0 H(\hat{\xi} - \hat{\xi}_*) + h_0^2 K(\hat{\xi} - \hat{\xi}_*)^2. \quad (2.6.38)$$

Uwzględniając (2.6.36), powierzchniową gęstość (2.6.24) energii sprężystej zapiszemy teraz jako

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{2} E h_0 \int_{-1}^{+1} \tilde{W}(\mathbf{F}; \mathbf{x}) \mu \, d\hat{\xi}. \quad (2.6.39)$$

Konsekwentnie, wyrażenia (2.6.34) można teraz zapisać w równoważnej postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \partial_{\mathbf{E}} \tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \frac{1}{2} E h_0 \int_{-1}^{+1} \partial_{\mathbf{E}} \tilde{W}'(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) \mu \, d\hat{\xi}, \\ \mathbf{M} &= \partial_{\mathbf{K}} \tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \frac{1}{2} E h_0 \int_{-1}^{+1} \partial_{\mathbf{K}} \tilde{W}'(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) \mu \, d\hat{\xi}. \end{aligned} \quad (2.6.40)$$

2.6.4. Izotropowe powłoki hipersprężyste

Na zakończenie powyższych ogólnych rozważań wyprowadźmy odpowiednie wyrażenia dla izotropowego materiału hipersprężystego.

Punktem wyjścia jest funkcja gęstości energii sprężystej, którą, na mocy zasady obiektywności materiałowej, możemy wyrazić w postaci

$$W(\mathbf{F}; \mathbf{x}) = E \widehat{W}(\mathbf{C}; \mathbf{x}), \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (2.6.41)$$

gdzie $E > 0$ jest ponownie pewną stałą materiałową typu modułu sprężystości.

W przypadku materiału izotropowego, $\widehat{W}(\mathbf{C}; \mathbf{x})$ zależy od \mathbf{C} jedynie poprzez niezmienniki główne tego tensora

$$\widehat{W}(\mathbf{C}; \mathbf{x}) = \widehat{W}(I_1, I_2, I_3; \mathbf{x}), \quad (2.6.42)$$

$$I_1 = \operatorname{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \{(\operatorname{tr} \mathbf{C})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{C}^2\}, \quad I_3 = \det \mathbf{C}. \quad (2.6.43)$$

Wyrażając teraz tensor $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$ według (2.5.43) i (2.5.36) przez wektor $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t)$ i jego gradient, niezmienniki główne (2.6.43) możemy również przedstawić jako sumę dwóch składników

$$I_k = \widehat{I}_k(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) + \widehat{J}_k(\mathbf{E}, \mathbf{K}, \mathbf{e}, \nabla \mathbf{e}; \mathbf{x}), \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.6.44)$$

Wówczas zgodnie z przedstawieniami (2.6.29), (2.6.31) i (2.6.35) mamy

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \frac{1}{2} E h_0 \int_{-1}^{+1} \tilde{W}'(\widehat{I}_k(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}); \mathbf{x}) \mu \, d\hat{\xi}. \quad (2.6.45)$$

Uwzględniając następnie, że

$$\partial_{\mathbf{E}}\tilde{W}' = \sum_{k=1}^3 (\partial_{\mathbf{E}}\widehat{I}_k)(\partial_{I_k}\tilde{W}'), \quad \partial_{\mathbf{K}}\tilde{W}' = \sum_{k=1}^3 (\partial_{\mathbf{K}}\widehat{I}_k)(\partial_{I_k}\tilde{W}'), \quad (2.6.46)$$

równania konstytutywne (2.6.41) powłok wykonanych z izotropowego materiału hipersprężystego redukują się do postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{1}{2}Eh_0 \left\{ \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^{+1} (\partial_{\mathbf{E}}\widehat{I}_k)\tilde{W}'_{k\mu} d\hat{\xi} \right\}, \\ \mathbf{M} &= \frac{1}{2}Eh_0 \left\{ \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^{+1} (\partial_{\mathbf{K}}\widehat{I}_k)\tilde{W}'_{k\mu} d\hat{\xi} \right\}, \end{aligned} \quad (2.6.47)$$

gdzie

$$\tilde{W}'_k \equiv \partial_{I_k}\tilde{W}'(I_1, I_2, I_3; \mathbf{x}), \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.6.48)$$

2.6.5. Zagadnienie semi-brzegowe

Rozważania podane w p. 2.6.4 dowodzą, że gdybyśmy potrafili wyrazić trójwymiarowe pole wektorowe $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t)$ jako znaną funkcję pól przesunięć $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i obrotów $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej oraz ich pochodnych dowolnego rzędu, to wszystkie trójwymiarowe wielkości kinematyczne byłyby jednoznacznie określone przez te wielkości powierzchniowe. Wówczas moglibyśmy wyznaczyć jawną postać powłokowych równań konstytutywnych, wykorzystując ogólne wyrażenia wyprowadzone w p. 2.6.4. Ponadto, po rozwiązaniu problemu dwuwymiarowego mechaniki powłok można byłoby następnie wyznaczyć rozkład przemieszczeń i odkształceń w całym ciele trójwymiarowym. Oczywiście, oznaczałoby to całkowitą równoważność opisu trójwymiarowego w ramach mechaniki ośrodków ciągłych i opisu dwuwymiarowego w ramach mechaniki powłok.

Takiej pełnej równoważności nie należy jednak oczekiwać. Można jedynie poszukiwać pewnych dodatkowych warunków, które prowadziłyby do rozsądnie przybliżonych zależności pomiędzy $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t)$ oraz $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$. Dalej naszkicujemy jedną z takich możliwości.

Rozważmy następujące zadanie: wyznaczyć trójwymiarowy ruch $\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{x}, t)$ ciała typu powłoka, spełniającego lokalne równania ruchu

$$\text{Div}(\mathbf{FS}) + \mathbf{f} = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}, \quad (\mathbf{x}, t) \in M \times T, \quad (2.6.49)$$

naprężeniowe warunki brzegowe na powierzchniach granicznych

$$\mathbf{FSn}^{\pm} = \pm \mathbf{t}_n^{\pm}, \quad (\mathbf{x}, t) \in M^{\pm} \times T \quad (2.6.50)$$

i równanie konstytutywne $\mathbf{S} = \widehat{S}(\mathbf{F})$. W poniższych rozważaniach ograniczymy się do materiałów sprężystych, chociaż nie jest to ograniczenie konieczne.

Wykorzystując reprezentację $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}$ gradientu deformacji oraz zapisując tensor naprężeń w postaci $\mathbf{S} = \mathbf{s}^i \otimes \mathbf{g}_i$, przestrzenną dywergencję z $\mathbf{F}\mathbf{S}$ można wyrazić następująco:

$$\text{Div}(\mathbf{F}\mathbf{S}) = \text{Div}(\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}) = \mathbf{Q}\{\text{Div}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}) + \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{\Lambda}\mathbf{s}^\alpha)\}. \quad (2.6.51)$$

Wówczas lokalne równania ruchu (2.6.50) możemy przedstawić w postaci

$$\text{Div}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}) + \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{\Lambda}\mathbf{s}^\alpha) + \mathbf{Q}^T(\mathbf{f} - \rho_0\dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}. \quad (2.6.52)$$

Uwzględniając następnie zależność $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{1} + \mathbf{\Theta}$, równanie konstytutywne $\mathbf{S} = \widehat{S}(\mathbf{F})$ przyjmuje formę

$$\mathbf{S} = \widehat{S}(\mathbf{F}) = \widetilde{S}(\mathbf{\Theta}) = \widetilde{\mathbf{s}}^i(\mathbf{\Theta}) \otimes \mathbf{g}_i. \quad (2.6.53)$$

Sformułowany powyżej problem sprowadza się więc do rozwiązania równania

$$\text{Div}\{(\mathbf{1} + \mathbf{\Theta})\widetilde{S}(\mathbf{\Theta})\} + \mathbf{K}_\alpha\{(\mathbf{1} + \mathbf{\Theta})\widetilde{\mathbf{s}}^\alpha(\mathbf{\Theta})\} + \mathbf{Q}^T(\mathbf{f} - \rho_0\dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}, \quad (2.6.54)$$

przy zadanych warunkach brzegowych

$$(\mathbf{1} + \mathbf{\Theta})\widetilde{S}(\mathbf{\Theta})\mathbf{n}^\pm = \pm\mathbf{t}_n^\pm, \quad (\mathbf{x}, t) \in M^\pm \times T \quad (2.6.55)$$

na powierzchniach granicznych.

Równanie (2.6.54) jest mało użyteczne, ponieważ zawiera ono nadal tensor obrotu \mathbf{Q} i pole prędkości \mathbf{v} . Jeśli jednak ograniczymy się do zagadnienia quasi-statycznego i pominiemy siły objętościowe \mathbf{f} , to równanie (2.6.54) upraszcza się do postaci

$$\text{Div}\{(\mathbf{1} + \mathbf{\Theta})\widetilde{S}(\mathbf{\Theta})\} + \mathbf{K}_\alpha\{(\mathbf{1} + \mathbf{\Theta})\widetilde{\mathbf{s}}^\alpha(\mathbf{\Theta})\} = \mathbf{0}. \quad (2.6.56)$$

Uwzględniając teraz, że tensor $\mathbf{\Theta}(\mathbf{x}, \xi)$ wyraża się przez powłokowe miary odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x})$ i $\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{x}) = \text{ad } \boldsymbol{\kappa}_\alpha(\mathbf{x})$ oraz odkształcenie wewnętrzne $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Theta} &= \boldsymbol{\theta}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\alpha + \boldsymbol{\theta}_3 \otimes \mathbf{g}^3, \\ \boldsymbol{\theta}_\alpha &= \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha + \boldsymbol{\kappa}_\alpha \times (\xi\mathbf{t}_0 + \mathbf{e}) + \mathbf{e}_{,\alpha}, \quad \boldsymbol{\theta}_3 = \mathbf{e}_{,\xi}, \end{aligned} \quad (2.6.57)$$

rozważany problem można sformułować następująco: dla dowolnie ustalonego punktu $\mathbf{x} \in M$ powierzchni podstawowej powłoki, znaleźć pole $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi)$, spełniające równanie (2.6.56) i warunki brzegowe (2.6.55).

Jak wynika ze struktury równania (2.6.56) i wzoru (2.5.36) dla tensora $\mathbf{\Theta}$, rozwiązanie tego problemu muszą mieć postać zależności między $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi)$ oraz miarami odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x})$ i $\boldsymbol{\kappa}_\alpha(\mathbf{x})$, a także ich powierzchniowymi gradientami. Możemy to symbolicznie zapisać jako

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi) = \mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}), \boldsymbol{\kappa}_\alpha(\mathbf{x}), \nabla\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}), \nabla\boldsymbol{\kappa}_\alpha(\mathbf{x}); \xi), \quad (2.6.58)$$

gdzie \mathcal{G} jest daną funkcją swoich argumentów. Postać funkcji \mathcal{G} zależy będzie od postaci równania konstytutywnego (2.6.53).

2.7. Szczególne warianty mechaniki powłok

2.7.1. Klasyczne hipotezy kinematyczne

Teoria powłok omawiana w tej monografii nie jest ani jedynie możliwą, ani też być może najbardziej odpowiednią do analizy wielu zadań szczegółowych. W wielu przypadkach poprawne wyniki można otrzymać korzystając ze znacznie uproszczonych modeli powłoki. Są też zadania, które wymagałyby ogólniejszego modelu powłoki, uwzględniającego np. nielokalność deformacji wyższego rzędu, oddziaływania termiczne, elektryczne itp. Do pomyslenia i sformułowania są więc zarówno teorie bogatsze jak i uboższe.

W literaturze zaproponowano wiele odmiennych podejść, które mogą być wykorzystane przy formułowaniu szczególnych wariantów mechaniki powłok, odpowiednich do analizy szczególnych zadań konstrukcji powłokowych. Podejście rozwinięte w tej książce ma ważną cechę, której nie wykazują inne modele mechaniki powłok: w ramach założeń klasycznej mechaniki ośrodka ciągłego, otrzymane tu zależności są *dynamicznie i kinematycznie ścisłymi*, gdyż przy ich wyprowadzaniu nie korzystano z żadnych dodatkowych założeń i postulatów. Jednocześnie jednak takie podejście nie wyklucza możliwości przyjęcia dodatkowych założeń upraszczających. Dlatego sformułowane tutaj ogólne zależności mechaniki powłok mogą stanowić wygodny punkt wyjścia do dyskusji innych sformułowań mechaniki powłok lub też możliwych uproszczeń przedstawionej tu teorii ogólnej.

W dyskusji podanej w tym podrozdziale przyjmujemy, że w konfiguracji odniesienia powierzchnia podstawowa M powłoki jest dowolnie umiejscowiona w obszarze B , zajmowanym przez ciało typu powłoka. W ogólnym przypadku będziemy również zakładali, że M jest powierzchnią kawałkami gładką, a obszar B jest opisany wektorem wodzącym

$$\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \xi) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \xi \mathbf{t}_0(\mathbf{x}), \quad \xi \in [-h_0^-(\mathbf{x}), +h_0^-(\mathbf{x})], \quad (2.7.1)$$

gdzie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ jest wektorem wodzącym powierzchni podstawowej M , a $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ jest ciągłym polem wektorów jednostkowych na M , definiującym włókna materialne po grubości powłoki w konfiguracji odniesienia. W szczególnym przypadku powłok regularnych można przyjąć, że $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ pokrywa się z wektorem jednostkowym $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ normalnym do M .

Cechą wspólną wielu wariantów teorii powłok, obszernie omawianych w literaturze, są pewne założenia, nazywane *hipotezami kinematycznymi*, które z góry ograniczają dopuszczalny sposób deformacji włókien materialnych na grubości powłoki. Najbardziej znaną jest klasyczna hipoteza kinematyczna Kirchhoffa–Love’a (K–L), zgodnie z którą zakłada się, że włókna proste i normalne do powierzchni podstawowej w konfiguracji odniesienia pozostają prostymi i normalnymi do tej powierzchni w każdej konfiguracji odkształconej, a ponadto zachowują swoją długość.

Zgodnie z hipotezą K–L, wektor wodzący włókna normalnego, określonego w konfiguracji nieodkształconej przez $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \xi) = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \xi \mathbf{n}(\mathbf{x})$, w konfiguracji aktualnej przyjmuje postać

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \xi \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t), \quad (2.7.2)$$

gdzie $\bar{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni podstawowej $M(t)$ w konfiguracji aktualnej. Zgodnie z (2.7.2), deformacja powłoki jako ciała trójwymiarowego jest całkowicie określona przez deformację jej powierzchni podstawowej, która z kolei jest wyrażona przez trzy składowe wektora przesunięcia $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Kinematyczny model powłoki typu Kirchhoffa–Love’a jest więc modelem *trójparametrowym*.

Hipoteza (2.7.2) zastosowana dosłownie wymaga, aby podczas deformacji poprzeczne odkształcenia postaciowe i odkształcenie normalne do powierzchni podstawowej były równe zeru w całym obszarze powłoki. To powoduje, że funkcja energii sprężystej, obliczona z uwzględnieniem (2.7.2), wykazuje znaczne błędy, przekraczające błąd dopuszczalny w ramach teorii pierwszego przybliżenia do energii odkształcenia powłoki. Dlatego hipotezę (2.7.2) stosuje się tylko do opisu stanu deformacji powłoki. Przy konstrukcji równań konstytutywnych używa się równolegle innej, sprzecznej z (2.7.2), hipotezy o płaskim stanie naprężeń w przestrzeni powłoki. Dopiero właściwe zastosowanie obu tych hipotez prowadzi do w przybliżeniu poprawnego powierzchniowego opisu naprężeń i deformacji w powłokach liniowo sprężystych. Ze względu na dużą rolę teorii Kirchhoffa–Love’a w rozwoju mechaniki powłok, model ten przedstawimy bardziej szczegółowo w podrozdziałach 3.6 i 3.7.

Mniej restrykcyjna od (2.7.2) hipoteza kinematyczna zakłada, że wektor wodzący w konfiguracji aktualnej powłoki przyjmuje postać

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \xi \mathbf{t}(\mathbf{x}, t), \quad (2.7.3)$$

gdzie $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{n}(\mathbf{x})$, jest nadal wektorem jednostkowym, ale nie koniecznym normalnym do powierzchni podstawowej $M(t)$ w konfiguracji aktualnej. Hipoteza ta zakłada stały rozkład po grubości powłoki poprzecznych odkształceń postaciowych, ale nadal wyklucza istnienie odkształceń normalnych do powierzchni podstawowej, bo nadal orzeka, że grubość powłoki nie zmienia się podczas deformacji. Dlatego przy konstrukcji równań konstytutywnych powłok liniowo sprężystych również w tym przypadku jest wymagane użycie komplementarnej hipotezy o płaskim stanie naprężeń w przestrzeni powłoki.

Pewnym osłabieniem hipotezy (2.7.3) jest założenie liniowego rozkładu poprzecznych odkształceń postaciowych oraz jednorodnego (stałego) rozkładu odkształceń normalnych po grubości powłoki. W tym przypadku wektor wodzący w konfiguracji aktualnej przyjmuje się w postaci

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \xi \mathbf{d}(\mathbf{x}, t), \quad (2.7.4)$$

gdzie $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{d}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{d}_0(\mathbf{x})$, jest polem wektorów już nie koniecznie jednostkowych podczas procesu deformacji. Hipoteza kinematyczna (2.7.4) jest równoważna przyjęciu liniowego rozkładu przemieszczeń po grubości powłoki.

Różne sposoby uściślenia klasycznych modeli belek, płyt i powłok, przez przybliżone uwzględnienia wpływu poprzecznych odkształceń postaciowych i normalnych na deformację i dynamikę tych elementów, mają bogatą literaturę, por. np. przeglądy GRIGOLJUK i SELEZOW [1973], JEMIELITA [2001]. W szczególności, już TIMOSZENKO [1916, 1921, 1922] w liniowej teorii belek a REISSNER [1944, 1945, 1947] w liniowej teorii płyt założyli paraboliczny po grubości rozkład naprężeń tnących. HENCKY [1947] i BOLLE [1947] wprowadzili założenie liniowego rozkładu przemieszczeń po grubości płyty i komplementarne założenia o płaskim stanie naprężeń w płycie. UFLJAND [1948] i MINDLIN [1951] rozszerzyli powyższe założenia na zagadnienia liniowej dynamiki płyt, a HILDEBRANDT, REISSNER i THOMAS [1949], GREEN i ZERNA [1950] oraz NAGHDI [1957] zastosowali je do liniowej teorii powłok. Różne warianty teorii płyt i powłok, uwzględniające w jawny sposób wpływ poprzecznych odkształceń postaciowych i normalnych, nazywane są więc w literaturze różnymi nazwiskami: Timoszenko, Timoszenko–Reissnera, Reissnera, Reissnera–Mindlina, Reissnera–Naghdi, Ambarcumiana, Reddy’ego, a nawet Simo. W tej książce, dla różnych takich wariantów teorii powłok będziemy używali wspólnej nazwy — teoria *typu* Timoszenko–Reissnera (w skrócie T–R).

Klasyczne hipotezy kinematyczne wprowadzają istotne uproszczenia do ogólnej teorii powłok. W szczególności, wyznaczenie dwuwymiarowych równań konstytutywnych staje się wtedy zadaniem trywialnym. Wystarczy zauważyć, że każda hipoteza kinematyczna jednoznacznie wyraża trójwymiarowy gradient deformacji w przestrzeni powłoki całkowicie przez wielkości powierzchniowe. Gdy trójwymiarowe równanie konstytutywne materiału powłoki jest znane, to wyprowadzenie równań konstytutywnych dla wielkości przekrojowych jest zadaniem czysto formalnym. Oczywiście, dokładność otrzymanych w ten sposób dwuwymiarowych równań konstytutywnych jest zdeterminowana przyjętymi hipotezami kinematycznymi i nie zawsze jest ona wystarczającą do właściwego modelowania konkretnych zadań konstrukcji powłokowych.

2.7.2. Więzy kinematyczne i reakcje więzów

Klasyczne hipotezy kinematyczne oraz różne ich uogólnienia są w istocie ograniczeniami dopuszczalnych konfiguracji, jakie może przyjmować ciało podczas ruchu. Sprowadzają się one do narzucenia ciału szczególnej postaci funkcji ruchu, a w konsekwencji i szczególnej postaci wektora wodzącego w konfiguracji aktualnej.

W ogólnym przypadku dla takich więzów możemy przyjąć (ANTMAN [1976, 1995], ANTMAN i MARLOW [1991]) wyrażenie formalne

$$\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \boldsymbol{\eta}(\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{d}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}, \xi), \quad (2.7.5)$$

gdzie $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ jest wektorem uogólnionych przemieszczeń (elementem przestrzeni wektorowej lub różniczkowej), a $\boldsymbol{\eta}$ jest daną funkcją swoich argumentów. Ponieważ powierzchnia podstawowa odgrywa w każdej teorii powłok rolę szczególną, bez ograniczenia ogólności więzy postaci (2.7.5) możemy zastąpić więzami

$$\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{d}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}, \xi), \quad (2.7.6)$$

gdzie $\boldsymbol{\beta}$, tak jak $\boldsymbol{\eta}$, jest daną funkcją. Więzy postaci (2.7.6), nazywane w literaturze więzami modelowymi, należy odróżniać od ograniczeń dopuszczalnych konfiguracji ciała, wynikających z warunków podparcia czy ograniczeń konstytutywnych, takich jak np. warunek nieściśliwości, które również są więzami.

Celem wprowadzenia więzów modelowych (2.7.6) jest ujęcie problemu formułowania różnych wariantów teorii powłok w ramach jednolitej teorii, którą jest teoria ośrodków ciągłych z więzami (por. WOŹNIAK i KLEIBER [1982]). Podstawowym założeniem tej teorii jest postulat istnienia *reakcji* utrzymujących te więzy. Zgodnie z tym postulatem, przyjmuje się istnienie jednoznacznego addytywnego rozkładu siły masowej $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ i tensora naprężeń $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ w postaci

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_A(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_L(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}_A(\mathbf{x}, t) + \mathbf{T}_L(\mathbf{x}, t), \quad (2.7.7)$$

gdzie $\mathbf{f}_L(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{T}_L(\mathbf{x}, t)$ są odpowiednimi polami reakcji, utrzymującymi przyjęte więzy. Formułowanie różnych wariantów teorii powłok w ramach takiego podejścia jest szczegółowo omawiane w książce WOŹNIAK i KLEIBER [1982], gdzie też podano literaturę źródłową.

W pozostałej części tego podrozdziału ograniczymy się do jednego przypadku szczególnego więzów (2.7.6), pomijając wszystkie reakcje więzów.

2.7.3. Uogólnienie klasycznych hipotez kinematycznych

Wariant mechaniki powłok, formułowany przy użyciu hipotezy kinematycznej (2.7.4), zasługuje na większą uwagę, ponieważ jest on powszechnie używany, zwłaszcza w kontekście metody elementów skończonych.

W poniższych rozważaniach ograniczymy się sformułowaniem wariantu mechaniki powłok na podstawie uogólnionej hipotezy kinematycznej

$$\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \zeta(\mathbf{x}, \xi, t)\mathbf{d}(\mathbf{x}, t), \quad (2.7.8)$$

gdzie $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ jest dowolnym wektorem, a $\zeta(\mathbf{x}, \xi, t)$ funkcją skalarną, co dopuszcza również nieliniowy rozkład odkształceń normalnych po grubości powłoki.

Hipoteza kinematyczna (2.7.8) ujmuje wszystkie klasyczne hipotezy kinematyczne oraz wiele ich uogólnień. W szczególności, przyjmując $\zeta(\mathbf{x}, \xi, t) = \xi$ otrzymujemy hipotezę (2.7.4), która z kolei ujmuje w sobie zarówno hipotezę typu Timoszenko–Reissnera (2.7.3), jak i klasyczną hipotezę Kirchhoffa–Love’a (2.7.2).

W ogólnym przypadku funkcja $\zeta(\mathbf{x}, \xi, t)$ musi być albo z góry zadana, albo musimy dysponować dodatkowymi warunkami, z których można ją wyznaczyć.

Przykładem takich dodatkowych warunków może być założenie zerowania się naprężeń stycznych na powierzchniach granicznych. Innym przykładem może być założenie o nieściśliwości materiału powłoki. Na przykład, przyjmując

$$\zeta(\mathbf{x}, \xi, t) = \lambda_\xi(\mathbf{x}, t)\xi + \frac{1}{2}\kappa_\xi(\mathbf{x}, t)\xi^2 \quad (2.7.9)$$

oraz zakładając, że $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ jest wektorem jednostkowym normalnym do powierzchni podstawowej powłoki w konfiguracji aktualnej, funkcje $\lambda_\xi(\mathbf{x}, t)$ oraz $\kappa_\xi(\mathbf{x}, t)$ można wyznaczyć jednoznacznie z warunku nieściśliwości materiału. W tym przypadku nie ma już potrzeby wprowadzania dodatkowych założeń kinematycznych. Można bowiem wykazać, że warunek nieściśliwości jednoznacznie determinuje postać funkcji $\zeta(\mathbf{x}, \xi, t)$. Jest to istotne w teorii powłok wykonanych z materiałów gumopodobnych, których cechą charakterystyczną jest właśnie nieściśliwość i związana z tym silnie nieliniowa deformacja po grubości powłoki (zob. np. CZERNYCH [1983], STUMPF i MAKOWSKI [1986], SCHIECK, PIETRASZKIEWICZ i STUMPF [1992], LIBAI i SIMONDS [1998], WIŚNIEWSKI [1997] oraz literaturę cytowaną w tych pracach).

Założmy, że $\zeta(\mathbf{x}, \xi, t)$ jest albo daną funkcją niezależną od deformacji, albo funkcją zależną wyłącznie od powierzchniowych gradientów (dowolnego rzędu) wektora wodzącego $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ i wektora kierunkowego $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$. Porównując (2.7.8) z formalną reprezentacją

$$\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t) \quad (2.7.10)$$

wektora wodzącego w konfiguracji aktualnej, z której korzystaliśmy we wcześniejszych rozważaniach, otrzymamy

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t) = \zeta(\mathbf{x}, \xi, t)\mathbf{d}(\mathbf{x}, t). \quad (2.7.11)$$

Każdy wariant teorii powłok, który można sformułować wychodząc z założenia (2.7.8), będzie więc szczególnym przypadkiem ogólnej teorii powłok, sformułowanej w tej książce. Kompletny układ równań takiego szczególnego przypadku mechaniki powłok otrzymamy więc przez specyfikację zależności ogólnych, przy dodatkowym założeniu ich zgodności z (2.7.11).

2.7.4. Całkowe prawa mechaniki

Hipotezy kinematyczne nie mają wpływu na definicję gęstości masy przekrojowej $m_0(\mathbf{x})$. Masa dowolnej części \mathcal{P} powłoki jest więc zawsze określona tymi samymi wyrażeniami (1.3.14) i (1.8.22) jak i w ogólnej mechanice powłok, gdzie pęd i moment pędu dowolnej części \mathcal{P} powłoki określone są w (1.3.15), a ich odpowiednie powierzchniowe gęstości zdefiniowano w (1.8.23) i (1.8.24).

Wykorzystując założenie (2.7.8), trójwymiarowe pole prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\vec{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}, t)$ przyjmuje postać

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \xi, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \zeta(\mathbf{x}, \xi, t)\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) + \dot{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t)\mathbf{d}(\mathbf{x}, t), \quad (2.7.12)$$

gdzie $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ jest polem prędkości powierzchni podstawowej powłoki, a $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ jest teraz polem prędkości wektora kierunkowego

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\vec{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.7.13)$$

Z (2.7.11) i (2.7.12) mamy więc

$$\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{v} = \zeta \mathbf{d} \times (\mathbf{v} + \zeta \mathbf{w} + \dot{\zeta} \mathbf{d}) = \zeta \mathbf{d} \times \mathbf{v} + \zeta^2 \mathbf{d} \times \mathbf{w}. \quad (2.7.14)$$

Podstawiając teraz (2.7.12) i (2.7.14) do (1.8.23) i (1.8.24), przekrojowe pęd i moment pędu można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \left(\int_{-}^{+} \rho_0 \mu \, d\xi \right) \mathbf{v} + \left(\int_{-}^{+} \rho_0 \zeta \mu \, d\xi \right) \mathbf{w} + \left(\int_{-}^{+} \rho_0 \dot{\zeta} \mu \, d\xi \right) \mathbf{d}, \\ \mathbf{s} &= \left(\int_{-}^{+} \rho_0 \zeta \mu \, d\xi \right) \mathbf{d} \times \mathbf{v} + \left(\int_{-}^{+} \rho_0 \zeta^2 \mu \, d\xi \right) \mathbf{d} \times \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

Uwzględniając definicję (1.8.22)₁ gęstości masy m_0 i wprowadzając następujące oznaczenia

$$I_1(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{m_0} \int_{-}^{+} \rho_0 \zeta \mu \, d\xi, \quad I_2(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{m_0} \int_{-}^{+} \rho_0 \zeta^2 \mu \, d\xi, \quad (2.7.16)$$

gęstości pędu i momentu pędu dane wzorami (2.7.15) przyjmują postać

$$\mathbf{p} = m_0(\mathbf{v} + I_1 \mathbf{w} + \dot{I}_1 \mathbf{d}), \quad \mathbf{s} = \mathbf{d} \times \{m_0(I_1 \mathbf{v} + I_2 \mathbf{w})\}. \quad (2.7.17)$$

Stąd

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi} m_0 \boldsymbol{\pi} \, da, \\ \mathbf{m}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi} m_0(\mathbf{d} \times \boldsymbol{\sigma} + \vec{\mathbf{y}} \times \boldsymbol{\pi}) \, da. \end{aligned} \quad (2.7.18)$$

gdzie dla uproszczenia zapisu i wygody dalszych rozważań wprowadziliśmy oznaczenia zgodne z (1.3.9)

$$\boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{v} + I_1 \mathbf{w} + \dot{I}_1 \mathbf{d}, \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv I_1 \mathbf{v} + I_2 \mathbf{w}. \quad (2.7.19)$$

Otrzymane wyrażenia (2.7.18) dla pędu i momentu pędu dowolnej części powłoki nie zależą od szczególnej postaci funkcji $\zeta(\mathbf{x}, \xi, t)$. W najprostszym przypadku, gdy $\zeta(\mathbf{x}, \xi, t)$ jest daną funkcją niezależną od czasu, mamy $\dot{I}_1 = 0$.

Uwzględniając założenie (2.7.11) w definicji (1.8.26)₂, moment powierzchniowy $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$ można wyrazić w postaci

$$\mathbf{c} = \mathbf{d} \times \left(\int_{-}^{+} \zeta \mathbf{f} \mu \, d\xi + \alpha^{+} \zeta^{+} \mathbf{t}_n^{+} - \alpha^{-} \zeta^{-} \mathbf{t}_n^{-} \right) = \mathbf{d} \times \mathbf{l}, \quad (2.7.20)$$

gdzie $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$ jest określony jako

$$\mathbf{l} = \int_{-}^{+} \zeta \mathbf{f} \mu \, d\xi + \alpha^{+} \zeta^{+} \mathbf{t}_n^{+} - \alpha^{-} \zeta^{-} \mathbf{t}_n^{-}. \quad (2.7.21)$$

Podstawiając założenie (2.7.11) do definicji (1.8.28)₂ i (1.8.29)₂, wektory przekrojowego momentu $\mathbf{m}_\nu(\mathbf{x}, t)$ i momentu brzegowego $\mathbf{m}^*(\mathbf{x}, t)$ możemy przestawić w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_\nu &= \mathbf{d} \times \left(\int_{-}^{+} \zeta \mathbf{t}_n \mu^* \, d\xi \right) = \mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{m}}_\nu, \\ \mathbf{m}^* &= \mathbf{d} \times \left(\int_{-}^{+} \zeta \mathbf{t}^* \mu^* \, d\xi \right) = \mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{m}}^*, \end{aligned} \quad (2.7.22)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{m}}_\nu &= \int_{-}^{+} \zeta \mathbf{t}_n \mu^* \, d\xi, \\ \tilde{\mathbf{m}}^* &= \int_{-}^{+} \zeta \mathbf{t}^* \mu^* \, d\xi. \end{aligned} \quad (2.7.23)$$

Zauważmy, że wprowadzenie do rozważań więzów (2.7.11) pozornie nie ma wpływu na definicje siły powierzchniowej $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, siły przekrojowej $\mathbf{n}_\nu(\mathbf{x}, t)$ i zewnętrznej siły $\mathbf{n}^*(\mathbf{x}, t)$ na części ∂M_f brzegu powłoki podane, odpowiednio, w (1.8.26)₁, (1.8.28)₁ i (1.8.29)₁. Obecność więzów zmienia jednak stan naprężeń w powłoce, a wielkości przekrojowe, sprowadzone do powierzchni podstawowej, będą te zmiany uwzględniały. Aby podkreślić ten fakt, odpowiednie wielkości dynamiczne, sprowadzone przy użyciu więzów (2.7.11) do powierzchni podstawowej, będziemy tutaj wyróżniali przez dodanie wężyka nad symbolem tych wielkości.

W wyniku powyższych rozważań otrzymujemy następującą postać wypadkowej siły i wypadkowego momentu działających na dowolną część powłoki:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi} \tilde{\mathbf{f}} \, da + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \tilde{\mathbf{n}}_\nu \, dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \tilde{\mathbf{n}}^* \, dl, \\ \mathbf{t}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi} (\mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{y}} \times \tilde{\mathbf{f}}) \, da + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{m}}_\nu + \tilde{\mathbf{y}} \times \tilde{\mathbf{n}}_\nu) \, dl \\ &\quad + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{m}}^* + \tilde{\mathbf{y}} \times \tilde{\mathbf{n}}^*) \, dl. \end{aligned} \quad (2.7.24)$$

Bezpośrednią konsekwencją wprowadzenia do ogólnej teorii powłok więzów kinematycznych (2.7.11) są następujące ograniczenia na wielkości dynamiczne, reprezentowane przez wektory \mathbf{s} , \mathbf{c} , \mathbf{m}_ν i \mathbf{m}^* :

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{s} = 0, \quad \mathbf{d} \cdot \mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{d} \cdot \mathbf{m}_\nu = 0, \quad \mathbf{d} \cdot \mathbf{m}^* = 0. \quad (2.7.25)$$

Innymi słowy, żadna z tych wielkości dynamicznych nie ma składowej określonej wzdłuż wektora kierunkowego \mathbf{d} .

2.7.5. Równania ruchu i dynamiczne warunki uboczne

Wektory przekrojowych sił $\tilde{\mathbf{n}}_\nu(\mathbf{x}, t)$ i momentów $\tilde{\mathbf{m}}_\nu(\mathbf{x}, t)$, w każdym punkcie regularnym $\mathbf{x} \in M$ powierzchni podstawowej, są wyrażalne przez tensory przekrojowych miar naprężeń

$$\tilde{\mathbf{n}}_\nu(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{m}}_\nu(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}). \quad (2.7.26)$$

Ponieważ $\tilde{\mathbf{n}}_\nu(\mathbf{x}, t)$ i $\tilde{\mathbf{m}}_\nu(\mathbf{x}, t)$ są nadal wektorami przestrzennymi, tensory $\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, t)$ i $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t)$ są odwzorowaniami liniowymi przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{x}}M$ w przestrzeń wektorową E .

Uwzględniając (2.7.26), zasady zachowania pędu i momentu pędu mechaniki powłok (1.4.53) w obecności hipotezy kinematycznej (2.7.11) redukują się do postaci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} m_0 \boldsymbol{\pi} \, da &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \tilde{\mathbf{f}} \, da + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \tilde{\mathbf{N}} \boldsymbol{\nu} \, dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \tilde{\mathbf{n}}^* \, dl, \\ \frac{d}{dt} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} m_0 (\mathbf{d} \times \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{y}} \times \boldsymbol{\pi}) \, da &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{y}} \times \tilde{\mathbf{f}}) \, da \\ &\quad + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\nu} + \tilde{\mathbf{y}} \times \tilde{\mathbf{N}} \boldsymbol{\nu}) \, dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{m}}^* + \tilde{\mathbf{y}} \times \tilde{\mathbf{n}}^*) \, dl. \end{aligned} \quad (2.7.27)$$

Natomiast zasada zachowania masy jest spełniona tożsamościowo, ponieważ gęstość masy $m_0(\mathbf{x})$ jest niezależna od czasu.

Z (2.7.27) możemy teraz wyprowadzić lokalne równania ruchu, dynamiczne warunki brzegowe i dynamiczne warunki ciągłości w identycznym postępowaniu, jak to zrobiliśmy w ramach ogólnej teorii powłok. Obliczając pochodne względem czasu z wyrażeń stojących po prawych stronach w (2.7.27), mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} m_0 \boldsymbol{\pi} \, da &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} m_0 \dot{\boldsymbol{\pi}} \, da, \\ \frac{d}{dt} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} m_0 (\mathbf{d} \times \boldsymbol{\sigma} + \vec{\mathbf{y}} \times \boldsymbol{\pi}) \, da &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} m_0 (\mathbf{d} \times \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{w} \times \boldsymbol{\sigma} \\ &\quad + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\pi} + \vec{\mathbf{y}} \times \dot{\boldsymbol{\pi}}) \, da. \end{aligned} \quad (2.7.28)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \times \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{w} \times (I_1 \mathbf{v} + I_2 \mathbf{w}) = I_1 \mathbf{w} \times \mathbf{v}, \\ \mathbf{v} \times \boldsymbol{\pi} &= \mathbf{v} \times (\mathbf{v} + I_1 \mathbf{w} + \dot{I}_1 \mathbf{d}) = I_1 \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \dot{I}_1 \mathbf{v} \times \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (2.7.29)$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \times \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{w} \times \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\pi} &= \mathbf{d} \times \dot{\boldsymbol{\sigma}} + I_1 \mathbf{w} \times \mathbf{v} + I_1 \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \dot{I}_1 \mathbf{v} \times \mathbf{d} \\ &= \mathbf{d} \times (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{I}_1 \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (2.7.30)$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} m_0 \boldsymbol{\pi} \, da &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} m_0 \dot{\boldsymbol{\pi}} \, da, \\ \frac{d}{dt} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} m_0 (\mathbf{d} \times \boldsymbol{\sigma} + \vec{\mathbf{y}} \times \boldsymbol{\pi}) \, da &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} m_0 \{ \mathbf{d} \times (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{I}_1 \mathbf{v}) + \vec{\mathbf{y}} \times \dot{\boldsymbol{\pi}} \} \, da. \end{aligned} \quad (2.7.31)$$

Wykorzystując następnie uogólnione twierdzenie o dywergencji powierzchniowej, całki wzdłuż brzegu $\partial \Pi \setminus \partial M_f$ występujące w zasadach (2.7.27) możemy przekształcić następująco:

$$\int_{\partial \Pi \setminus \partial M_f} \tilde{\mathbf{n}}_\nu \, dl = \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \text{Div} \tilde{\mathbf{N}} \, da - \int_{\Pi \cap \Gamma} [\tilde{\mathbf{n}}_\nu] \, dl - \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \tilde{\mathbf{N}} \boldsymbol{\nu} \, dl, \quad (2.7.32)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Pi\setminus\partial M_f} \vec{y} \times \tilde{\mathbf{N}} \boldsymbol{\nu} \, dl &= \iint_{\Pi\setminus\Gamma} \left\{ \text{ad}^{-1}(\tilde{\mathbf{N}} \mathbf{F}^T - \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{N}^T) + \vec{y} \times (\text{Div } \tilde{\mathbf{N}}) \right\} da \\ &\quad - \int_{\Pi\cap\Gamma} [\vec{y} \times \tilde{\mathbf{n}}_\nu] \, dl - \int_{\partial\Pi\cap\partial M_f} \vec{y} \times \tilde{\mathbf{N}} \boldsymbol{\nu} \, dl, \end{aligned} \quad (2.7.33)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Pi\setminus\partial M_f} \mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\nu} \, dl &= \iint_{\Pi\setminus\Gamma} \left\{ \text{ad}^{-1}(\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{G}^T - \mathbf{G} \tilde{\mathbf{M}}^T) + \mathbf{d} \times (\text{Div } \tilde{\mathbf{M}}) \right\} da \\ &\quad - \int_{\Pi\cap\Gamma} [\mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{m}}_\nu] \, dl - \int_{\partial\Pi\cap\partial M_f} \mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\nu} \, dl. \end{aligned}$$

Tutaj

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \vec{y}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{d}(\mathbf{x}, t), \quad (2.7.34)$$

są powierzchniowymi gradientami deformacji powierzchni podstawowej i wektora kierunkowego.

Wstawiając (2.7.31), (2.7.32) i (2.7.33) do (2.7.27), zasady zachowania pędu i momentu pędu przyjmują postać

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi\setminus\Gamma} (\text{Div } \tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{f}} - m_0 \dot{\boldsymbol{\pi}}) da - \int_{\Pi\cap\Gamma} [\tilde{\mathbf{n}}_\nu] \, dl + \int_{\partial\Pi\cap\partial M_f} (\tilde{\mathbf{n}}^* - \tilde{\mathbf{N}} \boldsymbol{\nu}) \, dl &= \mathbf{0}, \\ \iint_{\Pi\setminus\Gamma} \left\{ \mathbf{d} \times (\text{Div } \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{l}} - m_0(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{I}_1 \mathbf{v})) + \text{ad}^{-1}(\tilde{\mathbf{N}} \mathbf{F}^T - \mathbf{F} \tilde{\mathbf{N}}^T) \right. \\ &\quad \left. + \text{ad}^{-1}(\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{G}^T - \mathbf{G} \tilde{\mathbf{M}}^T) \right\} da \\ + \iint_{\Pi\setminus\Gamma} \left\{ \vec{y} \times (\text{Div } \tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{f}} - m_0 \dot{\boldsymbol{\pi}}) \right\} da - \int_{\Pi\cap\Gamma} ([\mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{m}}_\nu] + [\vec{y} \times \tilde{\mathbf{n}}_\nu]) \, dl \\ + \int_{\partial\Pi\cap\partial M_f} \left\{ \mathbf{d} \times (\tilde{\mathbf{m}}^* - \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\nu}) + \vec{y} \times (\tilde{\mathbf{n}}^* - \tilde{\mathbf{N}} \boldsymbol{\nu}) \right\} dl &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.7.35)$$

Z (2.7.35) otrzymamy *lokalne równania ruchu*

$$\begin{aligned} \text{Div } \tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{f}} - m_0 \dot{\boldsymbol{\pi}} &= \mathbf{0}, \\ \text{ad}^{-1}(\tilde{\mathbf{N}} \mathbf{F}^T - \mathbf{F} \tilde{\mathbf{N}}^T) + \text{ad}^{-1}(\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{G}^T - \mathbf{G} \tilde{\mathbf{M}}^T) \\ + \mathbf{d} \times \left\{ \text{Div } \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{l}} - m_0(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{I}_1 \mathbf{v}) \right\} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.7.36)$$

w punktach regularnych $\mathbf{x} \in M\setminus\Gamma$ powierzchni podstawowej, *dynamiczne warunki brzegowe*

$$\tilde{\mathbf{n}}^* - \tilde{\mathbf{N}} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{m}}^* - \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \quad (2.7.37)$$

w punktach $\mathbf{x} \in \partial M_f$ części brzegu, na której są zadane obciążenia zewnętrzne, oraz *dynamiczne warunki ciągłości*

$$[\tilde{\mathbf{n}}_\nu] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{m}}_\nu] + [\tilde{\mathbf{y}} \times \tilde{\mathbf{n}}_\nu] = \mathbf{0}, \quad (2.7.38)$$

w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma$ zbioru krzywych osobliwych na powierzchni podstawowej.

W przekształceniach prowadzących do (2.7.38) nie korzystaliśmy z założenia, że deformacja powierzchni podstawowej i/lub pole wektorów kierunkowych mają być ciągle w całym obszarze. Przy przyjęciu takiego dodatkowego założenia, że $[\tilde{\mathbf{y}}] = \mathbf{0}$ i $[\mathbf{d}] = \mathbf{0}$, dynamiczne warunki ciągłości upraszczają się do postaci

$$[\tilde{\mathbf{n}}_\nu] = \mathbf{0}, \quad [\tilde{\mathbf{m}}_\nu] = \mathbf{0}. \quad (2.7.39)$$

W powyższych rozważaniach milcząco pomijaliśmy reakcje więzów, będące konsekwencją wprowadzenia ograniczenia (2.7.11) na dopuszczalne deformacje powłoki jako ciała trójwymiarowego. Zgodnie z ogólną teorią mechaniki ośrodków ciągłych z więzami, tensor naprężeń $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, a w konsekwencji i wektor naprężeń $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x})$, oraz wektor sił masowych $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ dane są w postaci złożonej (2.7.7). Z definicji (1.8.26) i (1.8.28) wynika więc, że uwzględniając reakcje więzów tensory przekrojowe miar naprężeń $\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, t)$ i $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t)$ oraz powierzchniowa siła $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ i moment $\tilde{\mathbf{l}}(\mathbf{x}, t)$ przyjmują postać

$$\tilde{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{N}}_A + \tilde{\mathbf{N}}_L, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}}_A + \tilde{\mathbf{M}}_L, \quad (2.7.40)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{f}}_A + \tilde{\mathbf{f}}_L, \quad \tilde{\mathbf{l}} = \tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{l}}_L. \quad (2.7.41)$$

Podstawiając (2.7.40) i (2.7.41) do (2.7.36), możemy wydzielić z lokalnych równań ruchu tę ich część, która zależy wyłącznie od reakcji więzów.

2.7.6. Zredukowane równania ruchu

Obok aspektu reakcji więzów, który pojawia się w każdej teorii powłok opartej na hipotezach kinematycznych, istnieje również inny aspekt, który różni takie teorie od ogólnej teorii powłok.

Zwróćmy uwagę, że punktem wyjścia w teoriach powłok formułowanych z uwzględnieniem hipotez kinematycznych nie są nigdy całkowe prawa zachowania pędu i momentu pędu. Jest to na ogół albo zasada pracy wirtualnej, albo inne, równoważne, sformułowania wariacyjne. Jednak w rozważanym tutaj przypadku ogólniejszych więzów (2.7.11), przyjęcie zasady pracy wirtualnej, jako punktu wyjścia do wyprowadzenia podstawowych zależności mechaniki powłok, nie jest możliwe. W dotychczasowych rozważaniach dopuszczaliśmy zależność funkcji $\zeta(\mathbf{x}, \xi, t)$ w (2.7.11) od deformacji w nieznanym i nie ustalonym z góry sposób. Nie jest więc możliwym obliczenie wariacji tej funkcji, która byłaby wymagana w zasadzie prac wirtualnych.

Zauważmy również, że lokalne równania ruchu (2.7.36) nie mają tutaj postaci znanych z różnych wariantów teorii powłok proponowanych w literaturze, które można otrzymać przyjmując szczególną postać funkcji $\zeta(\mathbf{x}, \xi, t)$ w hipotezie kinematycznej (2.7.11). Jest to konsekwencją przyjęcia zasad zachowania pędu i momentu pędu, a nie zasady pracy wirtualnej, jako punktu wyjścia do wyprowadzenia lokalnych zależności rozważanej teorii powłok. Lokalne równania ruchu, których formalna struktura byłaby identyczną z odpowiednimi równaniami teorii powłok znanych z literatury, można otrzymać na drodze następującego postępowania.

Wprowadźmy do rozważań wielkość dynamiczną, reprezentowaną przez wektor $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$, który spełnia równanie

$$\mathbf{d} \times \mathbf{k} + \text{ad}^{-1}(\tilde{\mathbf{N}} \mathbf{F}^T - \mathbf{F} \tilde{\mathbf{N}}^T) + \text{ad}^{-1}(\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{G}^T - \mathbf{G} \tilde{\mathbf{M}}^T) = \mathbf{0}. \quad (2.7.42)$$

Wówczas drugie z równań ruchu (2.7.36) redukuje się do postaci

$$\mathbf{d} \times \{ \text{Div} \tilde{\mathbf{M}} - \mathbf{k} + \tilde{\mathbf{l}} - m_0(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{I}_1 \mathbf{v}) \} = \mathbf{0}. \quad (2.7.43)$$

Ponieważ (2.7.43) musi być spełnione dla każdego pola wektorów kierunkowych $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$, wyrażenie w nawiasie klamrowym musi się zerować. W konsekwencji, z (2.7.43) i (2.7.36)₁ otrzymujemy następujący układ równań ruchu

$$\begin{aligned} \text{Div} \tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{f}} &= m_0 \dot{\boldsymbol{\pi}}, \\ \text{Div} \tilde{\mathbf{M}} - \mathbf{k} + \tilde{\mathbf{l}} &= m_0(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{I}_1 \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (2.7.44)$$

pod warunkiem, że zachodzi (2.7.42).

Jeśli powierzchnia podstawowa dana jest w postaci parametrycznej, to tensory miar naprężeń $\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, t)$ i $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t)$ można wyrazić przez wektory miar naprężeń

$$\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{n}}^\alpha(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{m}}^\alpha(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}), \quad (2.7.45)$$

i lokalne równania ruchu (2.7.44) przyjmują wówczas postać

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}}^\alpha|_\alpha + \tilde{\mathbf{f}} &= \dot{\mathbf{p}} + I_1 \dot{\mathbf{w}}, \\ \tilde{\mathbf{m}}^\alpha|_\alpha - \tilde{\mathbf{m}} + \tilde{\mathbf{l}} &= \mathbf{d} \times (\dot{\mathbf{p}} + I_1 \dot{\mathbf{w}}). \end{aligned} \quad (2.7.46)$$

Z kolei, równanie (2.7.42), wyrażone poprzez wektory miar naprężeń, jest następujące:

$$\vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} \times \tilde{\mathbf{n}}^\alpha + \mathbf{d} \times \mathbf{k} + \mathbf{d}_{,\alpha} \times \tilde{\mathbf{m}}_\alpha = \mathbf{0}. \quad (2.7.47)$$

2.7.7. Kinematyka powłoki

W rozważanym wariantcie teorii powłok, wykorzystującym hipotezę (2.7.8), wektor wodzący $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ i wektor kierunkowy $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej całkowicie wyznaczają kinematykę powłoki, nawet w przypadku $\zeta(\mathbf{x}, \xi, t) \equiv \xi$.

Wektor wodzący $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ możemy wyrazić równoważnie przez wektor przesunięć $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej. Tak więc, trzy składowe wektora $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i trzy składowe wektora $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ względem dowolnie wybranej bazy wektorowej stanowią zmienne niezależne tej teorii. Jest to więc również teoria kinematycznie sześcioparametrowa, tak jak i ogólna teoria powłok omawiana w poprzednich podrozdziałach. Nie oznacza to jednak, że te dwie teorie powłok są równoważne, gdyż nie da się ustalić między nimi wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości. Wynika to z następujących rozważań:

Wektor kierunkowy $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ możemy przedstawić w postaci

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \lambda_\xi(\mathbf{x}, t)\mathbf{t}(\mathbf{x}, t), \quad \lambda_\xi(\mathbf{x}, t) = \|\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)\| > 0, \quad (2.7.48)$$

gdzie $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ jest wektorem jednostkowym. Tak więc, wektor jednostkowy $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ i funkcję skalarną $\lambda_\xi(\mathbf{x}, t)$ można przyjąć jako zmienne niezależne tej teorii w miejsce wektora $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$. Uwzględniając następnie, że wektor kierunkowy $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ w konfiguracji odniesienia jest również wektorem jednostkowym, wektor $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ możemy wyrazić przez wektor $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ przy pomocy tensora obrotu $\Phi(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t)\mathbf{t}_0(\mathbf{x}). \quad (2.7.49)$$

Jeśli przy tym $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{t}_0(\mathbf{x}) \neq -1$, to tensor obrotu $\Phi(\mathbf{x}, t)$ można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathbf{1} - \mathbf{t}_0 \wedge \mathbf{t} + (1 + \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t})^{-1}(\mathbf{t}_0 \wedge \mathbf{t})^2 \\ &= (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t})\mathbf{1} - \mathbf{t}_0 \wedge \mathbf{t} + (1 + \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t})^{-1}(\mathbf{t}_0 \times \mathbf{t}) \otimes (\mathbf{t}_0 \times \mathbf{t}). \end{aligned} \quad (2.7.50)$$

Zauważmy jednak, że tensor obrotu $\Phi(\mathbf{x}, t)$ jest określony przez wektory $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ jedynie z dokładnością do dowolnego obrotu dookoła wektora $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$. Istotnie, jeśli $\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ jest tensorem obrotu takim, że $\bar{\Phi}\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0$, to

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t)\mathbf{t}_0(\mathbf{x}) = \bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)\mathbf{t}_0(\mathbf{x}). \quad (2.7.51)$$

Niemożliwość określenia obrotu dookoła wektora $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ jest, oczywiście, prostą konsekwencją przyjęcia hipotezy kinematycznej (2.7.11). Hipoteza ta ogranicza bowiem klasę dopuszczalnych deformacji powłoki jako ciała trójwymiarowego do takich, w których prostoliniowe włókna materialne w konfiguracji odniesienia pozostają prostoliniowymi w każdej innej konfiguracji.

2.7.8. Równania konstytutywne powłok sprężystych

Istotną zaletą różnych wariantów teorii powłok formułowanych na podstawie hipotez kinematycznych jest to, że równania konstytutywne można tu łatwo wyznaczyć z odpowiednich równań konstytutywnych mechaniki ośrodka ciągłego.

W szczególności, w rozważanym tutaj wariacie teorii powłok z uwzględnieniem hipotezy (2.7.8), wektor wodzący $\vec{y}(\mathbf{x}, t)$ i wektor kierunkowy $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej oraz funkcja $\zeta(\mathbf{x}, \xi, t) \equiv \xi$ całkowicie wyznaczają kinematykę powłoki jako ciała trójwymiarowego. Jeśli więc przyjmiemy, że konfiguracja odniesienia powłoki opisana jest w postaci parametrycznej, to trójwymiarowy gradient deformacji możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{F} = \vec{y}_{,\alpha} \otimes \mathbf{g}^\alpha + \vec{y}_{,\xi} \otimes \mathbf{g}^3, \quad (2.7.52)$$

gdzie pochodne cząstkowe wektora wodzącego (2.7.8) względem współrzędnych powierzchniowych ξ^α i współrzędnej po grubości powłoki $\xi \equiv \xi^3$ dane są wzorami

$$\vec{y}_{,\alpha} = \vec{y}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{d}_{,\alpha} + \zeta_{,\alpha} \mathbf{d}, \quad \vec{y}_{,\xi} = \zeta_{,\xi} \mathbf{d}. \quad (2.7.53)$$

Tak więc, powierzchniowe gradienty deformacji

$$\mathbf{F} = \nabla \vec{y} = \vec{y}_{,\alpha} \otimes \mathbf{a}^\beta, \quad \mathbf{G} = \nabla \mathbf{d} = \mathbf{d}_{,\alpha} \otimes \mathbf{a}^\beta, \quad (2.7.54)$$

łącznie z wektorem kierunkowym \mathbf{d} , gradientem powierzchniowym $\nabla \zeta$ i pochodną $\zeta_{,\xi}$ funkcji ζ całkowicie określają lokalną deformację powłoki jako ciała trójwymiarowego.

Jeśli w rozważanym wariacie teorii powłok dodatkowo założymy szczególną postać funkcji ζ (na przykład $\zeta = \xi$, jak to ma miejsce w wariacie typu Timoszko–Reissnera), to $\nabla \zeta$ i $\zeta_{,\xi}$ będą również wielkościami znanymi i już niezależnymi od deformacji. W tym przypadku dwuwymiarowa funkcja energii sprężystej (2.6.39) przyjmuje postać

$$\Phi(\mathbf{F}, \mathbf{d}, \mathbf{G}) = \frac{1}{2} E h_0 \int_{-1}^{+1} \tilde{W}(\mathbf{F}) \mu \, d\hat{\xi}, \quad (2.7.55)$$

a odpowiednie równania konstytutywne rozważanego wariantu mechaniki powłok sprężystych otrzymamy z zależności

$$\tilde{\mathbf{N}} = \partial_{\mathbf{F}} \Phi(\mathbf{F}, \mathbf{d}, \mathbf{G}), \quad \tilde{\mathbf{n}} = \partial_{\mathbf{d}} \Phi(\mathbf{F}, \mathbf{d}, \mathbf{G}), \quad \tilde{\mathbf{M}} = \partial_{\mathbf{G}} \Phi(\mathbf{F}, \mathbf{d}, \mathbf{G}). \quad (2.7.56)$$

Jeśli jednak przyjmiemy, że funkcja $\zeta = \zeta(\mathbf{x}, \xi, t)$ zależy od lokalnej deformacji powłoki poprzez powierzchniowe gradienty i być może również poprzez wektor kierunkowy \mathbf{d} ,

$$\zeta = \zeta(\mathbf{F}, \mathbf{d}, \mathbf{G}; \xi), \quad (2.7.57)$$

to dwuwymiarowa funkcja energii sprężystej przyjmie postać

$$\Phi(\mathbf{F}, \mathbf{d}, \mathbf{G}, \nabla \mathbf{F}, \mathbf{d}, \nabla \mathbf{G}) = \frac{1}{2} E h_0 \int_{-1}^{+1} \tilde{W}(\mathbf{F}) \mu \, d\hat{\xi}. \quad (2.7.58)$$

Zauważmy, że funkcja energii (2.7.58) zależy również od *drugich* gradientów lokalnej deformacji powłoki, a odpowiadająca jej struktura mechanika powłok powinna być teorią nielokalną wyższego rzędu. Ma to miejsce, na przykład, w teorii skończonych odkształceń powłok wykonanych z materiałów gumopodobnych.

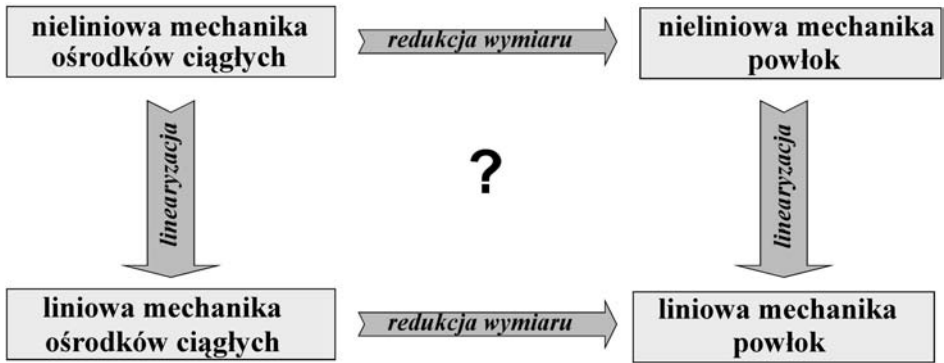
2.8. Liniowa teoria powłok

2.8.1. Natura teorii liniowej

Dotychczas nie były rozpatrywane możliwości uproszczeń podstawowych zależności mechaniki powłok przy dodatkowych ograniczeniach wielkości miar odkształceń i przemieszczeń, gdyż ta książka poświęcona jest przede wszystkim ogólnej nieliniowej teorii powłok. Jednak ogromna liczba problemów konstrukcji powłokowych, analizowanych przy pomocy różnych wariantów liniowej teorii powłok, a także jej szczególne miejsce w rozwoju mechaniki powłok uzasadniają potrzebę pewnej dyskusji teorii liniowej, jako przypadku szczególnego rozwiniętej tu ogólnej teorii nieliniowej.

W mechanice powłok, podobnie jak i w mechanice ośrodka ciągłego, można wyróżnić trzy typy nieliniowości, związane z trzema podstawowymi grupami zależności. I tak, równania konstytutywne są w ogólnym przypadku nieliniowymi zależnościami między powłokowymi miarami naprężeń i odkształceń. Przyjmując te równania w postaci zależności liniowych, możemy mówić o teorii *fizycznie* liniowej. Podobnie, związki geometryczne i kinematyczne, wiążące powłokowe miary odkształceń oraz przesunięcia i obroty, mają również charakter nieliniowy. Jeśli uprościmy te zależności do postaci liniowej, to wynikającą stąd teorię powłok można nazwać teorią *geometrycznie* liniową. Trzecią grupę stanowią zależności dynamiczne — równania ruchu i dynamiczne warunki uboczne — w ogólnym przypadku również nieliniowe. Linearyzując te zależności możemy więc mówić o teorii *dynamicznie* liniowej. Nieliniowość tej ostatniej grupy zależności jest jednak konsekwencją nieliniowości dwóch poprzednich typów. W tym sensie jest to więc nieliniowość wtórna.

Niezależnie od typu nieliniowości, liniową teorię powłok można budować albo jako teorię samodzielną, opartą na odpowiednich dla niej postulatach, albo jako wynik linearyzacji zależności ogólnej nieliniowej teorii powłok sformułowanej w tej książce. Formułowanie liniowej teorii powłok z ogólnych zasad mechaniki ośrodka ciągłego obejmuje dwa procesy: *redukcję wymiaru* zagadnienia z trzech do dwóch oraz konsekwentną *linearyzację* wszystkich zależności. Te dwa procesy można jednak zastosować w różnej kolejności, co ilustruje diagram podany na rys. 2.8.1.



Rys. 2.8.1. Dwa sposoby formułowania liniowej teorii powłok.

Postawmy więc dwa pytania: 1) Czy liniowe teorie powłok, formułowane w wyniku tych dwóch odmiennych procedur, pokrywają się? 2) Jeśli nie, to która z tych dwóch procedur jest poprawna? Problem sprowadza się więc do zweryfikowania, czy w mechanice powłok procesy redukcji wymiaru i linearyzacji są procesami przemianowymi. Poniżej wykażemy, że odpowiedź na pierwsze pytanie jest negatywna. Jedynie konsekwentna linearyzacja uprzednio sformułowanej ogólnej nieliniowej teorii powłok pozwala na poprawne sformułowanie również liniowej teorii powłok.

Istnieje bogata literatura poświęcona wyłącznie liniowej teorii powłok, np. LOVE [1927], GOL'DENWEIZER [1976], CZERNYCH [1964], GREEN i ZERNA [1968], NAGHDI [1963, 1972], AMBARCUMJAN [1974], BAŞAR i KRÄTZIG [1985, 2001], NOWOŻYŁOW, CZERNYCH i MICHAJŁOWSKIJ [1991], a w literaturze polskiej np. GIRKMANN [1957], NOWACKI [1980], ŁUKASIEWICZ [1976], MAZURKIEWICZ i NAGÓRSKI [1987], MAZURKIEWICZ [1995], LEWIŃSKI i TELEGA [2000], gdzie podano obszerną bibliografię źródłową. Celem tego podrozdziału nie jest jednak obszerne omawianie podstawowych zależności tej teorii, lecz jedynie próba nasświetlenia pewnych aspektów związanych z jej formułowaniem.

Zwróćmy uwagę, że jeśli przyjmijemy za punkt wyjścia *liniową* teorię ośrodka ciągłego i powtórzymy dokładnie całe postępowanie, które stosowaliśmy w przypadku teorii nieliniowej, to jego wynikiem będzie *pięcioparametrowa*, a nie sześcioparametrowa liniowa teoria powłok! W ramach teorii liniowej konfiguracja aktualna powłoki jako ciała trójwymiarowego jest bowiem zwykle od początku utożsamiana z konfiguracją odniesienia. W konsekwencji, w prawie zachowania momentu pędu wektor wodzący $\vec{y}(\mathbf{x}, \xi, t)$ zastępuje się wektorem wodzącym $\vec{x}(\mathbf{x}, \xi)$, który można przyjąć w postaci (1.8.9). Wówczas jednak składowe wektora przekrojowych momentów $\mathbf{m}_\nu(\mathbf{x}, t)$, wektora wypadkowego momentu obciążeń brzegowych $\mathbf{m}^*(s, t)$ i wektora powierzchniowej gęstości momentu pędu $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ na kierunku wektora $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ nie są określone, a układ niezależnych, lokalnych, liniowych równań ruchu redukuje się z sześciu do pięciu.

Formułując zasadę pracy wirtualnej, jak w podrozdziale 1.5, w wyniku identycznego jak w podrozdziale 1.6 postępowania, otrzymamy, że kinematyka powłoki jako dwuwymiarowego kontinuum, energetycznie odpowiadająca takim liniowym równaniom dynamiki, jest całkowicie określona przez trzy składowe wektora przesunięć $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej oraz tylko *dwie* niezależne składowe jednostkowego wektora kierunkowego $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$. Procedura wyprowadzenia zależności liniowej mechaniki powłok, przez redukcję wymiarową uprzednio zlinearyzowanych zależności mechaniki ośrodka ciągłego, jest więc procedurą *ułomną*. Pozostawia ona z definicji nieokreślonym spełnienie zasady zachowania momentu pędu w kierunku $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$. A ten fakt uniemożliwia wprowadzenie do rozważań szóstego niezależnego stopnia swobody — tzw. *kąta owinięcia* wokół $\mathbf{t}_0(\mathbf{x})$ (ang. *drilling rotation*) — niezbędnego w poprawnym modelowaniu łączenia płatów powłok w wielopłatowe, nieregularne konstrukcje inżynierskie.

W dalszej części tego podrozdziału przedstawimy poprawne wyprowadzenie podstawowych zależności liniowej teorii powłok, jako wyniku konsekwentnej linearyzacji odpowiednich dwuwymiarowych zależności teorii nieliniowej, czyli stosując procedurę naszkicowaną po prawej stronie rys. 2.8.1.

2.8.2. Założenia liniowej teorii powłok

Teoria liniowa formułowana jest w przypadku, gdy przesunięcia i obroty oraz ich gradienty są w określonym sensie *małe*.

Przypomnijmy, że tensor obrotu $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ można jednoznacznie wyrazić przez skośnie symetryczny tensor $\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, t)$, wykorzystując definicję funkcji wykładniczej

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \exp \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, t), \quad \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \text{ad}^{-1} \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, t). \quad (2.8.1)$$

Wprowadzając definicje

$$\varepsilon_1 = \max_{\mathbf{x} \in M} \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|, \quad \varepsilon_2 = \max_{\mathbf{x} \in M} \|\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)\|, \quad (2.8.2)$$

w dalszym ciągu będziemy zakładali, że

$$\varepsilon \equiv \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \ll 1. \quad (2.8.3)$$

Przy tym założeniu, z rozwinięcia funkcji wykładniczej mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \exp \mathbf{\Psi} = \mathbf{1} + \mathbf{\Psi} + \frac{1}{2} \mathbf{\Psi}^2 + \dots = \mathbf{1} + \mathbf{\Psi} + O(\varepsilon^2), \\ \mathbf{Q}^T &= \exp(-\mathbf{\Psi}) = \mathbf{1} - \mathbf{\Psi} + \frac{1}{2} \mathbf{\Psi}^2 - \dots = \mathbf{1} - \mathbf{\Psi} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

Tak więc, w ramach teorii liniowej tensor obrotu i jego transpozycja przyjmują postać

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} + \mathbf{\Psi}, \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{1} - \mathbf{\Psi}, \quad (2.8.5)$$

a poprawność tego przybliżenia wynika z warunku ortogonalności

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\Psi})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\Psi}) = \mathbf{1} + \boldsymbol{\Psi}^2 = \mathbf{1} + O(\varepsilon^2). \quad (2.8.6)$$

Wykorzystując rozwinięcie (2.8.4) i wyrażając powierzchniowy gradient deformacji $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ przez powierzchniowy gradient pola przesunięć, $\mathbf{F} = \mathbf{I}_0 + \nabla \mathbf{u}$, mamy

$$\mathbf{F} - \mathbf{Q}\mathbf{I}_0 = \nabla \mathbf{u} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q})\mathbf{I}_0 = \nabla \mathbf{u} + \{-\boldsymbol{\Psi} + O(\varepsilon^2)\}\mathbf{I}_0. \quad (2.8.7)$$

Obliczając natomiast powierzchniowy gradient z (2.8.5)₁, otrzymujemy

$$\nabla \mathbf{Q} = \nabla \boldsymbol{\Psi} + O(\varepsilon^2/L), \quad (2.8.8)$$

gdzie L jest charakterystyczną długością fali deformacji, którą definiuje się następująco:

$$\|\nabla \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t)\| \leq \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t)\|/L(\mathbf{x}, t), \quad L = \max_{\mathbf{x} \in M} L(\mathbf{x}, t). \quad (2.8.9)$$

Zauważmy również, że w ramach teorii liniowej zanika różnica pomiędzy reprezentacją przestrzenną a materialną.

2.8.3. Zagadnienie początkowo-brzegowe liniowej teorii powłok

W ramach teorii liniowej zanika różnica między konfiguracją odniesienia a konfiguracją aktualną (odkształconą) powłoki. W rezultacie, w teorii liniowej pęd i moment pędu dowolnej części powłoki otrzymamy, zastępując wektor wodzący $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ wektorem wodzącym $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{p}(\mathcal{P}, t) = \iint_{\Pi} \mathbf{p} \, da, \quad \mathbf{m}(\mathcal{P}, t) = \iint_{\Pi} (\mathbf{s} + \vec{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \, da. \quad (2.8.10)$$

W wyniku tego podstawienia również wypadkowe siła i moment, działające na dowolną część powłoki, przyjmują uproszczoną postać

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi} \mathbf{f} \, da + \int_{\partial \Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{n}_\nu \, dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{n}^* \, dl, \\ \mathbf{t}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi} (\mathbf{c} + \vec{\mathbf{x}} \times \mathbf{f}) \, da + \int_{\partial \Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{m}_\nu + \vec{\mathbf{x}} \times \mathbf{n}_\nu) \, dl \\ &\quad + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{m}^* + \vec{\mathbf{x}} \times \mathbf{n}^*) \, dl, \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

gdzie wektory przekrojowych sił i momentów mogą być wyrażone znanymi wzorami przez powłokowe miary naprężeń

$$\mathbf{n}_\nu(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{m}_\nu(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}). \quad (2.8.12)$$

Lokalne równania ruchu przyjmują tu więc postać

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \mathbf{N} + \mathbf{f} &= \dot{\mathbf{p}}, \\ \operatorname{Div} \mathbf{M} + \operatorname{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{I}_0^T - \mathbf{I}_0\mathbf{N}^T) + \mathbf{c} &= \dot{\mathbf{s}}, \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

natomiast *dynamiczne warunki brzegowe* mają formalnie identyczną postać, jak w teorii nieliniowej:

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}^*, \quad \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{m}^*. \quad (2.8.14)$$

Ponieważ w teorii liniowej $\mathbf{F} = \mathbf{I}_0 + \nabla \mathbf{u} = \mathbf{I}_0 + O(\varepsilon)$, równania (2.8.13) są więc zlinearyzowaną postacią równań nieliniowych (podrozdział 1.4), w których powierzchniowy gradient deformacji zastępuje się operatorem inkluzji $\mathbf{I}_0 = \nabla \bar{\mathbf{x}}$.

W teorii liniowej wektor wodzący $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ i tensor struktury $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ w konfiguracji odkształconej można zapisać jako

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t))\mathbf{T}_0(\mathbf{x}). \quad (2.8.15)$$

Kinematycznymi zmiennymi niezależnymi są więc wektor przesunięć $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ powierzchni podstawowej i wektor zlinearyzowanego obrotu $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{ad}^{-1}\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t)$.

Podobnie jak w teorii nieliniowej, tensory $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ i $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ możemy tu przedstawić poprzez wektory kierunkowe (podrozdział 1.6). Wówczas z (2.8.15) otrzymamy zależności

$$\mathbf{t}_i = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\Psi})\mathbf{t}_i^0 = \mathbf{t}_i^0 + \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{t}_i^0, \quad \mathbf{t}_i^0 = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\Psi})\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_i - \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{t}_i. \quad (2.8.16)$$

Wynika stąd również, że w ramach teorii liniowej pola prędkości translacyjnej i obrotowej na powierzchni podstawowej powłoki są pochodnymi niezależnych zmiennych kinematycznych

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \dot{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.8.17)$$

Z (2.8.7) i (2.8.8) przy wykorzystaniu (2.8.5) wynika, że w teorii liniowej tensory powłokowych miar odkształceń upraszczają się do postaci

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \nabla \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t). \quad (2.8.18)$$

Ponieważ ruch powłoki jest opisany przez (2.8.15), *kinematyczne warunki brzegowe* mają postać

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t), \quad \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{x}, t). \quad (2.8.19)$$

W liniowej teorii powłok sprężystych funkcją gęstości energii sprężystej jest funkcja kwadratowa (2.2.34), która, zgodnie z (2.2.25), prowadzi do *liniowych równań konstytutywnych*, w szczególności o postaci (2.2.36).

Kinetyczne równania konstytutywne (2.2.41) liniowej teorii powłok sprężystych nie powinny zależeć od \mathbf{E} i \mathbf{K} , bo konfiguracje aktualna i odniesienia są tu utożsamiane, a tensory bezwładności \mathbf{J}_A w (2.2.42) w przybliżeniu spełniają warunki (2.2.43). Prowadzi to do najprostszych *kinetycznych równań konstytutywnych* postaci

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}, \quad \mathbf{s} = I_0 \boldsymbol{\omega}. \quad (2.8.20)$$

Warunki początkowe (2.3.7) w punktach $\mathbf{x} \in M \cup \partial M$ w chwili $t_0 = 0$ redukują się do

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, 0) &= \boldsymbol{\psi}_0(\mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), & \dot{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, t_0) &= \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.8.21)$$

W przypadku powłok kawałkami regularnych, w punktach stacjonarnych koherentnych krzywych osobliwych $\mathbf{x} \in \Gamma$ muszą być dodatkowo spełnione *dynamiczne i kinematyczne warunki ciągłości*

$$[\mathbf{n}_\nu] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{m}_\nu] + [\vec{\mathbf{x}} \times \mathbf{n}_\nu] = \mathbf{0}, \quad (2.8.22)$$

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{Q}] = \mathbf{0}. \quad (2.8.23)$$

Reasumując, lokalne równania ruchu (2.8.13), materiałowe i kinetyczne równania konstytutywne (2.2.36) i (2.8.20), definicje pól prędkości (2.8.17), zależności kinematyczne (2.8.18), dynamiczne (2.8.14) i kinematyczne (2.8.19) warunki brzegowe, warunki początkowe (2.8.21) oraz dynamiczne (2.8.22) i kinematyczne (2.8.23) warunki ciągłości tworzą razem zagadnienie początkowo-brzegowe liniowej teorii kawałkami regularnych powłok sprężystych.

2.8.4. Parametryczny opis liniowej teorii powłok

Jeśli powierzchnia podstawowa powłoki jest opisana w postaci parametrycznej, to

$$\mathbf{N} = \mathbf{n}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha, \quad \mathbf{M} = \mathbf{m}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha, \quad (2.8.24)$$

i lokalne równania ruchu (2.8.13) przyjmują postać znaną z klasycznej liniowej teorii powłok

$$\mathbf{n}^\alpha|_\alpha + \mathbf{f} = \dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{m}^\alpha|_\alpha + \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha + \mathbf{c} = \dot{\mathbf{s}}. \quad (2.8.25)$$

Dynamiczne warunki brzegowe (2.8.14) można zapisać w postaci

$$\mathbf{n}^\alpha \nu_\alpha = \mathbf{n}^*, \quad \mathbf{m}^\alpha \nu_\alpha = \mathbf{m}^*, \quad (2.8.26)$$

gdzie ν_α są składowymi w bazie naturalnej wersora zewnętrznej normalnej do brzegu ∂M powierzchni podstawowej powłoki.

Wektory kierunkowe $\{t_i^0(\mathbf{x})\}$ można utożsamić z wektorami bazy naturalnej $\{\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}), \mathbf{a}_3(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{n}(\mathbf{x})\}$ powierzchni podstawowej. Przyjmując taki wybór wektorów kierunkowych, z (2.8.16) otrzymamy

$$t_i(\mathbf{x}, t) = \{\mathbf{1} + \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t)\} \mathbf{a}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{a}_i(\mathbf{x}). \quad (2.8.27)$$

Jeśli wektory przesunięcia i zlinearyzowanego obrotu przedstawimy w składowych względem bazy naturalnej

$$\mathbf{u} = u_\alpha \mathbf{a}^\alpha + w \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\psi} = \mathbf{n} \times (\psi_\alpha \mathbf{a}^\alpha) + \psi \mathbf{n}, \quad (2.8.28)$$

zależności (2.8.27) przyjmą postać

$$\begin{aligned} t_\alpha &= \mathbf{a}_\alpha + \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{a}_\alpha = (a_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta} \psi) \mathbf{a}^\beta - \psi_\alpha \mathbf{n}, \\ t &= \mathbf{n} + \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{n} = \mathbf{n} + \psi_\alpha \mathbf{a}^\alpha. \end{aligned} \quad (2.8.29)$$

Wektor zlinearyzowanego obrotu można teraz wyrazić również następująco:

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^i \times t_i = \frac{1}{2} \mathbf{a}^\alpha \times t_\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times t, \quad (2.8.30)$$

a wówczas składowe tego wektora dane są wzorami

$$\psi_\alpha = -t_\alpha \cdot \mathbf{n} = t \cdot \mathbf{a}_\alpha, \quad \psi = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} t_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta. \quad (2.8.31)$$

Miary odkształceń (2.8.18) możemy teraz przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha, & \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha &= \mathbf{u}_{,\alpha} - \boldsymbol{\psi} \times \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha}, \\ \mathbf{K} &= \boldsymbol{\kappa}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha, & \boldsymbol{\kappa}_\alpha &= \boldsymbol{\psi}_{,\alpha}. \end{aligned} \quad (2.8.32)$$

Definiując składowe wektorów odkształceń

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta + \varepsilon_\alpha \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\kappa}_\alpha = \mathbf{n} \times (\kappa_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta) + \kappa_\alpha \mathbf{n}, \quad (2.8.33)$$

z (2.8.32) otrzymujemy następujące związki kinematyczne liniowej teorii powłok:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta - \epsilon_{\alpha\beta} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n}, & \varepsilon_\alpha &= \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{n} + \epsilon_{\alpha\beta} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{a}^\beta, \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \boldsymbol{\psi}_{,\alpha} \cdot \epsilon_{\beta\lambda} \mathbf{a}^\lambda, & \kappa_\alpha &= \boldsymbol{\psi}_{,\alpha} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.8.34)$$

Uwzględniając następnie zależności

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,\alpha} &= (u_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha} w) \mathbf{a}^\lambda + (w_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda) \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\psi}_{,\alpha} &= (\epsilon^{\beta\lambda} \psi_{\beta|\alpha} - b_\alpha^\lambda \psi) \mathbf{a}_\lambda + (\psi_{,\alpha} - \epsilon_{\lambda\beta} b_\alpha^\lambda \psi^\beta) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.8.35)$$

i (2.8.28)₂, związki kinematyczne (2.8.34) przyjmują postać

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= u_{\beta|\alpha} - b_{\alpha\beta}w - \epsilon_{\alpha\beta}\psi, & \varepsilon_{\alpha} &= w_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\beta}u_{\beta} + \psi_{\alpha}, \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \psi_{\beta|\alpha} - \epsilon_{\beta\lambda}b_{\alpha}^{\lambda}\psi, & \kappa_{\alpha} &= \psi_{,\alpha} - \epsilon_{\lambda\beta}b_{\alpha}^{\lambda}\psi^{\beta}.\end{aligned}\quad (2.8.36)$$

W teorii liniowej składowe wektorów przekrojowych sił i momentów są określone poprzez rozkłady

$$\mathbf{n}^{\alpha} = N^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\beta} + Q^{\alpha} \mathbf{n}, \quad \mathbf{m}^{\alpha} = \mathbf{n} \times (M^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\beta}) + M^{\alpha} \mathbf{n}. \quad (2.8.37)$$

Uwzględniając przy tym wzory na pochodne kowariantne wektorów bazy naturalnej

$$\mathbf{a}_{\alpha|\beta} = b_{\alpha\beta} \mathbf{n}, \quad \mathbf{a}^{\alpha}{}_{|\beta} = b_{\beta}^{\alpha} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}_{|\beta} = -b_{\beta}^{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha}, \quad (2.8.38)$$

równania ruchu (2.8.25), zapisane w składowych w bazie $\{\mathbf{a}_{\alpha}, \mathbf{n}\}$, przyjmują postać

$$\begin{aligned}N^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} - b_{\alpha}^{\beta}Q^{\alpha} + f^{\beta} &= \dot{p}^{\beta}, \\ Q^{\alpha}{}_{|\alpha} + b_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta} + f &= \dot{p}, \\ M^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} - Q^{\beta} + \epsilon^{\lambda\beta}b_{\lambda\alpha}M^{\alpha} + c^{\beta} &= \dot{s}^{\beta}, \\ M^{\alpha}{}_{|\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta}(N^{\alpha\beta} - b_{\lambda}^{\alpha}M^{\lambda\beta}) + c &= \dot{s}.\end{aligned}\quad (2.8.39)$$

Jest to układ *sześciu* niezależnych równań skalarnych liniowej dynamiki powłok, którym odpowiada *sześć* niezależnych składowych stanu przemieszczenia (2.8.28).

Z dotychczasowych rozważań wynika więc, że poprawna i formalna linearyzacja podstawowych równań i zależności ogólnej nieliniowej teorii powłok prowadzi do *sześcioparametrowej*, a nie *pięcioparametrowej* liniowej teorii powłok. W szczególności, linearyzacja powierzchniowych zależności nieliniowych pozwala na poprawne określenie i interpretację wszystkich składowych momentów (2.8.12)₂, (2.8.20)₂ i (2.8.26)₂ poprzez odpowiednie pola trójwymiarowe liniowej mechaniki ośrodka ciągłego.

2.8.5. Dyskusja

Poszukując dodatkowych argumentów, pozwalających lepiej zrozumieć istotę problemu, rozważmy warunki ciągłości odkształceń liniowej teorii powłok, które, zapisane we współrzędnych powierzchniowych, przyjmują postać (REISNER [1974])

$$\epsilon^{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha|\beta} - \vec{x}_{,\alpha} \times \kappa_{\beta}) = \mathbf{0}, \quad \epsilon^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha|\beta} = \mathbf{0}. \quad (2.8.40)$$

Przy pomocy tożsamości

$$\epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\alpha} \times \kappa_{\beta} = (\mathbf{n} \cdot \kappa_{\alpha}) \mathbf{a}^{\alpha} - (\mathbf{a}^{\alpha} \cdot \kappa_{\alpha}) \mathbf{n} \quad (2.8.41)$$

równanie wektorowe (2.8.40)₁ można zapisać w postaci

$$\epsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha|\beta} - (\mathbf{n} \cdot \kappa_{\alpha}) \mathbf{a}^{\alpha} + (\mathbf{a}^{\alpha} \cdot \kappa_{\alpha}) \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (2.8.42)$$

Mnożąc skalarnie równanie (2.8.42) przez \mathbf{a}_λ , otrzymamy

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\lambda = \epsilon^{\alpha\beta} \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha|\beta} \cdot \mathbf{a}_\lambda = \epsilon^{\alpha\beta} (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\lambda)_{|\beta} - \epsilon^{\alpha\beta} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{\lambda|\beta}, \quad (2.8.43)$$

co przy definicjach (2.8.33) składowych wektorów odkształceń prowadzi do zależności

$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} (\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\lambda|\beta} - b_{\lambda\beta} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha). \quad (2.8.44)$$

Zależność (2.8.44) może być wykorzystana do eliminacji składowych $\boldsymbol{\kappa}_\alpha$ z równań konstytutywnych liniowej teorii powłok sprężystych. Wówczas składowe M^α wektora przekrojowych momentów możemy również wyeliminować ze wszystkich innych równań liniowej teorii powłok. W wyniku takiej eliminacji można pozornie zredukować liniową teorię powłok z sześcioparametrowej do pięcioparametrowej.

Zauważmy jednak, że eliminacja $\boldsymbol{\kappa}_\alpha$ z równań konstytutywnych przy wykorzystaniu (2.8.44) prowadzi do zależności tak otrzymanych równań od *pochodnych* powierzchniowych składowych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\lambda|\beta}$. Wynikiem takiego postępowania będzie więc liniowa teoria powłok *wyższego rzędu*. Dlatego redukcja teorii sześcioparametrowej do pięcioparametrowej w ramach klasycznej liniowej teorii powłok nie wydaje się być w ogólnym przypadku możliwa bez wprowadzenia dodatkowych założeń upraszczających.

Powróćmy teraz do rozważań z punktu 2.5.3. W nieliniowej analizie trójwymiarowej kinematyki powłoki korzystaliśmy tam z formalnej reprezentacji wektora wodzącego $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t)$ w konfiguracji aktualnej w postaci

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) &= \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \xi, t) \\ &= \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \{ \xi \mathbf{t}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t) \}. \end{aligned} \quad (2.8.45)$$

W teorii liniowej tensor obrotu $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ jest określony przez tensor skośnie symetryczny $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ wzorem (2.8.5). W rezultacie, wektor wodzący powłoki odkształconej (2.8.45) w teorii liniowej przyjmuje postać

$$\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \xi \{ \mathbf{t}_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{t}_0(\mathbf{x}) \} + \mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t). \quad (2.8.46)$$

Trójwymiarowy gradient deformacji $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ w teorii liniowej redukuje się do

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u} \approx (\mathbf{1} + \boldsymbol{\Psi})(\mathbf{1} + \boldsymbol{\Theta}) \approx \mathbf{1} + \boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\Theta}, \quad (2.8.47)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\Theta} = \{ \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha(\xi \mathbf{t}_0 + \mathbf{e}) \} \otimes \mathbf{g}^\alpha + \nabla \mathbf{e}. \quad (2.8.48)$$

Zwróćmy uwagę, że nie ma podstaw, aby w (2.8.46) lub (2.8.48) pominąć wektor odkształcenia wewnętrznego $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t)$. Rozważania zawarte w końcowej części p. 2.6.5 wskazują, że przy spełnieniu pewnych warunków istnieje potencjalna możliwość wyrażenia wektora $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t)$ przez wektory miar odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ i $\boldsymbol{\kappa}_\alpha(\mathbf{x}, t)$ zależnością (2.6.58). W najprostszym przypadku liniowej teorii powłok będzie to zależność liniowa i wektor $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \xi, t)$ musi być zawsze ujęty

w (2.8.46) poprzez swój składnik liniowy. Jeśli jednak w ogóle pominiemy ten wektor w (2.8.46), to w tak uproszczonym wyrażeniu nie wystąpi składowa wektora zlinearyzowanego obrotu $\psi(\mathbf{x}, t)$ wzdłuż wektora $\mathbf{t}_0(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{n}(\mathbf{x})$. Bezpośrednią konsekwencją tego faktu jest to, że liniowa teoria powłok, którą można sformułować przy tym dodatkowym założeniu, staje się teorią *pięcioparametrową*, a nie sześcioparametrową.

Powyższe rozważania wskazują, że w mechanice powłok procedury linearyzacji i redukcji wymiaru z trzech do dwóch nie są na ogół przemienne, a ich zastosowanie w odmiernej kolejności prowadzi do dwóch *różnych* sformułowań liniowej teorii powłok. Jedyne konsekwentna linearyzacja wyprowadzonych tu dynamicznie i kinematycznie ścisłych zależności dwuwymiarowych nieliniowej mechaniki powłok prowadzi do sformułowania kompletnego i poprawnego zagadnienia początkowo-brzegowego sześcioparametrowej liniowej mechaniki powłok.

Złożone konstrukcje powłokowe

3.1. Podstawowe zależności nieliniowej mechaniki prętów

3.1.1. Pręty i konstrukcje prętowe

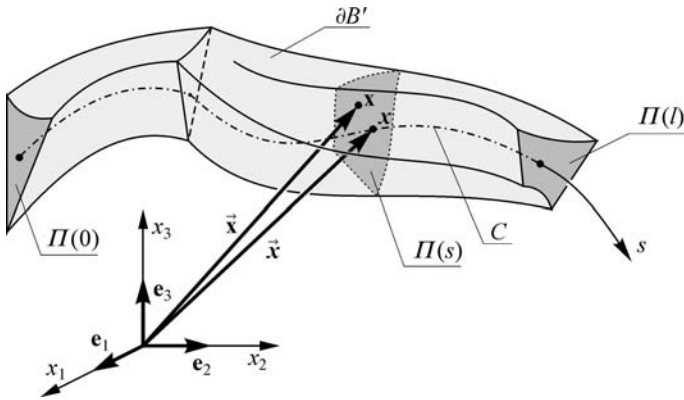
Charakterystyczną klasą konstrukcji inżynierskich, obok konstrukcji powłokowych, są konstrukcje prętowe.

Teoria powłok i teoria prętów są na ogół formułowane niezależnie, często wychodząc z odmiennych koncepcji. Wynika to przede wszystkim z odmiennych hipotez kinematycznych na ogół wprowadzanych przy formułowaniu tych teorii. W rezultacie, struktury matematyczne różnych wariantów teorii powłok i teorii prętów formułowanych w różnych publikacjach są na ogół całkowicie różne. Na przykład, klasyczna teoria powłok typu Kirchhoffa–Love’a w ogóle nie ma swego odpowiednika w teorii prętów.

Procesy formułowania ogólnej teorii powłok i ogólnej teorii prętów mają jednak wiele cech wspólnych, które można ująć we wspólnym podejściu (zob. np. WOŹNIAK i KLEIBER [1982], ANTMAN [1997]). Staje się to szczególnie wyraźne w ramach podejścia mieszanego, używanego w rozdz. 1 i 2 tej książki przy formułowaniu ogólnej teorii powłok. W ramach takiego podejścia formułowanie teorii prętów sprowadza się do powtórzenia i odpowiedniego zinterpretowania każdego kroku formułowania teorii powłok. Tutaj ograniczymy się więc jedynie do zestawienia podstawowych równań i zależności ogólnej mechaniki prętów uzyskanych przez analogię do mechaniki powłok, rozwiniętej w rozdz. 1 i 2.

Jedną z trudności formułowania teorii prętów jest precyzyjne określenie tego co rozumiemy pod pojęciem „pręt” (z podobnymi trudnościami sprecyzowania pojęć mieliśmy do czynienia w teorii powłok). Jeśli jednak ograniczymy się do klasy powłok regularnych omawianych w rozdz. 1 i klasy prętów regularnych, to istnieją ściśle analogie między ciałem powłokopodobnym i ciałem prętopodobnym oraz między teorią powłok i teorią prętów. Te analogie wynikają z możliwej zamiany ról, jakie odgrywają powierzchnie graniczne i powierzchnia boczna w obu tych teoriach, por. ANTMAN [1995].

W dowolnie wyróżnionej konfiguracji odniesienia (rys. 3.1.1) obszar B , zajmowany przez pręt jako ciało trójwymiarowe, ma brzeg, będący sumą powierzchni bocznej $\partial B'$ (odpowiednik powierzchni granicznych M^\pm powłoki) oraz przekrojów początkowego $\Pi_P = \Pi(0)$ i końcowego $\Pi_K = \Pi(l)$ (odpowiedniki powierzchni bocznej $\partial B'$ powłoki). Całkowity brzeg takiego obszaru B jest więc

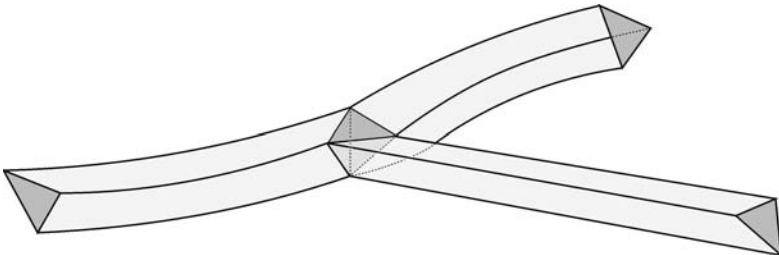


Rys. 3.1.1. Trójwymiarowe ciało prętopodobne.

sumą trzech części, $\partial B = \partial B' \cup \Pi_P \cup \Pi_K$, podobnie jak to ma miejsce w teorii powłok regularnych.

Ogólną teorię prętów formułuje się przez wielkości dynamiczne i kinematyczne, zdefiniowane wyłącznie na osi pręta (odpowiednik powierzchni podstawowej powłoki). *Ośią pręta*, na której formułuje się wszystkie zależności nieliniowej mechaniki prętów, może być dowolnie wyróżniona krzywa C wewnątrz obszaru B , przecinająca powierzchnie przekrojów początkowego i końcowego.

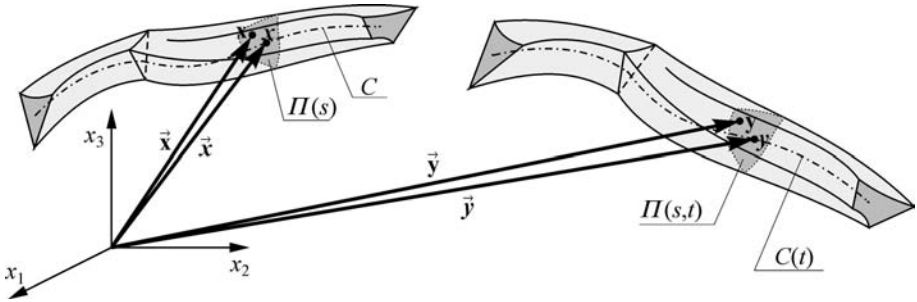
Regularnym ciałem prętopodobnym nazywamy każdą konstrukcję, dla której można zdefiniować jednoznacznie oś i przekrój poprzeczny. Jednak już prosty przykład z rys. 3.1.2 ilustruje, że wielu popularnych konstrukcji inżynierskich nie da się zaliczyć do tak określonej klasy prętów regularnych. W tym podrozdziale zajmiemy się więc jedynie kawałkami regularnym ciałem prętopodobnym, dla którego teorię prętów można sformułować w sposób analogiczny do formułowania teorii powłok dla kawałkami regularnego ciała powłokopodobnego (rozdz. 1).



Rys. 3.1.2. Połączenie elementów konstrukcji, w którym nie można zdefiniować przekroju poprzecznego.

Dla pręta traktowanego jako ciało trójwymiarowe obowiązują zasady mechaniki ośrodków ciągłych (podrozdział 1.1). Wykorzystując specyficzną geometrię

kawałkami regularnego ciała prętopodobnego, problem trójwymiarowy mechaniki ośrodków ciągłych można sprowadzić do problemu jednowymiarowej mechaniki prętów, w którym wszystkie wielkości dynamiczne i kinematyczne są określone jedynie na osi pręta. Otrzymany model jednowymiarowy nazywamy *teorią prętów*.



Rys. 3.1.3. Deformacja pręta jako ciała trójwymiarowego.

Formułując teorię prętów będziemy używali oznaczeń analogicznych do przyjętych w rozdz. 1 przy formułowaniu teorii powłok. W szczególności, oznaczenia przyjęte przy opisie geometrii konfiguracji odniesienia i aktualnej pręta oraz opisie jego deformacji wyjaśnia rys. 3.1.3. Dla wygody przyjmijmy również, że oś pręta C w konfiguracji odniesienia jest dana w postaci parametrycznej, a wektor wodzący dowolnego punktu $x \in C$ można traktować jako funkcję wektorową $\vec{x} = \vec{x}(s)$ długości łuku s wzdłuż C .

3.1.2. Całkowe zasady mechaniki prętów

Oznaczmy przez \mathcal{R} reprezentujące pręt jednowymiarowe kontinuum, a przez \mathcal{P} tę jego część, która odpowiada części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} , zawartej w konfiguracji odniesienia między dwoma dowolnie wybranymi przekrojami poprzecznymi Π^- i Π^+ .

Niech R oznacza część osi pręta w konfiguracji odniesienia, która odpowiada części P obszaru B . Wówczas dla każdej wielkości dynamicznej, występującej w zasadach mechaniki ośrodków ciągłych (1.1.4)–(1.1.6), odpowiednią wielkość w mechanice prętów definiuje się wzorami identycznymi do (1.3.1). Dlatego zasady mechaniki prętów przyjmują formalnie postać identyczną jak zasady mechaniki powłok (1.3.2)–(1.3.4). W przypadku mechaniki prętów należy jedynie wprowadzić odmienne definicje wielkości przekrojowych, mierzonych tu na jednostkę długości osi C . Definiujemy następujące zależności:

gęstość masy $m_0(s)$

$$\int_{-}^{+} m_0 ds \equiv \iiint_P \rho_0 dv, \quad (3.1.1)$$

gęstości pędu $\mathbf{p}(s, t)$ i momentu pędu $\mathbf{s}(s, t)$

$$\int_{-}^{+} \mathbf{p} \, ds \equiv \iiint_P \rho_0 \mathbf{v} \, dv, \quad (3.1.2)$$

$$\int_{-}^{+} (\mathbf{s} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \, ds \equiv \iiint_P \rho_0 \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{v} \, dv,$$

wektory zewnętrznych sił $\mathbf{f}(s, t)$ i momentów $\mathbf{c}(s, t)$

$$\int_{-}^{+} \mathbf{f} \, ds \equiv \iiint_P \mathbf{f} \, dv + \iint_{\partial P'} \mathbf{t}_n \, da, \quad (3.1.3)$$

$$\int_{-}^{+} (\mathbf{c} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f}) \, ds \equiv \iiint_P \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f} \, dv + \iint_{\partial P'} \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{t}_n \, da,$$

wektory przekrojowych sił $\mathbf{n}(s, t)$ i momentów $\mathbf{m}(s, t)$

$$\mathbf{n}(s, t) \equiv \iint_{\Pi(s)} \mathbf{t}_n \, da, \quad (3.1.4)$$

$$(\mathbf{m} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n})(s, t) \equiv \iint_{\Pi(s)} \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{t}_n \, da.$$

W powyższych wzorach $\int_{-}^{+}(\cdot) \, ds$ oznacza całkę krzywoliniową obliczoną wzdłuż osi pręta w granicach odpowiadających przekrojom poprzecznym Π^{-} i Π^{+} .

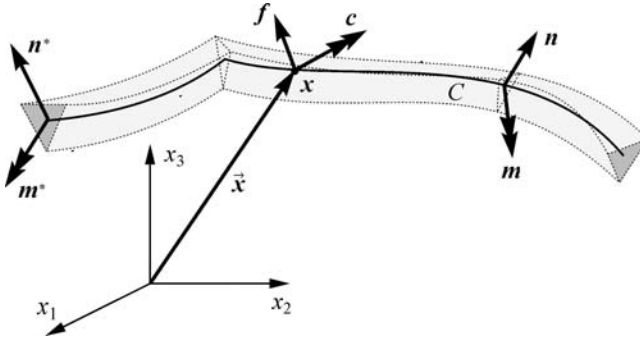
Definicje (3.1.1) i (3.1.2) określają całkowitą masę oraz całkowity pęd i moment pędu części \mathcal{P} ciała prętopodobnego \mathcal{R} , wyrażone przez wielkości sprowadzone do osi pręta:

$$\mathbf{m}(\mathcal{R}, t) = \int_{-}^{+} m_0 \, ds, \quad \mathbf{p}(\mathcal{R}, t) = \int_{-}^{+} \mathbf{p} \, ds, \quad \mathbf{m}(\mathcal{R}, t) = \int_{-}^{+} (\mathbf{s} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \, ds, \quad (3.1.5)$$

natomiast definicje (3.1.3) i (3.1.4) określają wypadkową siłę i wypadkowy moment działające na część \mathcal{P} ciała prętopodobnego \mathcal{R} , również wyrażone przez wielkości sprowadzone do osi pręta:

$$\mathbf{f}(\mathcal{R}, t) = \int_{-}^{+} \mathbf{f} \, ds + [\mathbf{n}]_{-}^{+}, \quad \mathbf{t}(\mathcal{R}, t) = \int_{-}^{+} (\mathbf{c} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f}) \, ds + [\mathbf{m} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}]_{-}^{+}. \quad (3.1.6)$$

Tutaj $[\cdot]_{-}^{+} = (\cdot)^{+} - (\cdot)^{-}$, gdzie $(\cdot)^{-}$ i $(\cdot)^{+}$ oznaczają wartości pól (\cdot) w punktach osi pręta C , odpowiadających przekrojom poprzecznym Π^{-} i Π^{+} .



Rys. 3.1.4. Przekrojowe siły i momenty działające na dowolną część pręta.

Całkowe zasady mechaniki prętów przyjmują więc postać

$$\left[\int_{-}^{+} \mathbf{p} \, ds \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-}^{+} \mathbf{f} \, ds + [\mathbf{n}]_{-}^{+} \right\} dt, \quad (3.1.7)$$

$$\left[\int_{-}^{+} (\mathbf{s} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) \, ds \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-}^{+} (\mathbf{c} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f}) \, ds + [\mathbf{m} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}]_{-}^{+} \right\} dt.$$

Porównując (3.1.7) z zasadami zachowania pędu (1.3.18) i momentu pędu (1.3.19) mechaniki powłok, łatwo zauważyć identyczną strukturę tych zasad dla prętów i powłok.

3.1.3. Lokalne równania ruchu pręta i dynamiczne warunki uboczne

Przyjmując, że oś pręta w konfiguracji odniesienia jest opisana wektorem wodzącym $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(s)$, gdzie $s \in [0, l]$ oznacza parametr długości łuku, wektor wodzący w konfiguracji odkształconej można wyrazić w postaci

$$\vec{\mathbf{y}}(s, t) = \vec{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{u}(s, t), \quad (3.1.8)$$

gdzie \mathbf{u} oznacza wektor przesunięcia osi pręta. Będziemy przy tym zakładali, że zarówno $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(s)$ jak i $\vec{\mathbf{y}}(s, t)$ są funkcjami odcinkowo ciągłymi i różniczkowalnymi.

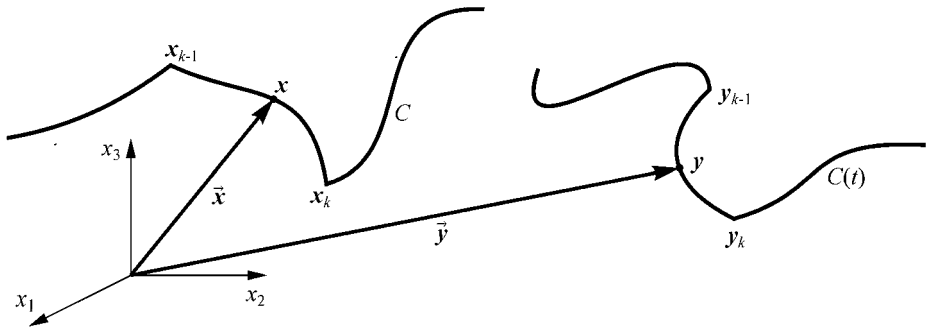
Jeśli $f(s)$ jest funkcją odcinkami gładką na $[0, l]$ i taką, że pochodna $f'(s)$ istnieje na otwartych przedziałach (s_{k-1}, s_k) , to $f(s)$ jest funkcją całkowaną na domkniętych przedziałach $[s_{k-1}, s_k]$. Jeśli ponadto istnieją prawo- i lewostronne

granice $f(s_k - 0)$ i $f(s_k + 0)$ w punktach s_k , to

$$\begin{aligned} \int_0^l f'(s) ds &= \sum_{k=1}^n \int_{s_k}^{s_{k+1}} f'(s) ds \\ &= f(l) - f(0) - \sum_{k=1}^n \int_{s_k}^{s_{k+1}} \{f(s_k - 0) - f(s_k + 0)\} ds \\ &= [f]_0^l + \sum_{k=1}^n [f]_k, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

gdzie skok funkcji $f(s)$ w punktach s_k jest zdefiniowany jako

$$[f]_k \equiv f(s_k + 0) - f(s_k - 0). \quad (3.1.10)$$



Rys. 3.1.5. Kawalkami gładka oś pręta w konfiguracji odniesienia i konfiguracji aktualnej.

Wykorzystując (3.1.9), z zasad (3.1.7) otrzymujemy następujące *lokalne równania ruchu* pręta w punktach regularnych $\mathbf{x}(s) \in C$:

$$\mathbf{n}' + \mathbf{f} = \dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{m}' + \vec{\mathbf{y}}' \times \mathbf{n} + \mathbf{c} = \dot{\mathbf{s}} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}, \quad (3.1.11)$$

które wyrażają lokalne zasady zachowania pędu i momentu pędu pręta. Równania (3.1.11) są klasycznymi lokalnymi równaniami ruchu teorii prętów (zob. np. REISSNER [1973, 1981], PARKER [1987]), wyprowadzonymi tutaj bezpośrednio z zasad mechaniki ośrodków ciągłych bez żadnych założeń upraszczających i przy minimalnych założeniach matematycznych.

Odpowiadające (3.1.11) *dynamiczne warunki brzegowe* w punktach początkowym $\mathbf{x}_P = \mathbf{x}(0)$ i końcowym $\mathbf{x}_K = \mathbf{x}(l)$ osi pręta mają postać

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{x}_P, t) &= \mathbf{n}_P^*(t), & \mathbf{m}(\mathbf{x}_P, t) &= \mathbf{m}_P^*(t), \\ \mathbf{n}(\mathbf{x}_K, t) &= \mathbf{n}_K^*(t), & \mathbf{m}(\mathbf{x}_K, t) &= \mathbf{m}_K^*(t). \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

W punktach osobliwych $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(s_k) \in C$ dynamiczne warunki ciągłości mają postać

$$[\mathbf{n}]_k = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{m} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}]_k = \mathbf{0}. \quad (3.1.13)$$

Jeśli wektor wodzący $\vec{\mathbf{y}}(s, t)$ jest funkcją ciągłą w punktach osobliwych \mathbf{x}_k , wówczas $[\vec{\mathbf{y}}(s, t)]_k = \mathbf{0}$ i dynamiczne warunki ciągłości (3.1.13) upraszczają się do postaci

$$[\mathbf{n}]_k = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{m}]_k = \mathbf{0}. \quad (3.1.14)$$

3.1.4. Kinematyka pręta

Zakładając spełnienie lokalnych równań ruchu (3.1.11) i dynamicznych warunków brzegowych (3.1.12) oraz postępując analogicznie jak w przypadku teorii powłok (podrozdział 1.6), możemy sformułować tożsamość całkową i na tej podstawie zbudować kompletną, jednowymiarową, ścisłą kinematykę pręta, odpowiadającą jego ścisłej jednowymiarowej dynamice.

Na mocy równań ruchu (3.1.11) i dynamicznych warunków brzegowych (3.1.12) formułujemy tożsamość całkową (1.5.5), w której wyrażenie podcałkowe dla całego pręta ma postać

$$\begin{aligned} G(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) \equiv & \int_{C \setminus \mathbf{x}_k} \left((\mathbf{n}' + \mathbf{f} - \dot{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{v} + \{ \mathbf{m}' + \vec{\mathbf{y}}' \times \mathbf{n} + \mathbf{c} \right. \\ & \left. - (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\vec{\mathbf{y}}} \times \mathbf{p}) \} \cdot \mathbf{w} \right) ds - (\mathbf{n}_P - \mathbf{n}_P^*) \cdot \mathbf{v}_P - (\mathbf{m}_P - \mathbf{m}_P^*) \cdot \mathbf{w}_P \\ & - (\mathbf{n}_K - \mathbf{n}_K^*) \cdot \mathbf{v}_K - (\mathbf{m}_K - \mathbf{m}_K^*) \cdot \mathbf{w}_K, \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

dla dowolnych funkcji wektorowych $\mathbf{v}(s, t)$ i $\mathbf{w}(s, t)$, określonych w punktach regularnych $\mathbf{x}(s) \in C$ łącznie z brzegiem. W (3.1.15) wprowadziliśmy zwarte oznaczenia $\mathbf{n}_P \equiv \mathbf{n}(\mathbf{x}_P, t)$, $\mathbf{w}_K \equiv \mathbf{w}(\mathbf{x}_K, t)$ itd.

Zastosowanie całkowania przez części pozwala przekształcić tę tożsamość do postaci analogicznej do (1.6.3), w której drugi wyraz ma teraz postać

$$- \int_{C \setminus \mathbf{x}_k} \sigma ds \quad (3.1.16)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}' - (\vec{\mathbf{y}}' \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{w}' \\ &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}' - \mathbf{w} \times \vec{\mathbf{y}}') + \mathbf{m} \cdot \mathbf{w}'. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

W ruchu rzeczywistym pręta dowolne pola wektorowe $\mathbf{v}(s, t)$ i $\mathbf{w}(s, t)$ w (3.1.15) i (3.1.17) są, odpowiednio, wektorami prędkości translacyjnej $\mathbf{v}(s, t)$ i prędkości obrotowej $\boldsymbol{\omega}(s, t)$. W tym przypadku, zależność (3.1.17) ma sens fizyczny liniowej gęstości efektywnej mocy przekrojowych miar naprężeń pręta.

Jeśli wektor wodzący $\vec{y}(s, t)$ osi i tensor obrotu $\mathbf{Q}(s, t)$ charakteryzują kinematykę pręta, to występujące w (3.1.17) wektory prędkości są zdefiniowane w następujący sposób:

$$\mathbf{v}(s, t) = \dot{\vec{y}}(s, t) = \dot{\mathbf{u}}(s, t), \quad \boldsymbol{\omega}(s, t) = \text{ad}^{-1} \boldsymbol{\Omega}(s, t), \quad (3.1.18)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\Omega}(s, t) = \dot{\mathbf{Q}}(s, t) \mathbf{Q}(s, t)^T \quad (3.1.19)$$

jest tensorem skośnie symetrycznym.

3.1.5. Opis deformacji i odkształceń pręta

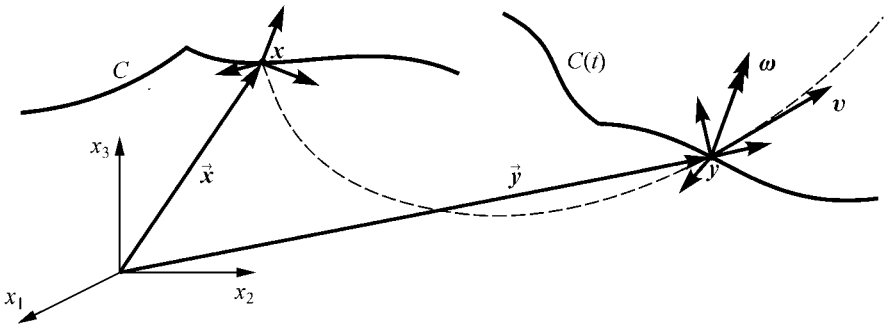
Ruch pręta względem konfiguracji odniesienia jest opisany przez $\mathbf{u}(s, t)$ i $\mathbf{Q}(s, t)$ zależnościami

$$\vec{y}(s, t) = \vec{x}(s) + \mathbf{u}(s, t), \quad \mathbf{T}(s, t) = \mathbf{Q}(s, t) \mathbf{T}_0(s). \quad (3.1.20)$$

Podobnie jak w teorii powłok, nieosobliwe tensory struktury pręta $\mathbf{T}_0(s)$ i $\mathbf{T}(s, t)$ można wyrazić poprzez trójki wektorów kierunkowych $\{\mathbf{t}_i^0(s)\}$ i $\{\mathbf{t}_i(s, t)\}$, związane z każdym punktem osi pręta w konfiguracji odniesienia i konfiguracji aktualnej. Wówczas

$$\mathbf{t}_i(s, t) = \mathbf{Q}(s, t) \mathbf{t}_i^0(s). \quad (3.1.21)$$

Na potrzeby dalszych rozważań przyjmujemy, że obie trójki wektorów kierunkowych tworzą bazy ortonormalne.



Rys. 3.1.6. Kinematyka pręta.

Postępując analogicznie jak w teorii powłok można również wykazać, że dwa wektory

$$\boldsymbol{\varepsilon}(s, t) = \vec{y}'(s, t) - \mathbf{Q}(s, t) \mathbf{t}_0(s), \quad \boldsymbol{\kappa}(s, t) = \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}' \mathbf{Q}^T) \quad (3.1.22)$$

stanowią wektorowe *miary odkształceń* pręta energetycznie sprzężone z wektorami sił i momentów przekrojowych. Przy tym *prędkości miar odkształceń* pręta są

zdefiniowane następująco (por. definicje (1.7.28) i (1.7.33) prędkości miar odkształceń w teorii powłok):

$$\varepsilon^\circ \equiv \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^T \varepsilon) \right) = \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{y}}', \quad \boldsymbol{\kappa}^\circ \equiv \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\kappa}) \right) = \boldsymbol{\omega}'. \quad (3.1.23)$$

Stąd i z (3.1.17) otrzymujemy analogiczną postać dla gęstości efektywnej mocy miar naprężeń pręta

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \varepsilon^\circ + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\kappa}^\circ. \quad (3.1.24)$$

3.1.6. Równania konstytutywne

Materiałowe równania konstytutywne dla prętów określone są zależnościami między wektorami przekrojowych sił i momentów \mathbf{n} i \mathbf{m} oraz wektorowymi miarami odkształceń (3.1.22). Ponadto, podobnie jak w teorii powłok, gęstości pędu \mathbf{p} i momentu pędu \mathbf{s} dla prętów muszą również być określone przez kinetyczne równania konstytutywne. Teoria równań konstytutywnych dla prętów nie różni się od teorii równań konstytutywnych szczegółowo omawianej w kontekście teorii powłok (podrozdział 2.2).

W szczególnym przypadku prętów sprężystych, równania konstytutywne dla przekrojowych sił i momentów przyjmują postać

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}; s), \quad \mathbf{m} = \hat{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}; s), \quad (3.1.25)$$

a kinetyczne równania konstytutywne dla pędu i momentu pędu są zależnościami typu

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}; s), \quad \mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}; s). \quad (3.1.26)$$

3.1.7. Trójwymiarowa deformacja ciała prętopodobnego

Przyjmując, że w konfiguracji odniesienia przekroje poprzeczne pręta są płaskie, wektor wodzący dowolnego punktu $\mathbf{x} \in B$ można wyrazić w postaci

$$\bar{\mathbf{x}}(\xi^\alpha, s) = \bar{\mathbf{x}}(s) + \xi^\alpha \mathbf{t}_\alpha^0(s), \quad (3.1.27)$$

gdzie $\{\xi^i\} = \{\xi^\alpha, \xi^3 \equiv s\}$ jest układem współrzędnych krzywoliniowych w obszarze B wybranym w ten sposób, że $\xi^3 \equiv s$ jest parametrem długości łuku wzdłuż osi pręta. Ponadto,

$$\mathbf{t}_0(s) \equiv \mathbf{t}_3^0(s) = \mathbf{t}_1^0(s) \times \mathbf{t}_2^0(s) \quad (3.1.28)$$

jest jednostkowym wektorem normalnym do przekroju $\Pi(s)$.

Z (3.1.27) można teraz łatwo wyliczyć wektory bazy naturalnej w dowolnym punkcie konfiguracji odniesienia pręta

$$\mathbf{g}_\alpha = \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha} = \mathbf{t}_\alpha^0, \quad \mathbf{g}_3 = \bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{x}}' + \xi^\alpha (\mathbf{t}_\alpha^0)'. \quad (3.1.29)$$

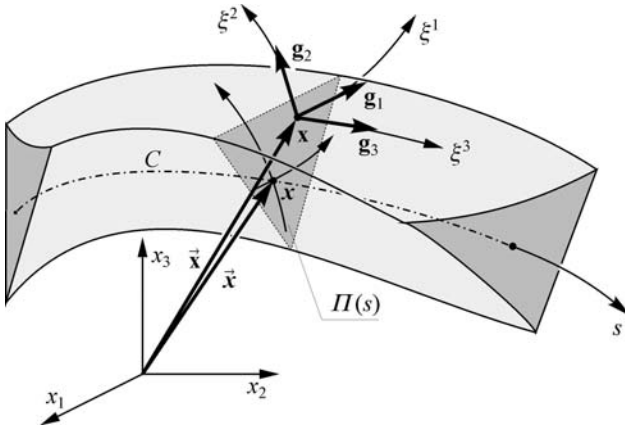
Pochodne bazy ortonormalnej $\mathbf{t}_i^0(s)$ względem parametru s można przedstawić jako

$$(\mathbf{t}_i^0)' = \mathbf{k}_0(s) \times \mathbf{t}_i^0(s). \quad (3.1.30)$$

Wykorzystując (3.1.29), otrzymamy

$$\mathbf{g}_3 = \bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{x}}' + \xi^\alpha \mathbf{k}_0(s) \times \mathbf{t}_\alpha^0. \quad (3.1.31)$$

Z powyższych związków geometrycznych można wyznaczyć współrzędne trójwymiarowego tensora metrycznego i wszystkie inne zależności geometryczne, które całkowicie opisują geometrię konfiguracji odniesienia ciała prętopodobnego.



Rys. 3.1.7. Parametryczny opis konfiguracji odniesienia pręta.

Wektor wodzący dowolnego punktu pręta w konfiguracji aktualnej można formalnie wyrazić w postaci podobnej do (1.8.20)

$$\bar{\mathbf{y}}(\xi^\alpha, s, t) = \bar{\mathbf{y}}(s, t) + \boldsymbol{\zeta}(\xi^\alpha, s, t), \quad (3.1.32)$$

gdzie $\boldsymbol{\zeta}(\xi^\alpha, s, t)$ jest nieznaną funkcją wektorową zależną od deformacji pręta. Przyjmując następnie podstawienie

$$\boldsymbol{\zeta}(\xi^\alpha, s, t) = \mathbf{Q}(s, t)\mathbf{z}(\xi^\alpha, s, t), \quad (3.1.33)$$

można wyliczyć związki pomiędzy miarami deformacji (3.1.22) a trójwymiarowym gradientem deformacji

$$\mathbf{F}(\xi^\alpha, s, t) = \bar{\mathbf{y}}_{,i}(\xi^\alpha, s, t) \otimes \mathbf{g}^i(\xi^\alpha, s, t) \quad (3.1.34)$$

w postaci analogicznej do tych diskutowanych w podrozdziale 2.5 dla powłok.

W dotychczasowych rozważaniach położenie osi pręta w obszarze trójwymiarowym B pozostawało całkowicie dowolne. Można więc dodatkowo wprowadzić

pojęcie środka bezwładności przekroju poprzecznego pręta i przyjąć, że oś pręta jest krzywą przechodzącą przez środki bezwładności wszystkich przekrojów poprzecznych. To umożliwiłoby dyskusję wielu szczególnych wariantów mechaniki prętów proponowanych w literaturze, por. np. ERICKSEN i TRUESDELL [1957], REISSNER [1973, 1981], ANTMAN [1972, 1995], GREEN, NAGHDI i WENNERS [1974], CZERNYCH i SZAMINA [1975], GORSKI [1978], SZAMINA [1998], RUBIN [2000], w których podano obszerną literaturę źródłową.

ILJUCHIN [1979] podał wiele jawnych analitycznych rozwiązań zadań deformacji prętów przestrzennych, otrzymanych przez analogię do całkowalnych przypadków ruchu ciała sztywnego dookoła punktu stałego. Nieliniowa analiza prętów przestrzennych metodą elementów skończonych jest przedmiotem wielu prac m.in. BATHE i BOLOURCHI [1979], CARDONA i GÉRADIN [1988], IURA i ATLURI [1988, 1989], PAI i PALAZOTTO [1996], PETROV i GÉRADIN [1998], SMOLEŃSKI [1999], RUBIN [2001]. Różne zagadnienia nieliniowej dynamiki prętów przestrzennych rozważali m.in. SIMO i VU-QUOC [1988], SIMO, TARNOW i WONG [1992], CRISFIELD, GALVANETTO i JELENIĆ [1997], JELENIĆ i CRISFIELD [1999], WEISS [2002], IURA, SUETAKE i ATLURI [2003]. Nieliniowe zadania przestrzennych układów prętowych rozważali np. LAGNESE, LEUGERING i SCHMIDT [1993, 1994] oraz QUADRELLI i ATLURI [1998].

3.2. Konstrukcje złożone i ich modelowanie

3.2.1. Uwagi ogólne

W naukach inżynierskich funkcjonuje termin „mechanika konstrukcji”. Nie jest to jednak pojęcie obejmujące dobrze zdefiniowaną klasę modeli matematycznych konstrukcji, lecz raczej wspólna nazwa dla szczególnych typów konstrukcji, takich jak płyty i powłoki, pręty i układy prętowe itp. W literaturze proponowane są różne klasyfikacje ogólnie rozumianych konstrukcji inżynierskich, np. ze względu na cechy materiałowe (żelbetowe, metalowe itp.).

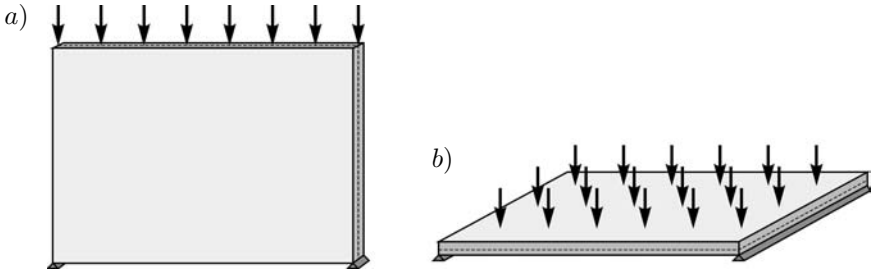
Ze względu na geometrię kształtu i użyte modele matematyczne, konstrukcje inżynierskie będące przedmiotem rozważań teorii konstrukcji można podzielić na trzy klasy:

1. Konstrukcje jednowymiarowe opisywane równaniami teorii prętów.
2. Konstrukcje dwuwymiarowe opisywane równaniami teorii powłok.
3. Konstrukcje trójwymiarowe opisywane równaniami mechaniki ośrodków ciągłych.

W każdej z tych trzech klas można wydzielić pewne szczególne typy konstrukcji. Na przykład, w teorii prętów wyróżnia się często pręty proste i pręty zakrzywione, lub pręty płaskie i pręty przestrzenne.

W wielu konstrukcjach inżynierskich stosuje się ustroje nośne, które można uważać za szczególne przypadki konstrukcji powłokowych. Takimi szczególnymi

ustrojami nośnymi są tarcze, płyty i membrany. *Tarczą* nazywa się zwykle płaski dźwigar powierzchniowy, który przenosząc obciążenia działające w swej płaszczyźnie pozostaje stale płaski podczas deformacji (rys. 3.2.1 a). Jeśli płaski dźwigar powierzchniowy podczas przenoszenia dowolnych obciążeń wygina się w kierunku prostopadłym do swej płaszczyzny (rys. 3.2.1 b), to zwykle nazywa się go *płytą*. *Membrana* z założenia przenosi jedynie siły rozciągające styczne do powierzchni podstawowej w konfiguracji aktualnej. Mechanika powłok, omawiana w rozdziałach 1 i 2 tej książki, opisuje również te szczególne klasy dwuwymiarowych konstrukcji inżynierskich.

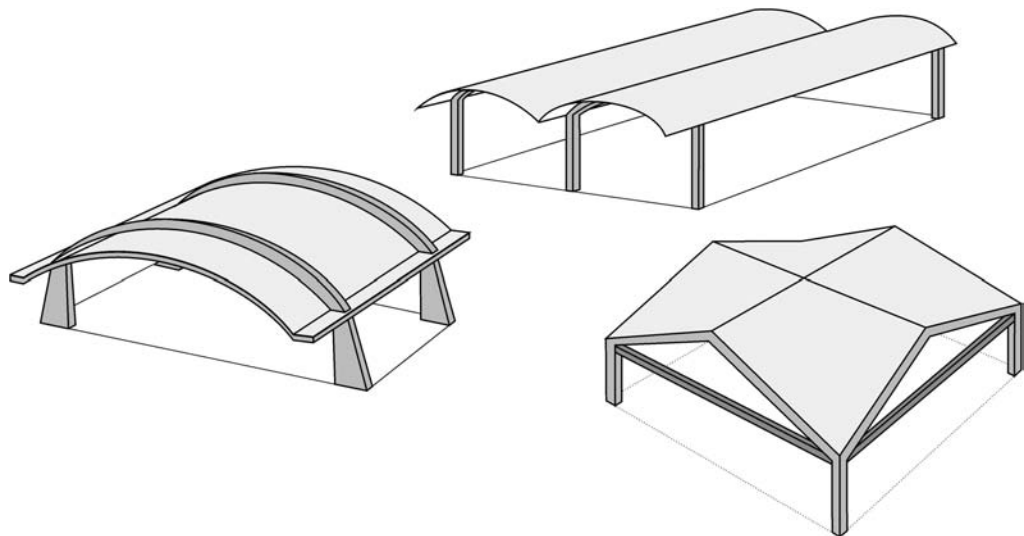


Rys. 3.2.1. Tarcze i płyty.

Kompletny układ równań i zależności dynamicznie i kinematycznie ściślejszej mechaniki płyt otrzymamy wprost z odpowiednich zależności mechaniki powłok przyjmując jedynie, że powierzchnia podstawowa M w konfiguracji odniesienia jest obszarem na płaszczyźnie. Żadne inne założenie nie jest tutaj potrzebne. Dopiero przy próbie porównania takiego ogólnego modelu płyty z modelami płyt Kirchhoffa, Reissnera i innych badaczy wymagane są odpowiednie dodatkowe założenia upraszczające, por. np. JEMIELITA [2001]. Jednak w zagadnieniach nieliniowych, w których konfiguracja odkształcona płyty może znacznie się różnić od jej konfiguracji odniesienia, praktycznie zanika różnica pomiędzy teorią płyt i teorią powłok. Nie będziemy się więc tu zajmowali oddzielnie ani teorią płyt, ani też teorią tarcz.

Istnieje jednak obszerna klasa konstrukcji inżynierskich, których nie można zaliczyć ani do konstrukcji powłokowych, ani do konstrukcji prętowych, przynajmniej w sensie omawianych do tej pory teorii powłok i prętów załamanych kawałkami regularnych. Konstrukcje inżynierskie są często konstrukcjami złożonymi częściowo z elementów powłokowych, częściowo z prętowych, a częściowo również z elementów trójwymiarowych. Te różne elementy mogą być wzajemnie połączone na wiele sposobów, tworząc bardzo złożone konstrukcje przestrzenne. Kilka przykładów takich złożonych konstrukcji inżynierskich z dziedziny budownictwa naszkicowano na rys. 3.2.2.

Wiarygodne modelowanie matematyczne takich złożonych konstrukcji inżynierskich jest zadaniem bardzo trudnym. Różne znane dotąd teorie powłok i prę-



Rys. 3.2.2. Przykłady złożonych powłokowo–prętowych konstrukcji inżynierskich.

tów są na ogół formułowane z uwzględnieniem różnych założeń upraszczających, które mogą dobrze modelować rzeczywiste zachowanie się regularnych elementów konstrukcji. Jednak wszelkie założenia upraszczające stają się mało wiarygodne w obszarach połączeń elementów konstrukcyjnych o różnych wymiarach. Jest to jeden z podstawowych problemów modelowania złożonych konstrukcji inżynierskich. Jego pełne i wszechstronne omówienie wykracza poza zakres tej książki, gdyż w znacznej części jest to problem nadal mało rozpoznany.

3.2.2. Nieregularne i złożone konstrukcje powłokowe

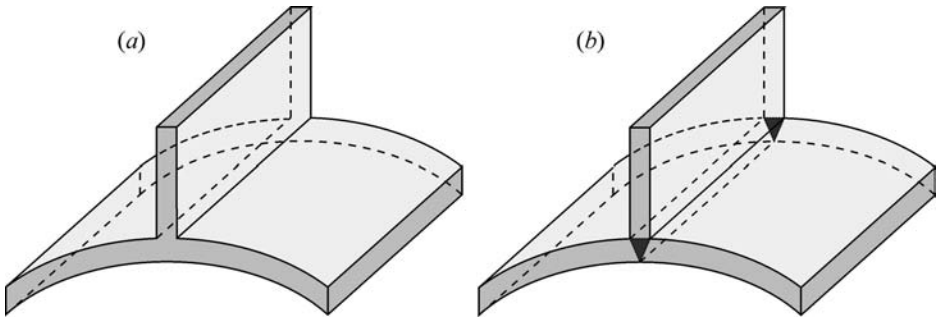
Najprostszym przypadkiem konstrukcji powłokowych są powłoki, których powierzchnia podstawowa jest powierzchnią gładką. W analizie takich powłok można wykorzystać aparat matematyczny klasycznej geometrii różniczkowej.

Wielu konstrukcji powłokowych nie da się jednak modelować powierzchniami gładkimi lub nawet tylko kawałkami gładkimi. Na przykład, rozgałęzienia i przecięcia się elementów powierzchniowych nie są już powierzchniami w sensie klasycznej geometrii różniczkowej. Również pojęcia pola wektorowego, operatorów różniczkowych, poprawność twierdzeń całkowych itp. na takiej strukturze powierzchniowej wymagają uściślenia. Z tego punktu widzenia konstrukcje powłokowe można podzielić na pięć grup:

- I. Powłoki regularne — powłoki, które można modelować powierzchniami gładkimi.
- II. Powłoki załamane — powłoki, które można modelować powierzchniami kawałkami gładkimi.

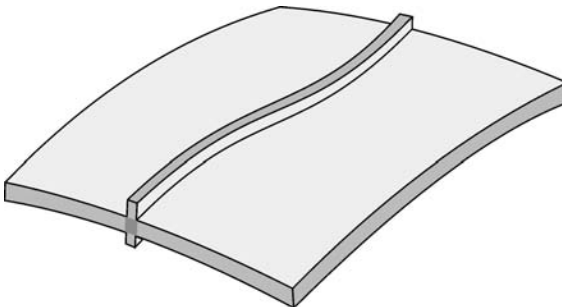
- III. Powłoki nieregularne — konstrukcje powłokowe zawierające samoprzecięcia i rozgałęzienia.
- IV. Konstrukcje wielopłatowe — konstrukcje zawierające kilka powłok połączonych ze sobą w pewien technologiczny sposób.
- V. Konstrukcje złożone — konstrukcje, których elementami są pręty, powłoki i ciała trójwymiarowe.

Mechanika powłok sformułowana w rozdz. 1 i 2 ujmuje jedynie konstrukcje powłokowe z grupy I i II.



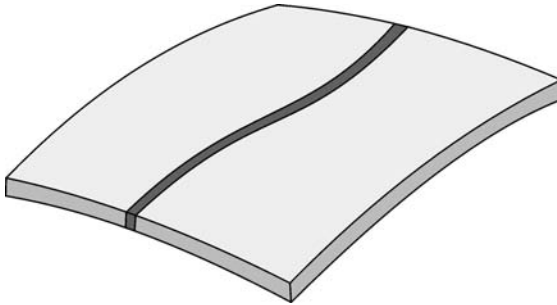
Rys. 3.2.3. Fragment powłoki wielopłatowej.

Powłoki uźebrowane (rys. 3.2.4) i powłoki o skokowo zmiennej sztywności (rys. 3.2.5) mogą być modelowane w ramach omawianej wcześniej mechaniki powłok, ponieważ przy formułowaniu równań i zależności podstawowych mechaniki powłok sytuacje tego typu nie zostały wykluczone. W szczególności, ścisła redukcja trójwymiarowych zasad mechaniki ośrodka ciągłego do postaci dwuwymiarowej jest tu jak najbardziej możliwa bez żadnych dodatkowych założeń. W pierwszym przypadku należy jedynie uwzględnić skokową zmienność grubości powłoki w definicjach przekrojowych sił i momentów. Natomiast w drugim przypadku skokowa zmienność cech materiałowych ujawni się w dwuwymiarowych równaniach



Rys. 3.2.4. Fragment powłoki ze wzmocnieniem.

konstrytuwnych, wiążących przekrojowe siły i momenty z odpowiadającymi im powłokowymi miarami odkształceń. Należy jednak podkreślić, że dwuwymiarowe zagadnienia początkowo-brzegowe powłok o skokowo zmiennej sztywności mogą być źle uwarunkowane, powodując znaczne trudności w analizie numerycznej.



Rys. 3.2.5. Fragment powłoki o skokowo zmiennej sztywności.

W przypadku konstrukcji powłokowych należących do grup III, IV i V nie jest możliwe jednoznaczne zdefiniowanie powierzchni podstawowej i grubości powłoki oraz osi pręta i jego przekroju poprzecznego w całym obszarze konstrukcji. Dotyczy to tych obszarów konstrukcji, w których łączone są trzy i więcej regularnych płatów powłok (rys. 3.2.3 a) lub regularnych części prętów. Tym samym ścisła redukcja zasad mechaniki ośrodka ciągłego do postaci dwuwymiarowej lub jednowymiarowej, a w konsekwencji i sformułowanie kompletnej teorii takich konstrukcji, nie jest możliwe bez pewnych dodatkowych uproszczeń i hipotez w obszarach połączeń.

We wszystkich naszkicowanych powyżej przypadkach można wyraźnie wydzielić elementy konstrukcyjne będące typowymi powłokami i elementy, które można traktować jako typowe pręty (rys. 3.2.3 b). Sugeruje to możliwość wprowadzenia specyficznego modelu takich konstrukcji, sformułowaniem którego zajmiemy się w następnych podrozdziałach.

3.2.3. Modelowanie złożonych konstrukcji powłokowych

Naszkicowana powyżej pobieżna charakterystyka nieregularnych, wielopłatowych i złożonych konstrukcji inżynierskich wskazuje, że istota modelowania takich konstrukcji sprowadza się w zasadzie do uwzględnienia matematycznego modelowania połączeń elementów konstrukcyjnych. Elementy prętopodobne i powłokopodobne rozpatrywane oddzielnie są poprawnie opisane przez teorie prętów i teorie powłok.

Pewne aspekty tego problemu były rozpatrywane w literaturze zarówno z inżynierskiego, jak i matematycznego punktu widzenia. Można tu wymienić wczesne prace BYRNE [1944], ERINGEN i SUHUBI [1965], JOHNSON [1967], KULKARNI, NEALE i ELLYIN [1975], w których problem sztywnych połączeń płatów powłoko-

wych był rozpatrywany w ramach liniowej teorii typu Kirchhoffa–Love’a cienkich powłok sprężystych, ograniczając się przy tym do powłok o szczególnej geometrii, takich jak powłoki cylindryczne. Te badania są kontynuowane również we współczesnych pracach, np. PERCIVALE [1992], SKOPINSKY [1997, 2001], MONDAL i UDDIN [1998].

Nieco ogólniejsze przypadki rozważane były, ale nadal w ramach liniowej teorii powłok typu Kirchhoffa–Love’a, przez BERNADOU, FAYOLLE i LÉNÉ [1989], GEYMONT i SANCHEZ-PALENCIA [1995], BERNADOU i CUBIER [1998a,b], TITEUX i SANCHEZ-PALENCIA [2000], TESAR i KUGLEROVA [2000], oraz ANDRIANOV i AWREJCEWICZ [2003], a w ramach liniowej teorii płyt Reissnera przez NARDINOCCHI i PODIO-GUIDUGLI [2001]. Omówienie matematycznych problemów modelowania połączeń płyt i powłok w ramach teorii liniowej zawierają monografie MICHAJŁOW [1980], CIARLET [1990a] oraz LAGNESE, LEUGERING i SCHMIDT [1994], w których podano również spis wcześniejszej literatury. Podejście przyjęte w tych monografiach, jak i w większości cytowanych wyżej prac, wykorzystuje w głównej mierze aparat analizy asymptotycznej, por. AKIAN [1999]. Aparat ten wymaga szeregu założeń typowych dla metod asymptotycznych. W tym sensie jest to więc podejście całkowicie odmienne od podejścia przyjętego w tej książce.

Problem modelowania połączeń prętów, płyt i powłok, a w rezultacie i modelowania konstrukcji złożonych, można rozpatrywać z punktu widzenia celu, jaki chcemy osiągnąć. Jeśli celem jest wyznaczenie *trójwymiarowych* rozkładów odkształceń i naprężeń w obszarze połączeń, to można go osiągnąć tylko przez rozwiązywanie odpowiednich równań trójwymiarowej mechaniki ośrodków ciągłych.

Często satysfakcjonujące *oszacowanie* trójwymiarowych rozkładów odkształceń i naprężeń w połączeniu można uzyskać z wartości przekrojowych sił i momentów obliczonych w otoczeniu połączenia. W takim przypadku celem jest sformułowanie i analiza w obszarach połączeń *warunków ciągłości*, wyrażonych przez przekrojowe siły i momenty (w przypadku warunków dynamicznych) lub przez energetycznie uśrednione po grubości przesunięcia i obroty (w przypadku warunków kinematycznych). Taki cel jest łatwiejszy do osiągnięcia bez dodatkowych założeń, które są na ogół wymagane do wiarygodnego wyznaczenia rozkładów trójwymiarowych. Ponadto, dynamiczne i kinematyczne warunki ciągłości w połączeniach mogą być wykorzystane do analizy obszerniejszej klasy konstrukcji, niż ta dla której można oczekiwać rozsądnego oszacowania trójwymiarowych rozkładów naprężeń, odkształceń i przemieszczeń z rozwiązań trójwymiarowych.

Szczególne przypadki modelowania połączeń elementów powłokowych można ująć w ramach ogólnej mechaniki powłok, sformułowanej w rozdziale 1, w którym wykorzystaliśmy ściśle całkowite zasady zachowania pędu i momentu pędu (1.3.18) i (1.3.19). W przypadku bardziej złożonych konstrukcji powłokowych należy jednak zrezygnować z przyjętych tam założeń, wykorzystanych przy formułowaniu warunków ciągłości. Rozważając możliwości zastosowania ogólnej mechaniki powłok do modelowania konstrukcji złożonych, musimy wyprowadzić dodatkowe pomocnicze zależności.

3.2.4. Krzywe osobliwe względem pól powierzchniowych

W podrozdziale 1.4 wprowadziliśmy pojęcie krzywej osobliwej względem pola na powierzchni. To pojęcie i związane z nim zależności wykorzystaliśmy do sformułowania dynamicznych i kinematycznych warunków ciągłości dla powłok załamanych.

Problem matematycznego modelowania samoprzebieg, rozwidleń i połączeń elementów powłokowych wiąże się przede wszystkim z brakiem różniczkowości lub wręcz nieciągłością pewnych pól na powierzchni podstawowej powłoki, nie będącej już powierzchnią gładką. W podrozdziale 1.4 zakładaliśmy jednak, że pole przesunięć powierzchni podstawowej i pole obrotów określonych na tej powierzchni są polami ciągłymi, chociaż niekoniecznie różniczkowalnymi wzdłuż krzywych osobliwych. Są to założenia całkowicie naturalne, gdy rozpatrujemy elementy powłokowe połączone na sztywno ze sobą i tworzące jeden element konstrukcyjny podczas deformacji. Jeśli jednak chcemy modelować konstrukcje złożone z szeregu elementów powłokowych, połączonych za sobą nie koniecznie w sposób sztywny, to założenie o ciągłości niektórych pól staje się zbyt silnym.

Przypomnijmy, że jeśli M jest powierzchnią gładką i $C \subset M$ jest krzywą osobliwą względem pola $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ na M , to skok $\llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket$ i wartość średnia $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$ tego pola w punktach $\mathbf{x} \in C$ są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned}\llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket(\mathbf{x}, t) &= \boldsymbol{\eta}^{(+)}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\eta}^{(-)}(\mathbf{x}, t), \\ \langle \boldsymbol{\eta} \rangle(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\eta}^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\eta}^{(-)}(\mathbf{x}, t) \right).\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

Można wykazać, że jeśli C jest wspólną krzywą osobliwą dla dwóch pól $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ i $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ to

$$\llbracket \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\varphi} \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket \otimes \langle \boldsymbol{\varphi} \rangle + \langle \boldsymbol{\eta} \rangle \otimes \llbracket \boldsymbol{\varphi} \rrbracket.\tag{3.2.2}$$

Łatwo to sprawdzić przez podstawienie definicji (3.2.1) do (3.2.2).

Definicje (3.2.1) i twierdzenie (3.2.2) nie wymagają aby sama krzywa C była krzywą gładką. Również powierzchnia M nie musi być gładką, jeśli $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ i $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ są polami wektorowymi na M o wartościach w przestrzeni translacyjnej E .

W przypadku pól wektorowych stycznych do M sytuacja jest bardziej złożona i wymaga dodatkowych rozważań. Przykładem krzywych osobliwych względem wektorowych pól stycznych do powierzchni są krawędzie powierzchni kawałkami gładkich. Odnosi się to również do niektórych pól tensorowych.

Jeśli \boldsymbol{S} jest polem tensorowym na M takim, że $\boldsymbol{S}(\mathbf{x}) \in E \otimes T_{\mathbf{x}}M$ w każdym regularnym punkcie powierzchni, to lewo- i prawostronne granice w punkcie krzywej osobliwej, będącej krawędzią powierzchni kawałkami gładkich, są zdefiniowane następująco:

$$\boldsymbol{s}_{\nu}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{S}^{(\pm)}(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}^{(\pm)}(\mathbf{x}).\tag{3.2.3}$$

Tutaj jednostkowe wektory $\boldsymbol{\nu}^{(\pm)}(\mathbf{x})$ zewnętrznych normali do brzegów $\partial M^{(+)}$ i $\partial M^{(-)}$ są zdefiniowane jak na rysunku 1.4.7. Wówczas skok i wartość średnią

poła tensorowego \mathbf{S} wzdłuż krawędzi Γ definiuje się następująco:

$$\mathbf{[s}_\nu] = \mathbf{[S}\nu] = s_\nu^{(+)} + s_\nu^{(-)}, \quad \langle s_\nu \rangle = \langle \mathbf{S}\nu \rangle = \frac{1}{2}(s_\nu^{(+)} - s_\nu^{(-)}). \quad (3.2.4)$$

Niech $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ będzie polem tensorowym, a $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ polem wektorowym, dla których Γ jest wspólną krzywą osobliwą. Przyjmując definicje (3.2.4) oraz

$$\mathbf{[u]} = \mathbf{u}^{(+)} - \mathbf{u}^{(-)}, \quad \langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{(+)} + \mathbf{u}^{(-)}), \quad (3.2.5)$$

mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{[s}_\nu] \otimes \langle \mathbf{u} \rangle &= \frac{1}{2}(s_\nu^{(+)} + s_\nu^{(-)}) \otimes (\mathbf{u}^{(+)} + \mathbf{u}^{(-)}) \\ &= \frac{1}{2}(s_\nu^{(+)} \otimes \mathbf{u}^{(+)} + s_\nu^{(-)} \otimes \mathbf{u}^{(+)} + s_\nu^{(+)} \otimes \mathbf{u}^{(-)} + s_\nu^{(-)} \otimes \mathbf{u}^{(-)}) \\ \langle s_\nu \rangle \otimes \mathbf{[u]} &= \frac{1}{2}(s_\nu^{(+)} - s_\nu^{(-)}) \otimes (\mathbf{u}^{(+)} - \mathbf{u}^{(-)}) \\ &= \frac{1}{2}(s_\nu^{(+)} \otimes \mathbf{u}^{(+)} - s_\nu^{(-)} \otimes \mathbf{u}^{(+)} - s_\nu^{(+)} \otimes \mathbf{u}^{(-)} + s_\nu^{(-)} \otimes \mathbf{u}^{(-)}). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Dodając do siebie te dwa wyrażenia, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{[s}_\nu] \otimes \langle \mathbf{u} \rangle + \langle s_\nu \rangle \otimes \mathbf{[u]} &= \frac{1}{2}(s_\nu^{(+)} \otimes \mathbf{u}^{(+)} + s_\nu^{(+)} \otimes \mathbf{u}^{(+)} + s_\nu^{(-)} \otimes \mathbf{u}^{(+)} \\ &\quad - s_\nu^{(-)} \otimes \mathbf{u}^{(+)} + s_\nu^{(+)} \otimes \mathbf{u}^{(-)} - s_\nu^{(+)} \otimes \mathbf{u}^{(-)} \\ &\quad + s_\nu^{(-)} \otimes \mathbf{u}^{(-)} + s_\nu^{(-)} \otimes \mathbf{u}^{(-)}). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Tak więc

$$\mathbf{[s}_\nu] \otimes \langle \mathbf{u} \rangle + \langle s_\nu \rangle \otimes \mathbf{[u]} = s_\nu^{(+)} \otimes \mathbf{u}^{(+)} + s_\nu^{(-)} \otimes \mathbf{u}^{(-)}. \quad (3.2.8)$$

Przyjmując definicję skoku dla iloczynu tensorowego

$$\mathbf{[s}_\nu \otimes \mathbf{u}] \equiv s_\nu^{(+)} \otimes \mathbf{u}^{(+)} + s_\nu^{(-)} \otimes \mathbf{u}^{(-)}, \quad (3.2.9)$$

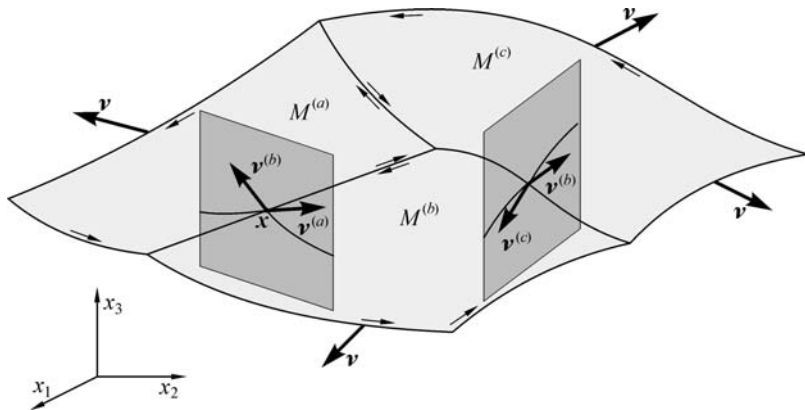
otrzymujemy następujące uogólnienie twierdzenia (3.2.2):

$$\mathbf{[s}_\nu \otimes \mathbf{u}] = \mathbf{[s}_\nu] \otimes \langle \mathbf{u} \rangle + \langle s_\nu \rangle \otimes \mathbf{[u]}. \quad (3.2.10)$$

Powyższe definicje i twierdzenie (3.2.10) stosują się do dowolnej powierzchni kawałkami gładkiej (rys. 3.2.6).

W szczególnym przypadku, gdy M jest powierzchnią gładką, mamy $\nu = \nu^{(-)} = -\nu^{(+)}$ i definicje (3.2.4) redukują się do postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{[s}_\nu] &= -\mathbf{S}^{(+)}\nu + \mathbf{S}^{(-)}\nu = -\mathbf{[S]}\nu, \\ \langle s_\nu \rangle &= \frac{1}{2}(-\mathbf{S}^{(+)}\nu - \mathbf{S}^{(-)}\nu) = -\langle \mathbf{S} \rangle \nu. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$



Rys. 3.2.6. Krzywa osobliwa względem pola na powierzchni.

W tym szczególnym przypadku twierdzenie (3.2.10) przyjmuje postać

$$[\mathbf{s}_\nu \otimes \mathbf{u}] = -\llbracket \mathbf{S} \rrbracket \boldsymbol{\nu} \otimes \langle \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{S} \rangle \boldsymbol{\nu} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket. \quad (3.2.12)$$

Zależności (3.2.10) i (3.2.12) mogą być wykorzystane przy formułowaniu dynamicznych i kinematycznych warunków ciągłości wzdłuż krzywych osobliwych przy osłabionych warunkach ciągłości, a więc w sytuacjach, które pojawiają się przy modelowaniu połączeń elementów powłokowych.

3.2.5. Zasada pracy wirtualnej przy osłabionych warunkach ciągłości

Zasady mechaniki powłok, wyrażone w postaci całkowej, nie wymagają aby występujące w nich wielkości dynamiczne i kinematyczne były ciągłe w całym obszarze powierzchni podstawowej powłoki.

W podrozdziale 1.4 wykazaliśmy, że warunki ciągłości nie są bezpośrednio wymagane w równoważnym sformułowaniu ogólnej mechaniki powłok, jakim jest zasada pracy wirtualnej (1.5.20)

$$\int_{t_1}^{t_2} \{G_d(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) - G_i(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) + G_e(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) + G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w})\} dt - \left[\iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}) da \right]_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (3.2.13)$$

gdzie poszczególne wyrażenia są określone w (1.5.21). W szczególności, wyrażenie $G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w})$ dane jest przez

$$G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) \equiv \int_{M \cap \Gamma} (\llbracket \mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \rrbracket + \llbracket \mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w} \rrbracket) dl. \quad (3.2.14)$$

Gdy deformacja powierzchni podstawowej powłoki oraz pola wirtualne $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ są *ciągłe* w całym obszarze powierzchni podstawowej M w konfiguracji odniesienia, to wyrażenie podcałkowe w (3.2.14) zeruje się na mocy dynamicznych warunków ciągłości. Fakt ten był konsekwentnie wykorzystywany we wszystkich wcześniejszych rozważaniach. Obecnie zmodyfikujemy postać wyrażenia $G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w})$ w taki sposób, aby było ono ważne również w ogólniejszym przypadku nieciągłej deformacji powierzchni podstawowej i nieciągłych pól wirtualnych.

Stosując twierdzenie (3.2.10) do wyrażenia podcałkowego (3.2.14), otrzymamy

$$[\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}] = [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] \cdot \langle \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket. \quad (3.2.15)$$

Korzystając z (3.2.10), dynamiczne warunki ciągłości (1.5.3) przyjmują postać

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] &= \mathbf{0}, \\ [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] + [\vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] &= [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] + \llbracket \vec{\mathbf{y}} \rrbracket \times \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle + \langle \vec{\mathbf{y}} \rangle \times [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] \\ &= [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] + \llbracket \vec{\mathbf{y}} \rrbracket \times \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

i wyrażenie (3.2.15) przekształcimy do postaci

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}] &= [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] \cdot \langle \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \\ &= (-\llbracket \vec{\mathbf{y}} \rrbracket \times \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle) \cdot \langle \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \\ &= (-\langle \mathbf{w} \rangle \times \llbracket \vec{\mathbf{y}} \rrbracket) \cdot \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle + \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \\ &= \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot (\llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \langle \mathbf{w} \rangle \times \llbracket \vec{\mathbf{y}} \rrbracket) + \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Stosując raz jeszcze (3.2.10), drugi człon w (3.2.17)₄ możemy zapisać jako

$$\langle \mathbf{w} \rangle \times \llbracket \vec{\mathbf{y}} \rrbracket = \llbracket \mathbf{w} \times \vec{\mathbf{y}} \rrbracket - \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \times \langle \vec{\mathbf{y}} \rangle, \quad (3.2.18)$$

co ostatecznie prowadzi do

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}] &= \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot (\llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \llbracket \mathbf{w} \times \vec{\mathbf{y}} \rrbracket) \\ &\quad + \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot (\llbracket \mathbf{w} \rrbracket \times \langle \vec{\mathbf{y}} \rangle) + \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \\ &= \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot (\llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \llbracket \mathbf{w} \times \vec{\mathbf{y}} \rrbracket) \\ &\quad + (\langle \vec{\mathbf{y}} \rangle \times \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle + \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \rangle) \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Tak więc, w przypadku nieciągłej deformacji powierzchni podstawowej i nieciągłych pól wirtualnych, wyrażenie $G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w})$ na pracę wirtualną sił i momentów, działających wzdłuż krawędzi powierzchni kawałkami gładkich, przyjmuje postać

$$G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) \equiv \int_{M \cap \Gamma} \{ \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot (\llbracket \mathbf{v} - \mathbf{w} \times \vec{\mathbf{y}} \rrbracket) + (\langle \vec{\mathbf{y}} \rangle \times \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle + \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \rangle) \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \} dl. \quad (3.2.20)$$

Wynik (3.2.20) jest istotny z punktu widzenia matematycznego modelowania rozważanych dalej połączeń elementów powłokowych.

Jeśli deformacja powierzchni podstawowej powłoki i pola wirtualne są ciągle wzdłuż krawędzi Γ , to

$$\llbracket \mathbf{v} - \mathbf{w} \times \vec{\mathbf{y}} \rrbracket = \llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \times \vec{\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \quad \llbracket \mathbf{w} \rrbracket = \mathbf{0}, \quad (3.2.21)$$

a w konsekwencji

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket = \mathbf{0}, \quad \llbracket \mathbf{w} \rrbracket = \mathbf{0}, \quad (3.2.22)$$

oraz $G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) = 0$.

Po odtworzeniu z pól wirtualnych rzeczywistych pól prędkości translacyjnej i obrotowej (podrozdział 1.6), dwa warunki (3.2.22) oznaczają, że pole przesunięć \mathbf{u} i pole obrotów \mathbf{Q} muszą być ciągle wzdłuż krzywych osobliwych. Odpowiada to *sztynnemu* połączeniu płatów powłokowych, dla których Γ jest wspólną krzywą.

Warunki ciągłości w połączeniach płatów powłokowych, nie będących połączeniami sztywnymi, otrzymamy przy osłabieniu warunków ciągłości (3.2.22) dla pól wirtualnych, a w konsekwencji i dla pól rzeczywistych przesunięć i obrotów. W każdym z takich przypadków wyrażenie (3.2.20) już się nie zeruje. Jeśli pola wirtualne są nieciągle wzdłuż krzywej Γ (wspólnej krawędzi połączenia wielu płatów powłokowych), to (3.2.20) wyraża pracę wirtualną wszystkich sił i momentów działających wzdłuż tej krzywej. Można przy tym wyróżnić szereg przypadków szczególnych.

Przykładowo, przyjmując

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket = \mathbf{0}, \quad \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \neq \mathbf{0} \quad (3.2.23)$$

w miejsce warunków (3.2.22), wyrażenie na pracę wirtualną wzdłuż Γ dane przez (3.2.20) redukuje się do postaci

$$G_\Gamma(M, t; \mathbf{w}) \equiv \int_{\Pi \cap \Gamma} \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket dl. \quad (3.2.24)$$

Odpowiada to sytuacji, w której przesunięcia są ciągle wzdłuż krawędzi połączenia elementów powłokowych, ale już obroty nie są ciągle. Takie połączenie powłok można nazwać *przegubowym*.

Szereg innych przypadków szczególnych możemy otrzymać zakładając, że tylko niektóre składowe wirtualnego przesunięcia i/lub obrotu zerują się wzdłuż krawędzi połączenia, podczas gdy pozostałe składowe mogą przyjmować dowolne wartości. Odpowiednie dynamiczne i kinematyczne warunki ciągłości, odpowiadające różnym takim warunkom w połączeniu, możemy łatwo wyprowadzić powtarzając powyższe rozumowanie.

3.3. Dynamika powłok strukturalnych

3.3.1. Konfiguracja odniesienia powłoki strukturalnej

W poprzednim podrozdziale rozważaliśmy możliwe uogólnienie mechaniki powłok, które sprowadzało się do osłabienia warunków ciągłości nakładanych na wirtualne, a w konsekwencji i na rzeczywiste przesunięcia i obroty. Wyprowadzone tam zależności są więc również dynamicznie i kinematycznie ściśle, podobnie jak i zależności mechaniki powłok wyprowadzone w rozdziałach 1 i 2. Ale takie uogólnienie nie jest jeszcze wystarczającym do modelowania wielu złożonych konstrukcji powłokowych. Całkowite zasady mechaniki powłok wyprowadzone w rozdziale 1 wymagały, aby istniały jednoznacznie zdefiniowane powierzchnia podstawowa i grubości powłoki, a to nie jest możliwe już np. dla powłok rozwidlonych lub przecinających się powłok wielopłatowych.

Obecnie zajmujemy się sformułowaniem teorii złożonych konstrukcji powłokowych, których modele matematyczne nazywać będziemy *powłokami strukturalnymi*. Wykorzystamy tu ogólne zależności mechaniki powłok, obszernie przedstawione w dwóch pierwszych rozdziałach, oraz zależności teorii prętów z podrozdziału 3.1. Istotnym odstępstwem od wcześniejszych rozważań będzie odejście od wymagania, aby podstawowe zasady mechaniki konstrukcji złożonych były ścisłą implikacją trójwymiarowych zasad mechaniki ośrodków ciągłych, ponieważ spełnienie tych wymagań w obszarach połączeń konstrukcji złożonych nie jest na ogół możliwe. Jednak odpowiednią postać zasad mechaniki, wyrażoną przez uogólnione siły i momenty przekrojowe, przyjmiemy jako podstawowy postulat teorii powłok strukturalnych. Wykażemy następnie, że przyjęcie takich sprowadzonych zasad zachowania pędu i momentu pędu całkowicie wystarcza do sformułowania kompletnej teorii konstrukcji złożonych.

Powłokę strukturalną określamy jako dwuwymiarowe kontinuum \mathcal{S} , wyposażone być może w pewną mikrostrukturę, które zawiera w sobie również jednowymiarowe continuum \mathcal{C} , mające swoje własne własności mechaniczne. Takie złożone kontinuum musi mieć również cechy układu dynamicznego, a więc musi być wyposażone w odpowiednią kinematykę i dynamikę.

W konfiguracji odniesienia powłoka strukturalna jest geometrycznie reprezentowana przez uogólnioną powierzchnię wielopłatową M , naszkicowaną na rys. 3.3.1, która zawiera w sobie krzywe Γ , reprezentujące jednowymiarowe continuum \mathcal{C} . Tak więc, powłoka strukturalna jest superpozycją \mathcal{S} i \mathcal{C} , które w konfiguracji odniesienia zajmują ten sam obszar w przestrzeni.

Uogólniona powierzchnia wielopłatowa M jest tu zdefiniowana jako suma kawalkami gładkich płatów powierzchni $M^{(a)}$, $a = 1, 2, \dots, n$, o rozłącznych wnętrzach:

$$M = \bigcup_{a=1}^n M^{(a)}, \quad \text{int } M^{(a)} \cap \text{int } M^{(b)} = \emptyset, \quad a \neq b. \quad (3.3.1)$$

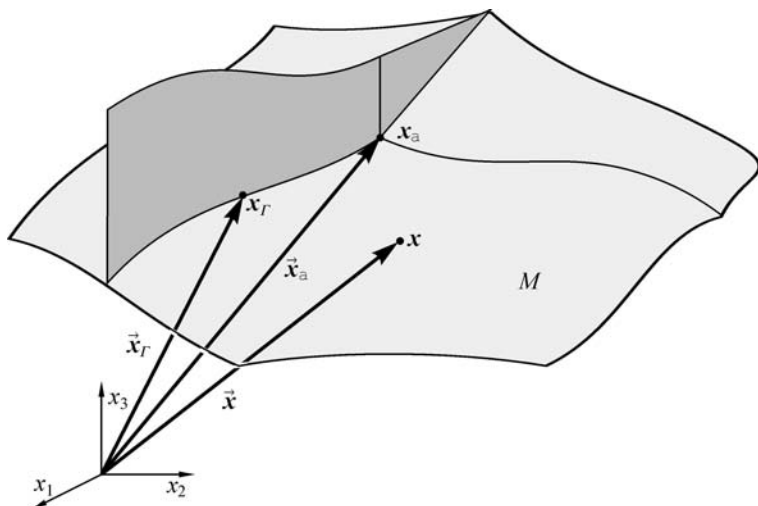
W odróżnieniu jednak od powierzchni kawałkami gładkich rozważanych w rozdziałach 1 i 2, tutaj dopuszczamy, że powierzchnie $M^{(a)}$ mogą mieć wspólne krzywe $\Gamma^{(p)}$, z których każda jest wspólnym brzegiem *dwóch lub więcej* rozłącznych powierzchni $M^{(a)}$. Krzywe takie są więc zdefiniowane np. jako

$$\begin{aligned} \Gamma^{(a,b)} &= \partial M^{(a)} \cap \partial M^{(b)}, & a \neq b, \\ \Gamma^{(a,b,c)} &= \partial M^{(a)} \cap \partial M^{(b)} \cap \partial M^{(c)}, & a \neq b \neq c, \\ \Gamma^{(a,b,c,d)} &= \partial M^{(a)} \cap \partial M^{(b)} \cap \partial M^{(c)} \cap \partial M^{(d)}, & a \neq b \neq c \neq d, \text{ itd.} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Wówczas Γ definiujemy jako sumę mnogościową wszystkich takich krzywych

$$\Gamma = \bigcup_{p=1}^m \Gamma^{(p)}. \quad (3.3.3)$$

Taka uogólniona powierzchnia wielopłatowa M nie jest, oczywiście, powierzchnią w sensie geometrii różniczkowej¹.



Rys. 3.3.1. Konfiguracja odniesienia powierzchni podstawowej powłoki strukturalnej.

W konfiguracji odniesienia każda powierzchnia $M^{(a)}$ reprezentuje regularny płat powłoki w sensie rozdziału 1, a każda krzywa $\Gamma^{(p)}$ reprezentuje regularną część pręta w sensie podrozdziału 3.1. Zasadnicza idea polega więc na tym, aby wykorzystać ogólną mechanikę regularnych prętów do modelowania połączeń typowych płatów powłokowych. Nowym elementem w tych rozważaniach jest fakt,

¹Powierzchnie w sensie geometrii różniczkowej wykluczają rozgałęzienia i przecięcia się regularnych elementów powierzchni.

że takie konstrukcje złożone z powłok i prętów modelujemy tu w ramach *jednolitej i wspólnej* teorii. Odchodzimy więc tu od powszechnego modelowania takich konstrukcji jako metody łączenia w całość oddzielnych elementów prętowych i powłokowych, dopasowywanych do siebie przez spełnienie dodatkowych warunków brzegowych wzdłuż krzywych połączeń (patrz dyskusję w p. 5.1.7 w kontekście różnych modeli elementów skończonych).

3.3.2. Ruch wielopłatowej powierzchni podstawowej i całkowe zasady mechaniki

W ogólnym przypadku, ruch powierzchni podstawowej powłoki strukturalnej można również opisać odwzorowaniem $\mathbf{y} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)$, które cząstke $\mathbf{x} \in M$ przyporządkowuje miejsce $\mathbf{y} \in M(t)$ w konfiguracji aktualnej. Zakładamy przy tym, że funkcja ruchu $\boldsymbol{\chi}$ jest określona w punktach powierzchni podstawowej M , z wyłączeniem punktów należących do krzywych Γ . Wektor wodzący $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ i wektor przesunięcia $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$,

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (3.3.4)$$

są tu określone jedynie na $M \setminus \Gamma$.

Ruch krzywej Γ jest opisany *niezależną* funkcją $\mathbf{y}_\Gamma = \boldsymbol{\chi}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ lub równoważnym wektorem wodzącym

$$\bar{\mathbf{y}}_\Gamma(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{x}}_\Gamma(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{x}, t). \quad (3.3.5)$$

Zakładamy, że dla wszystkich płatów $M^{(a)}$, których wspólnym brzegiem jest Γ , istnieją skończone granice

$$\bar{\mathbf{y}}^{(a)}(\mathbf{x}, t) \equiv \lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}} \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{z}, t) = \bar{\mathbf{x}}_\Gamma(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{z} \in M^{(a)}, \quad (3.3.6)$$

w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma$. Nie żądamy jednak, aby te granice z różnych płatów łączonych krzywą Γ były wzajemnie sobie równe ani też, że $\bar{\mathbf{y}}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ w danym punkcie $\mathbf{x} \in \Gamma$ ma być ich wspólną wartością.

Uniwersalność podstawowych zasad mechaniki polega na tym, że obowiązują one dla dowolnej deformacji i każdego materiału. Stanowią one również podstawę każdej teorii mechanicznej. Podobnie jak w przypadku powłok regularnych, mechanikę powłok strukturalnych będziemy budowali przyjmując zasadę zachowania masy

$$[\mathbf{m}(\mathcal{P}, t)]_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (3.3.7)$$

oraz zasady zachowania pędu i momentu pędu

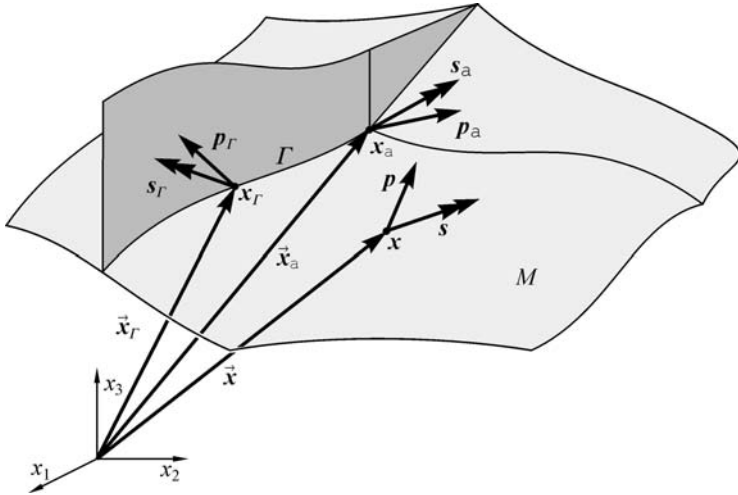
$$[\mathbf{p}(\mathcal{P}, t)]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(\mathcal{P}, t) dt, \quad [\mathbf{m}(\mathcal{P}, t)]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{t}(\mathcal{P}, t) dt \quad (3.3.8)$$

jak podstawowe postulaty dynamiczne mechaniki powłok strukturalnych. Tutaj \mathcal{P} oznacza dowolną część powłoki strukturalnej, traktowanej jako jeden układ dynamiczny.

Dla dowolnej części \mathcal{P} powłoki strukturalnej masa dana jest przez (por. wzór (1.3.14) dla powłok regularnych)

$$\mathbf{m}(\mathcal{P}, t) = \iint_{\Pi \setminus \Gamma} m_0 da + \int_{\Gamma \cap \Pi} m_{0\Gamma} dl + \sum_a m_a, \quad (3.3.9)$$

gdzie $m_0(\mathbf{x}) > 0$ jest gęstością masy w obszarze $M \setminus \Gamma$, $m_{0\Gamma}(\mathbf{x}) > 0$ jest gęstością masy wzdłuż krzywych Γ , a $m_a(x_a) > 0$ są masami skupionymi w punktach osobliwych \mathbf{x}_a , leżących np. na przecięciu krzywych osobliwych zbioru Γ . Przyjmując, że m_0 , $m_{0\Gamma}$ i m_a nie zależą od czasu, prawo zachowania masy (3.3.7) jest spełnione tożsamościowo.



Rys. 3.3.2. Gęstości pędu i momentu pędu powłoki strukturalnej.

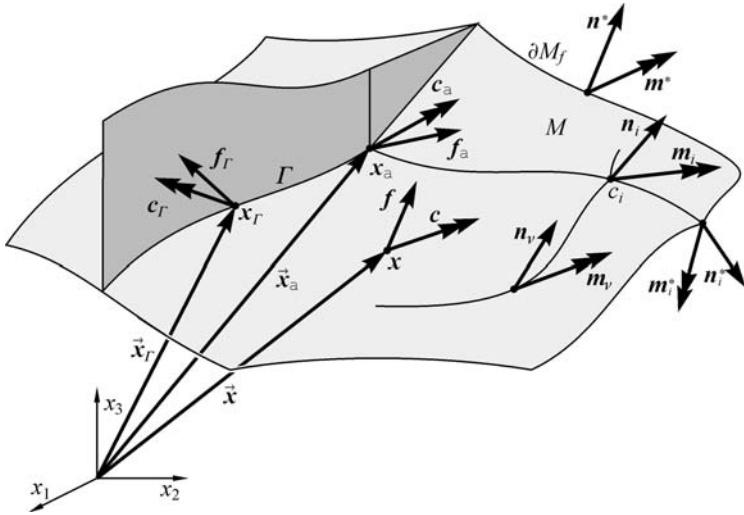
Pęd i moment pędu dowolnej części powłoki strukturalnej postulujemy w postaci (rys. 3.3.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \mathbf{p} da + \int_{\Gamma \cap \Pi} \mathbf{p}_\Gamma dl + \sum_a \mathbf{p}_a, \\ \mathbf{m}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{s} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}) da + \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{s}_\Gamma + \vec{\mathbf{y}}_\Gamma \times \mathbf{p}_\Gamma) dl \\ &\quad + \sum_a (\mathbf{s}_a + \vec{\mathbf{y}}_a \times \mathbf{p}_a), \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

gdzie zależności (1.3.15) dla powłok regularnych zostały uzupełnione o dodatkowe człony wzdłuż krzywych Γ i w punktach \mathbf{x}_a . Tu uwzględniliśmy, że pęd i moment pędu dowolnego ciała materialnego są wielkościami addytywnymi. W (3.3.10),

$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ są gęstościami pędu i momentu pędu powłoki strukturalnej w obszarze $M \setminus \Gamma$, $\mathbf{p}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{s}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ gęstościami pędu i momentu pędu wzdłuż krzywych Γ , natomiast $\mathbf{p}_a(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{s}_a(\mathbf{x}, t)$ są wartościami pędu i momentu pędu odpowiadającymi skupionym masom w punktach osobliwych \mathbf{x}_a .

Założmy, że na dowolną część $\Pi \subset M$ regularnego płata powierzchni podstawowej powłoki strukturalnej działają takie same obciążenia jak w mechanice powłok regularnych: przekrojowe wektory sił $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ i momentów $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$ powierzchniowych, zdefiniowane w regularnych punktach obszaru $M \setminus \Gamma$, oraz wektory sił $\mathbf{n}_\nu(\mathbf{x}, t)$ i momentów $\mathbf{m}_\nu(\mathbf{x}, t)$ kontaktowych, zdefiniowane w punktach brzegu $\partial\Pi \setminus \{c_i\}$, z wyłączeniem izolowanych punktów $\{c_i\} = \Gamma \cap \partial\Pi$, w których krzywe Γ przecinają brzeg $\partial\Pi$. Wyniki podrozdziału 3.1 uzasadniają również przyjęcie wektorów sił $\mathbf{f}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ i momentów $\mathbf{c}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ wzdłuż krzywych Γ w postaci występującej w mechanice prętów.



Rys. 3.3.3. Siły działające na powłokę strukturalną.

Uwzględniając dla kompletności wektory skupionych sił $\mathbf{f}_a(\mathbf{x}_a, t)$ i momentów $\mathbf{c}_a(\mathbf{x}_a, t)$ w izolowanych punktach o skupionych masach, całkowita siła i całkowity moment działające na dowolną część powłoki strukturalnej przyjmują postać (rys. 3.3.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathcal{P}, t) = & \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \mathbf{f} \, da + \int_{\Gamma \cap \Pi} \mathbf{f}_\Gamma \, dl + \sum_a \mathbf{f}_a + \int_{(\partial\Pi \setminus \{c_i\}) \setminus \partial M_f} \mathbf{n}_\nu \, dl \\ & + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial\Pi) \setminus \partial M_f} \mathbf{n}_i + \int_{(\partial\Pi \cap \partial M_f) \setminus \{c_i\}} \mathbf{n}^* \, dl + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial M_f)} \mathbf{n}_i^*, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{c} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{f}) \, da + \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{c}_\Gamma + \vec{\mathbf{y}}_\Gamma \times \mathbf{f}_\Gamma) \, dl + \sum_a (\mathbf{c}_a + \vec{\mathbf{y}}_a \times \mathbf{f}_a) \\
&+ \int_{(\partial \Pi \setminus \{c_i\}) \setminus \partial M_f} (\mathbf{m}_\nu + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}_\nu) \, dl + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial \Pi) \setminus \partial M_f} (\mathbf{m}_i + \vec{\mathbf{y}}_\Gamma \times \mathbf{n}_i) \\
&+ \int_{(\partial \Pi \cap \partial M_f) \setminus \{c_i\}} (\mathbf{m}^* + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}^*) \, dl + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial M_f)} (\mathbf{m}_i^* + \vec{\mathbf{y}}_\Gamma \times \mathbf{n}_i^*). \quad (3.3.11)_2
\end{aligned}$$

Sens fizyczny jaki można nadać wektorom sił $\mathbf{f}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ i momentów $\mathbf{c}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ działających wzdłuż krzywych Γ , reprezentujących połączenia regularnych elementów powłokowych $M^{(a)}$, zależy od modelowanego problemu. W szczególnych przypadkach, niektóre lub nawet wszystkie te wektory mogą zniknąć. W ogólnym przypadku, ich rola jest taka sama jak odpowiednich wektorów sił i momentów powierzchniowych, działających w punktach regularnych płatów powłoki strukturalnej. Zgodnie z tą interpretacją, siły $\mathbf{n}_i(\mathbf{x}, t)$ i momenty $\mathbf{m}_i(\mathbf{x}, t)$ przyłożone w punktach osobliwych c_i przecięcia się krzywych Γ z brzegiem $\partial \Gamma$ należy rozumieć jako wartości sił i momentów wewnętrznych na krawędziach, to znaczy $\mathbf{n}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n}(c_i, t)$ oraz $\mathbf{m}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}(c_i, t)$. Wielkości wyróżnione gwiazdką są wektorami sił i momentów przyłożonych do części regularnej ∂M_f brzegu powłoki strukturalnej oraz w punktach przecięcia się krzywych Γ z tą częścią brzegu. Wielkości te są przyjmowane jako zadane obciążenia brzegowe.

Przyjęte powyżej postacie wielkości dynamicznych, wchodzących do całkowitych zasad mechaniki (3.3.7) i (3.3.8), są naturalną konsekwencją sformułowanej wcześniej ogólnej mechaniki powłok kawałkami regularnych i naszkicowanej w podrozdziale 3.1 ogólnej mechaniki prętów kawałkami regularnych. Stanowią one jedyny postulat mechaniki powłok strukturalnych. U podstaw tego postulatu leży przekonanie, że połączenia powłok wielopłatowych, wzmocnienia powłok żebrami oraz podobne krzywoliniowe osobliwości na powierzchni podstawowej można modelować jednowymiarowym kontinuum, które powinno mieć własności dynamiczne analogiczne do tych wynikających z dynamicznie i kinematycznie ścisłej mechaniki prętów.

3.3.3. Lokalne postacie zasad mechaniki

W dalszych rozważaniach będziemy zakładali, że pęd i moment pędu są różniczkowalne względem czasu. Wówczas zasady zachowania (3.3.8) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(\mathcal{P}, t) &\equiv \mathbf{f}(\mathcal{P}, t) - \dot{\mathbf{p}}(\mathcal{P}, t) = \mathbf{0}, \\
\mathbf{l}(\mathcal{P}, t) &\equiv \mathbf{t}(\mathcal{P}, t) - \dot{\mathbf{m}}(\mathcal{P}, t) = \mathbf{0}.
\end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Ponieważ pęd i moment pędu są określone przez całki po obszarach niezależnych od czasu, więc

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \dot{\mathbf{p}} \, da + \int_{\Pi \cap \Gamma} \dot{\mathbf{p}}_{\Gamma} \, dl + \sum_{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{a}}, \\ \dot{\mathbf{m}}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\vec{\mathbf{y}}} \times \mathbf{p} + \vec{\mathbf{y}} \times \dot{\mathbf{p}}) \, da \\ &\quad + \int_{\Pi \cap \Gamma} (\dot{\mathbf{s}}_{\Gamma} + \dot{\vec{\mathbf{y}}}_{\Gamma} \times \mathbf{p}_{\Gamma} + \vec{\mathbf{y}}_{\Gamma} \times \dot{\mathbf{p}}_{\Gamma}) \, dl \\ &\quad + \sum_{\mathbf{a}} (\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{a}} + \dot{\vec{\mathbf{y}}}_{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}_{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{a}} \times \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{a}}).\end{aligned}\tag{3.3.13}$$

Podstawiając (3.3.13) do (3.3.12) oraz uwzględniając (3.3.11), całkowita siła i całkowity moment działające na dowolną część powłoki strukturalnej przyjmują postać

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \mathbf{b} \, da + \int_{\Gamma \cap \Pi} \mathbf{b}_{\Gamma} \, dl + \int_{(\partial \Pi \setminus \{c_i\}) \setminus \partial M_f} \mathbf{n}_{\nu} \, dl + \int_{(\partial \Pi \cap \partial M_f) \setminus \{c_i\}} \mathbf{n}^* \, dl \\ &\quad + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial \Pi) \setminus \partial M_f} \mathbf{n}_i + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial M_f)} \mathbf{n}_i^* + \sum_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_{\mathbf{a}}, \\ \mathbf{l}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{l} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}) \, da + \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{l}_{\Gamma} + \vec{\mathbf{y}}_{\Gamma} \times \mathbf{b}_{\Gamma}) \, dl \\ &\quad + \int_{(\partial \Pi \setminus \{c_i\}) \setminus \partial M_f} (\mathbf{m}_{\nu} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}_{\nu}) \, dl + \int_{(\partial \Pi \cap \partial M_f) \setminus \{c_i\}} (\mathbf{m}^* + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{n}^*) \, dl \\ &\quad + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial \Pi) \setminus \partial M_f} (\mathbf{m}_i + \vec{\mathbf{y}}_{\Gamma} \times \mathbf{n}_i) + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial M_f)} (\mathbf{m}_i^* + \vec{\mathbf{y}}_{\Gamma} \times \mathbf{n}_i^*) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{a}} (\mathbf{l}_{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}_{\mathbf{a}}).\end{aligned}\tag{3.3.14}$$

Tutaj dla zwartości zapisu wprowadzono następujące oznaczenia:

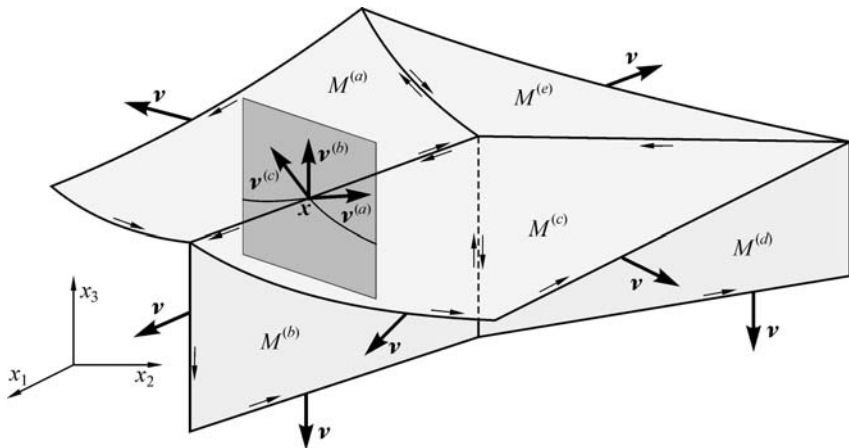
$$\mathbf{b} = \mathbf{f} - \dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{c} - (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\vec{\mathbf{y}}} \times \mathbf{p}),\tag{3.3.15}$$

$$\mathbf{b}_{\Gamma} = \mathbf{f}_{\Gamma} - \dot{\mathbf{p}}_{\Gamma}, \quad \mathbf{l}_{\Gamma} = \mathbf{c}_{\Gamma} - (\dot{\mathbf{s}}_{\Gamma} + \dot{\vec{\mathbf{y}}}_{\Gamma} \times \mathbf{p}_{\Gamma}),\tag{3.3.16}$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{a}} = \mathbf{f}_{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{l}_{\mathbf{a}} = \mathbf{c}_{\mathbf{a}} - (\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{a}} + \dot{\vec{\mathbf{y}}}_{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}_{\mathbf{a}}).\tag{3.3.17}$$

Wprowadzone oznaczenia mają prosty sens fizyczny: są to odpowiednie siły i momenty powierzchniowe, liniowe oraz skupione, zawierające w sobie również siły i momenty inercyjne (bezwładności), pochodzące od ruchu powłoki strukturalnej.

Opis ruchu i deformacji każdego płata $M^{(a)}$ jest identyczny z opisem dla powierzchni podstawowej powłoki regularnej, a opis ruchu i deformacji każdej krzywej $\Gamma^{(p)}$ jest identyczny z opisem dla osi regularnego pręta. Jediną więc nowością rozpatrywanej tutaj teorii powłok strukturalnych jest problem istnienia odpowiednich granic dla wszystkich wielkości dynamicznych, pojawiających się w wyrażeniach (3.3.14). Zakładając istnienie odpowiednich granic, lokalną postać zasad mechaniki otrzymamy z zasad całkowych, postępując w sposób podobny jak w mechanice kawałkami regularnych powłok i prętów.



Rys. 3.3.4. Orientacja płyt powłoki strukturalnej.

Korzystając z dwuwymiarowego odpowiednika twierdzenia Cauchy'ego (1.4.54) dla wektorów przekrojowych sił i momentów,

$$\mathbf{n}_\nu(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{m}_\nu(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \quad (3.3.18)$$

wyrażenia (3.3.14) na całkowitą siłę i całkowity moment możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \mathbf{b} \, da + \int_{\Gamma \cap \Pi} \mathbf{b}_\Gamma \, dl + \int_{\partial \Pi \setminus \{c_i\}} \mathbf{N} \boldsymbol{\nu} \, dl + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial \Pi)} \mathbf{n}_i \\ &+ \int_{(\partial \Pi \cap \partial M_f) \setminus \{c_i\}} (\mathbf{n}^* - \mathbf{N} \boldsymbol{\nu}) \, dl + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial M_f)} (\mathbf{n}_i^* - \mathbf{n}_i) + \sum_a \mathbf{b}_a, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{l} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}) \, da + \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{l}_\Gamma + \vec{\mathbf{y}}_\Gamma \times \mathbf{b}_\Gamma) \, dl \\ &+ \int_{\partial \Pi \setminus \{c_i\}} (\mathbf{M} \boldsymbol{\nu} + \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{N} \boldsymbol{\nu}) \, dl + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial \Pi)} (\mathbf{m}_i + \vec{\mathbf{y}}_\Gamma \times \mathbf{n}_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{(\partial\Pi \cap \partial M_f) \setminus \{c_i\}} \{(\mathbf{m}^* - \mathbf{M}\boldsymbol{\nu}) + \vec{\mathbf{y}} \times (\mathbf{n}^* - \mathbf{N}\boldsymbol{\nu})\} dl \\
& + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial M_f)} \{(\mathbf{m}_i^* - \mathbf{m}_i) + \vec{\mathbf{y}}_\Gamma \times (\mathbf{n}_i^* - \mathbf{n}_i)\} + \sum_a (\mathbf{l}_a + \vec{\mathbf{y}}_a \times \mathbf{b}_a). \quad (3.3.19)_2
\end{aligned}$$

Na mocy uogólnionych twierdzeń o dywergencji powierzchniowej (1.4.41), całki w (3.3.19) wzdłuż brzegu $\partial\Pi$ można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Pi \setminus \{c_i\}} \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} dl &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \text{Div } \mathbf{N} da - \int_{\Gamma \cap \Pi} [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] dl, \\
\int_{\partial\Pi \setminus \{c_i\}} \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} dl &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \text{Div } \mathbf{M} da - \int_{\Gamma \cap \Pi} [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] dl,
\end{aligned} \quad (3.3.20)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Pi \setminus \{c_i\}} \vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} dl &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{\text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) + \vec{\mathbf{y}} \times (\text{Div } \mathbf{N})\} da \\
&- \int_{\Gamma \cap \Pi} [\vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] dl. \quad (3.3.21)
\end{aligned}$$

Mając na uwadze, że Γ może teraz być wspólną krawędzią dowolnej liczby płatów regularnych powłoki, skok każdej wielkości w (3.3.20) i (3.3.21) jest zdefiniowany bardziej ogólnie niż w (1.4.40):

$$\begin{aligned}
[\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] &= \sum_{k=1}^n \mathbf{N}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)}, \\
[\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] &= \sum_{k=1}^n \mathbf{M}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)}, \\
[\vec{\mathbf{y}} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] &= \sum_{k=1}^n \vec{\mathbf{y}}^{(k)} \times \mathbf{N}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)}.
\end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Tutaj $\mathbf{N}^{(k)}$ i inne wielkości oznaczone indeksem (k) są skończonymi granicami tych wielkości od wnętrza płata $M^{(k)}$ przy przejściu do wspólnej krawędzi Γ .

Nowym elementem rozważanej tu teorii powłok strukturalnych są dodatkowe człony w (3.3.19), wynikające z modelowania połączeń jako jednowymiarowego kontinuum o dynamicznych własnościach typowych dla teorii prętów. Całkowe prawa mechaniki muszą być spełnione dla każdej części \mathcal{P} powłoki strukturalnej, której w konfiguracji odniesienia odpowiada obszar Π powierzchni podsta-

wowej M . Odpowiedni wybór obszaru Π pozwala zastosować następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned} \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial \Pi)} n_i &= \int_{\Gamma \cap \Pi} n' dl, \\ \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial \Pi)} (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{y}}_\Gamma \times \mathbf{n})_i &= \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{m}' + \bar{\mathbf{y}}'_\Gamma \times \mathbf{n} + \bar{\mathbf{y}}_\Gamma \times \mathbf{n}') dl. \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

W tych przekształceniach przyjęliśmy, że każdą krzywą $\Gamma^{(p)}$ można lokalnie przedstawić w postaci parametrycznej $\bar{\mathbf{y}}_\Gamma = \bar{\mathbf{y}}_\Gamma(s)$, gdzie s oznacza parametr długości łuku wzdłuż Γ . W rezultacie, wszystkie wielkości określone wzdłuż krzywych można traktować również jako funkcje s , a $(\cdot)'$ oznacza pochodną odpowiedniej wielkości względem tego parametru.

Podstawiając teraz (3.3.23), (3.3.20) i (3.3.21) do (3.3.19), całkowita siła działająca na dowolną część powłoki strukturalnej przyjmuje ostatecznie postać

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\text{Div } \mathbf{N} + \mathbf{b}) da + \int_{(\partial' \Pi \cap \partial' M_f) \setminus \{c_i\}} (\mathbf{n}^* - \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}) dl \\ &+ \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{n}' - [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] + \mathbf{b}_\Gamma) dl + \sum_{c_i \in (\partial \Pi \cap \partial M_f)} (\mathbf{n}^* - \mathbf{n})_i + \sum_a \mathbf{b}_a, \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

natomiast całkowity moment otrzymujemy w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \text{Div } \mathbf{M} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^\text{T} - \mathbf{F}\mathbf{N}^\text{T}) + \mathbf{l} + \bar{\mathbf{y}} \times (\text{Div } \mathbf{N} + \mathbf{b}) \} da \\ &+ \int_{(\partial' \Pi \cap \partial' M_f) \setminus \{c_i\}} \{ (\mathbf{m}^* - \mathbf{M}\boldsymbol{\nu}) + \bar{\mathbf{y}} \times (\mathbf{n}^* - \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}) \} dl \\ &+ \int_{\Gamma \cap \Pi} \{ \mathbf{m}' + \bar{\mathbf{y}}'_\Gamma \times \mathbf{n} - [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] - [\bar{\mathbf{y}} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] + \mathbf{l}_\Gamma + \bar{\mathbf{y}}_\Gamma \times (\mathbf{n}' + \mathbf{b}_\Gamma) \} dl \\ &+ \sum_{c_i \in (\partial \Pi \cap \partial M_f)} \{ (\mathbf{m}^* - \mathbf{m})_i + \bar{\mathbf{y}}_\Gamma \times (\mathbf{n}^* - \mathbf{n})_i \} \\ &+ \sum_a (\mathbf{l}_a + \bar{\mathbf{y}}_a \times \mathbf{b}_a). \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Uwzględniając następnie definicje granic dla wektorów wodzących

$$\bar{\mathbf{y}}^{(k)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}} \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{z} \in M^{(k)}, \quad (3.3.26)$$

wzdłuż krzywych brzegowych poszczególnych płatów możemy wprowadzić następujące wektory przesunięcia względnego

$$\mathbf{z}^{(k)}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbf{y}}_\Gamma(\mathbf{x}, t) - \vec{\mathbf{y}}^{(k)}(\mathbf{x}, t). \quad (3.3.27)$$

Wówczas wyrażenie

$$\begin{aligned} [\vec{\mathbf{y}} \times N\boldsymbol{\nu}] &= \sum_{k=1}^n \vec{\mathbf{y}}^{(k)} \times N^{(k)}\boldsymbol{\nu}^{(k)} \\ &= \sum_{k=1}^n (\vec{\mathbf{y}}_\Gamma - \mathbf{z}^{(k)}) \times N^{(k)}\boldsymbol{\nu}^{(k)} \\ &= \vec{\mathbf{y}}_\Gamma \times \sum_{k=1}^n N^{(k)}\boldsymbol{\nu}^{(k)} - \sum_{k=1}^n \mathbf{z}^{(k)} \times N^{(k)}\boldsymbol{\nu}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

można zapisać jako

$$[\vec{\mathbf{y}} \times N\boldsymbol{\nu}] = \vec{\mathbf{y}}_\Gamma \times [N\boldsymbol{\nu}] - [\mathbf{z} \times N\boldsymbol{\nu}]. \quad (3.3.29)$$

Uwzględniając ten wynik, całkowity moment (3.3.25) przyjmuje ostatecznie postać

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(\mathcal{P}, t) &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} \{ \text{Div } \mathbf{M} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^\text{T} - \mathbf{F}\mathbf{N}^\text{T}) + \mathbf{l} + \vec{\mathbf{y}} \times (\text{Div } \mathbf{N} + \mathbf{b}) \} da \\ &+ \int_{(\partial' \Pi \cap \partial' M_f) \setminus \{c_i\}} \{ (\mathbf{m}^* - \mathbf{M}\boldsymbol{\nu}) + \vec{\mathbf{y}} \times (\mathbf{n}^* - \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}) \} dl \\ &+ \int_{\Gamma \cap \Pi} \left(\mathbf{m}' + \vec{\mathbf{y}}'_\Gamma \times \mathbf{n} - ([\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] - [\mathbf{z} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}]) + \mathbf{l}_\Gamma \right. \\ &+ \left. \vec{\mathbf{y}}_\Gamma \times (\mathbf{n}' - [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] + \mathbf{b}_\Gamma) \right) dl \\ &+ \sum_{c_i \in (\partial \Pi \cap \partial M_f)} \{ (\mathbf{m}_i^* - \mathbf{m}_i) + \vec{\mathbf{y}}_\Gamma \times (\mathbf{n}_i^* - \mathbf{n}_i) \} \\ &+ \sum_{\mathbf{a}} (\mathbf{l}_\mathbf{a} + \vec{\mathbf{y}}_\mathbf{a} \times \mathbf{b}_\mathbf{a}). \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Uwzględnienie w całkowitych prawach mechaniki sił i momentów skupionych w izolowanych punktach jest czymś naturalnym i nie przysparza większych kłopotów. Natomiast w analizie lokalnej uwzględnienie tych sił i momentów jest już bardzo kłopotliwe i wymaga stosowania zaawansowanego aparatu matematycznego. Dlatego w dalszych rozważaniach wielkości te będziemy pomijali.

3.3.4. Lokalne postacie zasad mechaniki powłok strukturalnych

Zasada zachowania masy (3.3.7) jest spełniona tożsamościowo, gdyż wszystkie gęstości mas nie zależą od czasu.

W punktach regularnych każdego płata $M^{(a)}$ *lokalne równania ruchu*, wynikające z zasady zachowania pędu i momentu pędu (3.3.8), przyjmują tę samą postać jak w mechanice powłok regularnych:

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \mathbf{N} + \mathbf{b} &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{Div} \mathbf{M} + \operatorname{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) + \mathbf{l} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Dynamiczne warunki brzegowe w punktach regularnych części ∂M_f brzegu również mają postać taką jak w mechanice powłok regularnych:

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}^*, \quad \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{m}^*. \quad (3.3.32)$$

Nowym elementem teorii powłok strukturalnych są *dynamiczne warunki ciągłości*, które w punktach regularnych krzywych osobliwych przyjmują teraz postać

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' - [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] + \mathbf{b}_\Gamma &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{m}' + \boldsymbol{y}'_\Gamma \times \mathbf{n} - ([\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] - [\mathbf{z} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}]) + \mathbf{l}_\Gamma &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Ponadto, w izolowanych punktach brzegu otrzymujemy dodatkowo następujące *dynamiczne warunki brzegowe*:

$$\mathbf{n}_i^* - \mathbf{n}_i = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}_i^* - \mathbf{m}_i = \mathbf{0}, \quad (3.3.34)$$

W teorii powłok regularnych dynamiczne warunki ciągłości (1.4.61) mają postać równań algebraicznych, natomiast warunki (3.3.33) są już równaniami różniczkowymi. Postać tych równań różni się od równań mechaniki prętów dodatkowymi członami, wynikającymi ze wzajemnego oddziaływania regularnego pręta z regularnymi płacami powłok powstającego jako wynik połączenia w jedną całość tych elementów konstrukcji.

3.4. Kinematyka powłok strukturalnych

3.4.1. Tożsamość całkowita

Zasadniczym wynikiem rozważań poprzedniego podrozdziału jest skonstruowanie postaci całkowitych zasad zachowania pędu i momentu pędu dla klasy konstrukcji inżynierskich, którą umownie nazwaliśmy powłokami strukturalnymi. Z tych zasad otrzymaliśmy następnie, na drodze przekształceń czysto formalnych, lokalne równania ruchu (3.3.31) i dynamiczne warunki uboczne (3.3.32)–(3.3.34).

Kompletne sformułowanie mechaniki powłok strukturalnych wymaga uzupełnienia powyższych zależności dynamicznych pełnym opisem kinematyki, w tym

sformułowaniem odpowiednich miar przemieszczeń i odkształceń, ustaleniem kinematycznych warunków ubocznych oraz analizą ogólnej postaci równań konstytutywnych. Sformułowanie tych brakujących elementów teorii wymaga odpowiedniego postępowania, aby były one spójne z przyjętą postacią zasad mechaniki. Można to osiągnąć powtarzając tok rozumowania, który stosowaliśmy już przy formułowaniu mechaniki powłok regularnych.

Podobnie jak w przypadku powłok regularnych (rozdz. 1 i 2), pełny opis kinematyki powłoki strukturalnej można otrzymać tworząc tożsamość całkową podobną do tej z podrozdziału 1.5 i 1.6. Model dynamiczny powłoki strukturalnej jest jednak znacznie bogatszy, a sformułowanie odpowiedniej tożsamości całkowej trudniejsze. W jej konstrukcji musimy uwzględnić nie tylko lokalne równania ruchu (3.3.31) i dynamiczne warunki brzegowe (3.3.32), lecz również rozszerzone dynamiczne równania ciągłości (3.3.33) w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma$ oraz dynamiczne warunki brzegowe (3.3.34) w izolowanych punktach $c_i \in \Gamma \cap \partial M_f$.

Dla przejrzystości dalszego toku postępowania, zapiszmy równania (3.3.31) i warunki ciągłości (3.3.33) w zwartej postaci

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{b}} &\equiv \text{Div } \mathbf{N} + \mathbf{f} + \mathbf{f}^{\text{in}} = \mathbf{0}, \\ \bar{\mathbf{l}} &\equiv \text{Div } \mathbf{M} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^{\text{T}} - \mathbf{F}\mathbf{N}^{\text{T}}) + \mathbf{c} + \mathbf{c}^{\text{in}} = \mathbf{0},\end{aligned}\quad (3.4.1)$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{b}}_{\Gamma} &\equiv \mathbf{n}' - [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] + \mathbf{f}_{\Gamma} + \mathbf{f}_{\Gamma}^{\text{in}} = \mathbf{0}, \\ \bar{\mathbf{l}}_{\Gamma} &\equiv \mathbf{m}' - ([\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] - [\mathbf{z} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}]) + \bar{\mathbf{y}}'_{\Gamma} \times \mathbf{n} + \mathbf{c}_{\Gamma} + \mathbf{c}_{\Gamma}^{\text{in}} = \mathbf{0},\end{aligned}\quad (3.4.2)$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia dla inercjalnych sił i momentów:

$$\mathbf{f}^{\text{in}} \equiv -\dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{c}^{\text{in}} \equiv -(\dot{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{y}} \times \dot{\mathbf{p}}), \quad (3.4.3)$$

$$\mathbf{f}_{\Gamma}^{\text{in}} \equiv -\dot{\mathbf{p}}_{\Gamma}, \quad \mathbf{c}_{\Gamma}^{\text{in}} \equiv -(\dot{\mathbf{s}}_{\Gamma} + \bar{\mathbf{y}}_{\Gamma} \times \dot{\mathbf{p}}_{\Gamma}). \quad (3.4.4)$$

Przy tworzeniu tożsamości całkowej musimy pamiętać, że krzywe osobliwe Γ są, w ogólnym przypadku, jednowymiarowymi ośrodkami ciągłymi o własnej dynamice i kinematyce. Obok dwóch dowolnych pól wektorowych $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ zdefiniowanych na $M \setminus \Gamma$, należy więc teraz wprowadzić dwa dodatkowe pola wektorowe $\mathbf{v}_{\Gamma}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}_{\Gamma}(\mathbf{x}, t)$ zdefiniowane wyłącznie na Γ . Wprowadzając zwarte oznaczenia $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ i $\mathbf{w}_{\Gamma} \equiv (\mathbf{v}_{\Gamma}, \mathbf{w}_{\Gamma})$, punktem wyjścia w konstrukcji tożsamości całkowej może być więc następujące wyrażenie (por. (1.5.4)):

$$H(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}, \mathbf{w}_{\Gamma}) \equiv \int_{\Pi \setminus \Gamma} (\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{w}) \, da + \int_{\Gamma \cap \Pi} (\bar{\mathbf{b}}_{\Gamma} \cdot \mathbf{v}_{\Gamma} + \bar{\mathbf{l}}_{\Gamma} \cdot \mathbf{w}_{\Gamma}) \, dl, \quad (3.4.5)$$

gdzie $\Pi \subset M$ jest obszarem w konfiguracji odniesienia uogólnionej powierzchni podstawowej, odpowiadającym dowolnej części powłoki strukturalnej.

Na mocy (3.4.1) i (3.4.2) mamy

$$\int_{t_1}^{t_2} \{H(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}, \mathbf{w}_\Gamma)\} dt = 0 \quad (3.4.6)$$

dla dowolnego przedziału czasu $[t_1, t_2]$ oraz dowolnych pól $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ i $\mathbf{w}_\Gamma \equiv (\mathbf{v}_\Gamma, \mathbf{w}_\Gamma)$. Sens fizyczny tych pól nie musi być rozpatrywany na tym etapie rozważań. Muszą one jednak spełniać odpowiednie warunki regularności, aby wykonywane dalej przekształcenia matematyczne były dopuszczalne.

3.4.2. Formalne przekształcenia

Uwzględniając definicje wektorów $\bar{\mathbf{b}}$ i $\bar{\mathbf{l}}$, pierwszą całkę w wyrażeniu (3.4.5) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{w}) da &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} ((\mathbf{f} + \mathbf{f}^{\text{in}}) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{c} + \mathbf{c}^{\text{in}}) \cdot \mathbf{w}) da \\ &+ \iint_{\Pi \setminus \Gamma} ((\text{Div } \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v} + (\text{Div } \mathbf{M} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^{\text{T}} - \mathbf{F}\mathbf{N}^{\text{T}})) \cdot \mathbf{w}) da. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Przypomnijmy, że uogólniona powierzchnia podstawowa M w konfiguracji odniesienia jest teraz definiowana w (3.3.1) jako suma wielu płatów regularnych $M^{(a)}$. Będziemy więc zakładali, że pola wektorowe $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ są ciągłe i różniczkowalne wewnątrz każdego płata $M^{(a)}$ oraz mają ciągłe przedłużenia do jego brzegu $\partial M^{(a)}$. Zapewnia to istnienie skończonych granic $\mathbf{v}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{w}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ tych pól przy przejściu do krzywych Γ , będących wspólnym brzegiem dwóch lub więcej płatów $M^{(a)}$. Przy tych założeniach możemy zastosować uogólnione twierdzenie o powierzchniowej dywergencji, w wyniku którego otrzymamy

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} ((\text{Div } \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v} + (\text{Div } \mathbf{M}) \cdot \mathbf{w}) da &= - \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w}) da \\ &+ \int_{\Gamma \cap \Pi} ([\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}]) dl + \int_{\partial \Pi \setminus \{c_i\}} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) dl, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

gdzie skok poszczególnych wielkości jest zdefiniowany jako

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] &= \sum_{a=1}^n (\mathbf{N}^{(a)}\boldsymbol{\nu}^{(a)}) \cdot \mathbf{v}^{(a)}, \\ [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}] &= \sum_{a=1}^n (\mathbf{M}^{(a)}\boldsymbol{\nu}^{(a)}) \cdot \mathbf{w}^{(a)}, \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

a $n \geq 1$ jest liczbą płatów $M^{(a)}$, dla których Γ jest wspólnym brzegiem. Te definicje są zgodne z (3.3.22) i orientacją poszczególnych płatów $M^{(a)}$, naszkicowaną na rys. 3.3.4.

Wyrażenie w całce krzywoliniowej w (3.4.8) wzdłuż brzegu $\partial\Pi$ nie jest zdefiniowane w izolowanych punktach c_i , będących punktami przecięcia krzywych Γ z brzegiem $\partial\Pi$. Jest to nowy aspekt rozważanej tutaj mechaniki powłok strukturalnych, który nie ma odpowiednika w mechanice powłok kawałkami regularnych.

Podstawiając (3.4.8) do (3.4.7), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{w}) \, da &= \iint_{\Pi \setminus \Gamma} ((\mathbf{f} + \mathbf{f}^{\text{in}}) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{c} + \mathbf{c}^{\text{in}}) \cdot \mathbf{w}) \, da \\ &- \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - \{\text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^{\text{T}} - \mathbf{F}\mathbf{N}^{\text{T}})\} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w}) \, da \\ &+ \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{[N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + \mathbf{[M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}]) \, dl + \int_{\partial\Pi \setminus \{c_i\}} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) \, dl. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

W wyniku tych formalnych przekształceń wyrażenie (3.4.5) możemy przedstawić jako sumę dwóch składników

$$H(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}, \mathbf{w}_\Gamma) = G(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) + G_\Gamma(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}, \mathbf{w}_\Gamma), \quad (3.4.11)$$

gdzie

$$\begin{aligned} G(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}) &\equiv \iint_{\Pi \setminus \Gamma} ((\mathbf{f} + \mathbf{f}^{\text{in}}) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{c} + \mathbf{c}^{\text{in}}) \cdot \mathbf{w}) \, da \\ &- \iint_{\Pi \setminus \Gamma} (\mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - \{\text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^{\text{T}} - \mathbf{F}\mathbf{N}^{\text{T}})\} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w}) \, da \\ &+ \int_{\partial\Pi \setminus \{c_i\}} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) \, dl, \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

$$G_\Gamma(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}, \mathbf{w}_\Gamma) \equiv \int_{\Gamma \cap \Pi} (\bar{\mathbf{b}}_\Gamma \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{[N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + \bar{\mathbf{l}}_\Gamma \cdot \mathbf{w}_\Gamma + \mathbf{[M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}]) \, dl. \quad (3.4.13)$$

Zauważmy, że wyrażenie (3.4.12) jest zdefiniowane przez całki po części regularnej powierzchni podstawowej M , natomiast wyrażenie (3.4.13) jest całką krzywoliniową wzdłuż krzywych osobliwych Γ .

Biorąc pod uwagę definicje (3.4.2) wektorów $\bar{\mathbf{b}}_\Gamma$ i $\bar{\mathbf{l}}_\Gamma$, wyrażenie (3.4.13) zapiszemy jako

$$\begin{aligned} G_\Gamma(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}, \mathbf{w}_\Gamma) \equiv & \int_{\Gamma \cap \Pi} ((\mathbf{f}_\Gamma + \mathbf{f}_\Gamma^{\text{in}}) \cdot \mathbf{v}_\Gamma + (\mathbf{c}_\Gamma + \mathbf{c}_\Gamma^{\text{in}}) \cdot \mathbf{w}_\Gamma) dl \\ & + \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v}_\Gamma + (\mathbf{m}' + \bar{\mathbf{y}}'_\Gamma \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}_\Gamma) dl \\ & - \int_{\Gamma \cap \Pi} \left([\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] \cdot \mathbf{v}_\Gamma - [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] \right. \\ & \left. + ([\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] - [\mathbf{z} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}]) \cdot \mathbf{w}_\Gamma - [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}] \right) dl, \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

gdzie $(\cdot)'$ oznacza różniczkowanie względem parametru łukowego wzdłuż Γ .

Drugą całkę w tym wyrażeniu przekształcimy, uwzględniając najpierw klasyczną regułę różniczkowania przez części wyrażień

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{v}_\Gamma &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Gamma)' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}'_\Gamma, \\ \mathbf{m}' \cdot \mathbf{w}_\Gamma &= (\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_\Gamma)' - \mathbf{m} \cdot \mathbf{w}'_\Gamma. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Wymaga to dodatkowego założenia, że te pola wektorowe są różniczkowalne wzdłuż każdej krzywej spośród tworzących razem krzywą osobiwą Γ , zgodnie z definicją (3.3.3). Przy tym założeniu, podstawiając (3.4.15) do drugiej całki (3.4.14) mamy

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v}_\Gamma + (\mathbf{m}' + \bar{\mathbf{y}}'_\Gamma \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}_\Gamma) dl &= \int_{\Gamma \cap \Pi} ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Gamma)' + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_\Gamma)') dl \\ &- \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}'_\Gamma - (\bar{\mathbf{y}}'_\Gamma \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}_\Gamma + \mathbf{m} \cdot \mathbf{w}'_\Gamma) dl. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Stosując do pierwszej całki po prawej stronie (3.4.16) przekształcenie, będące odpowiednikiem twierdzenia (3.3.23), otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Gamma)' dl &= \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial \Pi)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Gamma)_i, \\ \int_{\Gamma \cap \Pi} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_\Gamma)' dl &= \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial \Pi)} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_\Gamma)_i. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

W wyniku tych przekształceń wyrażenie (3.4.13) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} G_\Gamma(\mathcal{P}, t; \mathbf{w}, \mathbf{w}_\Gamma) \equiv & \int_{\Gamma \cap \Pi} ((\mathbf{f}_\Gamma + \mathbf{f}_\Gamma^{\text{in}}) \cdot \mathbf{v}_\Gamma + (\mathbf{c}_\Gamma + \mathbf{c}_\Gamma^{\text{in}}) \cdot \mathbf{w}_\Gamma) dl \\ & - \int_{\Gamma \cap \Pi} (w_\Gamma + \bar{w}_\Gamma) dl + \sum_{c_i \in (\Gamma \cap \partial \Pi)} ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Gamma)_i + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_\Gamma)_i), \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

gdzie dla uproszczenia zapisu wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$w_\Gamma \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}'_\Gamma - (\bar{\mathbf{y}}'_\Gamma \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}_\Gamma + \mathbf{m} \cdot \mathbf{w}'_\Gamma, \quad (3.4.19)$$

$$\bar{w}_\Gamma \equiv [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] \cdot \mathbf{v}_\Gamma - [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + ([\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] - [\mathbf{z} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}]) \cdot \mathbf{w}_\Gamma - [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}]. \quad (3.4.20)$$

Powyższe dwie wielkości skalarne w_Γ i \bar{w}_Γ mają dobrze określony sens fizyczny i mogą stanowić podstawę do formułowania różnych modeli połączeń elementów powłokowych.

3.4.3. Zasada wariacyjna

Powyższe rozważania odnosiły się do dowolnej części powłoki strukturalnej. Wobec tego, otrzymane wyniki stosują się również do *całej* powłoki strukturalnej.

Zasadniczym rezultatem tych rozważań są dwa wyrażenia (3.4.12) i (3.4.18), które zapisane dla całej powłoki strukturalnej przyjmują postać

$$\begin{aligned} G(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) &\equiv \iint_{M \setminus \Gamma} ((\mathbf{f} + \mathbf{f}^{\text{in}}) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{c} + \mathbf{c}^{\text{in}}) \cdot \mathbf{w}) \, da \\ &\quad - \iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - \{\text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T)\} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w}) \, da \\ &\quad + \int_{\partial M \setminus \{c_i\}} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) \, dl, \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

$$\begin{aligned} G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}, \mathbf{w}_\Gamma) &\equiv \int_{\Gamma \cap M} ((\mathbf{f}_\Gamma + \mathbf{f}_\Gamma^{\text{in}}) \cdot \mathbf{v}_\Gamma + (\mathbf{c}_\Gamma + \mathbf{c}_\Gamma^{\text{in}}) \cdot \mathbf{w}_\Gamma) \, dl \\ &\quad - \int_{\Gamma \cap M} (w_\Gamma + \bar{w}_\Gamma) \, dl + \sum_{c_i \in \partial M} ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Gamma)_i + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_\Gamma)_i). \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

Założmy teraz, że brzeg ∂M całej powłoki strukturalnej jest sumą rozłączną dwóch części ∂M_f i ∂M_d , to znaczy $\partial M = \partial M_f \cup \partial M_d$. Wówczas

$$\begin{aligned} \int_{\partial M \setminus \{c_i\}} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) \, dl &= \int_{\partial M_f \setminus \{c_i\}} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) \, dl \\ &\quad + \int_{\partial M_d \setminus \{c_i\}} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) \, dl, \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

$$\begin{aligned} \sum_{c_i \in \partial M} ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Gamma)_i + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_\Gamma)_i) &= \sum_{c_i \in \partial M_f} ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Gamma)_i + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_\Gamma)_i) \\ &\quad + \sum_{c_i \in \partial M_d} ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Gamma)_i + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_\Gamma)_i). \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

W przekształconej tożsamości całkowej (3.4.5) i (3.4.6) wykorzystaliśmy jedynie lokalne równania ruchu, które posłużyły do przekształcenia (3.4.5) do sumy dwóch składników (3.4.21) i (3.4.22). Uwzględniając teraz w (3.4.23) dynamiczne warunki brzegowe (3.3.32) i podstawiając następnie wynik do (3.4.21), otrzymamy

$$\begin{aligned}
 G(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) &= \iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbf{f}^{\text{in}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c}^{\text{in}} \cdot \mathbf{w}) da \\
 &\quad - \iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - \{\text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^{\text{T}} - \mathbf{F}\mathbf{N}^{\text{T}})\} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w}) da \\
 &\quad + \iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial M_f \setminus \{c_i\}} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{w}) dl \\
 &\quad + \int_{\partial M_d \setminus \{c_i\}} (\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) dl. \tag{3.4.25}
 \end{aligned}$$

Uwzględniając również w (3.4.24) dynamiczne warunki brzegowe (3.3.34) w izolowanych punktach c_i części brzegu ∂M_f i podstawiając otrzymany wynik do (3.4.22), mamy również

$$\begin{aligned}
 G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}, \mathbf{w}_\Gamma) &= \int_{\Gamma \cap M} (\mathbf{f}_\Gamma^{\text{in}} \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{c}_\Gamma^{\text{in}} \cdot \mathbf{w}_\Gamma) dl - \int_{\Gamma \cap M} (w_\Gamma + \bar{w}_\Gamma) dl \\
 &\quad + \int_{\Gamma \cap M} (\mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{c}_\Gamma \cdot \mathbf{w}_\Gamma) dl + \sum_{c_i \in \partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{w}_\Gamma)_i \\
 &\quad + \sum_{c_i \in \partial M_d} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_\Gamma)_i. \tag{3.4.26}
 \end{aligned}$$

Wynik powyższych formalnych przekształceń możemy wyrazić następująco: jeśli całkowe zasady zachowania pędu i momentu pędu (3.3.8) są spełnione, to

$$\int_{t_1}^{t_2} \{G(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}) + G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{w}, \mathbf{w}_\Gamma)\} dt = 0 \tag{3.4.27}$$

dla dowolnych pól wektorowych $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ i $\mathbf{w}_\Gamma \equiv (\mathbf{v}_\Gamma, \mathbf{w}_\Gamma)$. Twierdzenie odwrotne jest, oczywiście, również prawdziwe, a jego udowodnienie wymaga jedynie zastosowania tego samego toku postępowania, lecz w odwrotnej kolejności.

Uzyskany wynik jest podobny do tego, który otrzymaliśmy w rozdz. 1 dla powłok regularnych. Jego interpretacja fizyczna może więc być również taka sama.

W szczególności, sens fizyczny wyrażenia (3.4.25) jest taki sam jak w przypadku powłok regularnych. Jednak rozważana tutaj teoria obejmuje teraz znacznie bogatszą klasę konstrukcji — powłoki strukturalne. Dlatego wyjaśnienie sensu fizycznego poszczególnych składników w wyrażeniu (3.4.26) wymaga dalszej analizy.

Jeśli pola wektorowe $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$ i $\mathbf{w}_\Gamma \equiv (\mathbf{v}_\Gamma, \boldsymbol{\omega}_\Gamma)$ są interpretowane jako kinematycznie dopuszczalne pola wirtualnych przesunięć i obrotów, znikające na ∂M_d , to ostatnie całki w (3.4.25) i (3.4.26) znikają. Wtedy tożsamość całkowa (3.4.27) wyraża *zasadę wariacyjną* dla całej powłoki strukturalnej.

3.4.4. Kinematyka powłoki strukturalnej

Tożsamość całkowa (3.4.27) musi być również spełniona w szczególnym przypadku rzeczywistego ruchu powłoki strukturalnej przy zadanych obciążeniach zewnętrznych. W tym szczególnym przypadku pola $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$ i $\mathbf{w}_\Gamma \equiv (\mathbf{v}_\Gamma, \boldsymbol{\omega}_\Gamma)$ utożsamiamy z rzeczywistymi prędkościami $\mathbf{v} \equiv (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$ i $\mathbf{v}_\Gamma \equiv (\mathbf{v}_\Gamma, \boldsymbol{\omega}_\Gamma)$.

Z prędkości rzeczywistych można teraz wyznaczyć opis rzeczywistego ruchu powłoki oraz odpowiednie miary przemieszczeń i odkształceń w toku podobnego postępowania, które było już stosowane w teorii regularnych powłok i prętów. Nie ma więc potrzeby powtarzania tutaj wszystkich kolejnych kroków tej procedury. Wystarczy jedynie zauważyć, że pełny opis kinematyczny powłoki strukturalnej wymaga teraz czterech pól: przesunięć $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i obrotów $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$, określonych w punktach regularnych $\mathbf{x} \in M \setminus \Gamma$ powierzchni podstawowej łącznie z częścią regularną $\partial M \setminus \{c_i\}$ brzegu ∂M , oraz przesunięć $\mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ i obrotów $\mathbf{Q}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$, określonych w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma$ krzywych osobliwych powierzchni podstawowej łącznie z izolowanymi punktami $c_i \in \Gamma \cap \partial M$ brzegu ∂M .

Pełny opis ruchu powłoki strukturalnej ma więc postać

$$\vec{y}(\mathbf{x}, t) = \vec{x}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{T}_0(\mathbf{x}), \quad (3.4.28)$$

$$\vec{y}_\Gamma(\mathbf{x}, t) = \vec{x}_\Gamma(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{T}_\Gamma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}_\Gamma(\mathbf{x}, t) \mathbf{T}_\Gamma^0(\mathbf{x}), \quad (3.4.29)$$

gdzie $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ i $\mathbf{T}_\Gamma^0(\mathbf{x})$ są tensorami struktury konfiguracji odniesienia określonymi, odpowiednio, w punktach $\mathbf{x} \in M \setminus \Gamma$ i $\mathbf{x} \in \Gamma$, natomiast $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{T}_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ są odpowiednimi tensorami struktury konfiguracji aktualnej powłoki strukturalnej. Te tensory mogą być reprezentowane poprzez odpowiednie trójki wektorów kierunkowych, jak to naszkicowano na rys. 3.4.1. Przesunięcia $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i obroty $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ każdego płata $M^{(a)}$ nie są określone na Γ , ale będziemy zakładali, że mają one skończone granice $\mathbf{u}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{Q}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma$.

Rzeczywiste pola prędkości obliczane są teraz z (3.4.28) i (3.4.29) tak samo jak w teorii powłok regularnych i teorii regularnych prętów:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\vec{y}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \\ \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)^\top = \text{ad } \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\Gamma(\mathbf{x}, t) &= \dot{\bar{\mathbf{y}}}_\Gamma(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}_\Gamma(\mathbf{x}, t), \\ \boldsymbol{\Omega}_\Gamma(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{Q}}_\Gamma(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}_\Gamma(\mathbf{x}, t)^\top = \text{ad } \boldsymbol{\omega}_\Gamma(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

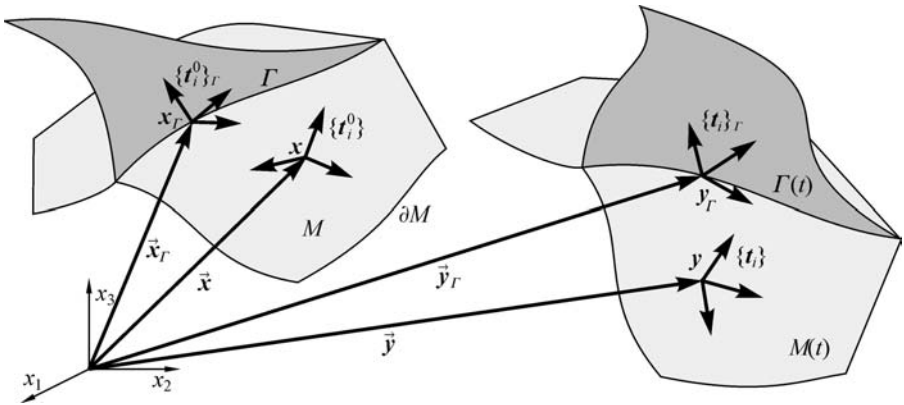
Powłokowe miary odkształceń w punktach regularnych $\mathbf{x} \in M \setminus \Gamma$ i prętowe miary odkształceń w regularnych punktach krzywych osobiwych $\mathbf{x} \in \Gamma$ wyznaczamy również z (3.4.28) i (3.4.29) w taki sam sposób jak w teorii regularnych powłok i teorii regularnych prętów. Ponadto, z analizy wyrażeń (3.4.25) i (3.4.26) wynika, że kinematyczne warunki brzegowe przyjmują postać

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}^*(\mathbf{x}, t), \quad (3.4.32)$$

w punktach regularnych $\mathbf{x} \in \partial M_d \setminus \{c_i\}$ części ∂M_d brzegu, oraz

$$\mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_\Gamma^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{Q}_\Gamma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}_\Gamma^*(\mathbf{x}, t), \quad (3.4.33)$$

w izolowanych punktach $c_i \in \Gamma \cap \partial M_d$ tej części brzegu, gdzie wielkości wyróżnione gwiazdką są danymi.



Rys. 3.4.1. Opis ruchu powłoki strukturalnej.

Do pełnego opisu kinematyki powłoki strukturalnej brakującym jeszcze elementem są kinematyczne warunki ciągłości, które nakładają ograniczenia na odpowiednie granice $\mathbf{u}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{Q}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ przesunięć i obrotów w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma$. Postać tych warunków zależy jednak również od modelowanych połączeń i problem ten jest przedmiotem analizy następnego podrozdziału. Tutaj zauważmy jedynie, że przyjęte w podrozdziale 3.3 zasady mechaniki są jedynymi postulatami mechaniki powłok strukturalnych. Te postulaty określają zakres stosowalności tej teorii do problemów inżynierskich. Postać tych zasad jest wystarczająco bogata, aby ująć wiele ważnych przypadków szczególnych.

O ile wyrażenie (3.4.25) dla części regularnej powłoki strukturalnej zależy tylko od pól $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$, to wyrażenie (3.4.26) dla części osobiwej powłoki strukturalnej zależy nie tylko od pól $\mathbf{w}_\Gamma \equiv (\mathbf{v}_\Gamma, \boldsymbol{\omega}_\Gamma)$, ale również od pól $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$,

a ściślej od wartości granicznych tych pól przy przejściu do krzywej osobliwej. Dlatego modelowanie połączeń regularnych części powłok nie może być rozpatrywane niezależnie od rozważenia struktury zależności osobliwej części powłoki strukturalnej.

3.5. Równania konstytutywne i modelowanie połączeń powłokowych

3.5.1. Zestawienie podstawowych zależności

Mechanika powłok strukturalnych, której podstawy zostały sformułowane w dwóch poprzednich podrozdziałach, opisana jest przez:

lokalne równania ruchu

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \mathbf{N} + \mathbf{f} + \mathbf{f}^{\text{in}} &= 0, \\ \operatorname{Div} \mathbf{M} + \operatorname{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^{\text{T}} - \mathbf{F}\mathbf{N}^{\text{T}}) + \mathbf{c} + \mathbf{c}^{\text{in}} &= 0, \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

które muszą być spełnione we wszystkich punktach regularnych $\mathbf{x} \in M \setminus \Gamma$, oraz

dynamiczne warunki ciągłości

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' - [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] + \mathbf{f}_{\Gamma} + \mathbf{f}_{\Gamma}^{\text{in}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{m}' + \vec{\mathbf{y}}'_{\Gamma} \times \mathbf{n} - [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] + [\mathbf{z} \times \mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] + \mathbf{c}_{\Gamma} + \mathbf{c}_{\Gamma}^{\text{in}} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

które muszą być spełnione w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma$ krzywych osobliwych.

W ogólnym przypadku analiza matematyczna zagadnienia wymaga rozwiązania sprzężonego układu $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych które, łącznie z odpowiednimi równaniami konstytutywnymi i związkami kinematycznymi, pozwalają wyznaczyć przesunięcia \mathbf{u} i obroty \mathbf{Q} w punktach regularnych $\mathbf{x} \in M \setminus \Gamma$ oraz przesunięcia \mathbf{u}_{Γ} i obroty \mathbf{Q}_{Γ} w punktach $\mathbf{x} \in \Gamma$ przy zadanych warunkach brzegowych i początkowych.

Kompletny układ warunków brzegowych zawiera:

dynamiczne warunki brzegowe

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}^*, \quad \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{m}^* \quad (3.5.3)$$

w punktach regularnych $\mathbf{x} \in \partial M_f \setminus \{c_i\}$ części ∂M_f brzegu, gdzie zadane są obciążenia zewnętrzne,

kinematyczne warunki brzegowe

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^* \quad (3.5.4)$$

w punktach regularnych $\mathbf{x} \in \partial M_d \setminus \{c_i\}$ komplementarnej części ∂M_d brzegu, gdzie zadane są przemieszczenia i obroty,

dynamiczne warunki brzegowe

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i^*, \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_i^* \quad (3.5.5)$$

w izolowanych punktach $c_i \in \Gamma \cap \partial M_f$ części ∂M_f brzegu, gdzie zadane są zewnętrzne obciążenia skupione, oraz

kinematyczne warunki brzegowe

$$(\mathbf{u}_\Gamma - \mathbf{u}_\Gamma^*)_i = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{Q}_\Gamma - \mathbf{Q}_\Gamma^*)_i = \mathbf{0} \quad (3.5.6)$$

w izolowanych punktach $c_i \in \Gamma \cap \partial M_d$ części ∂M_d brzegu, gdzie zadane są przesunięcia i obroty.

Powyższe równania i warunki brzegowe oraz odpowiednie zależności kinematyczne nie zależą ani od własności materiałowych, ani też od charakteru modelowanych połączeń. Te równania i warunki są ważne dla całej klasy powłok strukturalnych. Do kompletnego sformułowania zagadnienia początkowo-brzegowego mechaniki takich konstrukcji powyższe równania i warunki brzegowe muszą być uzupełnione odpowiednimi kinematycznymi warunkami ciągłości wzdłuż krzywych Γ , warunkami początkowymi i równaniami konstytutywnymi. W przyjętym tutaj podejściu, równania konstytutywne stanowią integralną część matematycznego modelowania połączeń.

3.5.2. Ogólna struktura równań konstytutywnych

W punktach regularnych $\mathbf{x} \in M \setminus \Gamma$ równania konstytutywne i warunki początkowe muszą mieć taką samą postać jak w teorii powłok regularnych. Wynika to wprost z analizy wyrażenia (3.4.25) na wirtualną pracę części regularnej powłoki strukturalnej.

Istotnie, w przypadku ruchu rzeczywistego wyrażenie podcałkowe w drugiej całce w (3.4.25) przyjmuje postać

$$\sigma \equiv \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - \{ \text{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) \} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (3.5.7)$$

Wyraża ono powierzchniową gęstość efektywnej mocy mechanicznej w punktach $\mathbf{x} \in M \setminus \Gamma$, identyczną z wyrażeniem (1.6.5), wyprowadzonym dla powłok regularnych. Uwzględniając więc definicje energetycznie sprzężonych miar odkształceń (podrozdział 1.7), wyrażenie (3.5.7) przyjmuje postać

$$\sigma \equiv \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}^\circ + \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}^\circ. \quad (3.5.8)$$

Z (3.5.8) wynika, że równania konstytutywne dla części regularnej powłoki strukturalnej wymagają, aby tensory przekrojowych sił \mathbf{N} i momentów \mathbf{M} były danymi funkcjonalami historii powłokowych miar odkształceń \mathbf{E} i \mathbf{K} , dyskuutowanymi w podrozdziale 2.2. W szczególnym przypadku powłok sprężystych, takie równania konstytutywne przyjmują postać (2.2.16), a w przypadku powłok hipersprężystych postać (2.2.21).

W ruchu rzeczywistym powłoki strukturalnej pierwsza całka w wyrażeniu (3.4.25) przedstawia moc mechaniczną sił i momentów inercji

$$G^{\text{in}}(\mathcal{S}, t; \mathbf{v}) = \iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbf{f}^{\text{in}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c}^{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\omega}) da, \quad (3.5.9)$$

gdzie $\mathbf{v} \equiv (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$. Po uwzględnieniu definicji (3.4.3) sił i momentów inercji, wyrażenie (3.5.9) jest identyczne z odpowiednim wyrażeniem wyprowadzonym dla powłok regularnych w podrozdziale 1.6. Dlatego kinetyczne równania konstytutywne powłok strukturalnych są takie same jak te dyskutowane w p. 2.2.8. Dla szczególnego przypadku powłok sprężystych kinetyczne równania konstytutywne dla pędu i momentu pędu przyjmują postać (2.2.38).

Nowym elementem mechaniki powłok strukturalnych są dynamiczne warunki ciągłości (3.5.2), będące teraz równaniami różniczkowymi, a nie algebraicznymi, jak ma to miejsce w mechanice powłok kawałkami regularnych. Dlatego kompletne sformułowanie teorii powłok strukturalnych wymaga nie tylko równań konstytutywnych, lecz również dodatkowych zależności o charakterze konstytutywnym. Ogólną strukturę takich zależności otrzymamy badając wyrażenie (3.4.26), które w przypadku ruchu rzeczywistego powłoki strukturalnej przyjmuje postać

$$\begin{aligned} G_{\Gamma}(\mathcal{S}, t; \mathbf{v}, \mathbf{v}_{\Gamma}) &= \int_{\Gamma \cap M} (\mathbf{f}_{\Gamma}^{\text{in}} \cdot \mathbf{v}_{\Gamma} + \mathbf{c}_{\Gamma}^{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\Gamma}) dl - \int_{\Gamma \cap M} (\sigma_{\Gamma} + \bar{\sigma}_{\Gamma}) dl \\ &+ \int_{\Gamma \cap M} (\mathbf{f}_{\Gamma} \cdot \mathbf{v}_{\Gamma} + \mathbf{c}_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\Gamma}) dl + \sum_{c_i \in \partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v}_{\Gamma} + \mathbf{m}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_{\Gamma})_i \\ &+ \sum_{c_i \in \partial M_d} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\Gamma} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\Gamma}). \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Pierwsza całka w (3.5.10) przedstawia moc mechaniczną sił i momentów inercji na krzywych Γ , suma dwóch następujących wyrażen jest mocą mechaniczną obciążeń zewnętrznych, działających wzdłuż tych krzywych, a ostatnie wyrażenie jest dodatkową mocą mechaniczną określoną w punktach przecięcia Γ z brzegiem ∂M .

Po uwzględnieniu definicji (3.4.4), pierwsza całka w (3.5.10) jest identyczna z odpowiednim wyrażeniem wyprowadzonym w mechanice prętów w podrozdziale 3.1. Stąd wynika, że pęd i moment pędu na krzywych Γ dla szczególnego przypadku materiału sprężystego muszą być dane przez kinetyczne równania konstytutywne postaci (3.1.26), będące odpowiednikiem równań konstytutywnych (2.2.38).

Wyrażenia podcałkowe w drugiej całce (3.5.10) są tymi wielkościami, które wymagają dalszej szczegółowej analizy. Zgodnie z definicjami (3.4.19) i (3.4.20), w ruchu rzeczywistym wyrażenia na σ_{Γ} i $\bar{\sigma}_{\Gamma}$ przyjmują postać

$$\sigma_{\Gamma} \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}'_{\Gamma} - (\bar{\mathbf{y}}'_{\Gamma} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{\Gamma} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}'_{\Gamma}, \quad (3.5.11)$$

$$\bar{\sigma}_\Gamma \equiv [N\nu] \cdot \nu_\Gamma - [N\nu \cdot \nu] + ([M\nu] - [z \times N\nu]) \cdot \omega_\Gamma - [M\nu \cdot \omega]. \quad (3.5.12)$$

Wyrażenie (3.5.11), przedstawiające gęstość mocy przekrojowych sił i momentów wewnętrznych na krzywych osoblivych, możemy zapisać w postaci

$$\sigma_\Gamma \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma^\circ + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Gamma^\circ, \quad (3.5.13)$$

gdzie $\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma$ i $\boldsymbol{\kappa}_\Gamma$ są wektorowymi miarami odkształceń zdefiniowanymi w teorii prętów (podrozdział 3.1). Błędym jednak byłoby wyciąganie stąd wniosku, że brakujące zależności konstytutywne wzdłuż Γ dla np. materiału sprężystego można przyjąć w postaci (3.1.25), tak jak to ma miejsce w teorii prętów. Wyrażenia (3.5.11) i (3.5.12) należy rozpatrywać *łącznie*, tak jak to wynika z (3.5.10). Dlatego również ogólna postać brakujących zależności konstytutywnych musi wynikać z analizy obu wyrażeń (3.5.11) i (3.5.12) jednocześnie.

Szczegółowa analiza wyrażenia (3.5.12) zależy jednak od konkretnej interpretacji fizycznej krzywych osoblivych Γ , które w ogólnym przypadku mogą modelować bardzo różne typy połączeń płatów powłoki strukturalnej. Każdy taki szczególny przypadek połączenia wymaga praktycznie odrębnego sformułowania i analizy.

3.5.3. Kinematyczne połączenia sztywne

Połączenia elementów powłokowych można umownie podzielić na dwie obszerne grupy: sztywne i odkształcalne. Modelowanie połączeń sztywnych jest względnie proste i częściowo zostało już ujęte w mechanice powłok kawałkami regularnych. Jednakże teoria powłok strukturalnych rzuca więcej światła również i na ten problem.

Rozważmy połączenie dowolnej liczby regularnych płatów powłoki $M^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, wzdłuż krzywej Γ , będącej ich wspólną krawędzią. Połączenie nazwiemy *sztywnym*, jeśli granice przesunięć $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}, t)$ i obrotów $\mathbf{Q}^{(k)}(\mathbf{x}, t)$, obliczone dla każdego płata $M^{(k)}$ przy przejściu do wspólnej krawędzi Γ , mają wspólne wartości

$$\mathbf{u}^{(k)} \equiv \mathbf{u}_\Gamma, \quad \mathbf{Q}^{(k)} \equiv \mathbf{Q}_\Gamma, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5.14)$$

będące w rezultacie przesunięciem i obrotem samej krawędzi Γ .

Kinematyczne warunki ciągłości (3.5.14) nie określają cech dynamicznych samego połączenia. Te cechy muszą być dodatkowo określone w zależności od charakteru fizycznego połączenia.

W najprostszym przypadku można przyjąć, że połączenia płatów powłokowych nie mają swoich własnych cech dynamicznych. W rezultacie, zbiór Γ należy traktować jako zbiór krzywych geometrycznych. Takie założenie powinno być uwzględnione już na poziomie formułowania zasad zachowania pędu i momentu pędu (podrozdział 3.2). Jest to więc bardzo szczególny przypadek połączenia, ujęty już w ogólnej teorii powłok kawałkami regularnych.

Jeśli więc połączenia płatów powłokowych nie mają masy, a tym samym nie mają sił i momentów inercji, jak również własności dynamicznych wyrażonych przez siły i momenty wewnętrzne, to w ogólnej teorii powłok strukturalnych należy przyjąć

$$\mathbf{n} = \mathbf{m} = \mathbf{f}_\Gamma^{\text{in}} = \mathbf{c}_\Gamma^{\text{in}} = \mathbf{0}. \quad (3.5.15)$$

W wyniku założenia (3.5.14) przesunięcie względne \mathbf{z} w połączeniu zdefiniowane w (3.3.27) znika. Przy $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, po uwzględnieniu założeń (3.5.15) dynamiczne równania ciągłości (3.5.2) upraszczają się do postaci

$$[\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] - \mathbf{f}_\Gamma = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] - \mathbf{c}_\Gamma = \mathbf{0}. \quad (3.5.16)$$

Równania (3.5.16) stanowią uogólnienie odpowiednich równań wyprowadzonych w ramach mechaniki powłok kawałkami regularnych. Zostały one tu otrzymane dla krzywych osobliwych Γ , stanowiących wspólne części dowolnej liczby płatów regularnych. Rozpatrywana tu teoria powłok strukturalnych dopuszcza również obciążenia zewnętrzne przyłożone wzdłuż tych krzywych, co jest raczej typowym przypadkiem w konstrukcjach inżynierskich.

W wyniku założeń (3.5.15) wyrażenie (3.5.13) również znika, $\sigma_\Gamma = 0$. Natomiast zgodnie z kinematycznymi warunkami ciągłości (3.5.14)

$$\mathbf{v}_\Gamma = \mathbf{v}^{(k)}, \quad \boldsymbol{\omega}_\Gamma = \boldsymbol{\omega}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5.17)$$

Uwzględniając (3.5.17) w wyrażeniu (3.5.12), mamy

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\Gamma &= [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] \cdot \mathbf{v}_\Gamma - [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}] + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] \cdot \boldsymbol{\omega}_\Gamma - [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}] \\ &= [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] \cdot \mathbf{v}_\Gamma - [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] \cdot \mathbf{v}_\Gamma + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] \cdot \boldsymbol{\omega}_\Gamma - [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] \cdot \boldsymbol{\omega}_\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

i wyrażenie (3.5.10) upraszcza się do postaci

$$G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{v}_\Gamma) = \int_{\Gamma \cap M} (\mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{c}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\omega}_\Gamma) dl + \sum_{c_i \in \partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{m}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_\Gamma)_i. \quad (3.5.19)$$

Wyrażenie (3.5.19) przedstawia moc mechaniczną obciążeń zewnętrznych działających wzdłuż połączeń sztywnych. Odpowiadające (3.5.19) wyrażenie $G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{v}_\Gamma)$ musi być uwzględnione w tożsamości całkowitej (3.4.27) powłoki strukturalnej. Jeśli ponadto $\mathbf{f}_\Gamma = \mathbf{0}$ i $\mathbf{c}_\Gamma = \mathbf{0}$, to wyrażenie (3.5.19) zeruje się, tak jak to miało miejsce w mechanice powłok kawałkami regularnych.

Podkreślimy, że (3.5.15) jest założeniem dynamicznym niezależnym od założenia kinematycznego (3.5.14). Sprowadza się ono w istocie do całkowitego pominięcia cech dynamicznych połączenia. Dlatego ten typ połączeń można nazwać *kinematycznym połączeniem sztywnym*. Jest to najprostszy typ połączeń płatów powłoki, który będzie stosowany w analizie przykładów numerycznych w części drugiej tej książki.

3.5.4. Dynamiczne połączenia sztywne

W wielu przypadkach konstrukcji inżynierskich same połączenia elementów powłokowych są wykonane z materiału o innych własnościach mechanicznych, niż własności mechaniczne łączonych płatów powłokowych. Dlatego całkowite pomiaranie cech dynamicznych połączeń nie zawsze jest uzasadnione i teoria powłok strukturalnych tego nie wymaga.

Rozważmy przypadek połączeń płatów powłokowych dla których założenia kinematyczne (3.5.14) są uzasadnione, ale założenia dynamiczne (3.5.15) mogą już nie być uzasadnione. Jedynie przy założeniach (3.5.14), których sens fizyczny jest dokładnie taki sam jak w przypadku rozważanym powyżej, otrzymamy $\bar{\sigma}_\Gamma = 0$. Wtedy wyrażenie (3.5.10) na moc mechaniczną przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned}
 G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{v}_\Gamma) &= \int_{\Gamma \cap M} (\mathbf{f}_\Gamma^{\text{in}} \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{c}_\Gamma^{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\omega}_\Gamma) dl - \int_{\Gamma \cap M} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma^\circ + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Gamma^\circ) dl \\
 &+ \int_{\Gamma \cap M} (\mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{c}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\omega}_\Gamma) dl + \sum_{c_i \in \partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{m}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_\Gamma)_i \\
 &+ \sum_{c_i \in \partial M_d} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Gamma + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_\Gamma). \tag{3.5.20}
 \end{aligned}$$

Wyrażenie na $G_\Gamma(\mathcal{S}, t; \mathbf{v}_\Gamma)$ analogiczne do (3.5.20) musi być uwzględnione w tożsamości (3.4.27).

Analiza matematyczna dynamicznych połączeń sztywnych wymaga rozwiązania sprzężonego układu równań różniczkowych (3.5.1) i (3.5.2) przy zadanych warunkach brzegowych i początkowych, uzupełnionych odpowiednimi równaniami konstytutywnymi. W szczególnym przypadku strukturalnych powłok sprężystych, równania konstytutywne w obszarze regularnym (2.2.16) muszą być uzupełnione równaniami konstytutywnymi

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma, \boldsymbol{\kappa}_\Gamma), \quad \mathbf{m} = \hat{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\varepsilon}_\Gamma, \boldsymbol{\kappa}_\Gamma) \tag{3.5.21}$$

wzdłuż krzywych Γ .

Zauważmy, że równania konstytutywne (3.5.21) mają postać identyczną z równaniami konstytutywnymi mechaniki prętów sprężystych, a dynamiczne warunki ciągłości (3.5.2) są w istocie równaniami ruchu pręta, w których dodatkowe człony $[\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}]$ i $[\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}]$ mają sens fizyczny nieznanymi obciążeniami zewnętrznymi.

Rozważaną tutaj klasę połączeń można nazwać *dynamicznymi połączeniami sztywnymi*, ponieważ uwzględniają one cechy dynamiczne połączeń, takie jak ich sztywność i bezwładność. Taki model połączenia ujmuje m.in. przypadki powłok uźebrowanych (rys. 3.2.4) i powłok o skokowej zmianie sztywności (rys. 3.2.5) pod warunkiem, że są spełnione kinematyczne warunki ciągłości (3.5.14).

3.5.5. Połączenia odkształcalne

Jak wynika z powyższych rozważań, kinematyczne i dynamiczne połączenia sztywne stanowią dobrze określone szczególne klasy połączeń i są najczęściej spotykane w złożonych konstrukcjach inżynierskich. Wszystkie inne rodzaje połączeń można ogólnie nazwać *odkształcalnymi*.

Najogólniejszy przypadek takich połączeń jest opisany równaniami (3.5.1) i (3.5.2) łącznie z równaniami konstytutywnymi postaci (2.2.21) i (3.5.21) oraz odpowiednimi kinetycznymi równaniami konstytutywnymi. Problem wówczas sprowadza się do rozwiązania tego układu równań dla zadanych warunków brzegowych i początkowych. W ogólnym przypadku jest to jednak problem zbyt złożony do bezpośredniej analizy. W ramach tej klasy połączeń należałoby wydzielić wiele przypadków szczególnych, a każdy taki przypadek szczególny wymagałby praktycznie odrębnego sformułowania i analizy.

Podstawowy problem leży w wyrażeniu (3.5.12), którego szczegółowa analiza wymaga przekształcenia składników $[\mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}]$ i $[\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}]$ na mocy twierdzenia typu (3.2.10). Gdy jednak krzywa Γ jest wspólną krawędzią więcej niż dwóch płatów, twierdzenie (3.2.10) nie jest już stosowne. Jego uogólnienie na przypadek połączenia wielu płatów wzdłuż wspólnej krzywej nie jest wcale oczywiste, a postać uogólnionego twierdzenia zależy od liczby łączonych płatów i cech mechanicznych połączenia.

Najprostszy jest przypadek łączenia tylko dwóch płatów wzdłuż każdej krzywej osobliwej, chociaż łączonych nie koniecznie na sztywno. Takie połączenie nazwiemy umownie *połączeniem prostym*, modelującym m.in. przypadki powłok uźebrowanych (rys. 3.2.4) i powłok o skokowej zmianie sztywności (rys. 3.2.5), bez ograniczania się do kinematycznych warunków ciągłości (3.5.14). W analizie tej klasy połączeń odkształcalnych można nadal korzystać z twierdzenia (3.2.10).

W szczególnym przypadku powłok strukturalnych, których powierzchnia podstawowa M w konfiguracji odniesienia (ale nie konfiguracji aktualnej) jest powierzchnią gładką, słuszne jest również twierdzenie (3.2.12). Wykorzystując to twierdzenie, dla połączeń prostych wyrażenie (3.5.12) możemy przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\Gamma = & [\mathbf{N}\boldsymbol{\nu}] \cdot (\mathbf{v}_\Gamma - \langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{z} \rangle \times \boldsymbol{\omega}_\Gamma) + [\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}] \cdot (\boldsymbol{\omega}_\Gamma - \langle \boldsymbol{\omega} \rangle) \\ & - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot (\llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \llbracket \mathbf{z} \rrbracket \times \boldsymbol{\omega}_\Gamma) - \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \rangle \cdot \llbracket \boldsymbol{\omega}_\Gamma \rrbracket, \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

gdzie skoki i wartości średnie poszczególnych wielkości w (3.5.22) są zdefiniowane przez (3.2.4) i (3.2.5).

Wyrażenia (3.5.22) i (3.5.13) mogą stanowić podstawę do wyróżnienia szeregu przypadków szczególnych w ramach prostych połączeń odkształcalnych. Rozważania wskazują na szereg możliwości, które mogą być wykorzystane do modelowania połączeń złożonych konstrukcji powłokowych. Niestety, w świetle tych rozważań problem modelowania w konstrukcjach inżynierskich odkształcalnych połączeń elementów powłokowych i prętowych jest problemem wyjątkowo złożonym

i ciągle mało rozpoznany. Uzyskane w tym podrozdziale wstępne wyniki stanowią jedynie pierwszy krok w kierunku opracowania teorii powłok strukturalnych, uwzględniającej również połączenia odkształcalne. Pewne uwagi o własnościach mechanicznych połączeń odkształcalnych dla powłok cienkich typu Kirchhoffa–Love’a podajemy w p. 3.6.6 i p. 3.6.7.

3.6. Statyka cienkich powłok strukturalnych

3.6.1. Uwagi wstępne

W wielu zagadnieniach praktycznych część energii odkształcenia sprężystego powłoki, pochodząca od poprzecznych odkształceń postaciowych, jest na ogół mała w stosunku do energii od rozciągania i zginania powierzchni podstawowej i może być pominięta. Odkształcenie powłoki w kierunku normalnym do powierzchni podstawowej może być również w przybliżeniu wyrażone przez odkształcenia i zginania powierzchni podstawowej. W wyniku otrzymamy klasyczny model powłoki cienkiej typu Kirchhoffa–Love’a, w którym deformacja powłoki jako ciała trójwymiarowego wyraża się w przybliżeniu całkowicie przez deformację jej powierzchni podstawowej. Teoria typu Kirchhoffa–Love’a była podstawą modelowania powłok regularnych jeszcze w latach 70-tych XX wieku i była powszechnie stosowana do analizy zadań inżynierskich.

Model powłoki cienkiej i jego liczne uproszczone wersje nieliniowe zostały wszechstronnie przedstawione m.in. w książkach LOVE [1927], WOL’MIR [1956], MUSZTARI i GALIMOW [1957], TIEREGUŁOW [1969], BRUSH i ALMROTH [1975], PIETRASZKIEWICZ [1977, 2001b], GRIGOLJUK i KABANOW [1978], BAŞAR i KRÄTZIG [1985], AXELRAD [1987], VALID [1995] oraz obszernych publikacjach np. MUSZTARI [1949], ALUMJAE [1949], GALIMOW [1951], KOITER [1966], BUDIANSKY [1968], KOITER i SIMMONDS [1973], SIMMONDS [1976, 1979], PIETRASZKIEWICZ [1978, 1980b, 1984, 1989, 1993a,b], SZKUTIN [1978], PIETRASZKIEWICZ i SZWABOWICZ [1981], SCHMIDT i PIETRASZKIEWICZ [1981], SCHMIDT [1985], STUMPF [1986], SZWABOWICZ [1986, 1999], SCHIECK, PIETRASZKIEWICZ i STUMPF [1992], AXELRAD [2000] oraz OPOKA i PIETRASZKIEWICZ [2004], gdzie podano również obszerną literaturę źródłową. Model ten zajmuje więc szczególne miejsce w nieliniowej mechanice powłok. Wszystkie te książki i publikacje dotyczą jednak modelowania tylko pojedynczego regularnego płata powłoki.

Nieliniową teorię powłok cienkich można sformułować na kilka sposobów przez odpowiednie uproszczenia ogólnej nieliniowej mechaniki powłok, przedstawionej w rozdziałach 1 i 2. Najprostszym, klasycznym sposobem jest wprowadzenie więzów kinematycznych typu Kirchhoffa–Love’a (2.7.2), w wyniku których deformacja powłoki staje się całkowicie określona przez deformację jej powierzchni podstawowej. Innym równoważnym sposobem jest pominięcie w mieszanej postaci gęstości energii sprężystej powłoki członów od sił poprzecznych i poprzecznego zginania, por. LIBAI i SIMMONDS [1998]. W wyniku takiego założenia konstytutywnego gęstość energii sprężystej powłoki staje się funkcją tylko sił błonowych

i zmian krzywizn powierzchni podstawowej. Można również rozwiązać lokalne równania momentu pędu (1.4.59)₂ względem trzech składowych przekrojowych momentów — dwóch składowych poprzecznych i niesymetrycznej składowej momentów powierzchniowych — i wyeliminować je z lokalnych równań pędu (1.4.59). Postępując następnie jak w podrozdziałach 1.5 i 1.6 oraz pomijając małe człony związane z poprzecznym ścinaniem i owinięciem, można zbudować odpowiednią trójparametrową kinematykę powłoki.

W wyniku tych różnych sposobów modelowania powłoki cienkiej, tensor obrotu Q ogólnego modelu powłoki staje się polem zależnym, które może być całkowicie wyrażone przez powierzchniowy gradient wektora przesunięcia u powierzchni podstawowej powłoki. Model powłoki cienkiej jest więc modelem *trójparametrowym*, w którym wszystkie pola mogą być określone całkowicie przez trzy składowe pola przesunięcia i ich powierzchniowe gradienty.

Model mechaniczny powłoki cienkiej można sformułować również bezpośrednio, jako model powierzchni materialnej o założonych dwuwymiarowych własnościach dynamicznych. Te własności mogą być następnie interpretowane w różny sposób przez pola występujące w ogólnej teorii powłok, zależnie od przyjętych materiałowych równań konstytutywnych. Właśnie to ostatnie podejście, jako stwarzające wiele różnych możliwości interpretacyjnych, przedstawimy w dalszej części tego podrozdziału. Ograniczymy się tu tylko do zagadnień równowagi nieliniowej teorii cienkich izotropowych powłok sprężystych.

Nieliniowa teoria nieregularnych, wielopłatowych, cienkich powłok strukturalnych została opracowana dopiero w pracach MAKOWSKI, PIETRASZKIEWICZ i STUMPF [1998, 1999] oraz PIETRASZKIEWICZ [2001a]. W szczególności, zagadnienie brzegowe w przemieszczeniach dla powłok cienkich opracowane w PIETRASZKIEWICZ i SZWABOWICZ [1981] zostało w dwóch pierwszych pracach uzupełnione o odpowiednie kinematyczne i dynamiczne warunki ciągłości na stacjonarnych krzywych osobliwych Γ , modelujących połączenia płatów regularnych powłok cienkich. W dalszej części tego podrozdziału przedstawimy główne wyniki tych prac i ich analizę na tle ogólnej teorii powłok strukturalnych, opracowanej w poprzednich podrozdziałach rozdziału 3.

3.6.2. Postulaty i zasada pracy wirtualnej

Spójne sformułowanie równań pola i warunków ubocznych (warunków brzegowych i ciągłości) dla cienkich powłok strukturalnych można oprzeć na dwóch następujących postulatach:

- (I) *Deformacja cienkiej powłoki strukturalnej jest określona z wystarczającą dokładnością przez deformację uogólnionej powierzchni wielopłatowej, zwanej w skrócie powierzchnią podstawową powłoki.*
- (II) *Warunki równowagi cienkiej powłoki strukturalnej określone są z wystarczającą dokładnością przez zasadę pracy wirtualnej, zawierającą tylko pola kinematyczne i dynamiczne, odpowiadające odkształceniu i zginaniu jej powierzchni podstawowej.*

Pierwszy postulat jest założeniem kinematycznym i pozwala na proste geometryczne określenie ogólnej postaci deformacji cienkiej powłoki strukturalnej. Drugi postulat jest podstawowym założeniem dynamicznym teorii cienkich powłok strukturalnych. Oba postulaty nie zależą od postaci równań konstytutywnych materiału, z którego zbudowana jest konstrukcja powłokowa.

Uogólniona powierzchnia wielopłatowa, rozważana w poprzednich podrozdziałach, jest sumą kawałkami gładkich powierzchni regularnych, złączonych na brzegach wzdłuż stacjonarnych krzywych osobliwych. W konfiguracji odniesienia taką uogólnioną powierzchnię oznaczyliśmy przez M , a sumę wszystkich krzywych osobliwych przez Γ .

Deformację regularnej części powierzchni podstawowej powłoki określamy odwzorowaniem $\chi: M \setminus \Gamma \rightarrow \mathcal{E}$, natomiast deformację samej krzywej osobliwej odwzorowaniem $\chi_\Gamma: \Gamma \rightarrow \mathcal{E}$, które na ogół może się różnić od odwzorowania χ . Jednak w wielu przypadkach odwzorowanie χ jest z założenia ciągle na całej powierzchni podstawowej M . Wtedy χ_Γ jest określone przez χ poprzez zawężenie go do krzywej Γ : $\chi_\Gamma = \chi|_\Gamma$. W tym i następnym podrozdziale rozważania ograniczymy do takiego przypadku szczególnego ciągłej deformacji powłoki.

W zagadnieniach równowagi *zasada pracy wirtualnej* dla cienkiej powłoki strukturalnej, wynikająca z (1.5.20) i (3.4.27), głosi, że dla wszystkich wirtualnych przemieszczeń \mathbf{v} powinna być spełniona zależność

$$-G_i(M; \mathbf{v}) + G_e(M; \mathbf{v}) + G_\Gamma(M; \mathbf{v}) = 0. \quad (3.6.1)$$

Na wirtualne przemieszczenie \mathbf{v} składa się tu wirtualne przesunięcie w punktach regularnych $M \setminus \Gamma$ i parametr wirtualnego obrotu brzegu powłoki określony dalej w (3.6.24). Człony G_i i G_e w (3.6.1) oznaczają funkcjonały o wartościach rzeczywistych reprezentujące, odpowiednio, wewnętrzną i zewnętrzną pracę wirtualną całej regularnej części powłoki strukturalnej, natomiast G_Γ oznacza funkcjonał reprezentujący dodatkową pracę wirtualną, wykonaną przez siły uogólnione przyłożone wzdłuż krzywej osobliwej Γ . Jawne wyrażenia poszczególnych składników zasady pracy wirtualnej (3.6.1) powinny być określone zgodnie z powyższymi dwoma postulatami.

Nieregularności pojawiające się w analizie problemów równowagi cienkich powłok strukturalnych można zaliczyć do jednego z trzech typów:

1. Powierzchnia podstawowa powłoki w konfiguracji odniesienia M nie jest powierzchnią gładką (np. zawiera załamania), lub nie jest powierzchnią w rozumieniu geometrii różniczkowej powierzchni (np. dwie przecinające się powierzchnie nie tworzą powierzchni jako całość). Nieregularność tego typu będziemy nazywali nieregularnością *geometryczną*.
2. Deformacja χ powierzchni podstawowej powłoki nie jest opisana odwzorowaniem gładkim. Nieregularność tego typu będziemy nazywali nieregularnością *kinematyczną*.

3. Konstrukcja powłokowa jest kompozycją dwóch lub więcej pojedynczych powłok złączonych ze sobą w pewien technologiczny sposób wzdłuż stacjonarnych krzywych osobliwych powierzchni podstawowej. Nieregularność tego typu będziemy nazywali nieregularnością *mechaniczną*, gdyż krzywoliniowe obszary połączeń mogą mieć własności mechaniczne, odmienne od własności złączanych płatów powłok.

Wszystkie trzy typy nieregularności są skupione wzdłuż krzywych osobliwych Γ na powierzchni podstawowej powłoki. Są więc one określone na zbiorach miary zero.

Deformacja $\chi: M \setminus \Gamma \rightarrow \mathcal{E}$ przyporządkowuje każdemu regularnemu punktowi $\mathbf{x} \in M \setminus \Gamma$ jego aktualne położenie na odkształconej powierzchni podstawowej $\bar{M} = \chi(M)$, określone wektorem wodzącym $\vec{\mathbf{y}} = \chi(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$, gdzie $\mathbf{u}: M \setminus \Gamma \rightarrow E$ jest odpowiednim polem przesunięć.

Niech $\mathbf{F} = \nabla \chi(\mathbf{x}): T_{\mathbf{x}}M \rightarrow T_{\mathbf{y}}\mathcal{E} \equiv E$ będzie powierzchniowym gradientem odwzorowania χ . Styczny gradient deformacji \mathbf{F} powierzchni podstawowej powłoki określamy przez $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))\mathbf{F}(\mathbf{x})$, gdzie $\mathbf{P}(\mathbf{y})$ jest operatorem prostopadłego rzutowania na płaszczyznę styczną $T_{\mathbf{y}}\bar{M}$. Ponieważ $\mathbf{F}(\mathbf{x}): T_{\mathbf{x}}M \rightarrow T_{\mathbf{y}}\bar{M}$, dwa styczne pola tensorowe

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}_0), \quad \mathbf{R} = - (\mathbf{F}^T \mathbf{B} \mathbf{F} - \mathbf{B}_0) \quad (3.6.2)$$

są Lagrange'owskimi powierzchniowymi miarami odkształceń powłoki cienkiej zwanymi, odpowiednio, *tensorem odkształcenia* i *tensorem zginania* części regularnej M . W (3.6.2) przez $\mathbf{1}_0$ i \mathbf{B}_0 oraz $\mathbf{1}$ i \mathbf{B} oznaczono odpowiednie tensory powierzchniowe — metryczny i krzywizny — nieodkształconej M oraz odkształconej $\bar{M} = \chi(M)$ powierzchni podstawowej powłoki. Określone w (3.6.2) powierzchniowe miary odkształceń powłoki cienkiej są tensorami symetrycznymi.

Zauważmy, że powierzchniowe miary odkształceń (3.6.2) różnią się od powłokowych miar odkształceń (1.7.32) ogólnej teorii powłok. W rozważanej tu teorii powłok cienkich typu Kirchhoffa–Love'a tensor obrotu \mathbf{Q} jest złożoną, niewymierną funkcją gradientu wektora \mathbf{u} , por. PIETRASZKIEWICZ [1977, 1980b]. Przystosowanie powłokowych miar odkształceń (1.7.32) do teorii powłok cienkich prowadziłyby do niewymiernej zależności związków kinematycznych dla powierzchniowej części \mathbf{E} i \mathbf{K} tensorów (2.2.26) w reprezentacji materialnej. Z definicji (1.4.46), (1.4.47) i (1.7.8) wynika natomiast, że wprowadzone tu powierzchniowe miary odkształceń (3.6.2) w przypadku małych odkształceń są wielomianami \mathbf{u} , $\nabla \mathbf{u}$ i $\nabla \nabla \mathbf{u}$, por. podrozdział 3.7.

Rozważmy jednoparametrową rodzinę deformacji $\vec{\mathbf{y}} = \chi(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, gdzie t jest teraz parametrem skalarnym. Przez $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv (\partial \chi / \partial t)(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ oznaczmy wirtualne przesunięcie, a przez $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = (\partial \mathbf{n} / \partial t)(\mathbf{x}, t) = \dot{\bar{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}, t)$ wirtualną zmianę wersora normalnego odkształconej powierzchni podstawowej $\bar{M} \equiv M_t = \chi(\mathbf{x}, t)$, przy czym $\mathbf{P} \dot{\bar{\mathbf{n}}} = \mathbf{w}$.

Niech $\mathbf{L} = \overline{\nabla} \mathbf{v}$ będzie powierzchniowym gradientem pola wirtualnych przemieszczeń, obliczonym na stanie odkształconym \overline{M} . Wtedy, zgodnie z GURTIN i MURDOCH [1975] i MURDOCH [1990], otrzymamy zależności

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{w} = -\mathbf{L}^T \overline{\mathbf{n}}. \quad (3.6.3)$$

Symetryczny tensor powierzchniowy

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L}^T \mathbf{I} + \mathbf{P} \mathbf{L}) \quad (3.6.4)$$

określony na \overline{M} , $\mathbf{D}(\mathbf{y}) \in T_{\mathbf{y}} \overline{M} \otimes T_{\mathbf{y}} \overline{M}$, jest właściwą miarą wirtualnych zmian odkształceń powierzchni podstawowej powłoki. Przekształcając \mathbf{D} za pomocą (3.6.3) i $\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1}$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2} \left((\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{I} \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T \mathbf{P} (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-T} \left(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right) \mathbf{F}^{-1} \\ &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} (\mathbf{F}^T \mathbf{G}_e \mathbf{F})^\bullet \mathbf{F}^{-1} = \overline{\mathbf{G}}_e, \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

gdzie $\overline{\mathbf{G}}_e$ jest konwekcyjną zmianą wirtualną Eulerowskiej miary odkształcenia $\mathbf{G}_e = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1}$ powierzchni podstawowej.

Podobnie, konwekcyjną zmianę wirtualną Eulerowskiej miary zginania $\mathbf{R}_e = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{R} \mathbf{F}^{-1}$ powierzchni podstawowej możemy określić zależnością

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{R}}_e &= \mathbf{F}^{-T} (\mathbf{F}^T \mathbf{R}_e \mathbf{F})^\bullet \mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F}^{-T} (\mathbf{F}^T \mathbf{I} \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{F})^\bullet \mathbf{F}^{-1} \\ &= -\mathbf{L}^T \mathbf{I} \mathbf{B} - \mathbf{P} (\mathbf{I} \mathbf{B} \mathbf{P})^\bullet \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

Po uwzględnieniu, że

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \nabla \mathbf{v}, \quad \mathbf{I} \mathbf{1} \mathbf{P} = \mathbf{1}, \quad \dot{\mathbf{i}} = \mathbf{0}, \\ (\mathbf{I} \mathbf{B} \mathbf{F})^\bullet &= -(\nabla \overline{\mathbf{n}})^\bullet = -\nabla \dot{\overline{\mathbf{n}}}, \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

otrzymujemy następujące wyrażenia na wirtualne zmiany Lagrange'owskich miar odkształceń powierzchni podstawowej:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}})^\bullet = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{I} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{F}}), \\ \dot{\mathbf{R}} &= -(\mathbf{F}^T \mathbf{I} \mathbf{B} \mathbf{F})^\bullet = -(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{I} \mathbf{B} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla \dot{\overline{\mathbf{n}}}). \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Wewnętrzna praca wirtualna cienkiej powłoki strukturalnej może być określona funkcjonalem

$$G_i(M; \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^n \iint_{M^{(k)}} W_i(\mathbf{x}) da, \quad (3.6.9)$$

gdzie przez $M^{(k)}$ oznaczono regularne płyty powierzchni podstawowej M .

Najprostsze wyrażenie gęstości wewnętrznej pracy wirtualnej W_i , zgodne z postulatami teorii cienkich powłok strukturalnych, może być teraz przyjęte w postaci

$$W_i = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{N}_K \cdot \overset{\nabla}{\mathbf{G}}_e + \mathbf{M}_K \cdot \overset{\nabla}{\mathbf{R}}_e \quad (3.6.10)$$

W powyższym wyrażeniu \mathbf{N}_K jest tensorem przekrojowych sił, a \mathbf{M}_K tensorem przekrojowych momentów powłoki cieniekiej. Są to powierzchniowe tensory typu Kirchhoffa, natomiast przez \mathbf{N} i \mathbf{M} oznaczono odpowiadające im powierzchniowe tensory typu 2-go tensora Pioli–Kirchhoffa. Obie powierzchniowe miary naprężeń powiązane są zależnościami

$$\mathbf{N}_K = \mathbf{F}\mathbf{N}\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{M}_K = \mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{F}^T. \quad (3.6.11)$$

Pary powierzchniowych miar naprężeń występujące w (3.6.10) są symetrycznymi tensorami stycznymi, określonymi na różnych konfiguracjach powierzchni podstawowej powłoki: $(\mathbf{N}_K, \mathbf{M}_K) \in T_{\mathbf{y}}\bar{M} \otimes T_{\mathbf{y}}\bar{M}$, $(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in T_{\mathbf{x}}M \otimes T_{\mathbf{x}}M$. Ponieważ te powierzchniowe miary naprężeń określone zostały tutaj przez przyjęcie wyrażenia (3.6.10), są one miarami energetycznie spójnymi do odpowiednich powierzchniowych miar wirtualnych prędkości odkształceń $\overset{\nabla}{\mathbf{G}}_e$, $\overset{\nabla}{\mathbf{R}}_e$ i $\dot{\mathbf{G}}$, $\dot{\mathbf{R}}$. Dlatego ich sens fizyczny różni się nieco od analogicznie oznaczonych powłokowych miar naprężeń w (2.2.26).

Funkcjonał zewnętrznej pracy wirtualnej całej powłoki $G_e(M; \mathbf{v})$, zgodny z (1.5.21)₃, składa się z dwóch rozłącznych części, określających pracę wirtualną obciążeń powierzchniowych działających na $M^{(k)}$ i obciążeń brzegowych działających na ∂M_f :

$$G_e(M; \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^n \iint_{M^{(k)}} W_e da + \int_{\partial M_f} W_b ds, \quad (3.6.12)$$

gdzie gęstości zewnętrznej powierzchniowej i brzegowej pracy wirtualnej mają teraz postać

$$W_e = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{w}, \quad W_b = \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{w}. \quad (3.6.13)$$

W wyrażeniu (3.6.13) przez \mathbf{p} i \mathbf{h} oznaczono wektory zewnętrznych przekrojowych sił i momentów statycznych, działających na powierzchnię podstawową poszczególnych płatów powłoki strukturalnej, natomiast przez \mathbf{t}^* i \mathbf{h}^* oznaczono odpowiednie wektory zewnętrznych przekrojowych sił i momentów statycznych, przyłożonych do części ∂M_f brzegu powłoki.

3.6.3. Lokalne równania równowagi i warunki brzegowe

Wprowadzając (3.6.8) do wyrażenia (3.6.10) i wykorzystując symetrię tensorów \mathbf{N} i \mathbf{M} , otrzymamy

$$W_i = \mathbf{I}(\mathbf{F}\mathbf{N} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{M}) \cdot \dot{\mathbf{F}} + (\mathbf{F}\mathbf{M}) \cdot \nabla \dot{\mathbf{n}}. \quad (3.6.14)$$

Z zależności $\mathbf{F}^T \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ wynika, że również $(\mathbf{F}^T \bar{\mathbf{n}})^\bullet = \dot{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{n}} + \mathbf{F}^T \dot{\bar{\mathbf{n}}} = \mathbf{0}$. Mnożąc drugą postać tej zależności z lewej przez $\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{P}\mathbf{F}^{-T}$ otrzymamy $\mathbf{P}\dot{\bar{\mathbf{n}}} = -\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{n}}$. Ale wariancja tożsamości $\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 1$ daje $\dot{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$, co oznacza, że $\dot{\bar{\mathbf{n}}}(\mathbf{y}) \in T_{\mathbf{y}}\bar{M}$ i $\mathbf{P}\dot{\bar{\mathbf{n}}} = \dot{\bar{\mathbf{n}}}$. Uwzględniając tę ostatnią zależność, trzeci wyraz prawej strony (3.6.14) można przekształcić w sposób następujący:

$$\begin{aligned} (\mathbf{FM}) \cdot \nabla \dot{\bar{\mathbf{n}}} &= (\mathbf{FM}) \cdot \nabla \dot{\bar{\mathbf{n}}} \\ &= \text{Div}((\mathbf{FM})^T \dot{\bar{\mathbf{n}}}) - (\text{Div}(\mathbf{FM})) \cdot \dot{\bar{\mathbf{n}}} \\ &= \text{Div}((\mathbf{FM})^T \dot{\bar{\mathbf{n}}}) + [(\bar{\mathbf{n}} \otimes \text{Div}(\mathbf{FM})) \mathbf{F}^{-T}] \cdot \dot{\mathbf{F}}. \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

Z uwzględnieniem (3.6.15) gęstość wewnętrznej pracy wirtualnej (3.6.14) może być wyrażona w postaci

$$W_i = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \text{Div}(\mathbf{H}^T \dot{\bar{\mathbf{n}}}), \quad (3.6.16)$$

gdzie

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}(\mathbf{FN} - \mathbf{BH}) + \bar{\mathbf{n}} \otimes (\text{Div} \mathbf{H})\mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{FM}. \quad (3.6.17)$$

Zakładamy, że pola tensorowe $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in E \otimes T_{\mathbf{x}}M$ i $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{y}}\bar{M} \otimes T_{\mathbf{x}}M$ są klasy C^1 wewnątrz każdego gładkiego płata $M^{(k)}$ i mają przedłużenia analityczne tej samej klasy do brzegu $\partial M^{(k)}$, przyjmując skończone wartości $\mathbf{T}^{(k)}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{H}^{(k)}(\mathbf{x})$ w każdym punkcie regularnym $\mathbf{x} \in \partial M^{(k)}$. Wtedy, przy wykorzystaniu (3.6.16) i (3.6.17) oraz twierdzenia o dywergencji, dla każdego gładkiego płata $M^{(k)}$ otrzymamy

$$\iint_{M^{(k)}} W_i da = - \iint_{M^{(k)}} (\text{Div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} da + \int_{\partial M^{(k)}} (\mathbf{t}_\nu^{(k)} \cdot \mathbf{v}^{(k)} + \mathbf{h}_\nu^{(k)} \cdot \mathbf{w}^{(k)}) ds, \quad (3.6.18)$$

gdzie dla każdego regularnego $\mathbf{x} \in \partial M^{(k)}$ określono

$$\mathbf{t}_\nu^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)}, \quad \mathbf{h}_\nu^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^{(k)}. \quad (3.6.19)$$

W podobny sposób gęstość zewnętrznej pracy wirtualnej W_e , przyjęta w (3.6.13)₁, może być przekształcona przy pomocy (3.6.3)₂ do

$$W_e = \mathbf{l} \cdot \mathbf{v} + \text{Div}((\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{h}), \quad \mathbf{l} = \mathbf{p} + \text{Div}(\bar{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{F}^{-1}\mathbf{h}). \quad (3.6.20)$$

Zakładamy, że styczne pole wektorowe $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ jest klasy C^1 wewnątrz $M^{(k)}$ i ma przedłużenie analityczne tej samej klasy do brzegu $\partial M^{(k)}$, gdzie przyjmuje skończoną wartość $\mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x})$ w punkcie regularnym $\mathbf{x} \in \partial M^{(k)}$. Wtedy zastosowanie twierdzenia o dywergencji prowadzi do

$$\begin{aligned} \iint_{M^{(k)}} W_e da &= \iint_{M^{(k)}} \mathbf{l} \cdot \mathbf{v} da - \int_{\partial M^{(k)}} \mathbf{k}^{(k)} \cdot \mathbf{v} ds, \\ \mathbf{k}^{(k)} &= \left\{ (\mathbf{F}_{(k)}^{-1} \mathbf{h}^{(k)}) \cdot \boldsymbol{\nu}^{(k)} \right\} \bar{\mathbf{n}}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

W punkcie regularnym $\mathbf{x} \in \partial M^{(k)}$ powierzchniowy gradient przesunięcia $\nabla \mathbf{u}$ można rozłożyć na część styczną i normalną do brzegu

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{,\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} + \mathbf{u}' \otimes \boldsymbol{\tau}, \\ \mathbf{u}_{,\nu} &\equiv (\nabla \mathbf{u})\boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{u}' \equiv (\nabla \mathbf{u})\boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

Z (3.6.22) wynika, że wzdłuż $\partial \overline{M}^{(k)} = \boldsymbol{\chi}(\partial M^{(k)})$ pole wektora normalnego $\bar{\mathbf{n}}$ jest funkcją pochodnych pola przemieszczeń, tzn. $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{u}_{,\nu}, \mathbf{u}')$, i spełnia dwa niezależne warunki więzów

$$\bar{\mathbf{y}}' \cdot \bar{\mathbf{n}} = (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{u}') \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0, \quad \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 1. \quad (3.6.23)$$

Z tych więzów wynika, że pole $\bar{\mathbf{n}}$ może być wyrażone tylko przez \mathbf{u}' i funkcję skalarną $\phi = \phi(\mathbf{u}_{,\nu}, \mathbf{u}')$, opisującą obrotową część deformacji powierzchni brzegowej powłoki.

Struktura funkcji $\phi(\mathbf{u}_{,\nu}, \mathbf{u}')$ była dyskutowana w pracy MAKOWSKI i PIETRASZKIEWICZ [1989], w której podano ogólne wyrażenie na $\dot{\bar{\mathbf{n}}}$ przez $\varphi \equiv \dot{\phi}$ i $\mathbf{v}' \equiv \dot{\mathbf{u}}'$ w postaci

$$\dot{\bar{\mathbf{n}}} = \mathbf{q}\varphi + \mathbf{L}\mathbf{v}', \quad \mathbf{q}(\varphi, \mathbf{u}') \equiv \partial_\phi \bar{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{L}(\phi, \mathbf{u}') \equiv \partial_{\mathbf{u}'} \bar{\mathbf{n}}. \quad (3.6.24)$$

Jawne wyrażenia funkcji wektorowej $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{u}_{,\nu}, \mathbf{u}')$ i tensorowej $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{u}_{,\nu}, \mathbf{u}')$ zależą od przyjętej definicji funkcji skalarnej $\phi = \phi(\mathbf{u}_{,\nu}, \mathbf{u}')$, określającej sposób opisu obrotowej części deformacji powierzchni brzegowej. W literaturze znane są trzy szczególne postacie funkcji ϕ , oznaczone przez n_ν , ϑ_ν i ω_τ , dla których wyprowadzono jawne wyrażenia $\mathbf{q}(\phi, \mathbf{u}')$ i $\mathbf{L}(\phi, \mathbf{u}')$. Poniżej podajemy zwarte określenie tych szczególnych postaci funkcji ϕ i odpowiadających im jawnych wyrażeń na \mathbf{q} i \mathbf{L} .

PIETRASZKIEWICZ i SZWABOWICZ [1981] określili funkcję n_ν przy pomocy zależności

$$\phi \equiv n_\nu = \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = j^{-1} (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\nu} - \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}_{,\nu}, \quad (3.6.25)$$

gdzie $j = \sqrt{\bar{a}/a} = j(\mathbf{u}_{,\nu}, \mathbf{u}')$. Stąd również $n_\nu = n_\nu(\mathbf{u}_{,\nu}, \mathbf{u}')$. Wariacja wektora normalnego $\bar{\mathbf{n}}$ wyrażona przez wariację n_ν ma postać (por. PIETRASZKIEWICZ [1984])

$$\dot{\bar{\mathbf{n}}} = \frac{1}{a_\nu} [(\bar{\mathbf{y}}' \times \bar{\mathbf{n}})\dot{n}_\nu + (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{n}})\bar{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{u}}'], \quad a_\nu = (\bar{\mathbf{y}}' \times \bar{\mathbf{n}}) \cdot \boldsymbol{\nu}. \quad (3.6.26)$$

Z porównania (3.6.24)₁ i (3.6.26)₁ wynika, że w tym przypadku

$$\mathbf{q} = \frac{1}{a_\nu} (\bar{\mathbf{y}}' \times \bar{\mathbf{n}}), \quad \mathbf{L} = \frac{1}{a_\nu} (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{n}}) \otimes \bar{\mathbf{n}}. \quad (3.6.27)$$

Otrzymane wyrażenia (3.6.27) są stosunkowo proste, a sam parametr n_ν jest łatwy do zinterpretowania z (3.6.25) jako składowa rzutu $\bar{\mathbf{n}}$ na kierunek zewnętrznej normali $\boldsymbol{\nu}$ do brzegu powierzchni nieodkształconej $\partial M^{(k)}$.

NOWOŻYŁOW i SZAMINA [1975] określili funkcję brzegową ϑ_ν następującą zależnością:

$$\phi \equiv \vartheta_\nu = \frac{1}{a_\tau^2} (\bar{\mathbf{n}} - \mathbf{n}) \cdot (\bar{\mathbf{y}}' \times \bar{\mathbf{n}}) = -\frac{1}{a_\tau} \mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\nu}}, \quad (3.6.28)$$

gdzie $a_\tau = a_\tau(\mathbf{u}')$ i $\bar{\boldsymbol{\nu}} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \times \bar{\mathbf{n}} = \bar{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{u}, \nu, \mathbf{u}')$. Stąd również $\vartheta_\nu = \vartheta_\nu(\mathbf{u}, \nu, \mathbf{u}')$. Wariacja $\bar{\mathbf{n}}$ wyrażona przez wariację ϑ_ν została podana w pracy MAKOWSKI i PIETRASZKIEWICZ [1989] w postaci

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{n}}} &= \frac{1}{n} a_\nu \bar{\boldsymbol{\nu}} \dot{\vartheta}_\nu + \left\{ \frac{1}{n} \left[2\vartheta_\nu (\bar{\boldsymbol{\nu}} \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}}) + \frac{1}{a_\tau} \bar{\boldsymbol{\nu}} \otimes (\bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{n}) \right] - \frac{1}{a_\tau} \bar{\boldsymbol{\tau}} \otimes \bar{\mathbf{n}} \right\} \cdot \dot{\mathbf{u}}', \\ n &= \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.6.29)$$

PIETRASZKIEWICZ [1979a] wprowadził kąt całkowitego obrotu brzegu powłoki ω_τ w postaci

$$\phi \equiv \omega_\tau = \arccos \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{R}_\tau - 1), \quad (3.6.30)$$

gdzie

$$\mathbf{R}_\tau = \bar{\boldsymbol{\nu}} \otimes \boldsymbol{\nu} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \otimes \boldsymbol{\tau} + \bar{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n} \quad (3.6.31)$$

jest tensorem całkowitego obrotu elementu brzegowego powłoki. Ale tensor ortogonalny \mathbf{R}_τ ma ogólną reprezentację (GIBBS [1884])

$$\mathbf{R}_\tau = \cos \omega_\tau \mathbf{1} + \sin \omega_\tau \mathbf{e} \times \mathbf{1} + (1 - \cos \omega_\tau) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}, \quad (3.6.32)$$

gdzie wersor \mathbf{e} określa oś obrotu i spełnia zależność $\mathbf{R}_\tau \mathbf{e} = +\mathbf{e}$. Dlatego

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{R}_\tau &= \bar{\boldsymbol{\nu}} \cdot \boldsymbol{\nu} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\tau} + \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{e} &= e_\nu \boldsymbol{\nu} + e_\tau \boldsymbol{\tau} + e_n \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.6.33)$$

$$\begin{aligned} 2e_\nu \sin \omega_\tau &= \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ 2e_\tau \sin \omega_\tau &= \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nu} - \bar{\boldsymbol{\nu}} \cdot \mathbf{n}, \\ 2e_n \sin \omega_\tau &= \bar{\boldsymbol{\nu}} \cdot \boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \quad (3.6.34)$$

Z powyższych i poprzednich zależności wynika, że $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{u}, \nu, \mathbf{u}')$ i $\omega_\tau = \omega_\tau(\mathbf{u}, \nu, \mathbf{u}')$. Wyrażenia funkcji \mathbf{q} i \mathbf{L} , odpowiadające przyjęciu $\phi \equiv \omega_\tau$ podał PIETRASZKIEWICZ [1993b]:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{1}{a_\tau e_\tau} j \nu_\beta \bar{\mathbf{a}}^\beta, \\ \mathbf{L} &= \frac{1}{a_\tau e_\tau} j \nu_\beta \bar{\mathbf{a}}^\beta \otimes [(e_\nu + 2j^{-1} \gamma_{\nu\tau} e_\tau) \bar{\mathbf{n}} - e_n \bar{\boldsymbol{\nu}}] - \tau_\beta \bar{\mathbf{a}}^\beta \otimes \bar{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (3.6.35)$$

W dalszej części tego podrozdziału nie będziemy używali żadnej z wyżej wymienionych szczególnych postaci funkcji ϕ , a odpowiednie równania równowagi oraz warunki brzegowe i warunki ciągłości dla cienkiej powłoki strukturalnej wprowadzimy dla dowolnego wyboru tej funkcji.

Korzystając z ogólnej zależności (3.6.24), drugie wyrażenie pod całką krzywoliniową (3.6.18) może być przekształcone do postaci

$$\int_{\partial M^{(k)}} \mathbf{h}_\nu^{(k)} \cdot \mathbf{w}^{(k)} ds = \int_{\partial M^{(k)}} (-\mathbf{f}^{(k)} \cdot (\mathbf{v}^{(k)})' + h^{(k)} \varphi^{(k)}) ds, \quad (3.6.36)$$

gdzie

$$\mathbf{f}^{(k)} = -\mathbf{L}^T \mathbf{I}_0 \mathbf{h}_\nu^{(k)}, \quad h^{(k)} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{I}_0 \mathbf{h}_\nu^{(k)}. \quad (3.6.37)$$

Funkcje $\mathbf{f}^{(k)} \cdot \mathbf{v}^{(k)}$ mogą nie mieć pochodnej względem s w niektórych punktach P_a , $a = 1, 2, \dots, A$ brzegu $\partial M^{(k)}$. Takimi punktami osobliwymi, określonymi wzdłuż $\partial M^{(k)}$ przez $s = s_a$, są np. naroża zamkniętych krzywych Jordana składających się na $\partial M^{(k)}$ lub punkty osobliwości funkcji \mathbf{L} , \mathbf{q} , $\mathbf{h}_\nu^{(k)}$ i $\mathbf{v}^{(k)}$. W otoczeniu takich punktów osobliwych zakładamy istnienie skończonych granic

$$\mathbf{f}_a^{(k)\pm} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{f}^{(k)}(s_a \pm h), \quad \mathbf{v}_a^{(k)\pm} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{v}^{(k)}(s_a \pm h). \quad (3.6.38)$$

Przy założeniu (3.6.38) i użyciu (3.6.37) całkę krzywoliniową w (3.6.18) można przekształcić stosując całkowanie przez części, co prowadzi do

$$\begin{aligned} \iint_{M^{(k)}} W_i da &= - \iint_{M^{(k)}} (\text{Div } \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} da + \int_{\partial M^{(k)}} (\mathbf{p}_\nu^{(k)} \cdot \mathbf{v}^{(k)} + h^{(k)} \varphi^{(k)}) ds \\ &+ \sum_{P_a \in \partial M^{(k)}} (\mathbf{f}_a^{(k)+} \cdot \mathbf{v}_a^{(k)+} - \mathbf{f}_a^{(k)-} \cdot \mathbf{v}_a^{(k)-}), \end{aligned} \quad (3.6.39)$$

gdzie

$$\mathbf{p}_\nu^{(k)} = \mathbf{t}_\nu^{(k)} + (\mathbf{f}^{(k)})' \quad (3.6.40)$$

jest efektywną siłą wewnętrzną wzdłuż $\partial M^{(k)}$.

Uwzględniając (3.6.39) i (3.6.18), funkcjonal wewnętrznej pracy wirtualnej przyjmuje postać

$$\begin{aligned} G_i &= - \iint_{M \setminus \Gamma} (\text{Div } \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} da + \int_{\partial M} (\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{v} + h\varphi) ds \\ &+ \int_{\Gamma} (\|\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{v}\| + \|h\varphi\|) ds + \sum_{P_i \in \Gamma} [\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}]_i + \sum_{P_b \in \partial M} [\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}]_b, \end{aligned} \quad (3.6.41)$$

gdzie skoki w każdym punkcie regularnym $\mathbf{x} \in \Gamma^{(a)}$ wspólnej krzywej, łączącej $n \geq 2$ sąsiednich płatów powierzchni $M^{(n)}$, zostały określone przez

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{v} \rrbracket &= \pm \mathbf{p}_\nu^{(1)\pm} \cdot \mathbf{v}^{(1)\pm} \pm \mathbf{p}_\nu^{(2)\pm} \cdot \mathbf{v}^{(2)\pm} \pm \dots \pm \mathbf{p}_\nu^{(n)\pm} \cdot \mathbf{v}^{(n)\pm}, \\ \llbracket h\varphi \rrbracket &= \pm h^{(1)\pm} \varphi^{(1)\pm} \pm h^{(2)\pm} \varphi^{(2)\pm} \pm \dots \pm h^{(n)\pm} \varphi^{(n)\pm}. \end{aligned} \quad (3.6.42)$$

W definicjach skoków (3.6.42) znaki przed poszczególnymi składnikami zależą od zgodności przyjętej orientacji $\partial M^{(k)}$ względem ustalonej orientacji krzywej $\Gamma^{(a)}$. Jeśli orientacja $\partial M^{(k)}$ pokrywa się z orientacją $\Gamma^{(a)}$, przed odpowiednim składnikiem występuje znak minus „-”, w przeciwnym wypadku wystąpi znak plus „+”.

Oznaczając przez $\boldsymbol{\tau}_\Gamma$ wersor styczny do krzywej $\Gamma^{(a)}$ określający jej orientację, dla wersora zewnętrznej normalności $\boldsymbol{\nu}^{(k)}$ brzegu $\partial M^{(k)}$ otrzymamy $\boldsymbol{\nu}^{(k)} = \pm \boldsymbol{\tau}_\Gamma \times \mathbf{n}^{(k)}$, gdzie znak powinien być tak dobrany, aby $\partial M^{(k)}$ było zorientowane zgodnie z $M^{(k)}$.

W zależności (3.6.41) występują dwa rodzaje skoku w punktach osobliwych: a) skoki $[\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}]_i$ w punktach wewnętrznych $P_i \in \Gamma$, $i = 1, 2, \dots, I$, oraz b) skoki $[\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}]_b$ w punktach brzegowych $P_b \in \partial M$. W każdym punkcie wewnętrznym P_i , który może być punktem wspólnym $m \geq 2$ sąsiednich gałęzi $\Gamma^{(m)}$ krzywej osobliwej Γ , oraz w każdym punkcie brzegowym P_b łączącym $t \geq 2$ sąsiednich gałęzi $\partial M^{(t)}$ brzegu ∂M i q sąsiednich gałęzi $\Gamma^{(q)}$ krzywej osobliwej Γ , skoki te są określone zależnościami

$$\begin{aligned} [\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}]_i &= \pm \mathbf{f}_i^{(1)\pm} \cdot \mathbf{v}_i^{(1)\pm} \pm \mathbf{f}_i^{(2)\pm} \cdot \mathbf{v}_i^{(2)\pm} \pm \dots \pm \mathbf{f}_i^{(m)\pm} \cdot \mathbf{v}_i^{(m)\pm}, \\ [\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}]_b &= \pm \mathbf{f}_b^{(1)\pm} \cdot \mathbf{v}_b^{(1)\pm} \pm \mathbf{f}_b^{(2)\pm} \cdot \mathbf{v}_b^{(2)\pm} \pm \dots \pm \mathbf{f}_b^{(t)\pm} \cdot \mathbf{v}_b^{(t)\pm} \\ &\quad \pm \mathbf{f}_i^{(1)\pm} \cdot \mathbf{v}_b^{(1)\pm} \pm \mathbf{f}_i^{(2)\pm} \cdot \mathbf{v}_b^{(2)\pm} \pm \dots \pm \mathbf{f}_i^{(q)\pm} \cdot \mathbf{v}_b^{(q)\pm}. \end{aligned} \quad (3.6.43)$$

W podobny sposób można przekształcić funkcjonal zewnętrznej pracy wirtualnej (3.6.12), używając zależności (3.6.21), (3.6.13)₂ i (3.6.24). Pomijając pośrednie przekształcenia, w wyniku otrzymamy

$$\begin{aligned} G_e &= \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{l} \cdot \mathbf{v} \, da - \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rrbracket \, ds + \int_{\partial M_f} \{(\mathbf{p}^* - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v} + h^* \varphi\} \, ds \\ &\quad - \int_{\partial M_d} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \, ds + \sum_{P_b \in \partial M_f} [\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{v}]_b, \end{aligned} \quad (3.6.44)$$

gdzie $\partial M_d = \partial M \setminus \partial M_f$ jest dopełniającą częścią brzegu ∂M , natomiast

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \{(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{h}) \cdot \boldsymbol{\nu}\} \bar{\mathbf{n}}, & \mathbf{f}^* &= -\mathbf{L}^T \mathbf{h}^*, \\ \mathbf{h}^* &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{I}_0 \mathbf{h}^*, & \mathbf{p}^* &= \mathbf{t}^* + (\mathbf{f}^*)'. \end{aligned} \quad (3.6.45)$$

Skok $\llbracket \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rrbracket$ w (3.6.44) wzdłuż wspólnej krzywej $\Gamma^{(n)}$, łączącej $n \geq 2$ sąsiednich płatów $M^{(n)}$ powierzchni podstawowej, jest określony podobnie jak (3.6.42)₁. Natomiast skok $\llbracket \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{v} \rrbracket_b$ ujmuje tutaj tylko te graniczne wartości funkcji, które otrzymano poruszając się po krzywej brzegowej ∂M_f . Jeśli P_b jest punktem brzegowym, łączącym $t \geq 2$ sąsiednich gałęzi $\partial M^{(t)}$ brzegu ∂M i q sąsiednich gałęzi $\Gamma^{(q)}$ krzywej osobiwej Γ , to

$$\llbracket \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{v} \rrbracket_b = \pm \mathbf{f}_b^{*(1)\pm} \cdot \mathbf{v}_b^{(1)\pm} \pm \mathbf{f}_b^{*(2)\pm} \cdot \mathbf{v}_b^{(2)\pm} \pm \dots \pm \mathbf{f}_b^{*(t)\pm} \cdot \mathbf{v}_b^{(t)\pm}. \quad (3.6.46)$$

Wprowadzając (3.6.41) i (3.6.44) do zasady pracy wirtualnej, otrzymamy

$$\begin{aligned} & - \iint_{M \setminus \Gamma} (\text{Div } \mathbf{T} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v} \, da \\ & + \int_{\partial M_f} \{(\mathbf{p}_\nu - \mathbf{p}^* + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v} + (h - h^*)\varphi\} \, ds + \sum_{P_b \in \partial M_f} [(\mathbf{f} - \mathbf{f}^*) \cdot \mathbf{v}]_b \\ & + \int_{\partial M_d} \{(\mathbf{p}_\nu + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v} + h\varphi\} \, ds + \sum_{P_b \in \partial M_d} [\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}]_b \\ & + \int_{\Gamma} \{\llbracket (\mathbf{p}_\nu + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v} \rrbracket + \llbracket h\varphi \rrbracket\} \, ds + \sum_{P_i \in \Gamma} [\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}]_i - G_\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.6.47)$$

Dla dowolnych, lecz kinematycznie dopuszczalnych, wirtualnych przemieszczeń, funkcje \mathbf{v} i φ znikają tożsamościowo wzdłuż ∂M_d . Dlatego trzecia linijka wzoru (3.6.47) również znika tożsamościowo. Przy dowolnych wirtualnych przemieszczeniach na pozostałej części M , spełnienie zasady (3.6.47) wymaga, aby spełnione były następujące zależności lokalne:

Równania równowagi

$$\text{Div } \mathbf{T} + \mathbf{l} = \mathbf{0} \quad \text{w każdym regularnym } \mathbf{x} \in M \setminus \Gamma. \quad (3.6.48)$$

Styczne warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\nu - \mathbf{p}^* + \mathbf{k} &= \mathbf{0}, & h - h^* &= 0 & \text{wzdłuż regularnej części } \partial M_f, \\ \mathbf{f}_b - \mathbf{f}_b^* &= \mathbf{0} & & & \text{w każdym punkcie osobiwym } P_b \in \partial M_f. \end{aligned} \quad (3.6.49)$$

Geometryczne warunki brzegowe, energetycznie odpowiadające warunkom (3.6.49) w zasadzie (3.6.47), mają postać

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}^* = \mathbf{0}, \quad \varphi - \varphi^* = 0 \quad \text{wzdłuż regularnej części } \partial M_d. \quad (3.6.50)$$

Przedstawione tu zależności lokalne (3.6.48)–(3.6.50) w opisie Lagrange'a dla nieliniowej teorii cienkich powłok są słuszne przy nieograniczonych wartościach przesunięć, odkształceń i zmian krzywizn powierzchni podstawowej cienkiej powłoki strukturalnej, por. PIETRASZKIEWICZ [1984].

3.6.4. Warunki ciągłości na krzywej osobliwej

Struktura matematyczna teorii powłok cienkich narzuca określone ograniczenia na możliwą postać warunków ciągłości wzdłuż krzywej osobliwej Γ . Ograniczenia te wynikają z założonej postaci wewnętrznej (3.6.9) i (3.6.10) oraz zewnętrznej (3.6.12) i (3.6.13) prac wirtualnych. Tak więc, jeśli są spełnione zależności lokalne (3.6.48)–(3.6.50) to zasada pracy wirtualnej (3.6.47) zostanie spełniona, gdy będzie spełniona następująca zależność:

$$\int_{\Gamma} (\llbracket (\mathbf{p}_\nu + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v} \rrbracket + \llbracket h\varphi \rrbracket) ds + \sum_{P_i \in \Gamma} [\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}]_i - G_\Gamma = 0, \quad (3.6.51)$$

gdzie skoki wzdłuż krzywej osobliwej Γ i w otoczeniu punktów osobliwych $P_i \in \Gamma$ są określone wzorami typu (3.6.42) i (3.6.43)₁.

Zależność (3.6.51) jest słabą postacią warunków ciągłości, spójną z podstawowymi postulatami nieliniowej teorii cienkich powłok strukturalnych. Trzeba ją spełnić dla dowolnego typu nieregularności geometrycznej, kinematycznej i/lub mechanicznej.

Z (3.6.51) wynika, że w ramach tych postulatów najbardziej ogólną dopuszczalną postacią funkcjonału G_Γ jest

$$G_\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_\Gamma(\mathbf{x}) ds + \sum_{P_i \in \Gamma} \sigma_i, \quad (3.6.52)$$

gdzie σ_Γ jest gęstością pracy wirtualnej wzdłuż regularnych części Γ , natomiast σ_i jest pracą wirtualną w każdym punkcie osobliwym $P_i \in \Gamma$. Jawne wyrażenia σ_Γ i σ_i zależą od modelowanego typu nieregularności i muszą być dodatkowo określone podczas rozwiązywania każdego konkretnego zadania.

Ponieważ (3.6.51) musi być spełnione dla dowolnej części Γ , stąd wynikają następujące *lokalne warunki ciągłości*:

$$\begin{aligned} \llbracket (\mathbf{p}_\nu + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v} \rrbracket + \llbracket h\varphi \rrbracket - \sigma_\Gamma &= 0 \quad \text{wzdłuż regularnej części } \Gamma, \\ [\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}]_i - \sigma_i &= 0 \quad \text{w każdym punkcie osobliwym } P_i \in \Gamma. \end{aligned} \quad (3.6.53)$$

Warunki ciągłości (3.6.53) są dodatkowymi zależnościami, które muszą być spełnione w teorii cienkich powłok strukturalnych, poza spełnieniem zależności (3.6.48)–(3.6.50). Aby jednak zakończyć formułowanie zagadnienia brzegowego w przemieszczeniach, powinniśmy dołączyć tu również równania konstytutywne, spójne z postulatami teorii powłok cienkich, oraz zależności kinematyczne (3.6.2).

W ogólnych warunkach ciągłości (3.6.53) nieregularności geometryczne, kinematyczne i mechaniczne są wzajemnie sprzężone. Dla jednego określonego typu nieregularności warunki ciągłości można znacznie uprościć lub przedstawić w postaci rozprzęgniętej. Poniżej rozważamy kilka przypadków takich prostszych nieregularności i odpowiadające im uproszczone postacie warunków ciągłości.

3.6.5. Nieregularności geometryczne

Niech Γ będzie geometryczną krzywą osobiłą, a pole przemieszczeń $\mathbf{u}: M \rightarrow E$ będzie klasy C^n , $n \geq 2$ nie tylko wewnątrz każdego płata $M^{(k)} \in M$, lecz również na całej powierzchni podstawowej M , łącznie z krzywą osobiłą Γ . Najprostszymi przykładami takiej nieregularności geometrycznej są załamania powierzchni podstawowej oraz przecięcia lub rozgałęzienia kilku powierzchni regularnych.

Niech $\mathbf{u}^{(k)}$ oznacza skończoną granicę pola \mathbf{u} na regularnej części brzegu $\partial M^{(k)}$ płata $M^{(k)}$, a $\phi^{(k)}$ dowolny parametr opisujący obrót brzegu wzdłuż tej części $\partial M^{(k)}$. W ramach rozważanej tu teorii powłok cienkich, połączenie powłok wzdłuż $\Gamma = \partial M^{(1)} \cap \dots \cap \partial M^{(k)} \cap \dots \cap \partial M^{(K)}$ nazywamy *sztynnym*, jeśli wartości $\mathbf{u}^{(k)}$ i $\phi^{(k)}$ należące do wszystkich sąsiednich płatów są takie same i równe wartościom tych funkcji zadanym na krzywej osobiłej:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)} &= \dots = \mathbf{u}^{(k)} = \dots = \mathbf{u}^{(K)} = \mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{u}|_\Gamma, \\ \phi^{(1)} &= \dots = \phi^{(k)} = \dots = \phi^{(K)} = \phi_\Gamma, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u}|_{P_i}. \end{aligned} \quad (3.6.54)$$

Odpowiadające (3.6.54) wirtualne pola spełniają zależności

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= \dots = \mathbf{v}^{(k)} = \dots = \mathbf{v}^{(K)} = \mathbf{v}_\Gamma = \mathbf{v}|_\Gamma, \\ \varphi^{(1)} &= \dots = \varphi^{(k)} = \dots = \varphi^{(K)} = \varphi_\Gamma, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}|_{P_i}. \end{aligned} \quad (3.6.55)$$

Występujące w (3.6.53) funkcje σ_Γ i σ_i są liniowe względem uogólnionych przemieszczeń

$$\sigma_\Gamma = \mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{v}_\Gamma + h_\Gamma \varphi_\Gamma, \quad \sigma_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i, \quad (3.6.56)$$

gdzie \mathbf{f}_Γ i h_Γ mogą być interpretowane jako uogólnione wektory sił i momentów obciążeń zewnętrznych przyłożonych wzdłuż regularnej części Γ , natomiast \mathbf{f}_i jako wektory zewnętrznych sił skupionych przyłożonych w każdym punkcie osobiłowym $P_i \in \Gamma$.

Wprowadzając (3.6.55) i (3.6.56) do (3.6.53), otrzymamy

$$\begin{aligned} (\llbracket \mathbf{p}_\nu + \mathbf{k} \rrbracket - \mathbf{f}_\Gamma) \cdot \mathbf{v}_\Gamma + (\llbracket h \rrbracket - h_\Gamma) \varphi_\Gamma &= 0, \\ (\llbracket \mathbf{f} \rrbracket_i - \mathbf{f}_i) \cdot \mathbf{v}_i &= 0. \end{aligned} \quad (3.6.57)$$

Dla dowolnych pól wirtualnych \mathbf{v}_Γ , φ_Γ i \mathbf{v}_i spełnienie zależności (3.6.57) wymaga spełnienia następujących *dynamicznych warunków ciągłości*:

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{p}_\nu + \mathbf{k} \rrbracket - \mathbf{f}_\Gamma &= \mathbf{0}, \quad \llbracket h \rrbracket - h_\Gamma = 0 \quad \text{wzdłuż regularnej części } \Gamma, \\ \llbracket \mathbf{f} \rrbracket_i - \mathbf{f}_i &= \mathbf{0} \quad \text{w każdym punkcie osobiłowym } P_i \in \Gamma. \end{aligned} \quad (3.6.58)$$

Gdy obciążenia zewnętrzne \mathbf{f}_Γ , h_Γ i \mathbf{f}_i nie są przyłożone wzdłuż Γ , wtedy (3.6.58) można zredukować do prostszej postaci

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{p}_\nu + \mathbf{k} \rrbracket &= \mathbf{0}, \quad \llbracket h \rrbracket = 0 \quad \text{wzdłuż regularnej części } \Gamma, \\ \llbracket \mathbf{f} \rrbracket_i &= \mathbf{0} \quad \text{w każdym punkcie osobiłowym } P_i \in \Gamma. \end{aligned} \quad (3.6.59)$$

Kinematyczne warunki sztywności (3.6.54) i odpowiadająca im ogólna postać dynamicznych warunków ciągłości (3.6.58) zostały tu sformułowane bez żadnych ograniczeń na wartości przesunięć, obrotów, odkształceń i/lub zgięć powierzchni podstawowej M powłoki strukturalnej. Powinny one być spełnione dla powłok, których powierzchnia podstawowa może zawierać załamania, rozwidlenia i przecięcia się wzdłuż krzywej osobliwej Γ , zawierającej również punkty osobliwe $P_i \in \Gamma$.

3.6.6. Połączenia odkształcalne

Dla wielu powłok strukturalnych niektóre z warunków sztywności (3.6.54) mogą nie być spełnione, lub nie chcemy aby one były spełnione ze względów mechanicznych lub matematycznych. W takim przypadku połączenie będziemy nazywali *odkształcalnym*. Określenie warunków ciągłości wzdłuż odkształcalnej krzywej osobliwej Γ wymaga dodatkowego zamodelowania odkształcalności mechanicznej samego połączenia.

Dynamiczne warunki ciągłości (3.6.58), jako warunki równowagi wzdłuż Γ , powinny być spełnione niezależnie od ciągłości odpowiednich pól kinematycznych. Brak ciągłości deformacji wzdłuż Γ spowodowany jest z reguły zaburzeniami gęstości energii, która wzdłuż Γ może być odmienną od tej określonej na $M \setminus \Gamma$. Te zaburzenia energii mogą być modelowane przez wprowadzenie odpowiednich postaci wirtualnych gęstości energii σ_Γ i σ_i . Dla uproszczenia zagadnienia, w dalszych przykładowych rozważaniach zakładamy, że dodatkowe obciążenia zewnętrzne \mathbf{f}_Γ , h_Γ i \mathbf{f}_i nie są przyłożone wzdłuż Γ , a statyczne warunki ciągłości mają prostą postać (3.6.59).

Rozważmy prosty przypadek dwóch regularnych płatów powłoki strukturalnej, modelowanej powierzchniami $M^{(1)}$ i $M^{(2)}$ połączonymi w sposób odkształcalny wzdłuż krzywej $\Gamma^{(1,2)}$, zorientowanej zgodnie z orientacją $\partial M^{(1)}$. Z przekształcenia (3.6.42) otrzymamy

$$\begin{aligned} \llbracket (\mathbf{p}_\nu + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v} \rrbracket &= \llbracket \mathbf{p}_\nu + \mathbf{k} \rrbracket \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{p}_\nu + \mathbf{k} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket, \\ \llbracket h\varphi \rrbracket &= \llbracket h \rrbracket \langle \varphi \rangle + \langle h \rangle \llbracket \varphi \rrbracket, \end{aligned} \quad (3.6.60)$$

gdzie dla każdego pola wektorowego $\boldsymbol{\eta}$ skok i wartość średnią oznaczono przez

$$\llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket \equiv \boldsymbol{\eta}^{(2)} - \boldsymbol{\eta}^{(1)}, \quad \langle \boldsymbol{\eta} \rangle \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}^{(2)} + \boldsymbol{\eta}^{(1)}). \quad (3.6.61)$$

Uwzględniając (3.6.60) i (3.6.61), ogólne warunki ciągłości (3.6.53)₁ można przekształcić do postaci

$$\llbracket \mathbf{p}_\nu + \mathbf{k} \rrbracket \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{p}_\nu + \mathbf{k} \rangle \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \llbracket h \rrbracket \langle \varphi \rangle + \langle h \rangle \llbracket \varphi \rrbracket - \sigma_\Gamma = 0. \quad (3.6.62)$$

Przy pomocy (3.6.59)₁ zależność (3.6.62) redukuje się do

$$(\mathbf{p}_\nu + \mathbf{k}) \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + h \llbracket \varphi \rrbracket - \sigma_\Gamma = 0, \quad (3.6.63)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\mathbf{p}_\nu^{(1)} + \mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{p}_\nu^{(2)} + \mathbf{k}^{(2)} \equiv \mathbf{p}_\nu + \mathbf{k}, \quad h^{(1)} = h^{(2)} \equiv h. \quad (3.6.64)$$

Z (3.6.63) jest oczywistym, że wirtualna gęstość energii σ_Γ powinna być liniową funkcją skoków wirtualnych przemieszczeń $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket$ i parametru wirtualnego obrotu $\llbracket \varphi \rrbracket$:

$$\sigma_\Gamma = \mathbf{b} \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + b \llbracket \varphi \rrbracket. \quad (3.6.65)$$

Postacie funkcji \mathbf{b} i b powinny określać odkształcalność mechaniczną połączenia rozpatrywanych dwóch płatów $M^{(1)}$ i $M^{(2)}$. Poniżej rozważamy dwa przykłady modelowania takiego połączenia.

3.6.7. Połączenie sprężyste

Połączenie odkształcalne nazywamy *lokalnie sprężystym*, jeśli istnieje funkcja energii $\Sigma_\Gamma = \Sigma_\Gamma(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \llbracket \phi \rrbracket)$ taka, że $\sigma_\Gamma = \dot{\Sigma}_\Gamma$. Wtedy

$$\sigma_\Gamma = (\partial_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \Sigma_\Gamma) \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + (\partial_{\llbracket \phi \rrbracket} \Sigma_\Gamma) \llbracket \varphi \rrbracket, \quad (3.6.66)$$

co po podstawieniu do (3.6.63) daje

$$\{(\mathbf{p}_\nu + \mathbf{k}) - \partial_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \Sigma_\Gamma\} \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \{h - \partial_{\llbracket \phi \rrbracket} \Sigma_\Gamma\} \llbracket \varphi \rrbracket = 0. \quad (3.6.67)$$

W rozważanym przypadku połączenia sprężystego dwóch płatów $M^{(1)}$ i $M^{(2)}$, wartości $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket$ i $\llbracket \varphi \rrbracket$ są dowolne i spełnienie (3.6.67) wymaga spełnienia następujących statycznych warunków ciągłości wzdłuż $\Gamma^{(1,2)}$:

$$(\mathbf{p}_\nu + \mathbf{k}) - \partial_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \Sigma_\Gamma = 0, \quad h - \partial_{\llbracket \phi \rrbracket} \Sigma_\Gamma = 0. \quad (3.6.68)$$

W szczególności, względnie mała odkształcalność połączenia może być modelowana funkcją kwadratową względem parametrów kinematycznych

$$\Sigma_\Gamma = \frac{1}{2} \{ \mathbf{C} \cdot (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket) + c \llbracket \phi \rrbracket^2 \}, \quad (3.6.69)$$

gdzie \mathbf{C} jest tensorem stałych materiałowych połączenia, a c jest materiałowym parametrem skalarnym.

Połączenie modelowane funkcją energii (3.6.69) można nazwać połączeniem *lokalnie liniowo sprężystym*. W tym przypadku statyczne warunki ciągłości (3.6.67) przyjmują postać

$$(\mathbf{p}_\nu + \mathbf{k}) - \mathbf{C} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{0}, \quad h - c \llbracket \phi \rrbracket = 0. \quad (3.6.70)$$

W wielu cienkich powłokach strukturalnych deformacja w połączeniu jest ciągła w tym sensie, że $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{0}$ i $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket = \mathbf{0}$, natomiast tylko gradient deformacji wykazuje nieciągłość, wyrażającą się w zależnościach $\llbracket \phi \rrbracket \neq 0$ i $\llbracket \varphi \rrbracket \neq 0$. Odpowiada

to np. modelowaniu połączenia sprężysto przegubowego. Dla takiego prostego przypadku, dynamiczne warunki ciągłości wzdłuż rozważanego połączenia $\Gamma^{(1,2)}$ dwóch płatów regularnych upraszczają się do postaci

$$\mathbf{p}_\nu + \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad h - c\llbracket\phi\rrbracket = 0. \quad (3.6.71)$$

W ogólniejszym przypadku, gęstość energii Σ_Γ w połączeniu może być funkcją zarówno samych skoków $\llbracket\mathbf{u}\rrbracket$, $\llbracket\phi\rrbracket$, jak i ich pierwszych $\llbracket\mathbf{u}'\rrbracket$, $\llbracket\phi'\rrbracket$, drugich $\llbracket\mathbf{u}''\rrbracket$, $\llbracket\phi''\rrbracket$ i być może również wyższych pochodnych przestrzennych. Taka postać Σ_Γ pozwala na modelowanie połączenia *nielokalnie sprężystego* rzędu 1-go, 2-go i wyższych rzędów.

3.6.8. Połączenie niesprężyste

Argumentami funkcji \mathbf{b} i b , określających wirtualną gęstość energii (3.6.65), mogą być również kolejne wariacje skoków $\llbracket\mathbf{u}\rrbracket$, $\llbracket\phi\rrbracket$ (pochodne po parametrze skalarnym t). Taka uogólniona postać funkcji \mathbf{b} i b pozwala na modelowanie niesprężystego zachowania się połączeń.

W najprostszym przypadku możemy przyjąć, że

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\llbracket\mathbf{u}\rrbracket, \llbracket\phi\rrbracket, \llbracket\dot{\mathbf{u}}\rrbracket, \llbracket\dot{\phi}\rrbracket), \quad b = b(\llbracket\mathbf{u}\rrbracket, \llbracket\phi\rrbracket, \llbracket\dot{\mathbf{u}}\rrbracket, \llbracket\dot{\phi}\rrbracket). \quad (3.6.72)$$

Połączenie odkształcalne nazywamy *lokalnie liniowo lepkosprężystym*, jeśli \mathbf{b} i b są formami liniowymi skoków $\llbracket\mathbf{u}\rrbracket$, $\llbracket\phi\rrbracket$ i ich pierwszych wariacji:

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}\llbracket\mathbf{u}\rrbracket + \mathbf{D}\llbracket\dot{\mathbf{u}}\rrbracket, \quad b = c\llbracket\phi\rrbracket + d\llbracket\dot{\phi}\rrbracket, \quad (3.6.73)$$

gdzie \mathbf{C} i \mathbf{D} są tensorami stałych materiałowych, natomiast c i d materiałowymi parametrami skalarnymi połączenia. W takim przypadku dynamiczne warunki ciągłości przyjmują postać

$$\mathbf{p}_\nu + \mathbf{k} - (\mathbf{C}\llbracket\mathbf{u}\rrbracket + \mathbf{D}\llbracket\dot{\mathbf{u}}\rrbracket) = \mathbf{0}, \quad h - (c\llbracket\phi\rrbracket + d\llbracket\dot{\phi}\rrbracket) = 0. \quad (3.6.74)$$

Gdy deformacja powłoki jest ciągła również w połączeniu, wtedy $\llbracket\mathbf{u}\rrbracket = \mathbf{0}$, $\llbracket\dot{\mathbf{u}}\rrbracket = \mathbf{0}$ i warunki ciągłości (3.6.74) znacznie się upraszczają.

Przyjęcie, że argumentami funkcji \mathbf{b} i b mogą być również wyższe pochodne mieszane skoków $\llbracket\mathbf{u}\rrbracket$, $\llbracket\phi\rrbracket$ względem s i t , pozwala na modelowanie różnych efektów lepkosprężystych, nielokalnych w przestrzeni i czasie.

Powyższe przykłady dotyczyły prostego połączenia odkształcalnego jedynie dwóch płatów $M^{(1)}$ i $M^{(2)}$. Gdy wzdłuż wspólnej krzywej osobliwej spotykają się więcej niż dwa płaty powierzchni podstawowej, mamy możliwość przyjęcia różnych wyrażen σ_Γ dla różnych sąsiednich par płatów $M^{(k)}$ i $M^{(l)}$. W ten sposób można modelować różnorakie efekty odkształcalności połączeń w cienkich powłokach strukturalnych.

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że deformacja χ jest określona na całej powierzchni podstawowej M , a stąd i $\chi_\Gamma = \chi|_\Gamma$. Można jednak rozważać bardziej ogólny przypadek deformacji powłoki strukturalnej, w którym deformacja połączenia $\chi_\Gamma: \Gamma \rightarrow \mathcal{E}$ jest zadawana na Γ niezależnie od deformacji pozostałej regularnej części powierzchni podstawowej $\chi: M \setminus \Gamma \rightarrow \mathcal{E}$. Za pomocą takiego założenia możemy modelować ogólniejsze własności odkształcalności połączeń w powłokach strukturalnych, w tym np. pęknięcie powłoki wzdłuż części krzywych Γ . Wtedy funkcja χ_Γ staje się dodatkową zmienną niezależną zagadnienia brzegowego. Modelowanie takich połączeń w nieliniowej mechanice powłok nie zostało dotąd rozpoznane i wymaga dalszych badań.

3.7. Uprozczone warianty teorii cienkich sprężystych powłok strukturalnych

3.7.1. Równania konstytutywne teorii pierwszego przybliżenia

Konstrukcje cienkościenne występujące w maszynach, urządzeniach i budowach, transporcie, energetyce itp. zbudowane są zwykle z metali i ich stopów, żelbetu, polimerów, kompozytów i innych podobnych materiałów, które w zakresie stosunkowo małych odkształceń wykazują własności liniowo sprężyste. Jednocześnie te konstrukcje i elementy powłokowe projektowane są zazwyczaj w taki sposób, aby w normalnych warunkach eksploatacyjnych odkształcenia w całej powłoce nie przekraczały granicy sprężystości materiału, chociaż przesunięcia niektórych części regularnych płatów mogą wielokrotnie przekraczać grubość powłoki.

Do opisu i analizy takich elementów konstrukcji cienkościennych używana jest geometrycznie nieliniowa teoria cienkich powłok sprężystych. Można ją stosować przy spełnieniu następujących warunków:

1. Powłoka zbudowana jest z jednorodnego i izotropowego materiału sprężystego.
2. Powłoka jest *cienka*, tzn. $h/R \ll 1$, gdzie h jest stałą grubością, a R najmniejszym promieniem krzywizny powierzchni podstawowej M powłoki nieodkształconej.
3. Powierzchnia podstawowa M jest *wolno zmienna*, tzn. $(h/l)^2 \ll 1$, gdzie l jest charakterystyczną długością zmienności geometrii M .
4. Deformacja powłoki jest *wolno zmienna*, $(h/L^2) \ll 1$, gdzie L jest charakterystyczną długością zmienności deformacji M .
5. Odkształcenia w powłoce są *małe*, tzn. $\eta \ll 1$, gdzie η jest największą wartością odkształcenia włókien materialnych w obszarze powłoki.

Przy spełnieniu powyższych warunków, stan przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w obszarze wewnętrznym powłoki (daleko od brzegów i krzywych osoblitych na M , obciążeń skupionych itp.) można z wystarczającą dokładnością opisać tylko przez deformację regularnych płatów $M^{(k)}$ jej powierzchni podstawowej. W ramach takiej teorii funkcja (powierzchniowej gęstości) energii sprężystej powłoki W_i dla każdego płata $M^{(k)}$ może być z wystarczającą dokładnością przybliżona sumą dwóch funkcji kwadratowych, określających dwa główne składniki energii sprężystej pochodzące od rozciągania (ściskania) i zginania płata $M^{(k)}$.

Taka kwadratowa postać funkcji W_i została zaproponowana już w klasycznych pracach KIRCHHOFF [1850, 1876] dla płyt oraz ARON [1874] i LOVE [1889] dla powłok. Dokładność takiej postaci funkcji energii sprężystej badało wielu autorów zarówno w teorii liniowej, np. NOWOŻYŁOW i FINKEL'SZTEJN [1943], KOITER [1960], jak i w teorii geometrycznie nieliniowej, np. JOHN [1965], KOITER [1966]. W wyniku tych badań wykazano, że przy spełnieniu powyższych warunków funkcja kwadratowa

$$W_i = \frac{h}{2} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \left(\gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\mu} \right) + O(Eh\eta^2\theta^2) \quad (3.7.1)$$

jest *konsekwentnym pierwszym przybliżeniem* gęstości energii odkształcenia sprężystego powłoki.

W zależności (3.7.1) symbol $O(\dots)$ określa maksymalny rząd błędu popełnianego przy przyjęciu funkcji W_i w postaci wyrażenia kwadratowego (3.7.1), natomiast $H^{\alpha\beta\lambda\mu}$ oraz $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\rho_{\alpha\beta}$ są składowymi zmodyfikowanego powierzchniowego tensora sprężystości oraz powierzchniowych miar odkształceń w bazie $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{P}_0 \vec{\mathbf{x}}_{,\alpha}$ lokalnego układu współrzędnych powierzchniowych $\{\xi^\alpha\}$ określonymi przez

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right),$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{G} \mathbf{a}_\beta, \quad \rho_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{R} \mathbf{a}_\beta, \quad (3.7.2)$$

$$\theta = \max \left(\frac{h}{d}, \frac{h}{L}, \frac{h}{l}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \sqrt{\eta} \right),$$

gdzie E oznacza moduł sprężystości Younga, ν liczbę Poissona, a d jest odległością od bocznej powierzchni brzegowej regularnego płata powłoki. Zmodyfikowany tensor sprężystości (3.7.2)₁ uwzględnia w sposób pośredni zmianę grubości powłoki podczas deformacji, odpowiadającą płaskiemu stanowi naprężenia w powłoce.

Różniczkując (3.7.1) względem powierzchniowych miar odkształceń, otrzymamy odpowiednie równania konstytutywne

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= \frac{\partial W_i}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} = C \left[(1 - \nu) \gamma^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} \gamma_\lambda^\lambda \right] + O(Eh\eta\theta^2), \\ M^{\alpha\beta} &= \frac{\partial W_i}{\partial \rho_{\alpha\beta}} = D \left[(1 - \nu) \rho^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} \rho_\lambda^\lambda \right] + O(Eh^2\eta\theta^2), \\ C &= \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

3.7.2. Powierzchniowe miary odkształceń

W układzie współrzędnych konwekcyjnych $\{\xi^\alpha\}$ z różniczkowania $\bar{\mathbf{y}}(\xi^\alpha) = \bar{\mathbf{x}}(\xi^\alpha) + \mathbf{u}(\xi^\alpha)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}_{,\alpha} &= \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha} + \mathbf{u}_{,\alpha} = l_{\alpha}^\lambda \mathbf{a}_\lambda + \varphi_\alpha \mathbf{n}, \quad \bar{\mathbf{a}}_\alpha = \mathbf{P} \bar{\mathbf{y}}_{,\alpha}, \quad \bar{a}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta, \\ \bar{\mathbf{n}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \epsilon^{\alpha\beta} (\bar{\mathbf{y}}_{,\alpha} \times \bar{\mathbf{y}}_{,\beta}) = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} (m_\alpha \mathbf{a}^\alpha + m \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

gdzie poszczególne składowe wyrażone są przez (por. np. PIETRASZKIEWICZ [1984])

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_\alpha \mathbf{a}^\alpha + w \mathbf{n}, & \mathbf{u}_{,\alpha} &= (\theta_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta}) \mathbf{a}^\beta + \varphi_\alpha \mathbf{n}, \\ l_{\lambda\alpha} &= a_{\lambda\alpha} + \theta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha}, & \varphi_\alpha &= w_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda, \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w, \quad \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\beta|\alpha} - u_{\alpha|\beta}),$$

$$a = \det(a_{\alpha\beta}), \quad \bar{a} = \det(\bar{a}_{\alpha\beta}),$$

$$\frac{\bar{a}}{a} = 1 + 2\gamma_\alpha^\alpha + 2(\gamma_\alpha^\alpha \gamma_\beta^\beta - \gamma_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta), \quad (3.7.6)$$

$$m_\mu = \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} \varphi_\alpha l_{\beta}^\lambda, \quad m = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} l_{\alpha}^\lambda l_{\beta}^\mu.$$

W przypadku małych odkształceń zależność (3.7.6)₂ można uprościć do $\bar{a}/a \approx 1 + 2\gamma_\alpha^\alpha \approx 1$. Wtedy dla składowych powierzchniowych miar odkształceń otrzymujemy

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} (l_{\alpha}^\lambda l_{\lambda\beta} + \varphi_\alpha \varphi_\beta - a_{\alpha\beta}) + O(\eta\theta^2), \\ \rho_{\alpha\beta} &= -(\bar{\mathbf{y}}_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{,\beta} - b_{\alpha\beta}) = l_{\alpha}^\lambda (m_{\lambda|\beta} - b_{\lambda\beta}) + \varphi_\alpha (m_{,\beta} + b_\beta^\lambda m_\lambda) \\ &\quad + b_{\alpha\beta} (1 + \gamma_\kappa^\kappa) + O\left(\frac{\eta\theta^2}{h}\right). \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Podstawiając (3.7.7) do (3.7.1), z zasady pracy wirtualnej otrzymamy spójny z (3.7.7) układ zależności geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych (por. PIETRASZKIEWICZ i SZWABOWICZ [1981], PIETRASZKIEWICZ [1984]).

3.7.3. Klasyfikacja uproszczeń przy ograniczonych obrotach

Przy dowolnie dużych wartościach przesunięć powierzchni podstawowej M , zależności geometrycznie nieliniowej teorii cienkiej powłoki strukturalnej, wynikające z (3.7.7), są nadal dość skomplikowane i mało przydatne dla zastosowań inżynierskich.

W wielu cienkościennych konstrukcjach inżynierskich rzeczywiste wartości przemieszczeń występujące w trakcie eksploatacji są z góry ograniczone przez własności materiałowe powłoki i więzy wewnętrzne, wynikające z geometrii powłoki, granicy sprężystości materiału, typu obciążeń zewnętrznych, warunków brzegowych, dopuszczalnych nieciągłości wzdłuż krzywych osobliwych itp. Przewidując z góry te ograniczenia i uwzględniając je w oszacowaniach, zagadnienie brzegowe nieliniowej teorii cienkich powłok strukturalnych może być znacznie uproszczone bez utraty dokładności rozwiązania.

W literaturze zaproponowano różne klasyfikacje uproszczeń równań przemieszczeniowych geometrycznie nieliniowej teorii cienkich *regularnych* powłok sprężystych. Te klasyfikacje oparte są z reguły na ograniczeniach składowych zlinearyzowanego wektora obrotu i/lub gradientów przesunięć. Wśród najbardziej znanych tak uproszczonych wariantów wymienimy warianty średniego i dużego zginania (MUSZTARI i GALIMOW [1957]), wariant umiarkowanie małych obrotów (SANDERS [1963]) i wariant małych wygięć (KOITER [1966]). Wiele uproszczonych wariantów zaproponowanych przez DUSZEK [1978] wynikało z różnych kombinacji ograniczeń nakładanych na wartości przesunięć i ich gradientów.

Zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego (TRUESDELL i NOLL [1965]), deformacja otoczenia powierzchni podstawowej M może być rozłożona na trzy stany elementarne: sztywne przesunięcie, czyste rozciągnięcie wzdłuż głównych kierunków odkształcenia i sztywny obrót kierunków głównych. W rozważanej tutaj teorii geometrycznie nieliniowej odkształcenia w powłoce zostały już ograniczone do małych. Dlatego PIETRASZKIEWICZ [1976] zaproponował, aby klasyfikację dalszych uproszczeń takiej teorii powłok oprzeć na dodatkowych konsekwentnych ograniczeniach nakładanych na obroty skończone włókien materialnych powłoki.

Przypomnijmy, że zgodnie z p. 1.7.7 obrót skończony określony jest kątem obrotu ψ dookoła osi obrotu ustalonej wersorem \mathbf{e} i opisywany jest zwykle tensorem obrotu $\mathbf{Q} \in SO(3)$. W przedstawianej poniżej analizie używamy równoważnie uogólnionego wektora obrotu skończonego, zdefiniowanego przez $\boldsymbol{\phi} = \sin \psi \mathbf{e}$.

W geometrycznie nieliniowej teorii powłok cienkich uogólniony wektor obrotu skończonego $\boldsymbol{\phi}$ wyraża się przez przesunięcia zależnością (PIETRASZKIEWICZ [1977])

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} &= \frac{1}{2} (\mathbf{a}_\alpha \times \bar{\mathbf{a}}^\alpha + \mathbf{n} \times \bar{\mathbf{n}}) \\ &\approx \epsilon^{\beta\alpha} \left[\varphi_\alpha \left(1 + \frac{1}{2} \theta_\kappa^\kappa \right) - \frac{1}{2} \varphi^\lambda (\theta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha}) \right] \mathbf{a}_\beta + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

W ramach tej klasyfikacji, zakresy wartości kąta ψ zostały wyrażone przez mały parametr θ określony w (3.7.2)₃: $\psi \leq O(\theta^2)$ – małe obroty, $\psi = O(\theta)$ – umiarkowane obroty, $\psi = O(\sqrt{\theta})$ – duże obroty, $\psi \geq O(1)$ – skończone obroty. Taka klasyfikacja ogranicza tylko wartości kąta obrotu ψ , pozostawiając dowolnym kierunek \mathbf{e} osi obrotu.

Konstrukcje powłokowe wykazują zazwyczaj dużą sztywność na deformację w powierzchni powłoki, nawet przy dopuszczeniu dużej giętkości w kierunku prostopadłym do powierzchni powłoki. Tę cechę można uwzględnić ograniczając poszczególne składowe wektora obrotu skończonego ϕ . Ponieważ dla $|\psi| < \pi/2$ oszacowanie ϕ prowadzi do $O(|\phi|) = O(\sin \psi) = O(\psi)$, możemy nazwy „małe”, „umiarkowane”, „duże”, „skończone” obroty przyporządkować poszczególnym składowym $\phi = \phi \cdot \mathbf{n}$ i $\phi_\alpha = \phi \cdot \mathbf{a}_\alpha$ wektora ϕ .

Przy każdym ograniczeniu nakładanym na ϕ , wzór (3.7.8) pozwala na konsekwentne oszacowanie rzędu wartości φ_α i $\omega_{\alpha\beta}$ jako głównych członów poszczególnych składowych wektora ϕ . Ponieważ $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\rho_{\alpha\beta}$ są w (3.7.7) wielomianami względem φ_α , $\omega_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\beta}$, wartości $\theta_{\alpha\beta}$ mogą być następnie oszacowane bezpośrednio z rozwiązania $\gamma_{\alpha\beta}$ względem $\theta_{\alpha\beta}$, przy oszacowaniu $\gamma_{\alpha\beta} = O(\eta)$.

Zależnie od przyjętego ograniczenia obrotów, można w sposób konsekwentny uprościć związki kinematyczne na $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\rho_{\alpha\beta}$. Jako podstawę uproszczeń przyjęto błąd $O(Eh\eta^2\theta^2)$ pierwszego przybliżenia (3.7.1) do funkcji energii sprężystej powłoki. Błąd ten wymaga, aby składowe $\gamma_{\alpha\beta}$ były określone z dokładnością $O(\eta\theta^2)$, a $\rho_{\alpha\beta}$ z dokładnością $O(\eta\theta^2/h)$. Oszacowanie pochodnych kowariantnych niektórych wyrażeń można uzyskać dzieląc oszacowania tych wyrażeń przez duży parametr

$$\lambda = \frac{h}{\theta} = \min \left(b, L, l, \sqrt{hR}, \frac{h}{\sqrt{\eta}} \right). \quad (3.7.9)$$

Do oszacowania wyrażeń geometrycznych używamy następujących oszacowań: $a_{\alpha\beta} = O(1)$, $b_{\alpha\beta} = O(1/R) = O(\theta^2/h) = O(\theta/\lambda)$.

Poniżej podajemy konsekwentnie uproszczone zależności dla trzech najważniejszych szczególnych wariantów nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych. Pełne wyprowadzenie zależności dla różnych innych wariantów uproszczonych podał PIETRASZKIEWICZ [1981, 1984].

3.7.4. Uproszczona teoria dużych/małych obrotów

Przy ograniczeniu składowych ϕ_α do wartości dużych, składową ϕ można niezależnie ograniczyć do wartości dużej, umiarkowanej lub małej.

Najważniejszym przypadkiem szczególnym jest tu wariant, w którym ϕ przyjęto jako małe. W takim wariantcie teorii spełnione są oszacowania $\varphi_\alpha = O(\sqrt{\theta})$, $\omega_{\alpha\beta} = O(\theta^2)$, $\theta_{\alpha\beta} = O(\theta)$. Jeśli ponadto dopuścimy większy błąd $O(Eh\eta^2\theta\sqrt{\theta})$ w energii odkształcenia (3.7.1), to składowe $\gamma_{\alpha\beta}$ mogą być określone z błędem

$O(\eta\theta\sqrt{\theta})$, natomiast $\rho_{\alpha\beta}$ z błędem $O(\eta\sqrt{\theta}/\lambda)$, co prowadzi do następujących konsekwentnie uproszczonych zależności kinematycznych:

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta} &= \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\varphi_{\alpha}\varphi_{\beta} + \frac{1}{2}\theta_{\alpha}^{\lambda}\theta_{\lambda\beta} - \frac{1}{2}\left(\theta_{\alpha}^{\lambda}\omega_{\lambda\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda}\omega_{\lambda\alpha}\right) + O\left(\eta\theta\sqrt{\theta}\right), \\ \rho_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\left[(\delta_{\alpha}^{\lambda} + \theta_{\alpha}^{\lambda})\varphi_{\lambda|\beta} + (\delta_{\beta}^{\lambda} + \theta_{\beta}^{\lambda})\varphi_{\lambda|\alpha} - \varphi_{\alpha}(\theta_{\kappa}^{\kappa})_{|\beta} - \varphi_{\beta}(\theta_{\kappa}^{\kappa})_{|\alpha}\right. \\ &\quad \left. + b_{\alpha}^{\lambda}(\theta_{\lambda\beta} + \varphi_{\lambda}\varphi_{\beta}) + b_{\beta}^{\lambda}(\theta_{\lambda\alpha} + \varphi_{\lambda}\varphi_{\alpha})\right] - b_{\alpha\beta}\theta_{\kappa}^{\kappa} + O\left(\frac{\eta\sqrt{\theta}}{\lambda}\right).\end{aligned}\quad (3.7.10)$$

Wprowadzając (3.7.10) do gęstości wewnętrznej pracy wirtualnej (3.7.1), funkcjonal wewnętrznej pracy wirtualnej można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned}\iint_{M^{(k)}} W_i \, da &= \iint_{M^{(k)}} \left(N^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}\dot{\rho}_{\alpha\beta}\right) da \\ &= -\iint_{M^{(k)}} (Div \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, da \\ &\quad + \int_{\partial M^{(k)}} \left\{ \mathbf{t}_{\nu} \cdot \mathbf{v} + \nu_{\alpha} M^{\alpha\beta} \left[\varphi_{\beta} \dot{\theta}_{\lambda}^{\lambda} - (\delta_{\beta}^{\lambda} + \theta_{\beta}^{\lambda}) \dot{\varphi}_{\lambda} \right] \right\} ds,\end{aligned}\quad (3.7.11)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{t}^{\alpha} \otimes \mathbf{a}_{\alpha}, \quad Div \mathbf{T} = \mathbf{t}^{\alpha}|_{\alpha}, \quad \mathbf{t}^{\alpha} = T^{\alpha\lambda} \mathbf{a}_{\lambda} + T^{\alpha} \mathbf{n}, \quad \mathbf{t}_{\nu} = \mathbf{t}^{\alpha} \nu_{\alpha}, \\ T^{\alpha\lambda} &= N^{\alpha\beta} \left(\delta_{\beta}^{\lambda} + \theta_{\beta}^{\lambda} \right) - \frac{1}{2} \left(N_{\beta}^{\alpha} \omega^{\lambda\beta} + N_{\beta}^{\lambda} \omega^{\alpha\beta} \right) \\ &\quad - a^{\alpha\lambda} \left[b_{\kappa\rho} M^{\kappa\rho} + (M^{\kappa\rho} \varphi_{\kappa})_{|\rho} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[M^{\alpha\beta} (b_{\beta}^{\lambda} + \varphi^{\lambda}|_{\beta}) + M^{\lambda\beta} (b_{\beta}^{\alpha} + \varphi^{\alpha}|_{\beta}) \right], \\ T^{\alpha} &= N^{\alpha\beta} \varphi_{\beta} + \left[M^{\lambda\beta} (\delta_{\lambda}^{\alpha} + \theta_{\lambda}^{\alpha}) \right]_{|\beta} + M^{\alpha\beta} (\theta_{\kappa}^{\kappa})_{|\beta} \\ &\quad - \left(b_{\beta}^{\alpha} M^{\beta\lambda} + b_{\beta}^{\lambda} M^{\alpha\beta} \right) \varphi_{\lambda}.\end{aligned}\quad (3.7.12)$$

W granicach błędu takiej teorii dużych/malych obrotów słuszne jest również oszacowanie $\theta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\varphi_{\alpha}\varphi_{\beta} + O(\theta^2)$. Dlatego w drugim wyrażeniu całki krzywoliniowej (3.7.11)₂ możemy użyć podstawienia $\dot{\theta}_{\lambda}^{\lambda} = \left(-\frac{1}{2}\varphi^{\lambda}\varphi_{\lambda}\right)^{\bullet} = -\varphi^{\lambda}\dot{\varphi}_{\lambda}$.

Pamiętając ponadto że $\tau^\lambda \dot{\varphi}_\lambda = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}'$, po wykonaniu całkowania przez części drugie i trzecie wyrażenie całki krzywoliniowej (3.7.11)₂ przyjmie postać

$$\int_{\partial M^{(k)}} (\mathbf{f}' \cdot \mathbf{v} - h \dot{\varphi}_\nu) ds + \sum_{P_a \in \partial M^{(k)}} \left(\mathbf{f}_a^{(k)+} \cdot \mathbf{v}_a^{(k)+} - \mathbf{f}_a^{(k)-} \cdot \mathbf{v}_a^{(k)-} \right), \quad (3.7.13)$$

gdzie teraz na każdym brzegu $\partial M^{(k)}$ wielkości zdefiniowane w (3.6.37) występują w konsekwentnie uproszczonej postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= [M_{\nu\nu}(\theta_{\nu\tau} + \varphi_\nu \varphi_\tau) + M_{\nu\tau}(1 + \theta_{\tau\tau} + \varphi_\tau^2)] \mathbf{n} = f \mathbf{n}, \\ h &= M_{\nu\nu}(1 + \theta_{\nu\nu} + \varphi_\nu^2) + M_{\nu\tau}(\theta_{\nu\tau} + \varphi_\nu \varphi_\tau), \\ M_{\nu\nu} &= \nu_\alpha M^{\alpha\beta} \nu_\beta, \quad \theta_{\nu\tau} = \nu^\alpha \theta_{\alpha\beta} \tau^\beta, \quad \varphi_\tau = \varphi_\alpha \tau^\alpha, \quad \text{itp.} \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

Uproszczenie wyrażen zewnętrznej pracy wirtualnej musi uwzględniać następujące oszacowania kinematyczne teorii dużych/malych obrotów w obszarze każdego regularnego płata $M^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_\alpha &= (\delta_\alpha^\lambda + \theta_\alpha^\lambda) \mathbf{a}_\lambda + \varphi_\alpha \mathbf{n} + O(\theta^2), \\ \bar{\mathbf{n}} &= -\varphi^\lambda \mathbf{a}_\lambda + (1 + \theta_\kappa^\kappa) \mathbf{n} + O(\theta^2 \sqrt{\theta}). \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

Wektory zewnętrznych obciążeń powierzchniowych \mathbf{p} i \mathbf{h} są zwykle dane przez swe składowe w bazie odkształconej

$$\mathbf{p} = p^\alpha \bar{\mathbf{a}}_\alpha + p \bar{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{h} = m^\alpha \bar{\mathbf{a}}_\alpha. \quad (3.7.16)$$

Zgodnie z (3.7.15) składowe zmodyfikowanego wektora obciążeń powierzchniowych \mathbf{l} w bazie nieodkształconej przyjmują postać uproszczoną

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{p} + (m^\alpha \bar{\mathbf{n}})|_\alpha = l^\lambda \mathbf{a}_\lambda + l \mathbf{n}, \\ l^\lambda &= p^\alpha (\delta_\alpha^\lambda + \theta_\alpha^\lambda) - p \varphi^\lambda - (m^\alpha \varphi^\lambda)|_\alpha - b_\alpha^\lambda m^\alpha (1 + \theta_\kappa^\kappa), \\ l &= p^\alpha \varphi_\alpha + p(1 + \theta_\kappa^\kappa) + [m^\alpha (1 + \theta_\kappa^\kappa)]|_\alpha - b_{\alpha\lambda} m^\alpha \varphi^\lambda, \end{aligned} \quad (3.7.17)$$

natomiast \mathbf{k} określone w (3.6.21)₂ przy (3.7.15)₂ upraszcza się do

$$\mathbf{k} = m_\nu [-\varphi_\nu \mathbf{v} + \varphi_\tau \boldsymbol{\tau} + (1 + \theta_{\nu\nu} + \theta_{\tau\tau}) \mathbf{n}], \quad m_\nu = m^\alpha \nu_\alpha. \quad (3.7.18)$$

Na brzegu każdego $\partial M^{(k)}$ z (3.7.15) wynikają oszacowania kinematyczne

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\nu}} &= (1 + \theta_{\nu\nu}) \boldsymbol{\nu} + \theta_{\nu\tau} \boldsymbol{\tau} + \varphi_\nu \mathbf{n} + O(\theta^2), \\ \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \theta_{\nu\tau} \boldsymbol{\nu} + (1 + \theta_{\tau\tau}) \boldsymbol{\tau} + \varphi_\tau \mathbf{n} + O(\theta^2), \\ \bar{\mathbf{n}} &= -\varphi_\nu \boldsymbol{\nu} - \varphi_\tau \boldsymbol{\tau} + (1 + \theta_{\nu\nu} + \theta_{\tau\tau}) \mathbf{n} + O(\theta^2 \sqrt{\theta}). \end{aligned} \quad (3.7.19)$$

Przyjmując, że znane są składowe \mathbf{t}^* i \mathbf{h}^* w bazie odkształconej brzegu

$$\mathbf{t}^* = t_{\nu}^* \bar{\nu} + t_{\tau}^* \bar{\tau} + t^* \bar{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{h}^* = m_{\nu}^* \bar{\nu} + m_{\tau}^* \bar{\tau}, \quad (3.7.20)$$

przy pomocy (3.7.19) otrzymamy następujące zależności uproszczone:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^* &= n_{\nu}^* \boldsymbol{\nu} + n_{\tau}^* \boldsymbol{\tau} + n^* \mathbf{n}, \\ n_{\nu}^* &= t_{\nu}^* (1 + \theta_{\nu\nu}) + t_{\tau}^* \theta_{\nu\tau} - t^* \varphi_{\nu}, \\ n_{\tau}^* &= t_{\nu}^* \theta_{\nu\tau} + t_{\tau}^* (1 + \theta_{\tau\tau}) - t^* \varphi_{\tau}, \\ n^* &= t_{\nu}^* \varphi_{\nu} + t_{\tau}^* \varphi_{\tau} + t^* (1 + \theta_{\nu\nu} + \theta_{\tau\tau}). \end{aligned} \quad (3.7.21)$$

Na brzegu $\partial M^{(k)}$ każdego płata wprowadziliśmy dodatkowe przekształcenie $\theta_{\alpha\beta} \simeq -(1/2)\varphi_{\alpha}\varphi_{\beta}$, które pozwoliło przedstawić uproszczone wyrażenia na brzegu, pochodzące od momentów wewnętrznych, w postaci (3.7.14). Przyjmując, że przy konsekwentnych uproszczeniach struktura na brzegu powłoki podobnych wyrażen, pochodzących od momentów zewnętrznych, powinna być zbieżna z (3.7.14), otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^* &= [m_{\nu}^* (\theta_{\nu\tau} + \varphi_{\nu}\varphi_{\tau}) + m_{\tau}^* (1 + \theta_{\tau\tau} + \varphi_{\tau}^2)] \mathbf{n} = f^* \mathbf{n}, \\ h^* &= m_{\nu}^* (1 + \theta_{\nu\nu} + \varphi_{\nu}^2) + m_{\tau}^* (\theta_{\nu\tau} + \varphi_{\nu}\varphi_{\tau}). \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

Reasumując, lokalne zagadnienie brzegowe *uproszczonej teorii dużych/malych obrotów* dla cienkich powłok strukturalnych zawiera następujące równania skalarnie:

lokalne równania równowagi wewnątrz regularnych części M

$$T^{\alpha\lambda}|_{\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} T^{\alpha} + l^{\lambda} = 0, \quad T^{\alpha}|_{\alpha} + b_{\alpha\lambda} T^{\alpha\lambda} + l = 0; \quad (3.7.23)$$

dynamiczne warunki brzegowe wzdłuż regularnej części ∂M_f

$$\begin{aligned} \nu_{\alpha} T^{\alpha\lambda} \nu_{\lambda} + \tau_{\tau} f &= n_{\nu}^* + \tau_{\tau} f^* + m_{\nu} \varphi_{\nu}, \\ \nu_{\alpha} T^{\alpha\lambda} \tau_{\lambda} - \sigma_{\tau} f &= n_{\tau}^* - \sigma_{\tau} f^* + m_{\nu} \varphi_{\tau}, \\ T^{\alpha} \nu_{\alpha} + f' &= n^* + (f^*)' - m_{\nu} (1 + \theta_{\nu\nu} + \theta_{\tau\tau}), \\ h &= h^*; \end{aligned} \quad (3.7.24)$$

dynamiczny warunek ciągłości w każdym punkcie osobliwym $P_b \in \partial M_f$

$$[f - f^*]_b = 0; \quad (3.7.25)$$

geometryczne warunki brzegowe wzdłuż części ∂M_d

$$u_{\nu} = u_{\nu}^*, \quad u_{\tau} = u_{\tau}^*, \quad w = w^*, \quad \varphi_{\nu} = \varphi_{\nu}^*; \quad (3.7.26)$$

warunek ciągłości wzdłuż regularnej części Γ

$$\left[\left(\nu_\alpha T^{\alpha\lambda} \nu_\lambda + \tau_\tau f \right) \dot{u}_\nu + \left(\nu_\alpha T^{\alpha\lambda} \tau_\lambda - \sigma_\tau f \right) \dot{u}_\tau + \left(T^\alpha \nu_\alpha + f' \right) \dot{w} - h \dot{\varphi}_\nu \right] - \sigma_\Gamma = 0; \quad (3.7.27)$$

warunek ciągłości w każdym punkcie osobliwym $P_i \in \Gamma$

$$[f\dot{w}]_i - \sigma_i = 0. \quad (3.7.28)$$

W powyższych zależnościach $\sigma_\tau = b_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta$ jest krzywizną normalną a $\tau_\tau = -b_{\alpha\beta} \nu^\alpha \tau^\beta$ skręceniem geodezyjnym krzywej brzegowej $\partial M^{(k)}$ lub ∂M .

Kompletne zagadnienie brzegowe w przesunięciach otrzymamy, gdy $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ zostaną wyrażone przez równania konstytutywne (3.7.3) i związki kinematyczne (3.7.10), a ponadto σ_Γ , σ_i zostaną zinterpretowane odpowiednio do przyjętej nierregularności.

Z tym samym błędem co i (3.7.10)₂, składowe tensora zginania $\rho_{\alpha\beta}$ mogą być przedstawione w kilku innych alternatywnych postaciach, por. PIETRASZKIEWICZ [1984, 2001b], NOLTE, MAKOWSKI i STUMPF [1986], SCHMIDT [1984], NOLTE i STUMPF [1983]. Każda z tych alternatywnych postaci, razem z (3.7.10)₁, generuje nieco inne wyrażenia funkcji $T^{\alpha\lambda}$, T^α , f , h które, w granicach błędu uproszczonej teorii dużych/malych obrotów, są energetycznie równoważne wyrażeniom (3.7.12) i (3.7.14).

W zastosowaniach inżynierskich, w dążeniu do dalszego konsekwentnego uproszczenia zależności teorii dużych/malych obrotów, możemy dopuścić jeszcze większy błąd $O(Eh\eta\theta^2)$ w energii odkształcenia sprężystego (3.7.1). Wtedy, za cenę dalszej utraty dokładności rozwiązania, powierzchniowe miary odkształceń (3.7.10) takiej *najprostszej teorii dużych/malych obrotów* przyjmują krańcowo prostą postać (por. PIETRASZKIEWICZ [1984])

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta + \frac{1}{2} \theta_\alpha^\lambda \theta_{\lambda\beta} + O(\eta\theta), \\ \rho_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \left[(\delta_\alpha^\lambda + \theta_\alpha^\lambda) \varphi_{\lambda|\beta} + (\delta_\beta^\lambda + \theta_\beta^\lambda) \varphi_{\lambda|\alpha} - \varphi_\alpha (\theta_\kappa^\kappa)_{|\beta} - \varphi_\beta (\theta_\kappa^\kappa)_{|\alpha} \right] + O\left(\frac{\eta}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (3.7.29)$$

Wprowadzając (3.7.29) do (3.7.11), otrzymamy spójne z (3.7.29) definicje pól wewnętrznych

$$\begin{aligned} T^{\alpha\lambda} &= \frac{1}{2} \left[N^{\alpha\beta} (\delta_\beta^\lambda + \theta_\beta^\lambda) + N^{\lambda\beta} (\delta_\beta^\alpha + \theta_\beta^\alpha) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} (M^{\alpha\beta} \varphi^\lambda_{|\beta} + M^{\lambda\beta} \varphi^\alpha_{|\beta}) - a^{\alpha\lambda} (M^{\rho\kappa} \varphi_\kappa)_{|\rho}, \end{aligned} \quad (3.7.30)$$

$$T^\alpha = N^{\alpha\beta} \varphi_\beta + [M^{\beta\lambda} (\delta_\lambda^\alpha + \theta_\lambda^\alpha)]_{|\beta},$$

a definicje wielkości brzegowych pozostają takie same jak w (3.7.14) i (3.7.22).

Na zagadnienie brzegowe takiej najprostszej teorii dużych/małych obrotów składają się równania (3.7.23)–(3.7.28), ale z definicjami (3.7.30), w których $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ wyrażono przez przesunięcia używając równań konstytutywnych (3.7.3) i najprostszych związków kinematycznych (3.7.29).

Z błędem $O(\eta/\lambda)$ składowe tensora zginania $\rho_{\alpha\beta}$ mogą być przedstawione w kilku innych alternatywnych postaciach, zaproponowanych w PIETRASZKIEWICZ [1980b, 1981, 1984], SCHMIDT [1982, 1984], NOLTE [1983], NOLTE i STUMPF [1983], NOLTE, MAKOWSKI i STUMPF [1986]. Wtedy (3.7.29)₁ i uproszczone wyrażenia alternatywne generują nieco inne postacie funkcji $T^{\alpha\lambda}$, T^α energetycznie równoważne wyrażeniom (3.7.30).

W wielu publikacjach można spotkać różne inne warianty uproszczone geometrycznie nieliniowej teorii cienkich regularnych powłok sprężystych, wynikające z przyjęcia jeszcze innych nieliniowych wyrażeń na $\gamma_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$. Wyrażenia te jednak na ogół nie zawierają niektórych energetycznie ważnych członów ujętych w (3.7.10) i (3.7.29), chociaż uwzględniają inne mało istotne energetycznie człony.

Energetyczną spójność niektórych innych, znanych z literatury wariantów badał PIETRASZKIEWICZ [1984]. Obszerna porównawcza analiza numeryczna podana w NOLTE, MAKOWSKI i STUMPF [1986] wykazała, że wszystkie energetycznie spójne warianty teorii dużych/małych obrotów, w zakresie ich stosowności, dają zawsze wyniki zgodne z rozwiązaniami porównawczymi, otrzymanymi na podstawie teorii geometrycznie nieliniowej, używającej pełnych związków kinematycznych (3.7.7) dla powierzchniowych miar odkształceń. W niektórych przykładach ta zgodność wyników znacznie wykraczała poza zakres dużych/małych obrotów. Jednocześnie wyniki numeryczne oparte na bardziej skomplikowanych wariantach znanych z literatury, które jednak nie były energetycznie spójne, odbiegały czasem od rozwiązania porównawczego już w początkowej fazie deformacji powłoki.

3.7.5. Teoria umiarkowanych obrotów

W takim wariantcie teorii powłok cienkich spełnione są oszacowania $\varphi_\alpha = O(\theta)$, $\omega_{\alpha\beta} = O(\theta)$, $\theta_{\alpha\beta} = O(\theta^2)$. Umożliwia to konsekwentne uproszczenia powierzchniowych miar odkształceń do następującej postaci (por. PIETRASZKIEWICZ [1980b, 1981]):

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta} &= \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\varphi_\alpha\varphi_\beta + \frac{1}{2}\omega_{\cdot\alpha}^\lambda\omega_{\lambda\beta} - \frac{1}{2}(\theta_\alpha^\lambda\omega_{\lambda\beta} + \theta_\beta^\lambda\omega_{\lambda\alpha}) + O(\eta\theta^2), \\ \rho_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\left(\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} - \underline{b_\alpha^\lambda\omega_{\lambda\beta} - b_\beta^\lambda\omega_{\lambda\alpha}}\right) + O\left(\frac{\eta\theta}{\lambda}\right).\end{aligned}\tag{3.7.31}$$

W energetycznie spójnej teorii umiarkowanych obrotów składowe tensora zginania $\rho_{\alpha\beta}$ są więc wyrażeniami liniowymi względem przemieszczeń i ich pochodnych. Pokrywają się one z definicją $\rho_{\alpha\beta}$ stosowaną w tzw. *najlepszym* według BUDIANSKY i SANDERS [1963] sformułowaniu liniowej teorii powłok.

Wprowadzenie (3.7.31) do gęstości wewnętrznej pracy wirtualnej (3.7.1) pozwala na przekształcenie funkcjonału wewnętrznej pracy wirtualnej do postaci

$$\begin{aligned} \iint_{M^{(k)}} W_i da &= \iint_{M^{(k)}} \left(N^{\alpha\beta} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \dot{\rho}_{\alpha\beta} \right) da \\ &= - \iint_{M^{(k)}} \mathbf{t}^\alpha|_\alpha \cdot \mathbf{v} da + \int_{\partial M^{(k)}} \left(\mathbf{t}_\nu \cdot \mathbf{v} - \nu_\alpha M^{\alpha\beta} \dot{\varphi}_\beta \right) ds, \end{aligned} \quad (3.7.32)$$

gdzie teraz składowe \mathbf{t}^α występują w odpowiednio uproszczonej formie

$$\begin{aligned} T^{\alpha\lambda} &= N^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2} \left(b_\beta^\alpha M^{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda M^{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{2} N_\kappa^\kappa \omega^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2} \left(N_\beta^\alpha \omega^{\lambda\beta} + N_\beta^\lambda \omega^{\alpha\beta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(N_\beta^\alpha \theta^{\lambda\beta} - N_\beta^\lambda \theta^{\alpha\beta} \right), \end{aligned} \quad (3.7.33)$$

$$T^\alpha = N^{\alpha\beta} \varphi_\beta + M^{\alpha\beta}|_\beta.$$

Wykonanie całkowania przez części drugiego członu całki krzywoliniowej (3.7.32) prowadzi do wyrażenia (3.7.13), w którym teraz

$$\mathbf{f} = M_{\nu\tau} \mathbf{n} = \mathbf{f} \mathbf{n}, \quad h = M_{\nu\nu}. \quad (3.7.34)$$

Zauważmy, że w wyniku liniowości (3.7.31)₂ składowe $M^{\alpha\beta}$ wchodzą do (3.7.33) i (3.7.34) bez mnożników, uwzględniających zmianę geometrii powłoki podczas deformacji, a \mathbf{f} zawiera tylko składową normalną. Oznacza to, że spójne z (3.7.33) i (3.7.34) zewnętrzne momenty powierzchniowe \mathbf{h} i brzegowe \mathbf{h}^* mogą być uwzględnione tylko z takim samym przybliżeniem w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= m^\alpha \mathbf{a}_\alpha, & \mathbf{k} &= m_\nu \mathbf{n}, & \mathbf{h}^* &= m_\nu^* \boldsymbol{\nu} + m_\tau^* \boldsymbol{\tau}, \\ f^* &= m_\tau^* n, & h^* &= m_\nu^*. \end{aligned} \quad (3.7.35)$$

Oszacowania kinematyczne wewnątrz każdego regularnego płata $M^{(k)}$ prowadzą do zależności

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = (a_{\lambda\alpha} - \underline{\omega}_{\lambda\alpha}) \mathbf{a}^\lambda + \varphi_\alpha \mathbf{n} + O(\theta^2), \quad \bar{\mathbf{n}} = -\varphi_\lambda \mathbf{a}^\lambda + \mathbf{n} + O(\theta^2), \quad (3.7.36)$$

za pomocą których składowe obciążeń powierzchniowych upraszczają się do

$$l^\lambda = p^\lambda - \underline{p_\alpha \omega^{\lambda\alpha}} - p \varphi^\lambda - m^\alpha b_\alpha^\lambda, \quad l = -p^\alpha \varphi_\alpha + p + m^\alpha|_\alpha. \quad (3.7.37)$$

Na brzegu każdego $\partial M^{(k)}$ z (3.7.36) wynikają oszacowania

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\nu}} &= \boldsymbol{\nu} + \underline{\omega_{\nu\tau}} \boldsymbol{\tau} + \varphi_\nu \mathbf{n} + O(\theta^2), \\ \bar{\boldsymbol{\tau}} &= -\underline{\omega_{\nu\tau}} \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\tau} + \varphi_\tau \mathbf{n} + O(\theta^2), \\ \bar{\mathbf{n}} &= -\varphi_\nu \boldsymbol{\nu} - \varphi_\tau \boldsymbol{\tau} + \mathbf{n} + O(\theta^2). \end{aligned} \quad (3.7.38)$$

Stąd składowe zewnętrznych sił brzegowych (3.7.21) upraszczają się do

$$\begin{aligned} n_\nu^* &= t_\nu^* - \underline{t_\nu^* \omega_{\nu\tau}} - t^* \varphi_\nu, & n_\tau^* &= \underline{t_\nu^* \omega_{\nu\tau}} + t_\tau^* - t^* \varphi_\tau, \\ n^* &= t_\nu^* \varphi_\nu + t_\tau^* \varphi_\tau + t^*. \end{aligned} \quad (3.7.39)$$

Lokalne zagadnienie brzegowe teorii umiarkowanych obrotów dla cienkich powłok strukturalnych formułowane jest przez zależności skalarne (3.7.23)–(3.7.28), w których teraz należy uwzględnić zależności uproszczone (3.7.33)–(3.7.35) oraz (3.7.39). W szczególności, m_ν pojawi się tylko w dynamicznym warunku brzegowym (3.7.24)₃ bez dodatkowych mnożników.

W wielu konstrukcjach powłokowych tylko składowe ϕ_α są umiarkowane, natomiast składowa ϕ jest zawsze mała. W takiej *teorii umiarkowanych/małych obrotów* spełnione są oszacowania $\varphi_\alpha = O(\theta)$, $\omega_{\alpha\beta} = O(\theta^2)$, $\theta_{\alpha\beta} = O(\theta^2)$. Umożliwiają one dalsze uproszczenia związków kinematycznych (3.7.31) przez pominięcie w nich małych podkreślonych członów. W wyniku tych uproszczeń w zależnościach (3.7.33)–(3.7.39) wypada szereg podkreślonych wyrazów zawierających $\omega_{\alpha\beta}$ i zagadnienie brzegowe znacznie się upraszcza.

Przedstawiony tu wariant geometrycznie nieliniowej teorii cienkich sprężystych powłok strukturalnych w opisie Lagrange'a przy umiarkowanych obrotach, oparty na energetycznie uproszczonych powierzchniowych miarach odkształceń (3.7.31), zawiera wiele znanych z literatury prostszych wariantów nieliniowej teorii powłok regularnych. Przegląd tych różnych uproszczonych wersji podali SCHMIDT i PIETRASZKIEWICZ [1981], gdzie również sformułowano szereg funkcjonalów, zarówno swobodnych jak i z warunkami ubocznymi, oraz odpowiadających im zasad wariacyjnych. Te zasady wariacyjne umożliwiają słabe sformułowania zagadnienia brzegowego powłok regularnych wykorzystujące różne szczególne wersje teorii umiarkowanych obrotów. Skonstruowane zasady wariacyjne mogą stanowić podstawę do opracowania podobnych zasad dla powłok strukturalnych, a następnie odpowiednich rodzin elementów skończonych i algorytmów analizy nieliniowej takich powłok.

3.7.6. Nieliniowa teoria powłok o małej wyniosłości

Najprostszym i zarazem najbardziej rozpowszechnionym w literaturze przypadkiem szczególnym teorii umiarkowanych/małych obrotów jest nieliniowa teoria powłok o małej wyniosłości, zaproponowana m.in. przez MUSZTARI [1938] i MARGUERRE [1939].

Oprócz oszacowań $\varphi_\alpha = O(\theta)$, $\omega_{\alpha\beta} = O(\theta^2)$, $\theta_{\alpha\beta} = O(\theta^2)$, przyjmuje się tu założenie dodatkowe, że przesunięcia styczne u_α są o rząd mniejsze od normalnych w , tzn. $u_\alpha = wO(\theta)$. Stąd wynika, że $\varphi_\alpha = w_\alpha[1 + O(\theta^2)]$ i zależności kinematyczne upraszczają się do postaci

$$\gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta} + O(\eta\theta^2), \quad \rho_{\alpha\beta} = -w|_{\alpha\beta} + O\left(\frac{\eta\theta}{\lambda}\right), \quad (3.7.40)$$

a dla wektorów baz odkształconych otrzymujemy oszacowania

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_\alpha &= \mathbf{a}_\alpha + w_{,\alpha} \mathbf{n} + O(\theta^2), & \bar{\mathbf{n}} &= \mathbf{n} - w_{,\alpha} \mathbf{a}^\alpha + O(\theta^2), \\ \bar{\boldsymbol{\nu}} &= \boldsymbol{\nu} + w_{,\nu} \mathbf{n} + O(\theta^2), & \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \boldsymbol{\tau} + w' \mathbf{n} + O(\theta^2), \\ \bar{\mathbf{n}} &= \mathbf{n} - w_{,\nu} \boldsymbol{\nu} - w' \boldsymbol{\tau} + O(\theta^2).\end{aligned}\quad (3.7.41)$$

W sformułowaniu klasycznym zazwyczaj pomija się również wektor momentów powierzchniowych, $\mathbf{h} \equiv \mathbf{0}$, a wartości stycznego obciążenia powierzchniowego p^α przyjmuje się również o rząd mniejsze od wartości obciążenia normalnego p , tzn. $p^\alpha = pO(\theta)$.

Po wprowadzeniu (3.7.40) do gęstości wewnętrznej pracy wirtualnej (3.7.1), z przekształcenia funkcjonału wewnętrznej pracy wirtualnej otrzymamy następujące definicje:

$$\begin{aligned}T^{\alpha\lambda} &= N^{\alpha\lambda}, & T^\alpha &= N^{\alpha\beta} w_{,\beta} + M^{\alpha\beta} |_\beta, \\ \mathbf{k} &\equiv \mathbf{0}, & \mathbf{f} &= M_{\nu\tau} \mathbf{n} = f \mathbf{n}, & h &= M_{\nu\nu}, \\ \mathbf{f}^* &= m_\tau^* \mathbf{n} = f^* \mathbf{n}, & h^* &= m_\nu^*.\end{aligned}\quad (3.7.42)$$

$$\begin{aligned}l^\alpha &= p^\alpha - pw|^\alpha, & l &= p, \\ n_\nu^* &= t_\nu^* - t^* w_{,\nu}, & n_\tau^* &= t_\tau^* - t^* w', & n^* &= t_\nu^* w_{,\nu} + t_\tau^* w' + t^*.\end{aligned}\quad (3.7.43)$$

Dodatkowo, w równaniach równowagi (3.7.23)₁ człony zawierające siły tnące są szacowane jako

$$-b_\alpha^\lambda T^\alpha = -b_\alpha^\lambda \left(N^{\alpha\beta} w_{,\beta} + M^{\beta\alpha} |_\beta \right) = O \left(Eh \frac{\eta \theta^2}{\lambda} \right)$$

i są pomijane względem członu głównego $N^{\alpha\lambda} |_\alpha = O \left(Eh \frac{\eta}{\lambda} \right)$.

W wyniku tych założeń i uproszczeń, lokalne zagadnienie brzegowe nieliniowej teorii cienkich powłok strukturalnych o małej wyniosłości składa się z następujących zależności. Są to:

równania równowagi wewnątrz regularnych części M

$$N^{\alpha\beta} |_\alpha + p^\beta - pw|^\beta = 0, \quad M^{\alpha\beta} |_\alpha |_\beta + (b_{\alpha\beta} + w_{|\alpha\beta}) N^{\alpha\beta} + p = 0; \quad (3.7.44)$$

dynamiczne warunki brzegowe wzdłuż regularnej części ∂M_f

$$\begin{aligned}N_{\nu\nu} + \tau_\tau M_{\nu\tau} &= t_\nu^* - t^* w_{,\nu} + \tau_\tau m_\tau^*, \\ N_{\nu\tau} - \sigma_\tau M_{\nu\tau} &= t_\tau^* - t^* w' - \sigma_\tau m_\tau^*, \\ T^\alpha \nu_\alpha + (M_{\nu\tau})' &= n^* + (m_\tau^*)', \\ M_{\nu\nu} &= m_\nu^*;\end{aligned}\quad (3.7.45)$$

dynamiczny warunek ciągłości w każdym punkcie osobliwym $P_b \in \partial M_f$

$$[M_{\nu\tau} - m_\tau^*]_b = 0; \quad (3.7.46)$$

geometryczne warunki brzegowe wzdłuż części ∂M_d

$$u_\nu = u_\nu^*, \quad u_\tau = u_\tau^*, \quad w = w^*, \quad w_{,\nu} = w_{,\nu}^*; \quad (3.7.47)$$

warunek ciągłości wzdłuż regularnej części Γ

$$\begin{aligned} & \left[(N_{\nu\nu} + \tau_\tau M_{\nu\tau}) \dot{u}_\nu + (N_{\nu\tau} - \sigma_\tau M_{\nu\tau}) \dot{u}_\tau \right. \\ & \left. + (T^\alpha \nu_\alpha + (M_{\nu\tau})') \dot{w} - M_{\nu\nu} w_{,\nu} \right] - \sigma_\Gamma = 0; \end{aligned} \quad (3.7.48)$$

warunek ciągłości w każdym punkcie osobliwym $P_i \in \Gamma$

$$[M_{\nu\tau} \dot{w}]_i - \sigma_i = 0. \quad (3.7.49)$$

Gdy w powyższych zależnościach $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ zostaną wyrażone przez równania konstytutywne (3.7.3) i związki kinematyczne (3.7.40), a ponadto σ_Γ , σ_i zostaną zinterpretowane zgodnie z założoną nieregularnością, otrzymamy kompletne zagadnienie brzegowe w przesunięciach, jako zmiennych niezależnych.

Część II

Metody obliczeniowe

Aspekty obliczeniowe w statyce i dynamice powłok

4.1. Słaba postać zasad zachowania

4.1.1. Uwagi wstępne

Formułowanie i interpretację metody elementów skończonych (MES) można postrzegać z dwóch różnych punktów widzenia — fizycznego lub matematycznego.

Podjęcie fizyczne wiąże się z początkami formułowania MES jako daleko posuniętego uogólnienia metod stosowanych wcześniej w analizie konstrukcji prętowych, por. LÉVY [1953], TURNER i inni [1956], COOK, MALKUS i PLESHA [1989]. Podstawą koncepcji jest założenie, że każdą konstrukcję można traktować jak układ zbudowany z oddzielnych, mniejszych części konstrukcji — *elementów skończonych* — których modelowanie mechaniczne jest niezależne od pozostałych części układu. Następnie te oddzielne części łączone są odpowiednio ze sobą w całość w skończonej liczbie węzłów.

Podjęcie matematyczne do MES oznacza zastosowanie metody Rayleigha–Ritza, lub jej ogólniejszej wersji Bubnowa–Galerkina, do aproksymacji zagadnienia brzegowego. Bazą MES są wielomiany w postaci funkcji zlokalizowanych (zob. np. COURANT [1943], ODEN [1972], KLEIBER [1985]). Funkcje zlokalizowane określone są jedynie wewnątrz nie pokrywających się podobszarów dziedziny problemu, zwanych *elementami skończonymi*, i znikają poza tymi obszarami. Zbiór elementów skończonych powstaje przez określony podział dziedziny zadania powiązany z jednoczesnym doбором węzłów, które rozłożone są w części lub całkowicie na brzegach i w wierzchołkach elementów. Zbiory elementów i węzłów tworzą *siatkę dyskretyzacyjną* zadania.

Podstawowa idea MES opiera się na koncepcji interpolacji. Inne kroki zastosowanej aproksymacji MES są mniej lub bardziej standardowe. Kroki te omówimy dokładniej w rozdziale 5 w ramach formułowania elementów skończonych.

Podjęcie matematyczne, polegające na zastosowaniu metod Rayleigha–Ritza lub Bubnowa–Galerkina, wymaga:

- A) słabego (wariacyjnego) sformułowania zagadnienia początkowo–brzegowego;

B) wyboru przestrzeni funkcji aproksymacyjnych, podstawowych i testowych, co w MES sprowadza się do określenia liczby węzłów, liczby zmiennych węzłowych i tzw. *funkcji kształtu*.

W ramach A) wyróżnia się dwie zasadnicze klasy zasad wariacyjnych, prowadzących do sformułowania elementów skończonych:

A1) zasady i elementy jednopolewe;

A2) zasady i elementy wielopolewe.

Typowym przykładem elementów należących do klasy A1) są elementy przemieszczeniowe, formułowane na bazie zasady wirtualnych przemieszczeń¹. Wśród elementów należących do klasy A2) można wymienić elementy mieszane (ang. *mixed*) i elementy częściowo mieszane (ang. *semi-mixed*), których podstawą są zasady wariacyjne typu Hellingera–Reissnera lub typu Hu–Washizu. Ta druga zasada stanowi wariacyjne uzasadnienie formułowania ważnej grupy dwupolowych elementów skończonych o wzbogaconym polu odkształceń (ang. *enhanced assumed strain – EAS*).

Istnieje również klasa elementów skończonych, których koncepcja opiera się na technikach nie mających w pełni formalnych podstaw w wariacyjnym sformułowaniu problemu brzegowego. Do tego typu elementów zaliczyć można elementy skończone o dwustopniowej interpolacji odkształceń (ang. *assumed natural strain – ANS*), używane z powodzeniem do analizy wielu praktycznych problemów inżynierskich.

Przedstawiona w poprzednich rozdziałach książki sześcioparametrowa teoria powłok ma szereg następujących cech, istotnych z obliczeniowego punktu widzenia:

- a. Wzdłuż brzegów elementu wymagana jest ciągłość jedynie klasy C^0 dla niezależnych zmiennych kinematycznych $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$ oraz ciągłość klasy C^{-1} (kawałkami ciągłe) dla uogólnionych sił przekrojowych $\mathbf{s} = (\mathbf{n}^\beta, \mathbf{m}^\beta)$ i powłokowych miar odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta)$. Pod tym względem rozważana teoria powłok ma takie same skromne wymagania, jak występujące w sformułowaniu elementów zdegenerowanych lub bazujących na hipotezie kinematycznej typu Timoszenko–Reissnera.
- b. Sześcioparametrowa teoria powłok ujmuje wszystkie trzy parametry obrotu jako niezależne zmienne kinematyczne. Dlatego formułowane na jej podstawie elementy skończone mogą być w sposób naturalny wyposażone w sześć stopni swobody w każdym węźle. Do wprowadzenia szóstego stopnia swobody — tzw. *owinięcia* — nie ma więc potrzeby użycia specjalnych technik lub dodatkowych założeń. Rozwiązuje to problemy modelowania

¹W naszym przypadku, podobnie jak w teoriach powłok typu Timoszenko–Reissnera, na wektor przemieszczeń składają się pole przesunięć i pole obrotów jako zmienne niezależne. Dlatego zasada wirtualnych przemieszczeń dla takich sformułowań mechaniki powłok może być formalnie uznawana również jako zasada dwupolewa.

powłok np. nieregularnych, zawierających załamania, rozwidlenia i przecięcia się wielu płatów powłoki.

- c. W sformułowanym podejściu dwuwymiarowym nie ma już konieczności trójwymiarowego całkowania w objętości elementu (jednocześnie w powierzchni i po grubości powłoki) nawet w przypadku powłok grubych, podlegających skończonym silnie nieliniowym deformacjom w kierunku grubości. Jest to istotną zaletą zaproponowanego sformułowania, np. w stosunku do standardowych powłokowych elementów zdegenerowanych.
- d. Konstrukcja różnych elementów skończonych przebiega w sposób standardowy i nie zależy od tego, czy powłoka jest cienka czy gruba, izotropowa czy nie, podlegająca małym czy skończonym deformacjom. Do konstrukcji elementu skończonego wymagany jest tylko ogólny schemat jego budowy. Różnice w modelowaniu różnych zadań ujmuje się przez specyfikację równań konstytutywnych. Taka szczególna postać równań konstytutywnych wymagana jest dopiero przy rozwiązywaniu konkretnych zadań mechaniki powłok.

Podstawy metody elementów skończonych są niezależne od rozważanego problemu szczególnego. Dlatego przy konstrukcji prezentowanych w rozdziale 5 elementów powłokowych wykorzystamy idee używane np. przy formułowaniu trójwymiarowych elementów bryłowych. Istotną cechą różniącą formułowane tam elementy powłokowe od elementów klasycznych jest fakt, że przestrzeń konfiguracyjna rozważanego tu problemu nie posiada wygodnej do analizy struktury przestrzeni liniowej.

Efektywne rozwiązanie problemu nieliniowego wymaga również uwzględnienia dalszych aspektów:

- C) iteracyjnego rozwiązywania równań zlinearyzowanych;
- D) śledzenia ścieżek równowagi wraz z wyznaczaniem punktów osobliwych, takich jak punkty graniczne i punkty bifurkacji rozwiązania;
- E) rozwiązania problemu własnego (wyznaczenia częstości i postaci drgań własnych lub liniowego obciążenia krytycznego i odpowiadającej mu postaci wyboczenia);
- F) całkowania po czasie dynamicznych równań ruchu.

Wymienione w C)–F) aspekty nie stanowią części metody elementów skończonych i nie wpływają na dokładność aproksymacji przestrzennej MES. Aspekty te mogą być dyskutowane również w ramach sformułowania ciągłego, a następnie wykorzystane w rozwiązaniach problemów dyskretnych, otrzymanych na drodze przestrzennej aproksymacji skończenie wymiarowej.

Dotychczasowe doświadczenia wskazują, że w analizie konstrukcji powłokowych o dowolnej geometrii, obciążeniu, warunkach brzegowych i deformacji metodą elementów skończonych zasadnicze trudności koncentrują się wokół następujących zagadnień ogólnych:

- I) teoria powłok – zastąpienie trójwymiarowego problemu mechaniki ośrodków ciągłych zagadnieniem dwuwymiarowym mechaniki powłok o zmiennych niezależnych zdefiniowanych tylko na wyróżnionej powierzchni podstawowej²;
- II) dyskretyzacja – skończenie wymiarowa aproksymacja problemu ciągłego;
- III) nieregularność powłok – modelowanie rozgałęzień i przecięć, skoków grubości i własności materiałowych, usztywnień i wzmocnień prętami, połączeń różnych płatów powłok ze sobą i z prętami itp.

W kontekście metody elementów skończonych, ze względu na znamienne wagę dla wiarygodności rozwiązań, dodamy tu również problem szczególny, występujący tylko w ramach zagadnienia dyskretyzacji MES:

- IIa) zjawisko blokady (zakleszczania) rozwiązań – nadmierne przesztywnienie konstrukcji, będące numerycznym efektem ubocznym jednolitej interpolacji niskiego rzędu, w szczególności klasy C^0 .

Zagadnienie I ma charakter czysto analityczny, zagadnienie II ma naturę czysto numeryczną, natomiast zagadnienie III ma charakter zarówno analityczny, jak i numeryczny. Różne źródła i odmienna natura zagadnień I i II pozwala rozważać je oddzielnie. Możliwość rozdzielenia zagadnień teorii powłok i dyskretyzacji jest podstawową różnicą między podejściem klasycznym i zaproponowanym w tej książce a metodologią formułowania elementu powłokowego w ramach koncepcji degeneracji.

W drugiej części książki rozważamy różne słabe sformułowania problemu początkowo-brzegowego nieliniowej mechaniki powłok. Na tej podstawie przedstawimy systematyczną i kompleksową dyskusję wymienionych powyżej zagadnień występujących w analizie powłok metodą elementów skończonych. Chcemy wyraźnie podkreślić ich różną naturę, kładąc jednocześnie nacisk na aspekt obliczeniowy zagadnienia.

Można uznać za główne następujące cechy przemawiające na korzyść słabego sformułowania zagadnienia początkowo-brzegowego (por. np. KLEIBER [1989]):

1. W miejsce różniczkowej reprezentacji problemu o charakterze lokalnym formułuje się równoważną globalną reprezentację całkową, wymagającą na ogół słabszych założeń o regularności danych problemu i rozwiązań.
2. Globalna reprezentacja całkową jest wygodną podstawą numerycznych rozwiązań przybliżonych.

²Zestawienie tytułów książek i artykułów przeglądowych z dziedziny mechaniki powłok zawierają prace NOOR [1990a,b] oraz PIETRASZKIEWICZ [1992]. Materiały konferencyjne NOOR, BELYTSCHKO i SIMO [1990], zestawienia artykułów YANG i inni [1990, 2000], MACKERLE [1997, 2000, 2002a,b], a także książka pod redakcją WOŹNIAKA [2001] dają przegląd aktualnych prac, trendów i nowszą bibliografię z tego zakresu.

3. Globalna reprezentacja całkowa jest sformułowaniem niezmienniczym względem sposobu opisu zagadnienia. Może ona służyć jako punkt wyjścia do formułowania zagadnień szczególnych w wybranym opisie.
4. W przypadkach dopuszczających istnienie zasad ekstremalnych pojawia się możliwość uzyskania z góry pewnych informacji o nieznanym rozwiązaniu.

Słaba postać zagadnienia początkowo–brzegowego może przyjąć formę albo tożsamości całkowej, albo zasady wariacyjnej, wyrażonej jako warunek stacjonarności funkcjonału. W mechanice postać tożsamości całkowej mają np. zasady: pracy wirtualnej, wirtualnych przemieszczeń i wirtualnej pracy dopełniającej. W zagadnieniach równowagowych podstawowymi zasadami wariacyjnymi są: zasada stacjonarności całkowitej energii potencjalnej, zasada Hellingera–Reissnera, zasada Hu–Washizu i zasada stacjonarności energii dopełniającej (o ile istnieje). Zasady wirtualne jako tożsamości całkowe są ogólniejsze od zasad wariacyjnych w tym sensie, że nie wymagają one istnienia odpowiednich funkcjonałów globalnych.

Zasady wariacyjne liniowej teorii powłok modelowanych powierzchnią Cosseratów rozważał już REISSNER [1970], a w kontekście aproksymacji MES m.in. ATLURI i PIAN [1972]. W tych pracach badano zasady jedno- i wielopolowe. W ramach standardowych procedur wariacyjnych, dobrze opracowanych w matematyce (np. GELFAND i FOMIN [1970]), nie jest jednak bezpośrednio możliwe formalne uogólnienie wyników teorii liniowej na rozpatrywany tu przypadek nieliniowy. Wynika to z następujących powodów:

- a) przestrzeń konfiguracyjna nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok nie posiada struktury przestrzeni liniowej i dlatego standardowe twierdzenia analizy funkcjonalnej nie znajdują tu bezpośredniego zastosowania;
- b) zewnętrzne momenty powierzchniowe, krawędziowe i brzegowe w teorii nieliniowej tracą na ogół charakter wielkości zachowawczych;
- c) w przypadku powłok nieliniowo sprężystych, materiałowe równania konstytutywne nie zawsze są jednoznacznie odwracalne.

Przedstawiane dalej rozważania ograniczymy do sformułowania odpowiednich zasad wirtualnych i zasad wariacyjnych nieliniowej mechaniki powłok oraz ich modyfikacji, wykorzystywanych w tej książce jako podstawa implementacji numerycznej.

4.1.2. Przestrzeń konfiguracyjna

W ramach rozważanej ogólnej teorii powłok, każda konfiguracja powłoki jest określona przez pole wektorów przesunięć (translacji) $\mathbf{u}: M \rightarrow E$ i pole tensorów obrotu (rotacji) $\mathbf{Q}: M \rightarrow SO(3)$, oba określone na powierzchni podstawowej M powłoki w konfiguracji odniesienia, utożsamianej tu z konfiguracją nieodkształconą. Uporządkowana para $\mathbf{u} \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$ całkowicie określa każdą inną konfigurację powłoki, o ile opis konfiguracji odniesienia jest ustalony przez podanie dwóch pól $(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{T}_0)$.

Używając terminologii zaczerpniętej z dynamiki układów mechanicznych, zbiór wszystkich konfiguracji powłoki nazywamy *przestrzenią konfiguracyjną* zdefiniowaną następująco:

$$\mathcal{U} \equiv C(M, G) = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \mid \mathbf{u}: M \rightarrow G = E \times SO(3)\}. \quad (4.1.1)$$

Z (4.1.1) wynika, że przestrzeń konfiguracyjna \mathcal{U} nie ma struktury przestrzeni liniowej, ponieważ w jej definicji występuje grupa obrotów $SO(3)$. Fakt ten ma istotne konsekwencje dla analizy numerycznej nieliniowych problemów mechaniki powłok.

Przy pewnych niezbyt silnych założeniach o regularności można wykazać, że przestrzeń konfiguracyjna \mathcal{U} ma jednostajnie zbieżną topologię i jest nieskończenie wymiarową rozmaitością. Z operacją grupową³ zdefiniowaną punktowo przez

$$(\mathbf{u}_2 \oplus \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_2(\mathbf{x}), \mathbf{Q}_2(\mathbf{x}) \mathbf{Q}_1(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in M, \quad (4.1.2)$$

dla wszystkich $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U}$, przestrzeń konfiguracyjna (4.1.1) jest nieskończenie wymiarową grupą Banacha–Liego⁴. Na podstawie tego faktu problemy mechaniki powłok mogą być formułowane w terminach geometrii różniczkowej.

W tej obliczeniowej części książki rozważania ograniczamy do szczególnego typu geometrycznej nieregularności powłok. Przyjmujemy, że powierzchnia podstawowa powłoki jest określona przez złożenie pewnej liczby płatów regularnych powierzchni $M^{(a)}$, $a = 1, 2, \dots, n$, połączonych wzdłuż wspólnych krawędzi Γ , spełniających ogólne założenia podane w części pierwszej książki. Dodatkowo zakładamy tu, że podczas procesu deformacji połączenia płatów $M^{(a)}$ nie ulegają rozdzielaniu i lokalnie zachowują swój pierwotny kształt w płaszczyźnie ortogonalnej do krawędzi⁵ Γ (są to tzw. *połączenia kinematycznie sztywne*). To założenie pociąga za sobą konieczność spełnienia, na wszystkich płatach $M^{(a)}$, $a = 1, 2, \dots, m$, $m \leq n$, tworzących wspólną krawędź Γ , następujących kinematycznych warunków ciągłości dotyczących odkształconej powierzchni podstawowej:

$$\vec{\mathbf{y}}_\Gamma(s) = \vec{\mathbf{y}}\left(\mathbf{x}^{(a)}(s)\right), \quad \mathbf{T}\left(\mathbf{x}^{(a)}(s)\right) = \mathbf{Q}_\Gamma(s) \mathbf{T}_0\left(\mathbf{x}^{(a)}(s)\right), \quad (4.1.3)$$

wzdłuż Γ ,

³W ogólnym przypadku $\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2 \neq \mathbf{u}_2 \oplus \mathbf{u}_1$, ponieważ $SO(3)$ nie jest grupą przemianą. Elementem neutralnym grupy $G = E \times SO(3)$ jest $\mathbf{1} \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, zaś $\ominus \mathbf{u} = (-\mathbf{u}, \mathbf{Q}^T)$ jest elementem odwrotnym do \mathbf{u} , ponieważ $\mathbf{u} \oplus (\ominus \mathbf{u}) = \mathbf{1}$.

⁴Co wynika z ogólnych twierdzeń o rozmaitościach odwzorowań gładkich skończenie wymiarowej rozmaitości w skończenie wymiarową grupę Liego, por. CURTIES, LEE i MILLER [1973].

⁵Jest to założenie analogiczne do klasycznych założeń o połączeniach prętów w układach ramowych. Odejście od tego założenia wymaga, jak to podano w podrozdziale 3.5, wyposażenia krawędzi Γ w wielkości dynamiczne i kinematyczne oraz sformułowania dla Γ odpowiednich równań konstytutywnych. W takim przypadku krawędź Γ nabiera cech jednowymiarowego kontinuum o własnościach pręta modelowanego krzywą geometryczną typu Cosserat.

gdzie krzywa przestrzenna Γ parametryzowana jest lokalnie długością łuku s . Dlatego początkowa geometria brzegów poszczególnych płatów $M^{(a)}$ w obszarze połączenia Γ może być opisana przez $\bar{\mathbf{x}}^{(a)} = \bar{\mathbf{x}}^{(a)}(s)$, $\mathbf{T}_0^{(a)} = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}^{(a)}(s))$, $a = 1, 2, \dots, m$.

Z (4.1.3) wynikają następujące kinematyczne warunki ciągłości dotyczące przemieszczeń:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(a)}(s)) &= \mathbf{u}_\Gamma(s), \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}^{(a)}(s)) &= \mathbf{Q}_\Gamma(s), \end{aligned} \quad a = 1, 2, \dots, m, \quad \mathbf{x}^{(a)}(s) \in \Gamma, \quad (4.1.4)$$

gdzie $\mathbf{u}_\Gamma(s)$ i $\mathbf{Q}_\Gamma(s)$ są, odpowiednio, polami przesunięć i obrotów zdefiniowanymi wzdłuż Γ .

Alternatywnie, deformacja obrotowa $\mathbf{Q}_\Gamma(s)$ krawędzi Γ może być określona poprzez trójki wektorów kierunkowych $\{\mathbf{t}_j^0(s)\}_\Gamma$, przyporządkowane każdemu punktowi $\mathbf{x}_\Gamma(s) \in \Gamma$ w konfiguracji odniesienia, i trójki wektorów kierunkowych $\{\mathbf{t}_j(s)\}_\Gamma$, określone w każdym punkcie $\mathbf{y}_\Gamma(s)$ konfiguracji aktualnej $\Gamma(t)$. Wtedy $\mathbf{Q}_\Gamma(s) = (\mathbf{t}_j(s))_\Gamma \otimes (\mathbf{t}_j^0(s))_\Gamma$.

4.1.3. Wirtualne przemieszczenia

Stany wirtualne powłoki można opisać w terminach geometrii różniczkowej jako elementy wiązki stycznej $T\mathcal{U}$ do przestrzeni konfiguracyjnej \mathcal{U} .

Wiązka styczna $T\mathcal{U}$ jest zdefiniowana przez sumy $T\mathcal{U} = \bigcup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} T_{\mathbf{u}}\mathcal{U}$ parami rozłącznych przestrzeni stycznych $T_{\mathbf{u}}\mathcal{U}$ w punktach $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$. Oczywiście, każda przestrzeń styczna $T_{\mathbf{u}}\mathcal{U}$ ma strukturę przestrzeni liniowej. Z twierdzeń o rozmaitościach odwzorowań wynika, że dla dwóch rozmaitości M i N wiązka styczna $TC(M, N)$ jest izomorficzna z $C(M, TN)$. Na tej podstawie można identyfikować przestrzeń wirtualnych przemieszczeń powłoki z przestrzenią

$$T_{\mathbf{u}}\mathcal{U} = C(M, T(E \times SO(3))), \quad (4.1.5)$$

gdzie $T(E \times SO(3))$ oznacza wiązkę styczną do sześcioparametrowej grupy Liego $E \times SO(3)$.

Z drugiej strony, przestrzeń styczna $T_{\mathbf{u}}\mathcal{U}$ dana wzorem (4.1.5) jest przestrzenią odwzorowań określoną następująco: każdej konfiguracji powłoki $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ towarzyszy wirtualne przemieszczenie $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{U}$ w postaci odwzorowania

$$\mathbf{w}: M \rightarrow T_{\mathbf{u}(\mathbf{x})}(E \times SO(3)), \quad \forall \mathbf{x} \in M. \quad (4.1.6)$$

Innymi słowy, wiązka styczna $T\mathcal{U}$ jest nieskończenie wymiarową przestrzenią wektorową odwzorowań powierzchni podstawowej powłoki M w przestrzeń styczną do grupy $E \times SO(3)$.

Ale przestrzeń styczna do grupy obrotów jest izomorficzna z przestrzenią wektorową tensorów skośnie symetrycznych $E \wedge E$, która z kolei jest izomorficzna z przestrzenią euklidesową E , co oznaczamy jako ciąg izomorfizmów przestrzeni

$T_{\mathbf{Q}}SO(3) \simeq so(3) \simeq E$. Zatem każdy tensor obrotu \mathbf{Q} generuje ciąg izomorficznych przestrzeni określonych przez przynależne do nich elementy, odpowiednio $\delta\mathbf{Q}$, \mathbf{W} i \mathbf{w} , gdzie \mathbf{W} jest tensorem skośnie symetrycznym, którego wektorem osiowym jest \mathbf{w} , tj. $\mathbf{W} = \text{ad } \mathbf{w}$. Wirtualne przemieszczenia $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{U}$ dla każdego $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ mogą więc być utożsamiane z uporządkowaną parą pól

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{W}): M \rightarrow E \times (E \wedge E) \quad \text{lub} \quad \mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}): M \rightarrow E \times E. \quad (4.1.7)$$

Dlatego przestrzeń wirtualnych przemieszczeń można zdefiniować następująco:

$$\mathcal{W} \equiv C(M, E \times E) = \{\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{w}: M \rightarrow E \times E\}. \quad (4.1.8)$$

Istnienie wskazanych izomorfizmów pozwala każdej krzywej z $C(M, E \times E)$ przyporządkować jednoznacznie, przy pomocy odwzorowania $\text{ad}: E \rightarrow so(3)$, krzywą w $C(M, E \times (E \wedge E))$, a następnie, przy użyciu funkcji wykładniczej $\exp: E \wedge E \rightarrow SO(3)$, krzywą w $C(M, E \times SO(3))$. Krzywe te reprezentują odcinkowo ciągłą sekwencję położeń powierzchni podstawowej powłoki M w odpowiednich przestrzeniach. Stąd wynika, że każda zależność mechaniki powłok, opartej o kinematyczny model powierzchni Cosserat, będzie miała odpowiednią postać w każdej z wymienionych przestrzeni. Wobec istniejących izomorfizmów, wszystkie te postacie są równoważne.

Powyższy wynik można uzyskać formalnie również w terminach klasycznej analizy wektorowej. Niech zatem $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \in \mathcal{U}$ określa daną konfigurację powłoki. Rozważmy jednoparametrową rodzinę deformacji $\mathbb{R} \ni \eta \mapsto \mathbf{u}(\eta) = (\mathbf{u}(\eta), \mathbf{Q}(\eta)) \in \mathcal{U}$ parametryzowaną przez skalar η :

$$\mathbf{u}(\eta) = \mathbf{u} + \eta\mathbf{v}, \quad \mathbf{Q}(\eta) = \exp(\eta\mathbf{W})\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\exp(\eta\mathbf{W}). \quad (4.1.9)$$

Przy $\eta = 0$ otrzymamy aktualne położenie powłoki określone przemieszczeniem $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}$. Wówczas wirtualne przemieszczenia zdefiniowane są przez

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \frac{d}{d\eta}\mathbf{u}(\mathbf{x}, \eta)|_{\eta=0} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \\ \delta\mathbf{Q}(\mathbf{x}) &= \frac{d}{d\eta}\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \eta)|_{\eta=0} = \mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{W}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

gdzie $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{ad } \mathbf{w}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{ad } \mathbf{w}(\mathbf{x})$. Dla prostoty zapisu, tu i dalej używamy tego samego symbolu \mathbf{Q} dla odwzorowania i jego wartości.

Z (4.1.10)₂ wynika, że wektor styczny $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{U}$ ma dwie równoważne reprezentacje. Dlatego deformacji globalnej $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $t_i(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})t_i^0(\mathbf{x})$ odpowiadają dwie równoważne reprezentacje wirtualne

$$\delta\vec{\mathbf{y}} = \delta\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{v}, \quad \delta t_i = \delta\mathbf{Q}t_i^0 = \mathbf{w} \times t_i = \mathbf{Q}(\mathbf{w} \times t_i^0), \quad (4.1.11)$$

które nazywa się, odpowiednio, *reprezentacją przestrzenną* i *reprezentacją materialną* wirtualnego przemieszczenia \mathbf{w} . W reprezentacji przestrzennej wszystkie

wielkości występujące w mechanice powłok definiuje się przez składowe względem obracającej się bazy $\{\mathbf{t}_i\}$. W reprezentacji materialnej odpowiednie wielkości mają te same składowe, lecz są one odniesione do ustalonej bazy początkowej $\{\mathbf{t}_i^0\}$. Wobec istnienia formalnej transformacji (4.1.11) między tymi reprezentacjami, rozważania można ograniczyć tylko do jednej z nich. Dlatego dalszą dyskusję ograniczymy zasadniczo do reprezentacji przestrzennej. Jednak niektóre rozważania, szczególnie dotyczące składników bezwładnościowych, przedstawimy także w bardziej dla nich właściwej reprezentacji materialnej.

Używając tych samych argumentów, które doprowadziły do określenia translacji i obrotu regularnych części płatów powłoki, można także określić przesunięcie i obrót krawędzi połączeń płatów. Wobec przyjętych tu kinematycznych warunków ciągłości sztywnego połączenia (4.1.3) i (4.1.4), również dla pól wirtualnych otrzymujemy kinematyczne warunki ciągłości⁶

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \left(\mathbf{x}^{(a)}(s) \right) &= \mathbf{v}_\Gamma(s), \\ \mathbf{W} \left(\mathbf{x}^{(a)}(s) \right) &= \mathbf{W}_\Gamma(s) = \delta \mathbf{Q}_\Gamma(s) \mathbf{Q}_\Gamma^T(s) = \text{ad } \mathbf{w}_\Gamma(s), \\ \mathbf{x}^{(a)}(s) &\in \Gamma, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

gdzie $a = 1, 2, \dots, m$ jest liczbą płatów $M^{(a)}$ tworzących wspólną krawędź w punkcie $\mathbf{x}^{(a)}(s)$.

Przyjęte założenia (4.1.3), prowadzące do kinematycznych warunków ciągłości (4.1.4) i (4.1.12), redukują całkę krzywoliniową G_Γ w wyrażeniu (3.4.13) do części ujmującej tylko pracę obciążeń zewnętrznych zadanych wzdłuż Γ . Wynika stąd, że w słabym sformułowaniu zagadnienia dynamiczne warunki ciągłości są spełnione tożsamościowo dla wszystkich wirtualnych przemieszczeń spełniających kinematyczne warunki ciągłości (4.1.12).

Ruch rzeczywisty powłoki, tak jak i ruch wirtualny, jest geometrycznie reprezentowany przez gładką krzywą $\mathbf{u}(t)$ w przestrzeni konfiguracyjnej \mathcal{U} , gdzie $t \in [0, +\infty)$ reprezentuje czas. Wówczas wektor styczny do tej krzywej w punkcie $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ jest wektorem prędkości $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t)$. Zbiór wszystkich wektorów $\mathbf{v}(t)$, tak jak zbiór wirtualnych przemieszczeń w (4.1.8), tworzy przestrzeń $T_{\mathbf{u}(t)}\mathcal{U}$ styczną do \mathcal{U} . Dla grupy obrotów $SO(3)$ występuje tu ciąg izomorfizmów przestrzeni $T_{\mathbf{Q}(t)}SO(3) \simeq so(3) \simeq E$. Na tej podstawie, tak jak w (4.1.10)₂, elementy $T_{\mathbf{Q}(t)}SO(3)$ mogą być reprezentowane dwojako:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \\ \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

⁶Wynik (4.1.12) wskazuje, że w przypadku ogólnej deformacji powłoki wielopłatowej tych warunków nie da się spełnić w ramach modeli powłok operujących tylko dwoma parametrami obrotu.

gdzie tensory skośnie symetryczne $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ i $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$ oraz stowarzyszone z nimi wektory osiowe $\boldsymbol{\omega} = \text{ad}^{-1}\boldsymbol{\Omega}$ i $\boldsymbol{\omega} = \text{ad}^{-1}\boldsymbol{\Omega}$ opisują prędkości obrotowe powłoki, odpowiednio, w reprezentacji przestrzennej i materialnej. Używając zapisu $\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \vec{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{t}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x})$, prędkości te mogą być wyrażone, tak jak w (4.1.11), w następującej postaci:

$$\dot{\vec{\mathbf{y}}} = \dot{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{t}}_i = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{t}_i^0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}_i = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}_i^0). \quad (4.1.14)$$

4.1.4. Wirtualne miary odkształceń

Podobne rozważania geometryczne umożliwiają wyprowadzenie na drodze formalnej postaci uogólnionych odkształceń i ich wirtualnych zmian.

Powłokowe miary wirtualnych odkształceń w reprezentacji przestrzennej mają postać (por. p. 2.4.4)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \otimes \mathbf{t}_0^\beta, \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}_{,\beta} + \vec{\mathbf{y}}_{,\beta} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}_{,\beta} + (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta) \times \mathbf{w}, \\ \delta \mathbf{K}(\mathbf{x}) &= \delta \boldsymbol{\kappa}_\beta \otimes \mathbf{t}_0^\beta, \\ \delta \boldsymbol{\kappa}_\beta(\mathbf{x}) &= \mathbf{w}_{,\beta}, \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

co wynika z definicji powłokowych miar odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \vec{\mathbf{y}}_{,\beta} - \mathbf{t}_\beta$, $\boldsymbol{\kappa}_\beta = \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}_{,\beta}\mathbf{Q}^T)$. W (4.1.15), δ oznacza współobrotowe wariacje, analogiczne do współobrotowych pochodnych względem czasu (1.7.33).

Jeśli rozważymy jednoparametrową rodzinę deformacji (4.1.9), wówczas na mocy definicji

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta &= \mathbf{Q} \left[\frac{d}{d\eta} (\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\eta)) \right]_{|\eta=0} \\ &= \mathbf{Q} [\mathbf{Q}^T \mathbf{v}_{,\beta} - \mathbf{w} \times \mathbf{Q}^T \vec{\mathbf{y}}_{,\beta}] = \mathbf{v}_{,\beta} - \mathbf{w} \times \vec{\mathbf{y}}_{,\beta}, \\ \delta \boldsymbol{\kappa}_\beta &= \mathbf{Q} \left[\frac{d}{d\eta} (\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\kappa}_\beta(\eta)) \right]_{|\eta=0} \\ &= \text{ad}^{-1} \left\{ \mathbf{Q} \left[\frac{d}{d\eta} (\mathbf{Q}^T \text{ad}(\boldsymbol{\kappa}_\beta(\eta)) \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^T \right]_{|\eta=0} \right\} \\ &= \mathbf{Q} [\mathbf{Q}_{,\beta}^T \mathbf{w} + \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_{,\beta} + \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T \mathbf{w}] \\ &= -\mathbf{K}_\beta \mathbf{w} + \mathbf{w}_{,\beta} + \mathbf{K}_\beta \mathbf{w} = \mathbf{w}_{,\beta}. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Definicje (4.1.16) i (4.1.17) są do pewnego stopnia odpowiednikami pochodnej Liego.

4.1.5. Notacja macierzowo–operatorowa

Podczas formułowania powłokowych elementów skończonych wygodnie jest używać notacji macierzowo–operatorowej. W tym celu występujące w reprezentacji przestrzennej wirtualne przemieszczenia $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$, prędkości $\mathbf{v} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$, przyspieszenia $\mathbf{a} = (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{a})$, powierzchniowe obciążenia zewnętrzne $\mathbf{p} = (\mathbf{f}, \mathbf{c})$, obciążenia odcinkowe $\mathbf{p}_\Gamma = (\mathbf{f}_\Gamma, \mathbf{c}_\Gamma)$ na krzywej Γ , obciążenia brzegowe $\mathbf{s}^* = (\mathbf{n}^*, \mathbf{m}^*)$ na ∂M_f i siły bezwładności $\mathbf{b} = (\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{p})$ zapisujemy w formie wektorów kolumnowych

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}, & \mathbf{v} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{Bmatrix}, & \mathbf{a} &= \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix}, & \mathbf{p} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{p}_\Gamma &= \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_\Gamma \\ \mathbf{c}_\Gamma \end{Bmatrix}, & \mathbf{s}^* &= \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^* \\ \mathbf{m}^* \end{Bmatrix}, & \mathbf{b} &= \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{p} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Tutaj i dalej będziemy używali określeń „przemieszczenia”, „obciążenia”, „odkształcenia”, „naprężenia”, itd. w sensie tych wielkości uogólnionych.

Stosując notację (4.1.18), poszczególne składniki gęstości pracy wirtualnej obciążeń zewnętrznych można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \mathbf{p} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{c}, \\ \mathbf{w}_\Gamma^T \mathbf{p}_\Gamma &= \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{f}_\Gamma + \mathbf{w}_\Gamma \cdot \mathbf{c}_\Gamma, \\ \mathbf{w}^T \mathbf{s}^* &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^* + \mathbf{w} \cdot \mathbf{m}^*. \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Podobnie można zapisać gęstość pracy wirtualnej sił bezwładności

$$\mathbf{w}^T \mathbf{b} = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{w} \cdot (\dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{p}). \quad (4.1.20)$$

Miary odkształceń (\mathbf{E}, \mathbf{K}) i naprężeń (\mathbf{N}, \mathbf{M}) są parami uporządkowanymi. Odpowiednie wektory kolumnowe można zdefiniować jako czwórki odpowiednich wektorów miar odkształceń $(\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta)$ i naprężeń $(\mathbf{n}^\beta, \mathbf{m}^\beta)$ w formie

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^1 \\ \mathbf{n}^2 \\ \mathbf{m}^1 \\ \mathbf{m}^2 \end{Bmatrix}. \quad (4.1.21)$$

Wtedy relacjom kinematycznym można nadać postać

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1(\mathbf{u}) \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2(\mathbf{u}) \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}}_1(\mathbf{u}) \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}}_2(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{,1} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q})\mathbf{t}_1^0 \\ \mathbf{u}_{,2} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q})\mathbf{t}_2^0 \\ \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}_{,1}\mathbf{Q}^T) \\ \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}_{,2}\mathbf{Q}^T) \end{Bmatrix}. \quad (4.1.22)$$

Zestawiając wirtualne miary odkształceń i wchodzące do nich komponenty w formie wektorów

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \delta \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \delta \boldsymbol{\kappa}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{,1} + (\mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1) \times \mathbf{w} \\ \mathbf{v}_{,2} + (\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) \times \mathbf{w} \\ \mathbf{w}_{,1} \\ \mathbf{w}_{,2} \end{Bmatrix}, \quad \delta \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{,1} \\ \mathbf{v}_{,2} \\ \mathbf{w}_{,1} \\ \mathbf{w}_{,2} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}, \quad (4.1.23)$$

wirtualne relacje kinematyczne można zapisać jako

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbb{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w}, \quad \delta \mathbf{d} = \mathbb{D} \mathbf{w}, \quad (4.1.24)$$

gdzie operatory macierzowe mają postać

$$\mathbb{B}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}(\cdot)_{,1} & (\mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1) \times (\cdot) \\ \mathbf{1}(\cdot)_{,2} & (\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}(\cdot)_{,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}(\cdot)_{,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (4.1.25)$$

Uwzględniając wprowadzone oznaczenia, wyrażenie na gęstość wewnętrznej pracy wirtualnej w reprezentacji przestrzennej, mierzoną na jednostkę powierzchni podstawowej M , przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{s} &= \mathbf{w}^T \mathbb{B}^T \mathbf{s} = \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} + \delta \mathbf{K} \cdot \mathbf{M} \\ &= \delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \cdot \mathbf{n}^\beta + \delta \boldsymbol{\kappa}_\beta \cdot \mathbf{m}^\beta = \mathbf{n}^\beta \cdot (\mathbf{v}_{,\beta} + \bar{\mathbf{y}}_{,\beta} \times \mathbf{w}) + \mathbf{m}^\beta \cdot \mathbf{w}_{,\beta}. \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Równania konstytutywne powłok sprężystych zapisujemy formalnie jako

$$\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (4.1.27)$$

Kinetyczne równania konstytutywne dla pędu i momentu pędu (2.2.42) na tym etapie rozważań przyjmujemy w postaci uproszczonej

$$\mathbf{p} = \mathbf{J}_1 \mathbf{v}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{J}_3 = \mathbf{J}_4 = \mathbf{0}, \quad (4.1.28)$$

gdzie $\mathbf{J}_1(\mathbf{x})$ i $\mathbf{J}_2(\mathbf{x}, t)$ są polami uśrednionego, niezależnego od czasu tensora masy translacyjnej i uśrednionego tensora momentu bezwładności powłoki w reprezentacji przestrzennej. Zakładamy przy tym, że nie występuje sprzężenie (4.1.28)₃ bezwładnościowych składników translacyjnych i obrotowych, a tensory momentów bezwładności — w reprezentacji przestrzennej $\mathbf{J}_2(\mathbf{x}, t)$ i niezależny od czasu w reprezentacji materialnej $\mathbf{J}_2(\mathbf{x})$ — powiązane są relacją

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{J}_2(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}, t). \quad (4.1.29)$$

W wyniku założenia (4.1.28) i relacji (4.1.29), wektor powierzchniowych sił bezwładności (4.1.18)₇ przyjmuje postać

$$\mathfrak{b} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{v}} \\ \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{J}_1 \ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{J}_2 \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega} \end{array} \right\}, \quad (4.1.30)$$

gdzie $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ są polami przyspieszeń translacyjnych i przyspieszeń obrotowych, określonych przez różniczkowanie po czasie odpowiednich pól prędkości.

4.1.6. Zasada wirtualnych przemieszczeń

Formułowanie zasad wirtualnych i globalnych, ze względu na wykonywane operacje w przekształceniach, wymaga spełnienia odpowiednich warunków ciągłości i różniczkowalności różnych pól powierzchniowych. Sprecyzujmy więc te warunki dla używanych dalej pojęć.

Niech $\mathcal{U}_A \subset \mathcal{U}$ oznacza zbiór wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń (funkcje podstawowe), tj. pól $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$ spełniających *kinematyczne warunki brzegowe*

$$\mathcal{U}_A = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{wzdłuż} \quad \partial M_d\}. \quad (4.1.31)$$

Odpowiednio, przez $\mathcal{W}_A \subset \mathcal{W}$ oznaczymy zbiór wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól wirtualnych przemieszczeń (funkcje testowe), tj. pól $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$ spełniających *jednorodnie kinematyczne warunki brzegowe*

$$\mathcal{W}_A = \{\mathbf{w} \in \mathcal{W} \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{wzdłuż} \quad \partial M_d\}. \quad (4.1.32)$$

Podkreślmy, że pola \mathbf{u} i \mathbf{w} muszą spełniać założone wcześniej warunki regularności narzucone przeprowadzanymi przekształczeniami matematycznymi. Ponadto, zgodnie z założeniami (4.1.4) i (4.1.12), przez \mathbf{u}_Γ i \mathbf{w}_Γ oznaczamy wartości pól \mathbf{u} i \mathbf{w} ograniczonych do krzywej Γ .

Dla powłok sprężystych, przy relacji kinematycznej $\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$ i równaniu konstytutywnym $\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\varepsilon})$ jako warunkami ubocznymi, dla kinematycznie dopuszczalnych pól $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_A$ i $\mathbf{w} \in \mathcal{W}_A$ można zdefiniować funkcjonał

$$G[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] \equiv G_d[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] + G_i[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] - G_e[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}], \quad (4.1.33)$$

gdzie

$$\begin{aligned} G_d[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{w}^T \mathfrak{b} \, da, \\ G_i[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbb{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w})^T \hat{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, da, \\ G_e[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{w}^T \mathfrak{p} \, da + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_\Gamma^T \mathfrak{p}_\Gamma \, dl + \int_{\partial M_f} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^* \, dl + \sum_a \mathbf{w}_a^T \mathfrak{p}_a \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

reprezentują, odpowiednio, wirtualną pracą sił bezwładności, wirtualną pracą wewnętrzną i wirtualną pracą obciążeń zewnętrznych.

Z poprzednich przekształceń wynika, że $u \in \mathcal{U}_A$ jest słabym rozwiązaniem zagadnienia początkowo-brzegowego mechaniki powłok wielopłatowych wtedy i tylko wtedy, gdy

$$G[u, t; w] = 0 \quad (4.1.35)$$

dla wszystkich $w \in \mathcal{W}_A$ i $t \in [0, +\infty)$.

Wyrażenie wariacyjne (4.1.35) przy (4.1.33) i (4.1.34) jest znane jako *zasada wirtualnych przemieszczeń*. Wyraża ona słabą postać zasad zachowania pędu i momentu pędu powłoki wielopłatowej. Nazwy *rozwiązanie słabe* lub *rozwiązanie uogólnione* wynikają z faktu, że klasa ciągłości dopuszczalnych rozwiązań $u \in \mathcal{U}_A$ w sformułowaniu (4.1.35) jest znacznie szersza, niż jest to wymagane w sformułowaniu klasycznym (*sformułowaniu silnym*), wyrażonym przez układ równań i zależności różniczkowych (2.3.4)–(2.3.12). Rzeczywiście, równanie (4.1.35) dostarcza globalnej, całkowitej reprezentacji zagadnienia, zamiast lokalnej reprezentacji różniczkowej, wymagającej spełnienia różniczkowych równań ruchu w każdym punkcie powierzchni podstawowej powłoki.

4.2. Parametryzacja i opis obrotów skończonych

4.2.1. Parametryzacja globalna

Do tej pory rozważano układ równań mechaniki powłok, zawierający pola wektora przesunięć $u(x, t)$ i tensora obrotów $Q(x, t)$ jako podstawowe kinematyczne zmienne niezależne. W ten sposób wyeksponowano geometryczno-różniczkową strukturę teorii powłok bez odwoływania się do szczególnych parametryzacji grupy obrotów $SO(3)$. Jednak wybór określonej parametryzacji grupy obrotów i sposób opisu obrotów skończonych są ważnymi zadaniami w analitycznych i numerycznych rozwiązaniach zagadnienia początkowo-brzegowego mechaniki powłok.

Literatura cytowana w p. 1.1.7 wskazuje, że jest wiele możliwości parametryzacji grupy obrotów, a różne parametryzacje mają zarówno swoje zalety jak i ograniczenia. Za przykładowe parametryzacje obrotów mogą służyć np. rodzina kątów Eulera (lub Brayanta), parametryzacja Cayleya–Kleina, parametryzacja kanoniczna, lub kwaterniony (parametry Eulera). Należy jednak zauważyć, że w zagadnieniach mechaniki powłok żadna z tych parametryzacji nie wykazuje istotnych zalet w stosunku do innych⁷.

Formalnie, parametryzację obrotów można zdefiniować lokalnie jako wzajemnie jednoznaczne i różniczkowalne odwzorowanie grupy obrotów $SO(3)$ w pod-

⁷Dyskusję problemu parametryzacji w mechanice powłok można znaleźć np. w pracy BETSCH, MENZEL i STEIN [1998].

zbiór otwarty przestrzeni liczb rzeczywistych \mathbb{R}^N :

$$SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\vartheta_p), \quad (4.2.1)$$

gdzie N liczb rzeczywistych (ϑ_p) nazywa się *parametrami obrotu*, zaś liczbę N — *wymiarem parametryzacji*. W ocenie przydatności wybranej parametryzacji $SO(3)$ należy zwrócić uwagę między innymi na: 1) konieczną liczbę parametrów oraz liczbę i typy możliwych osobliwości takiej reprezentacji, 2) wynikającą z przyjętej parametryzacji złożoność układów równań, 3) skłonność do generowania błędów i wrażliwość na błędy numeryczne w implementacji komputerowej równań powłokowych, 4) zalety lub trudności w formułowaniu kinematycznych warunków brzegowych.

Nie jest możliwa globalna, wolna od osobliwości reprezentacja obrotu skończonego przez mniej niż pięć parametrów skalarnych (jest to wynik Heinza Hopfa z 1940 r., zob. STUELPNAGEL [1964]). Zatem co najmniej pięciowymiarowa parametryzacja musi być użyta na poziomie globalnej akumulacji deformacji obrotowej. Z drugiej strony, na poziomie budowy lokalnych równań zagadnienia wystarczają tylko trzy niezależne parametry, określające lokalnie obrót. Każda reprezentacja $SO(3)$, zawierająca więcej niż trzy parametry obrotu, prowadzić będzie do parametrów zależnych, które muszą spełniać dodatkowe ograniczenia. W wyniku formalnego wprowadzenia parametrów zależnych musi nastąpić rozszerzenie układu równań pola o równania więzów wybranej parametryzacji, z odpowiednimi mnożnikami Lagrange'a jako dodatkowymi polami niewiadomymi.

Z numerycznego punktu widzenia, lokalna parametryzacja więcej niż trójwymiarowa jest bardziej złożona w realizacji, gdyż narusza ona strukturę całego układu równań dodatkowymi równaniami więzów. Ale przez zastosowanie odpowiedniego opisu przyrostowego osobliwości mogą być ominięte i takie skomplikowane podejście staje się całkowicie zbytecznym. Dlatego na poziomie formułowania równań przyrostowych zagadnienia będziemy używali lokalnie tylko trójwymiarowej parametryzacji.

Jako szczególnie wygodnych parametrów używać będziemy trzech składowych wektora obrotu skończonego. Różne uogólnione wektory obrotu skończonego mogą być definiowane na wiele sposobów (por. p. 1.7.8), ale wszystkie ich definicje mają u podstaw tę samą koncepcję. W rezultacie, różne definicje wektorów obrotu skończonego można otrzymać jako szczególne przypadki konstrukcji pokazanej w (1.7.70) i (1.7.71).

4.2.2. Parametryzacja lokalna

Lokalnie wolna od osobliwości parametryzacja obrotów jest faktycznie wyborem układu współrzędnych na grupie obrotów $SO(3)$.

Współrzędne lokalne tensora obrotu $\mathbf{Q} \in SO(3)$ wynikają z faktu, że $SO(3)$ jest trójwymiarową grupą Liego, ale jednocześnie i różniczkową.

Zatem dla każdego dowolnie ustalonego $\mathbf{Q} \in SO(3)$ istnieje lokalnie otwarte otoczenie $U \subset SO(3)$ i dyfeomorfizm \mathbf{Q} na otwarty zbiór V w \mathbb{R}^3 takie, że

$$\mathbf{Q}: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{Q} \xrightarrow{Q} (\vartheta_p, p = 1, 2, 3). \quad (4.2.2)$$

W zwartej notacji można to zapisać jako

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta}), \quad \boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_p) = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3). \quad (4.2.3)$$

Trójkę liczb rzeczywistych (ϑ_p) nazywamy *współrzędnymi lokalnymi* tensora \mathbf{Q} w mapie (U, \mathbf{Q}) .

W parametryzacji lokalnej (4.2.3) wirtualny obrót można przedstawić w postaci

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta}) = \delta \mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta})^T = \sum_{p=1}^3 \mathbf{W}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) \delta \vartheta_p, \quad (4.2.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) &= \mathbf{Q}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta})^T, \\ \mathbf{Q}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) &= \frac{\partial \mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \vartheta_p}, \quad p = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Z zależności (4.2.4) wynika, że tensory $\mathbf{W}^{(p)}$, tak jak tensor \mathbf{W} , są skośnie symetryczne i można je przedstawić przez wektory osiowe $\mathbf{w}^{(p)}$. W ten sposób otrzymujemy

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\vartheta}) = \text{ad}^{-1} \mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta}) = \sum_{p=1}^3 \mathbf{w}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) \delta \vartheta_p, \quad \mathbf{w}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) = \text{ad}^{-1} \mathbf{W}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}). \quad (4.2.6)$$

Ostatecznie zależności (4.2.6)₁ można nadać postać macierzową

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\vartheta}) = \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\vartheta}) \delta \boldsymbol{\vartheta}, \quad \delta \boldsymbol{\vartheta} = \left\{ \begin{array}{c} \delta \vartheta_1 \\ \delta \vartheta_2 \\ \delta \vartheta_2 \end{array} \right\}. \quad (4.2.7)$$

Prędkość obrotową, analogicznie do (4.2.5)–(4.2.7), otrzymujemy z definicji

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\vartheta}) &= \dot{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta})^T = \sum_{p=1}^3 \mathbf{W}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) \dot{\vartheta}_p, \\ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\vartheta}) &= \text{ad}^{-1} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\vartheta}) = \sum_{p=1}^3 \mathbf{w}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) \dot{\vartheta}_p, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

co można zapisać w postaci macierzowej

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\vartheta}) = \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\vartheta})\dot{\boldsymbol{\vartheta}}, \quad \dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.2.9)$$

Uwzględniając (4.2.9), z definicji otrzymujemy macierzową zależność dla wektora przyspieszenia obrotowego, wyrażoną przez pochodne czasowe parametrów obrotu

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\boldsymbol{\vartheta}) &= \dot{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\vartheta}) = \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\vartheta})\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\vartheta})\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\vartheta})\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + \left(\sum_{p=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \vartheta_p} \dot{\vartheta}_p \right) \dot{\boldsymbol{\vartheta}}, \\ \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} &= \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

4.2.3. Zależności kinematyczne w funkcji parametrów obrotu

Powyższe podejście można stosować nie tylko do parametryzacji ustalonego tensora obrotu \mathbf{Q} , lecz również do parametryzacji pola tensorowego $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$. W takim przypadku zależność (4.2.3) należy rozumieć jako funkcję złożoną

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{x})). \quad (4.2.11)$$

Jeśli powierzchnia podstawowa powłoki M jest lokalnie określona w postaci parametrycznej przez współrzędne powierzchniowe $\{\xi^\beta\}$, $\beta = 1, 2$, wówczas pochodne (4.2.11) po współrzędnych dane są przez

$$\mathbf{Q}_{,\beta}(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{\partial \mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \xi^\beta} = \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \vartheta_p} \frac{\partial \vartheta_p}{\partial \xi^\beta} = \sum_{p=1}^3 \mathbf{Q}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) \vartheta_{p,\beta}. \quad (4.2.12)$$

Skośnie symetryczny tensor zginania w reprezentacji przestrzennej może być wyrażony jako

$$\mathbf{K}_\beta(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{Q}_{,\beta}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\vartheta}) = \sum_{p=1}^3 \mathbf{W}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) \vartheta_{p,\beta}. \quad (4.2.13)$$

Dlatego zależności kinematyczne, wyrażone przez pola przesunięć \mathbf{u} i parametrów obrotu $\boldsymbol{\vartheta}$ przyjmują postać

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{u}_{,\beta} - (\mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta}) - \mathbf{1})\mathbf{t}_\beta^0, \quad \boldsymbol{\kappa}_\beta(\boldsymbol{\vartheta}) = \sum_{p=1}^3 \mathbf{w}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) \vartheta_{p,\beta}. \quad (4.2.14)$$

Łącząc wynik parametryzacji (4.2.6) i (4.2.7) z definicjami wielkości wirtualnych odkształceń (4.1.16) i (4.1.17), otrzymujemy następujące zależności dla wirtualnych miar odkształceń, wyrażone przez wirtualne pola przesunięć \mathbf{v} i parametrów obrotu $\delta\boldsymbol{\vartheta}$:

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_\beta(\boldsymbol{\vartheta}, \delta\boldsymbol{\vartheta}) &= \mathbf{v}_{,\beta} + (\varepsilon_\beta(\boldsymbol{\vartheta}) + \mathbf{t}_\beta^0) \times (\boldsymbol{\Xi} \delta\boldsymbol{\vartheta}), \\ \delta\kappa_\beta(\boldsymbol{\vartheta}, \delta\boldsymbol{\vartheta}) &= \sum_{p=1}^3 \mathbf{w}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}) \delta\vartheta_{p,\beta}.\end{aligned}\quad (4.2.15)$$

4.2.4. Wektory obrotu skończonego

Z wielu możliwych parametryzacji grupy obrotów, szczególnie przydatna w zagadnieniach mechaniki powłok jest reprezentacja \mathbf{Q} przez tzw. wektor obrotu skończonego, por. p. 1.1.7. Tę parametryzację definiuje się wykorzystując własność funkcji wykładniczej $\exp: L(E) \rightarrow L(E)$, danej absolutnie zbieżnym szeregiem potęgowym

$$\exp \mathbf{T} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \mathbf{T}^n = \mathbf{1} + \mathbf{T} + \frac{1}{2} \mathbf{T}^2 + \dots, \quad \forall \mathbf{T} \in L(E). \quad (4.2.16)$$

Niech $\boldsymbol{\psi}$ będzie dowolnym wektorem i niech $\boldsymbol{\Psi} = \text{ad } \boldsymbol{\psi}$ będzie stowarzyszonym tensorem skośnie symetrycznym o wektorze osiowym $\boldsymbol{\psi}$. Wprowadzając do (4.2.16) tensor $\boldsymbol{\Psi} \in so(3) \subset L(E)$ w miejsce \mathbf{T} , na podstawie własności funkcji wykładniczej dla tensorów skośnie symetrycznych otrzymuje się zawsze $\exp \boldsymbol{\Psi} \in SO(3)$. Zatem

$$\mathbf{Q} = \exp \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{1} + \frac{\sin \|\boldsymbol{\psi}\|}{\|\boldsymbol{\psi}\|} \boldsymbol{\Psi} + \frac{1 - \cos \|\boldsymbol{\psi}\|}{\|\boldsymbol{\psi}\|^2} \boldsymbol{\Psi}^2 \quad (4.2.17)$$

jest z definicji jednoznacznie określonym tensorem właściwego obrotu. Zamknięta postać wzoru (4.2.17) jest wynikiem zastosowania twierdzenia Cayleya–Hamiltona do definicji funkcji wykładniczej (4.2.16) dla skośnie symetrycznego tensora $\boldsymbol{\Psi} \in so(3)$.

Zależność (4.2.17) pozwala każdy tensor obrotu z otoczenia dowolnego tensora obrotu $\mathbf{O} \in SO(3)$ zapisać na jeden z dwóch sposobów: $\mathbf{Q}\mathbf{O} = (\exp \boldsymbol{\Psi})\mathbf{O}$ lub $\mathbf{O}\mathbf{Q} = \mathbf{O}(\exp \boldsymbol{\Phi})$. Tutaj $\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Phi} \in so(3)$ są tensorami skośnie symetrycznymi, których wektorami osiowymi są $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi} \in E$. Zatem w algebrze $so(3) (\simeq E \simeq \mathbb{R}^3)$ istnieje pewne otwarte otoczenie $U (\simeq V \subset \mathbb{R}^3)$ tensorów $\boldsymbol{\Psi} \in U \subset so(3)$ lub $\boldsymbol{\Phi} \in U \subset so(3)$, a w grupie $SO(3)$ istnieje pewne otwarte otoczenie U tensora $\mathbf{O} \in U \subset SO(3)$ takie, że funkcja wykładnicza jest dyfeomorfizmem U na U . W ten sposób odwzorowanie wykładnicze (4.2.17) określa *mapę* w otoczeniu \mathbf{O} . Składowe $\psi_i, \varphi_i \in \mathbb{R}^3$ wektorów $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi} \in E$ nazywa się zwykle *współrzędnymi kanonicznymi*.

Z geometrycznego punktu widzenia, tensor obrotu $\mathbf{Q}: E \rightarrow E$ jest zachowującym orientację odwzorowaniem izometrycznym przestrzeni euklidesowej w siebie, przy zachowaniu jednego ustalonego punktu. Z twierdzenia Eulera wiadomo, że każdy obrót w E jest jednoznacznie określony przez podanie osi obrotu i kąta obrotu. Dla tensora obrotu \mathbf{Q} oś obrotu jest określona przez wektor jednostkowy \mathbf{e} , będący wektorem własnym tensora \mathbf{Q} stowarzyszonym z rzeczywistą wartością własną równą $+1$. Stąd \mathbf{e} wynika z rozwiązania problemu własnego (1.7.56). Z drugiej strony, uwzględniając definicję funkcji wykładniczej (4.2.17), tensor \mathbf{Q} wyrażony przez \mathbf{e} i ψ przyjmuje postać (1.7.59). Zależność odwrotną (1.7.61), wyrażającą \mathbf{e} i ψ przez \mathbf{Q} , można wyznaczyć rozwiązując układ równań (1.7.60), lub wprost z definicji funkcji logarytmicznej, która ma następującą ogólną postać:

$$\ln \mathbf{T} = \ln(\mathbf{1} + (\mathbf{T} - \mathbf{1})) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\mathbf{T} - \mathbf{1})^n}{n}. \quad (4.2.18)$$

Dla tensora obrotu, tj. $\mathbf{T} \equiv \mathbf{Q} \in SO(3)$, $\ln \mathbf{Q} \in so(3)$ daje na podstawie równania Lagrange'a–Sylvester'a postać (1.7.60) (por. np. ORTIZ, RADOVITZKY i REPETTO [2001]).

Zgodnie z interpretacją geometryczną, tensor \mathbf{Q} opisuje obrót o kąt ψ wokół wektora jednostkowego \mathbf{e} , przy czym $\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{e}$. Niech $\phi = \phi(\psi)$ będzie dowolną monotonicznie rosnącą funkcją kąta ψ taką, że $\phi(0) = 0$. Wówczas uogólniony wektor obrotu skończonego i stowarzyszony z nim tensor skośnie symetryczny są określone przez (1.7.62) i (1.7.63). Założenie o monotonicznym wzroście funkcji $\phi(\psi)$ gwarantuje, że w określonym przedziale istnieje jednoznaczna funkcja odwrotna $\psi(\phi)$ i tensor obrotu dany przez (4.2.17) może być traktowany jako funkcja uogólnionego wektora obrotu skończonego $\boldsymbol{\phi}$. Stąd trzy składowe wektora $\boldsymbol{\phi}$ stanowią lokalnie nieosobliwą parametryzację grupy obrotów.

4.2.5. Składanie obrotów

Niech parametryzowana przez $\eta \in \mathbb{R}$ krzywa $\mathbf{Q}_\eta = \mathbf{Q}(\eta)$, $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{1}$ na grupie obrotów $SO(3)$ odwzorowuje pewną ustaloną bazę ortonormalną $\{\mathbf{t}_i^0\}$ w bazę ortonormalną $\{\mathbf{t}_i(\eta)\}$:

$$\mathbf{t}_i(\eta) = \mathbf{Q}(\eta) \mathbf{t}_i^0, \quad \mathbf{Q}_\eta = \mathbf{Q}(\eta) = \mathbf{t}_i(\eta) \otimes \mathbf{t}_i^0, \quad \mathbf{t}_i(0) = \mathbf{t}_i^0, \quad (4.2.19) \\ i = 1, 2, 3.$$

W kontekście mechaniki powłok, parametr η można interpretować jako czas $t \in [0, +\infty)$ w przypadku dynamiki, lub jako parametr związany z obciążeniem w przypadku statyki i stateczności. Wówczas zależności (4.2.19) opisują pole tensorowe $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \eta)$ energetycznie uśrednionego obrotu przekroju poprzecznego powłoki. Baza $\{\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x})\}$ jest zatem polem najeżenia początkowego, zaś obracająca się wraz z deformacją powłoki baza $\{\mathbf{t}_i(\mathbf{x}, \eta)\}$ jest funkcją ewolucji tego

najeżenia. Dla uproszczenia zapisu, o ile nie będzie to powodować nieporozumień, dalej w tym rozdziale będziemy pomijali argumenty funkcji związane z ewolucją η i położeniem \mathbf{x} .

Rozważmy pewien przyrost obrotu, opisujący ewolucję bazy aktualnej $\{t_i\}$ do pewnej uaktualnionej bazy $\{t_i^\Delta\}$. Możliwe są tu dwa sposoby opisu tego przyrostu obrotu:

Lewa transformacja. W tym przypadku obrót Q^Δ bazy początkowej $\{t_i^0\}$ do uaktualnionej $\{t_i^\Delta\}$ jest określony przez lewostronne nałożenie przyrostu tensora obrotu $\Delta Q^L \in SO(3)$ na aktualny tensor obrotu Q określający $\{t_i\}$:

$$Q^\Delta = \Delta Q^L Q, \quad t_i^\Delta = \Delta Q^L t_i = \Delta Q^L Q t_i^0. \quad (4.2.20)$$

Taki przyrost obrotu ΔQ^L , nazywany *reprezentacją przestrzenną*, opisuje bezpośrednio obrót bazy aktualnej $\{t_i\}$ do położenia końcowego $\{t_i^\Delta\}$.

Prawa transformacja. W tym przypadku obrót bazy początkowej $\{t_i^0\}$ do położenia $\{t_i^\Delta\}$ określony jest przez prawostronne nałożenie przyrostu tensora obrotu $\Delta Q^P \in SO(3)$ na aktualny tensor obrotu Q :

$$Q^\Delta = Q \Delta Q^P, \quad t_i^\Delta = Q \Delta Q^P t_i^0. \quad (4.2.21)$$

Tym razem przyrost ΔQ^P , określane jako *reprezentacja materialna*, obraca bezpośrednio bazę początkową $\{t_i^0\}$.

Niech θ i φ oznaczają wektory obrotu skończonego, odpowiadające przyrostom obrotu w reprezentacji przestrzennej ΔQ^L i reprezentacji materialnej ΔQ^P , wyrażone przez funkcje wykładnicze

$$\Delta Q^L = \exp(\text{ad } \theta), \quad \Delta Q^P = \exp(\text{ad } \varphi), \quad (4.2.22)$$

gdzie wektory osiowe $\theta, \varphi \in E$ i stowarzyszone z nimi tensory skośnie symetryczne $\text{ad } \theta, \text{ad } \varphi \in so(3)$ powiązane są operacją $\text{ad}: E \rightarrow so(3)$. Porównując stronami (4.2.20)₁ i (4.2.21)₁, z zależności (4.2.22) otrzymujemy wzajemne powiązanie wektorów obrotu w reprezentacji przestrzennej θ i materialnej φ :

$$\begin{aligned} Q^\Delta = \exp(\text{ad } \theta) Q = Q \exp(\text{ad } \varphi) &\Rightarrow \text{ad } \theta Q = Q \text{ad } \varphi \\ &\Rightarrow \text{ad } \theta = Q \text{ad } \varphi Q^T \Rightarrow \theta = Q \varphi. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

4.2.6. Zebrane zależności związane z opisem obrotu

Zlinearyzowany przyrost obrotu w punkcie Q oblicza się z definicji jego pochodnej kierunkowej.

W tym celu rozważmy krzywą na grupie obrotów $\mathbb{R} \ni \eta \mapsto Q(\eta) \in SO(3)$ parametryzowaną przez η i przechodzącą przez punkt regularny $Q = Q(0)$. Zgodnie

z (4.2.23)₁, lokalnie regularna krzywa $\mathbf{Q}(\eta)$ ma dwie reprezentacje, przestrzenną i materialną:

$$\mathbf{Q}(\eta) = [\exp(\text{ad } \eta \boldsymbol{\theta})] \mathbf{Q} = \mathbf{Q}[\exp(\text{ad } \eta \boldsymbol{\varphi})]. \quad (4.2.24)$$

Pochodna kierunkowa $\mathbf{Q}(\eta)$ dostarcza więc dwóch równoważnych postaci zlinearyzowanego obrotu

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Q}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\theta}] &= \left(\frac{d}{d\eta} [\exp(\text{ad } \eta \boldsymbol{\theta})] \mathbf{Q} \right)_{|\eta=0} = (\text{ad } \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Q}, \\ \delta \mathbf{Q}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\varphi}] &= \left(\frac{d}{d\eta} \mathbf{Q}[\exp(\text{ad } \eta \boldsymbol{\varphi})] \right)_{|\eta=0} = \mathbf{Q}(\text{ad } \boldsymbol{\varphi}), \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

odpowiednio w reprezentacji przestrzennej i materialnej, które polegają na lewo- lub prawostronnym nałożeniu tensora skośnie symetrycznego na tensor obrotu aktualnego \mathbf{Q} . Skośnie symetryczne tensory $(\text{ad } \boldsymbol{\theta}), (\text{ad } \boldsymbol{\varphi}) \in \mathfrak{so}(3)$ w (4.2.25) reprezentują nieskończenie małe, odpowiednio przestrzenne i materialne obroty wokół odpowiedniego wektora własnego $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi} \in E$, sprzężonego z pojedynczą zerową wartością własną

$$(\text{ad } \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad (\text{ad } \boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \quad (4.2.26)$$

co wynika z rozwiązań odpowiednich problemów własnych $(\text{ad } \boldsymbol{\theta}) \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ i $(\text{ad } \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.

Wariacja tensora obrotu, wyrażona przez wariacje przestrzennych lub materialnych wektorów obrotu, przyjmuje na podstawie (4.2.25) postać

$$\delta \mathbf{Q} = (\text{ad } \delta \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\text{ad } \delta \boldsymbol{\varphi}) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{ad } \delta \boldsymbol{\theta} &= \delta \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T, \\ \text{ad } \delta \boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Z (4.2.27)₁ wynika powiązanie wariacji przestrzennych i materialnych skośnie symetrycznych tensorów małego obrotu

$$\text{ad } \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{Q}(\text{ad } \delta \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{Q}^T, \quad \text{ad } \delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Q}^T(\text{ad } \delta \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Q}, \quad (4.2.28)$$

oraz wariacji odpowiednich wektorów obrotu

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{Q} \delta \boldsymbol{\varphi}, \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Q}^T \delta \boldsymbol{\theta}. \quad (4.2.29)$$

Definicja prędkości zmiany tensora obrotu, wyrażona przez przestrzenne lub materialne tensory prędkości obrotowej, ma postać podobną do (4.2.27)

$$\dot{\mathbf{Q}} \equiv \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \text{ad } \boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T, \\ \boldsymbol{\Omega} &= \text{ad } \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}, \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

gdzie $\mathbf{\Omega}$ i $\mathbf{\Omega}$ są skośnie symetrycznymi tensorami prędkości obrotowej, odpowiednio w reprezentacji przestrzennej i materialnej. Odpowiadające im wektory osiowe $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\omega}$ są, odpowiednio, wektorami przestrzennej i materialnej prędkości obrotowej. Definicja (4.2.30)₁ ustala następujące zależności wiążące przestrzenne i materialne tensory i wektory prędkości obrotowej:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega} &= \mathbf{Q} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q}^T, & \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{\Omega} &= \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q}, & \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\quad (4.2.31)$$

Zlinearyzowany tensor prędkości obrotowej w reprezentacji przestrzennej wynika z definicji pochodnej kierunkowej

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{\Omega}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\theta}] &= \frac{d}{d\eta} (\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T) |_{\eta=0} = \text{ad } \dot{\boldsymbol{\theta}} + (\text{ad } \boldsymbol{\theta}) \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega} (\text{ad } \boldsymbol{\theta}) \\ &= \text{ad } \dot{\boldsymbol{\theta}} - [\mathbf{\Omega}, \text{ad } \boldsymbol{\theta}].\end{aligned}\quad (4.2.32)$$

Zlinearyzowany wektor prędkości obrotowej w reprezentacji przestrzennej odpowiadający (4.2.32) wynosi

$$\delta \boldsymbol{\omega}[\mathbf{Q}; \boldsymbol{\theta}] = \text{ad}^{-1}(\delta \mathbf{\Omega}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\theta}]) = \dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}. \quad (4.2.33)$$

Analogicznie obliczamy kolejne zlinearyzowane tensory skośnie symetryczne i ich wektory osiowe

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{\Omega}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\varphi}] &= -(\text{ad } \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega} (\text{ad } \boldsymbol{\varphi}) + \text{ad } \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \text{ad } \dot{\boldsymbol{\varphi}} + [\mathbf{\Omega}, \text{ad } \boldsymbol{\varphi}], \\ \delta \boldsymbol{\omega}[\mathbf{Q}; \boldsymbol{\varphi}] &= \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi},\end{aligned}\quad (4.2.34)$$

$$\delta \mathbf{\Omega}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\varphi}] = \mathbf{Q} (\text{ad } \dot{\boldsymbol{\varphi}}) \mathbf{Q}^T, \quad \delta \boldsymbol{\omega}[\mathbf{Q}; \boldsymbol{\varphi}] = \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (4.2.35)$$

$$\delta \mathbf{\Omega}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\theta}] = \mathbf{Q}^T (\text{ad } \dot{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{Q}, \quad \delta \boldsymbol{\omega}[\mathbf{Q}; \boldsymbol{\theta}] = \mathbf{Q}^T \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.2.36)$$

Wariacje wektorów prędkości obrotowych odpowiadające (4.2.33) i (4.2.34)₂–(4.2.36)₂ wynoszą

$$\delta \boldsymbol{\omega} = \delta \dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{Q} \delta \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \delta \boldsymbol{\omega} = \delta \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Q}^T \delta \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.2.37)$$

Skośnie symetryczne tensory, przestrzenne i materialne, przyspieszenia obrotowego definiujemy przez różniczkowanie po czasie odpowiednich tensorów prędkości obrotowych

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \text{ad } \mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{\Omega}} \equiv \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T) = \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T - \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}, \\ \mathbf{A} &= \text{ad } \mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{\Omega}} \equiv \frac{d}{dt} (\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}) = \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{Q}} - \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}.\end{aligned}\quad (4.2.38)$$

Z definicji (4.2.38) wynikają następujące zależności wiążące przestrzenne i materialne tensory i wektory przyspieszeń obrotowych:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{a} = \mathbf{Q}\mathbf{a}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{Q}^T\mathbf{a}. \quad (4.2.39)$$

Zlinearyzowane wielkości przestrzenne i materialne przyspieszenia obrotowego obliczamy zgodnie z procedurą zastosowaną do prędkości

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{A}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\theta}] &= \delta\dot{\boldsymbol{\Omega}}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\theta}] = \frac{d}{d\eta} \left(\ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{Q}}^T \right) \Big|_{\eta=0} \\ &= \text{ad } \ddot{\boldsymbol{\theta}} - [\boldsymbol{\Omega}, (\text{ad } \dot{\boldsymbol{\theta}})] - [(\text{ad } \mathbf{a}), (\text{ad } \boldsymbol{\theta})], \\ \delta\mathbf{a}[\mathbf{Q}; \boldsymbol{\theta}] &= \text{ad}^{-1}(\delta\mathbf{A}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\theta}]) = \ddot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{a} \times \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{A}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\varphi}] &= \delta\dot{\boldsymbol{\Omega}}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\varphi}] = \frac{d}{d\eta} \left(\dot{\mathbf{Q}}^T\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}^T\ddot{\mathbf{Q}} \right) \Big|_{\eta=0} \\ &= \text{ad } \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + [\boldsymbol{\Omega}, (\text{ad } \dot{\boldsymbol{\varphi}})] + [(\text{ad } \mathbf{a}), (\text{ad } \boldsymbol{\varphi})], \\ \delta\mathbf{a}[\mathbf{Q}; \boldsymbol{\varphi}] &= \text{ad}^{-1}(\delta\mathbf{A}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\varphi}]) = \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}, \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{A}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\varphi}] &= \mathbf{Q} \{ \text{ad } \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + [\boldsymbol{\Omega}, \text{ad } \dot{\boldsymbol{\varphi}}] \} \mathbf{Q}^T, \\ \delta\mathbf{a}[\mathbf{Q}; \boldsymbol{\varphi}] &= \mathbf{Q}(\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{Q}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{A}[\mathbf{Q}; \text{ad } \boldsymbol{\theta}] &= \mathbf{Q}^T \{ \text{ad } \ddot{\boldsymbol{\theta}} - [\boldsymbol{\Omega}, (\text{ad } \dot{\boldsymbol{\theta}})] \} \mathbf{Q}, \\ \delta\mathbf{a}[\mathbf{Q}; \boldsymbol{\theta}] &= \mathbf{Q}^T(\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{Q}^T\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}^T\dot{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Wariacje wektorów przyspieszeń obrotowych odpowiadające (4.2.41)₂–(4.2.43)₂ wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{a} &= \delta\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\omega} \times \delta\dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{a} \times \delta\boldsymbol{\theta} \\ &= \mathbf{Q}(\delta\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta\dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{Q}\delta\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}\delta\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \\ \delta\mathbf{a} &= \delta\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{a} \times \delta\boldsymbol{\varphi} \\ &= \mathbf{Q}^T(\delta\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\omega} \times \delta\dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{Q}^T\delta\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}^T\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

Szczegółowe wyprowadzenie powyższych zależności podano np. w LUBOWIECKA [2001].

Wszystkie wyprowadzone wyżej obiekty, przedstawiające wariacje różnych pól, leżą w przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{Q}}SO(3)$ do grupy obrotów $SO(3)$ w punkcie odpowiadającym aktualnemu obrotowi \mathbf{Q} . Wyniki obliczeń nie zależą od wyboru parametryzacji tensora \mathbf{Q} . Przyjęcie parametryzacji, np. w postaci (4.2.3), w wyniku rzutowania tych różnych wariacji na przestrzeń zmiennych parametryzujących $SO(3)$, prowadzi do wyrażenia tych wariacji przez wariacje parametrów grupy obrotów typu (4.2.7) i (4.2.15).

4.3. Aproksymacja skończenie wymiarowa problemu ciągłego

4.3.1. Zadanie aproksymacji skończenie wymiarowej

Zasadnicze zadanie aproksymacji skończenie wymiarowej polega na zastąpieniu układu ciągłego nieskończenie wymiarowego (*Problem C*) odpowiednim układem dyskretnym (*Problem D*) o skończonej liczbie stopni swobody. Rozpatrując lokalnie w punkcie regularnym⁸ $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ funkcjonal $G: T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, reprezentujący zasadę wirtualnych przemieszczeń, sformułujmy w przemieszczeniach następujące dwa zadania, oddające istotę aproksymacji skończenie wymiarowej.

Problem C. *Znaleźć kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczeń $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_A \subset \mathcal{U}$ takie, że $G[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] = 0$ dla wszystkich wirtualnych przemieszczeń $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{U}$, spełniających warunek $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ wzdłuż ∂M_d , i dla każdego $t \in [0, +\infty)$.*

Tutaj \mathcal{U} jest przestrzenią konfiguracyjną rozwiązań zagadnienia mechaniki powłok, zaś $T\mathcal{U}$ jest wiązką styczną do \mathcal{U} z obszaru regularnego powierzchni podstawowej powłoki. Elementami $T\mathcal{U}$ są pary uporządkowane (\mathbf{u}, \mathbf{w}) .

Niech $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ będzie pewną skończenie wymiarową podprzestrzenią (dokładniej: skończenie wymiarową podrozmiernością) przestrzeni konfiguracyjnej \mathcal{U} . Przez $T\mathcal{U}_h \subset T\mathcal{U}$ oznaczymy wiązkę styczną do \mathcal{U}_h z obszaru regularnego powierzchni odniesienia powłoki. Analogicznie jak w przypadku nieskończenie wymiarowym, elementy wiązki stycznej $T\mathcal{U}_h$ traktujemy jako pary uporządkowane $(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)$, gdzie $\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h$ i $\mathbf{w}_h \in T_{\mathbf{u}_h}\mathcal{U}_h$. Tutaj h jest parametrem charakterystycznym aproksymacji takim, że $\mathcal{U}_h \rightarrow \mathcal{U}$ w sensie przyjętej definicji przy $h \rightarrow \infty$.

Aproksymację skończenie wymiarową (*Problem D*) *Problemu C* formułuje się następująco:

Problem D. *Znaleźć kinematycznie dopuszczalne $\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_{Ah} \subset \mathcal{U}_h$ takie, że $G[\mathbf{u}_h, t; \mathbf{w}_h] = 0$ dla wszystkich wirtualnych przemieszczeń $\mathbf{w}_h \in T_{\mathbf{u}_h}\mathcal{U}_h$, spełniających warunek $\mathbf{w}_h = \mathbf{0}$ na brzegu ∂M_{d_h} , i dla każdego $t \in [0, +\infty)$.*

Rozwiązanie $\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h$ *Problemu D* jest aproksymacją zbieżną do rozwiązania $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ *Problemu C*, jeśli $\mathbf{u}_h \rightarrow \mathbf{u}$ przy $h \rightarrow \infty$.

W przypadku funkcjonałów zdefiniowanych na przestrzeniach Banacha znanych jest wiele metod aproksymacji skończenie wymiarowej, np. metody Bubnowa–Galerkina, Rayleigha–Ritza, najmniejszych kwadratów lub elementów skończonych, por. np. PRENTER [1975]. Rozszerzenie wielu pojęć standardowej aproksymacji na rozważany w tej książce przypadek aproksymacji na grupie Liego wydaje się bardzo naturalne. Jednak osiągnięcie matematycznej precyzji, porównywalnej z tą istniejącą w przypadku aproksymacji na przestrzeniach Banacha, nie jest zadaniem prostym.

⁸Problem jest bardzo złożony, zarówno od strony dziedziny — powierzchnia geometryczna, jak i jej przestrzeni odwzorowań — przestrzeń konfiguracyjna. W tym kontekście zagadnienie dyskutujemy tylko lokalnie.

Do ważnych problemów aproksymacji MES w ramach proponowanej teorii powłok można zaliczyć następujące:

- A. Definiowanie zbieżności w przestrzeni konfiguracyjnej $\mathcal{U} \equiv C(M, G)$. Ponieważ $G = E \times SO(3)$ jest skończenie wymiarową grupą Liego, można G wyposażyć w metrykę riemannowską. Umożliwia to wprowadzenie pewnej ogólnej metryki na przestrzeni odwzorowań $C(M, G)$, pozwalającej na definiowanie zbieżności w sensie tej metryki. W analizie numerycznej wykorzystanie tego typu metryki na $C(M, G)$ okazuje się jednak bardzo trudne.
- B. Aproksymacja dziedziny problemu. Dziedzina problemu — powierzchnia podstawowa powłoki M — jest zbiorem złożonym z powierzchni geometrycznych⁹ zanurzonych w \mathcal{E} , a nie obszarem w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Pojawia się tu konieczność aproksymacji nie tylko pól zmiennych $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in T\mathcal{U}$, lecz także samej powierzchni M i jej brzegu ∂M . Problem ten jest dobrze znany z zastosowań MES w mechanice powłok.
- C. Lokalna reprezentacja obrotowych stopni swobody. Aproksymacja na grupie $G = E \times SO(3)$ wymaga nietrywialnej konstrukcji atlasu (zbioru map lokalnych). Występuje konieczność wyboru lokalnej (w ramach elementu) parametryzacji grupy obrotów $SO(3)$. Wybór parametryzacji i sposób jej interpolacji ma istotny wpływ na efektywność i dokładność użytej metody aproksymacyjnej.
- D. Globalna reprezentacja obrotowych stopni swobody. Ominięcie ograniczeń i osobliwości parametryzacji lokalnej oraz konieczność spełnienia warunku ciągłości przemieszczeń wzdłuż krawędzi Γ połączeń płatów powłoki złożonej wymaga równoległego stosowania parametryzacji globalnej, obejmującej cały atlas grupy $G = E \times SO(3)$. Występuje również konieczność przechodzenia z jednej parametryzacji obrotów na inną. Pojawia się tu analogia do klasycznej transformacji między układem globalnym a lokalnym, znanej z zastosowań MES w obliczeniach konstrukcji przestrzennych.
- E. Brak w ogólnym przypadku sformułowania wariacyjnego typu stacjonarności funkcjonału. Występuje więc konieczność stosowania metody typu Bubnowa–Galerkina z podprzestrznią \mathcal{U}_h , interpretowaną jako przestrzeń funkcji podstawowych, i ze stowarzyszoną wiązką styczną $T\mathcal{U}_h$ jako przestrznią funkcji testowych.

4.3.2. Ogólna koncepcja interpolacji o ciągłości klasy C^0

Punktem wyjścia do interpolacji jest określenie lokalnej bazy elementu dwuwymiarowego.

Niech $\pi_{(e)}$ oznacza pewien zwarty i ograniczony przez $\partial\pi_{(e)}$ obszar w \mathbb{R}^2 . Parametryzację $\pi_{(e)}$ jako podobzaru \mathbb{R}^2 oznaczmy przez $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$. Niech

⁹ M jest dwuwymiarową rozmaitością jedynie przy ograniczeniu się do płata regularnego powłoki gładkiej.

$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})) \in C(\pi_{(e)}, G)$ będzie określoną na $\pi_{(e)}$ gładką funkcją o wartościach w sześciowymiarowej grupie Liego¹⁰ $G = E \times SO(3)$. Poszukujemy funkcji aproksymującej $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{Q}}) \in C(\pi_{(e)}, G)$, bliskiej — w sensie przyjętej definicji — do danej funkcji $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$.

Konstrukcja lokalnej bazy elementu skończonego wykorzystuje koncepcję interpolacji funkcji \mathbf{u} , którą w przypadku żądania ciągłości tylko klasy¹¹ C^0 definiuje się następująco. Niech

$$\Delta = \{\boldsymbol{\xi}_a \in \pi_{(e)}, a = 1, 2, \dots, N\} \quad (4.3.1)$$

będzie zbiorem N różnych punktów obszaru $\pi_{(e)}$, zwanych *węzłami interpolacji*, i niech

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_a) = (\mathbf{u}_a, \mathbf{Q}_a) = (\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_a), \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}_a)), \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_a \in \Delta, \\ a = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

oznacza zbiór wartości funkcji \mathbf{u} w punktach $\boldsymbol{\xi}_a$. Celem interpolacji jest znalezienie funkcji aproksymującej $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{Q}}) \in C(\pi_{(e)}, G)$ takiej, że

$$\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}_a) = \mathbf{u}_a, \quad \boldsymbol{\xi}_a \in \Delta, \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (4.3.3)$$

Z (4.3.3) wynika, że $\tilde{\mathbf{u}}$ przyjmuje te same wartości w węzłach $\boldsymbol{\xi}_a$ co i funkcja interpolowana \mathbf{u} . Mówimy, że funkcja $\tilde{\mathbf{u}}$ *interpoluje* daną funkcję \mathbf{u} na zbiorze punktów Δ .

Główna trudność przy konstruowaniu funkcji interpolujących $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{Q}})$ wynika z faktu, że $C(\pi_{(e)}, G)$ nie posiada struktury przestrzeni liniowej. Ponieważ jednak grupa $G = E \times SO(3)$ jest iloczynem prostym przestrzeni liniowej E i grupy $SO(3)$, występują tu dwa oddzielne zagadnienia interpolacji — na E i na $SO(3)$. Trudności związane są tylko z interpolacją funkcji \mathbf{Q} przyjmującej wartości w grupie obrotów $SO(3)$.

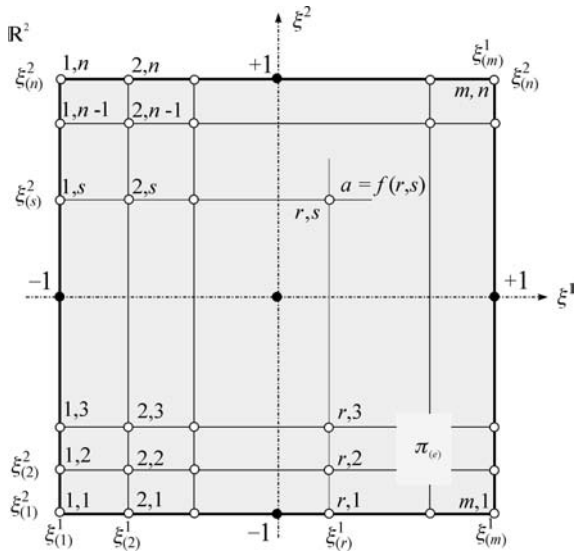
Standardowa interpolacja stosowana w MES rzeczywistych funkcji wektorowych typu $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r$, $\mathbf{u} \in E^n$, opiera się zazwyczaj na jednoczesnym i jednokowym interpolowaniu wszystkich składowych¹² $u_r \in \mathbb{R}^n$. Interpolację kanonicznych składowych kartezjańskich przeprowadza się względem stałej ortonormalnej bazy $\{\mathbf{e}_r\}$, $r = 1, 2, \dots, n$, w przestrzeni liniowej E^n . Klasyczna jednolita interpolacja funkcji wektorowej o ciągłości klasy C^0 ma postać

$$\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_a, \quad \boldsymbol{\xi} \in \pi_{(e)}. \quad (4.3.4)$$

¹⁰Na tym etapie rozważań \mathbf{u} nie musi być utożsamiane z przemieszczeniami powłoki.

¹¹Ciągłość klasy C^0 — ciągłość tylko samej funkcji bez ciągłości jej pochodnych.

¹²Często stosowany jest schemat operujący zróżnicowanym rzędem funkcji interpolacyjnych dla poszczególnych składowych u_i w zależności od roli, jaką one odgrywają w opisie zjawiska fizycznego. W elementach powłokowych sposób ten jest prawie powszechnie stosowany w przypadku tzw. elementów „wyższej precyzji”, np. Hermitowskiej (ciągłość klasy wyższej od C^0 , a więc także ciągłość pochodnych).



$$L_p^m(\xi) = \prod_{\substack{q \neq p \\ q=1 \\ q=m}}^m \frac{\xi - \xi(q)}{\xi(p) - \xi(q)},$$

$$L_a(\xi) = L_{f(r,s)}(\xi^1, \xi^2) \\ = L_r^m(\xi^1) L_s^n(\xi^2),$$

$$\xi = (\xi^1, \xi^2),$$

$$a = f(r, s),$$

$$\xi_a = (\xi_r^1, \xi_s^2),$$

$$N = f(m, n) = m \cdot n.$$

Rys. 4.3.1. Interpolacja Lagrange'owska na płaszczyźnie.

Znane funkcje interpolacyjne $L_a(\xi)$, $a = 1, 2, \dots, N$, np. w postaci wielomianów Lagrange'a lub ich iloczynów, w MES nazywają się *funkcjami kształtu* (np. ZIENKIEWICZ [1972]). Funkcje kształtu L_a w węzłach podziału Δ muszą spełniać warunek

$$L_a(\xi_b) = \delta_{ab}, \quad \xi_b \in \Delta, \quad a, b = 1, 2, \dots, N, \quad \delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{dla } a = b, \\ 0 & \text{dla } a \neq b. \end{cases} \quad (4.3.5)$$

W analizie powłok pod \mathbf{u} może kryć się np. pole przesunięć $\mathbf{u} \in C(M, E)$, wektor wodzący powierzchni podstawowej $\vec{\mathbf{y}} \in M(t)$ w konfiguracji aktualnej lub pole wirtualnych przesunięć¹³ $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{u}}C(M, E)$. Zauważmy, że wirtualne przesunięcia są elementami przestrzeni stycznej do przestrzeni $C(\pi_e), E$ w punkcie \mathbf{u} . Ponieważ $T_{\mathbf{u}}C(\pi_e), E = C(\pi_e), T_{\mathbf{u}}E$ i przestrzeń styczna $T_{\mathbf{u}}E$ do przestrzeni wektorowej E w dowolnym punkcie są kanonicznie izomorficzne z samą przestrzenią E , można zapisać $\mathbf{v} \in C(\pi_e), E$. Funkcja interpolacyjna $\tilde{\mathbf{v}}$ jest konstruowana w taki sam sposób jak $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\tilde{\mathbf{v}}(\xi) = \sum_{a=1}^N L_a(\xi) \mathbf{v}_a, \quad \xi \in \pi_e, \quad (4.3.6)$$

gdzie $L_a(\xi)$, $a = 1, 2, \dots, N$, są tymi samymi funkcjami kształtu jak i w (4.3.4).

¹³Elementy klasy C^0 , w których stosuje się jednokowy sposób interpolacji pól niewiadomych i geometrii (dziedziny), nazywa się *elementami izoparametrycznymi*. W przypadku gdy opis pól niewiadomych jest bogatszy od opisu geometrii, mamy do czynienia z *elementami subparametrycznymi*, zaś kiedy geometria jest odtwarzana dokładniej od pól niewiadomych, mówimy o *elementach superparametrycznych* (zob. np. ZIENKIEWICZ [1972]).

W przypadku funkcji przyjmujących wartości w grupie obrotów $SO(3)$ brak jest kanonicznego schematu interpolacji. Biorąc pod uwagę, że $C(\pi_{(e)}, SO(3))$ jest podrozmaitością nieskończenie wymiarowej przestrzeni liniowej $C(\pi_{(e)}, L(E))$, każdą funkcję typu $\mathbf{T} \in C(\pi_{(e)}, L(E))$ można również interpolować zgodnie ze schematem (4.3.4)

$$\tilde{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{T}_a, \quad \mathbf{T}_a = \mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}_a), \quad \boldsymbol{\xi}_a \in \Delta, \quad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_a \in \pi_{(e)}. \quad (4.3.7)$$

Oczywiście, wynik interpolacji (4.3.7) zachowuje przynależność do $L(E)$, to znaczy $\tilde{\mathbf{T}} \in C(\pi_{(e)}, L(E))$.

W przypadku pól typu \mathbf{Q} o wartościach w $SO(3)$, mimo że zachodzi sekwencja $\mathbf{Q} \in C(\pi_{(e)}, SO(3)) \subset C(\pi_{(e)}, L(E))$ i obowiązuje $\tilde{\mathbf{Q}} \in C(\pi_{(e)}, L(E))$, zastosowanie schematu (4.3.7) prowadzi do takiego wyniku interpolacji, że na ogół $\tilde{\mathbf{Q}} \notin C(\pi_{(e)}, SO(3))$. Skonstruowany w sposób (4.3.7) schemat interpolacji dla pola \mathbf{Q} w ogólnym przypadku nie prowadzi więc do wyniku interpolacji $\tilde{\mathbf{Q}}$, przyjmującego wartości w grupie obrotów $SO(3)$. Poniżej proponujemy pewne rozciągnięcie procedury interpolacyjnej typu (4.3.4)–(4.3.7) na pola $\mathbf{Q} \in C(\pi_{(e)}, SO(3))$ w taki sposób, aby wynik interpolacji zachowywał przynależność $\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\xi}) \in C(\pi_{(e)}, SO(3))$.

4.3.3. Interpolacja klasy C^0 na grupie obrotów $SO(3)$

Rozważania rozpoczniemy od wprowadzenia i interpolacji parametrów lokalnych (4.2.2) i (4.2.3) tensora obrotu \mathbf{Q} .

Niech rodzina $\{U_\lambda, \mathcal{O}_\lambda\}$, $\lambda \in A$, map lokalnych (zbiór parametryzacji) będzie danym atlasem na grupie obrotów $SO(3)$ takim, że rodzina U_λ pokrywa grupę

$$SO(3) = \bigcup_{\lambda \in A} U_\lambda \wedge \mathcal{O}_\lambda: U_\lambda \rightarrow V_\lambda = \mathcal{O}_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^3, \quad \forall \lambda \in A, \quad (4.3.8)$$

gdzie \mathcal{O}_λ są funkcjami gładkimi i odwracalnymi w swoich dziedzinach określoności. W dalszych rozważaniach uprościmy nieco zapis, pomijając indeks λ w oznaczeniach pojedynczego składnika rodziny $(U_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ i zapisując mapę lokalną (U, \mathcal{O}) w postaci

$$SO(3) \supset U \ni \mathbf{Q} \xrightarrow{\mathcal{O}} (\vartheta_p) \in V \subset \mathbb{R}^3, \quad p = 1, 2, 3. \quad (4.3.9)$$

Tutaj (ϑ_p) są lokalnymi parametrami tensora $\mathbf{Q} \in SO(3)$.

Dalej interpretujemy $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})$ jako funkcję spełniającą warunek $\mathbf{Q} \in C(\pi_{(e)}, SO(3))$ przy założeniu, że $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})$ dla wszystkich $\boldsymbol{\xi} \in \pi_{(e)}$ pozostaje

w jednej mapie¹⁴ (U, \mathcal{O}) . Uwzględniając (4.3.9), w mapie lokalnej (U, \mathcal{O}) można jednoznacznie zapisać

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{O}^{-1}(\vartheta_p(\boldsymbol{\xi})) = \mathcal{O}^{-1}(\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi})), \quad \boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}) = \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \vartheta_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \vartheta_3(\boldsymbol{\xi}) \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \pi_{(e)}. \quad (4.3.10)$$

Koncepcję lokalnej (U, \mathcal{O}) interpolacji pola tensorów obrotu $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}) \in U$, $\boldsymbol{\xi} \in \pi_{(e)}$, pośrednio poprzez interpolację parametrów $\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}) \in V \subset \mathbb{R}^3$ z wykorzystaniem odwrotności funkcji $\mathcal{O}(\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}))$, podali CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i STUMPF [1992] (rys. 4.3.2). Odpowiedni wzór interpolacyjny ma postać

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{O}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\xi})) = \mathcal{O}^{-1}\left(\sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\vartheta}_a\right), \quad \boldsymbol{\xi} \in \pi_{(e)}. \quad (4.3.11)$$

Skonstruowana w taki sposób funkcja interpolująca $\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\xi})$ ma własność $\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\xi}) \in C(\pi_{(e)}, SO(3))$, w przeciwieństwie do aproksymacji $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})$ sposobem (4.3.7).

Istotną słabością podejścia (4.3.11) okazało się pogarszanie dokładności¹⁵ takiej interpolacji w miarę oddalania się wartości funkcji $\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\xi})$ od elementu neutralnego grupy $\mathbf{1} \in SO(3)$, por. CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i SMOLEŃSKI [1993]. CHRÓŚCIELEWSKI [1996] zaproponował więc zmodyfikowaną, wolną od wymienionej słabości i osobliwości, procedurę interpolacji pośredniej z przesunięciem (zob. CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i PIETRASZKIEWICZ [2000, 2002]). Zaproponowana procedura polega na przeciągnięciu funkcji $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})$ w otoczenie elementu neutralnego $\mathbf{1} \in SO(3)$, w którym najwolniej narasta błąd interpolacji, następnie wykonaniu w tym obszarze interpolacji pośredniej, a w końcu popchnięciu wyniku interpolacji do położenia wyjściowego (rys. 4.3.3).

Konstrukcja funkcji interpolacyjnej $\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in \pi_{(e)}$, z przesunięciem składa się z następujących kroków:

1. Ustalenie pewnego typowego reprezentanta¹⁶ $\bar{\mathbf{Q}} \in SO(3)$, zbioru dyskretnych wartości $\mathbf{Q}_a = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}_a)$ funkcji $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})$ w węzłach $\boldsymbol{\xi}_a \in \Delta \subset \pi_{(e)}$, $a = 1, 2, \dots, N$.

¹⁴Warunki podziału jakie winien spełniać element skończony — opisywać „stosunkowo niewielki” obszar dziedziny przy ograniczonym zakresie jej „dystorsji” (zakrzywień) — pozwalają na łatwe spełnienie tego założenia. Dalej założenie to zostanie jeszcze osłabione.

¹⁵Nie jest to klasyczne zagadnienie interpolacji na przestrzeni wektorowej. Problem dotyczy tutaj grupy obrotów i jej elementów, a w tym kontekście nie istnieją (nie są bezpośrednio definiowalne) standardowe pojęcia „błędu (dokładności), odległości, położenia” itp.

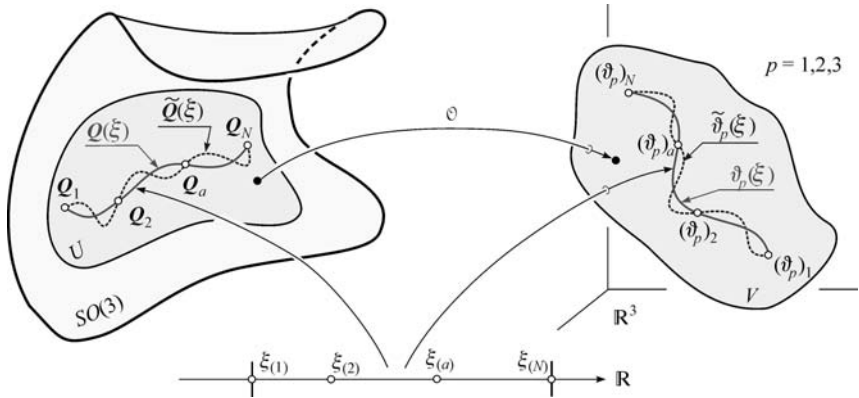
¹⁶Reprezentantem $\bar{\mathbf{Q}} \in SO(3)$ zbioru $\{\mathbf{Q}_a\}$ może być jeden z jego elementów \mathbf{Q}_c , np. z c jako węzłem centralnym. Wówczas przeciągnięcie daje $\mathbf{1} = \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q}_c$. W programach autorskich stosuje się niezależną od położenia węzłów ortonormalizację uśrednionych po $a = 1, 2, \dots, N$ składowych t_{ija} , $t_{ja} = t_{ija} \mathbf{e}_i \Rightarrow t_{ja}$ zbioru wektorów elementu $\mathbf{Q}_a \Rightarrow \mathbf{Q}_a \equiv [\mathfrak{t}_{1a} | \mathfrak{t}_{2a} | \mathfrak{t}_{3a}] \in SO(3)$, gdzie \mathbf{e}_i jest ortonormalną bazą globalną.

2. Przeciągnięcie przy pomocy $\bar{Q}^T : U \rightarrow W \subset SO(3)$ wartości dyskretnych Q_a w otoczenie elementu neutralnego $\mathbf{1} \in W \subset SO(3)$:

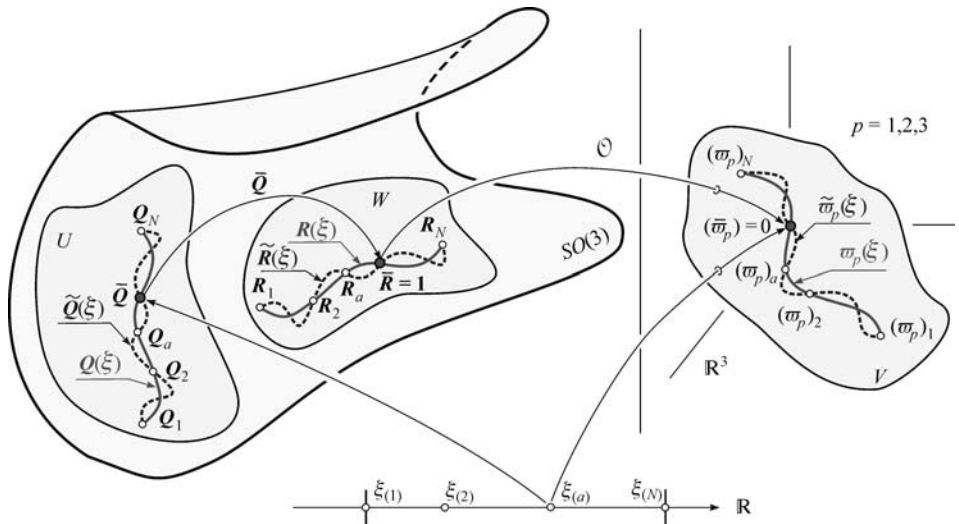
$$\mathbf{R}_a = \bar{Q}^T Q_a, \quad a = 1, 2, \dots, N, \quad \bar{Q} = \text{const.} \quad (4.3.12)$$

3. Obliczenie współrzędnych lokalnych w mapie (W, \mathcal{R}) dla przeciągniętych pośrednich wartości węzłowych \mathbf{R}_a przy zastosowaniu (4.3.9):

$$\varpi_a \equiv (\varpi_p)_a = \mathcal{R}(\mathbf{R}_a), \quad p = 1, 2, 3, \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (4.3.13)$$



Rys. 4.3.2. Koncepcja lokalnej (U, \mathcal{O}) interpolacji jednowymiarowej funkcji $Q(\xi)$ przyjmującej wartości w grupie $SO(3)$.



Rys. 4.3.3. Koncepcja lokalnej interpolacji pośredniej z przesunięciem jednowymiarowej funkcji $Q(\xi)$ przyjmującej wartości w $SO(3)$.

4. Interpolacja parametrów lokalnych $\varpi(\boldsymbol{\xi})$ jako elementów \mathbb{R}^3 według schematu (4.3.4) na podstawie (4.3.13):

$$\tilde{\varpi}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{Bmatrix} \tilde{\varpi}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{\varpi}_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{\varpi}_3(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \begin{Bmatrix} \varpi_{1a} \\ \varpi_{2a} \\ \varpi_{3a} \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\varpi}_a. \quad (4.3.14)$$

5. Wykonanie interpolacji pola pośredniego $\tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\xi})$ z wykorzystaniem interpolacji parametrów $\tilde{\varpi}(\boldsymbol{\xi})$ przez zastosowanie mapy lokalnej typu (4.3.13):

$$\tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{R}^{-1}(\tilde{\varpi}(\boldsymbol{\xi})). \quad (4.3.15)$$

6. Popchnięcie przy pomocy $\bar{\mathbf{Q}}: W \rightarrow U$ pola pośredniego $\tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\xi})$ do położenia wyjściowego:

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\xi}) = \bar{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\xi}), \quad \bar{\mathbf{Q}} = \text{const}. \quad (4.3.16)$$

Skonstruowana operacjami 1.–6. funkcja (4.3.16) w węzłach podziału Δ spełnia warunek (4.3.3):

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\xi}_a) = \bar{\mathbf{Q}}\mathcal{R}^{-1}(\tilde{\varpi}(\boldsymbol{\xi}_a)) = \bar{\mathbf{Q}}\mathcal{R}^{-1}(\boldsymbol{\varpi}_a) = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{R}_a = \mathbf{Q}_a, \quad \boldsymbol{\xi}_a \in \Delta. \quad (4.3.17)$$

Zatem $\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\xi})$ rzeczywiście interpoluje daną funkcję $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})$ na zbiorze węzłów $\boldsymbol{\xi}_a \in \Delta$.

Na podstawie (4.3.10) widać, że funkcja interpolująca $\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\xi}) = \bar{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\xi}) = \bar{\mathbf{Q}}\mathcal{R}^{-1}(\tilde{\varpi}(\boldsymbol{\xi}))$, pozostając w mapie lokalnej (W, \mathcal{R}) , zawsze przyjmuje wartości w grupie obrotów $SO(3)$, to znaczy zawsze $\tilde{\mathbf{Q}} \in C(\pi_{(e)}, SO(3))$. Wprowadzenie $\bar{\mathbf{Q}} = \text{const}$ korzystnie przenosi warunek pozostawania w jednej mapie lokalnej (U, Θ) z funkcji wyjściowej $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})$ na funkcję $\mathbf{R}(\boldsymbol{\xi}) = \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})$, przesuniętą ku elementowi neutralnemu grupy w mapie (W, \mathcal{R}) . Uzyskane osłabienie założenia wyjściowego, poczynione po (4.3.9), ma istotne znaczenie z obliczeniowego punktu widzenia. Praktycznie usuwa ono w ramach elementu skończonego możliwość pojawienia się osobliwości, wynikającej z parametryzacji lokalnej¹⁷ (W, \mathcal{R}) . Ponadto, zaproponowana procedura interpolacji z przesunięciem nie narzuca sposobu parametryzacji \mathbf{Q} . Może być zatem stosowana dowolna z nieosobliwych (globalnych)

¹⁷Słowo „praktycznie” rozumiemy tu w kontekście uzyskania zbieżności rozwiązania wraz z zagęszczaniem podziału na elementy. Przykładowo, ograniczenie dziedziny dyskretyzacji do pojedynczego elementu, z zastosowaniem parametryzacji kanonicznej grupy obrotów, dotyczy obszaru, w którym względna zmienność najeżenia (włączając w to deformacje) nie jest większa/równa niż na półsfery. Inne parametryzacje lokalne nie zawsze dają tak szerokie możliwości zmian najeżenia.

parametryzacji grupy obrotów¹⁸ $SO(3)$. Koncepcji zbliżonej do interpolacji pośredniej z przesunięciem, ale w kontekście mechaniki prętów, można doszukać się w JELENIĆ i CRISFIELD [1999].

Wariant interpolacji bez przesunięcia z rys. 4.3.2 jest szczególnym przypadkiem procedury 1.–6. Jeśli przyjmiemy $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ (a w konsekwencji $\mathbf{R} = \mathbf{Q}$, $\mathcal{R} = \mathcal{O}$) oraz $\varpi = \vartheta$ zgodnie z (4.3.10), z procedury wypadają punkty 1., 2., 6. i wzór końcowy uzyskuje formę (4.3.11).

W problemach analizy numerycznej powłok pod \mathbf{Q} można rozumieć zarówno sam tensor obrotu \mathbf{Q} , jako rotację opisującą ewolucję najeżenia $\mathbf{t}_i = \mathbf{Q}\mathbf{t}_i^0$ powierzchni podstawowej M , jak i inne obiekty ortogonalne, np. tensory struktury \mathbf{T}_0 , $\mathbf{T} \in SO(3)$, opisujące konfigurację początkową $\mathbf{t}_i^0 = \mathbf{T}_0\mathbf{e}_i$ i aktualną $\mathbf{t}_i = \mathbf{T}\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{T}_0\mathbf{e}_i$ powłoki.

W procesie analizy pole \mathbf{Q} jest wielkością „znaną”, występującą w zależnościach o charakterze lokalnym. Zatem parametryzacja, pojawiająca się jako składnik procedury interpolacyjnej, może obowiązywać tylko w ograniczonym obszarze, np. w ramach jednego elementu czy płyta, co nie narusza ogólności rozwiązania¹⁹. Innymi słowy, mapa lokalna $(U_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ w interpolacji \mathbf{Q} może zmieniać się od elementu do elementu skończonego. W przypadku stosowania parametryzacji tego samego typu we wszystkich elementach, wymagana warunkiem kinematycznej dopuszczalności międzyelementowa ciągłość pola \mathbf{Q} jest spełniona na mocy definicji, przez przyjęcie zgodnych funkcji kształtu na brzegach elementów sąsiadujących i wspólnej dla nich części zbioru wartości węzłowych $\{\mathbf{Q}_a\}$.

4.3.4. Interpolacja wektora wirtualnego obrotu

Struktura procedury iteracyjnej wskazuje, że w procesie rozwiązywania zadań przyrostowych określone na M pola przyrostu obrotów $\Delta\mathbf{w} = \text{ad}^{-1}(\Delta\mathbf{W})$ i wirtualnego obrotu $\mathbf{w} = \text{ad}^{-1}\mathbf{W}$ odgrywają inną rolę, niż pole tensorów ortogonalnych \mathbf{Q} . Oba te pola w procesie analizy są bowiem wielkościami „nieznanymi”.

Wyrażenie $\Delta\mathbf{w}$ i \mathbf{w} przez nieznanne przyrosty $\Delta\vartheta$, lub przez odpowiednie wirtualne zmiany $\delta\vartheta$ współrzędnych lokalnych ϑ tensora obrotu \mathbf{Q} , przenosi występujący w ramach kinematycznej dopuszczalności warunek ciągłości na parametryzację ϑ . Konieczność spełnienia warunku ciągłości parametrów ϑ ogranicza zakres ważności algorytmu do zadań mieszczących się w jednej mapie lokalnej (U, \mathcal{O}) . W przypadku konstrukcji silnie zakrzywionych lub zamkniętych typu kula, kostka, rura itp., ograniczenie możliwości zapisu całego układu tylko

¹⁸Minimalna liczba współrzędnych lokalnych, zapewniająca nieosobliwość parametryzacji $SO(3)$, wynosi pięć. W programach autorskich, w odniesieniu do obiektów (macierzy) dyskretnych typu $\mathbf{Q}_a \Rightarrow \mathbf{Q}_a \equiv [\mathfrak{t}_{1a} \mathfrak{t}_{2a} \mathfrak{t}_{3a} \equiv \mathfrak{t}_{3a}] \in SO(3)$, stosuje się sześć parametrów w postaci składowych $t_{ija} \Rightarrow \mathfrak{t}_{ja}$ dwóch wektorów $\mathbf{t}_{1a} = t_{i1a}\mathbf{e}_i \Rightarrow \mathfrak{t}_{1a}$ i $\mathbf{t}_{2a} = t_{i2a}\mathbf{e}_i \Rightarrow \mathfrak{t}_{2a}$, gdzie \mathbf{e}_i jest ortonormalną bazą globalną.

¹⁹Lokalność interpolacji \mathbf{Q} nie koliduje także z iteracyjnym procesem aktualizacji.

w jednej mapie łączy się z problemem osobliwości parametryzacji i dokładności interpolacji, por. CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i SMOLEŃSKI [1993]. Z tego względu poniżej przedstawimy bardziej szczegółowo różne procedury interpolacji wirtualnych obrotów i przyrostów obrotów.

Interpolacja wirtualnego obrotu $\delta\mathbf{Q}$, jako elementu przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{Q}}C(\pi_{(e)}, SO(3)) \simeq C(\pi_{(e)}, T_{\mathbf{Q}}SO(3))$ w punkcie regularnym \mathbf{Q} , oparta jest na istniejących izomorfizmach. Obowiązuje tu ciąg izomorfizmów poszczególnych przestrzeni $T_{\mathbf{Q}}C(\pi_{(e)}, SO(3)) \simeq C(\pi_{(e)}, so(3)) \simeq C(\pi_{(e)}, E)$ i ich elementów $\delta\mathbf{Q}$, \mathbf{W} i \mathbf{w} . W reprezentacji przestrzennej mamy $\delta\mathbf{Q} = \mathbf{W}\mathbf{Q}$ i słuszną jest zależność $T_{\mathbf{Q}}C(\pi_{(e)}, SO(3)) \ni \delta\mathbf{Q}(\xi) = \mathbf{W}(\xi)\mathbf{Q}(\xi)$, $\xi \in \pi_{(e)}$. Tutaj $\mathbf{W}(\xi) \in C(\pi_{(e)}, so(3))$ jest tensorem skośnie symetrycznym o wektorze osiowym $C(\pi_{(e)}, E) \ni \mathbf{w}(\xi) = \text{ad}^{-1}\mathbf{W}(\xi)$. Poniżej przedstawiamy trzy możliwe procedury interpolacji wirtualnych obrotów.

A. Lokalna (U, \mathcal{O}) , *pośrednia interpolacja wektora wirtualnego obrotu* $\mathbf{w}(\xi) \in C(\pi_{(e)}, E)$, zapisana przez wirtualne zmiany trzech niezależnych współrzędnych²⁰ w reprezentacji przestrzennej i odniesiona do współobrotowej bazy lokalnej $\{\mathbf{t}_i\}$, wyraża się wzorami

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\xi) &= \sum_{p=1}^3 \mathbf{w}^{(p)}(\xi) \delta\vartheta_p(\xi), \\ \mathbf{w}^{(p)}(\xi) &= \text{ad}^{-1} \left(\mathbf{Q}^{(p)}(\xi) \mathbf{Q}^T(\xi) \right), \quad p = 1, 2, 3, \quad \xi \in \pi_{(e)}. \quad (4.3.18) \\ \mathbf{Q}^{(p)}(\xi) &= \mathbf{Q}^{(p)}(\vartheta(\xi)) = \frac{\partial \mathbf{Q}(\vartheta(\xi))}{\partial \vartheta_p}, \end{aligned}$$

Załóżmy, że (4.3.18) zawiera się w jednej mapie lokalnej (U, \mathcal{O}) . Rozpisując (4.3.18) na składowe w lokalnej bazie współobrotowej $\{\mathbf{t}_i\}$, otrzymamy użyteczną postać macierzową

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\xi) &\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} w_1(\xi) \\ w_2(\xi) \\ w_3(\xi) \end{Bmatrix} = \Xi(\xi) \delta\vartheta(\xi), \\ \Xi(\vartheta(\xi)) &\Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{Q}(\vartheta(\xi))}{\partial \vartheta_k} \mathbf{Q}^T(\xi), \quad (4.3.19) \\ \delta\vartheta(\xi) &= \begin{Bmatrix} \delta\vartheta_1(\xi) \\ \delta\vartheta_2(\xi) \\ \delta\vartheta_3(\xi) \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

²⁰Wszystkie parametryzacje grupy obrotów $SO(3)$ powyżej trzech współrzędnych mają parametry zależne.

Ponieważ wirtualne zmiany parametrów lokalnych $\delta\vartheta_p(\boldsymbol{\xi})$ przyjmują wartości w \mathbb{R}^3 , interpolujemy je bezpośrednio na podstawie wzoru (4.3.4):

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{Bmatrix} \delta\tilde{\vartheta}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \delta\tilde{\vartheta}_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \delta\tilde{\vartheta}_3(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \begin{Bmatrix} \delta\vartheta_{1a} \\ \delta\vartheta_{2a} \\ \delta\vartheta_{3a} \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \delta\boldsymbol{\vartheta}_a. \quad (4.3.20)$$

Wykorzystując (4.3.11) oraz uwzględniając (4.3.18)₂ i (4.3.20), funkcję interpolującą wektory $\mathbf{w}^{(p)}$ otrzymamy w postaci

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi})) &= \text{ad}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{Q}}^{(p)} \tilde{\mathbf{Q}}^T \right), \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi})) &= \tilde{\mathbf{Q}}^{(p)} \left(\sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\vartheta}_a \right). \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Po wykonaniu kolejnych podstawień wymaganych w (4.3.18)₁ otrzymujemy funkcję interpolującą wektor wirtualnego obrotu

$$\tilde{\mathbf{w}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{p=1}^3 \left(\tilde{\mathbf{w}}^{(p)}(\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi})) \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \delta\boldsymbol{\vartheta}_a \right). \quad (4.3.22)$$

Przepis (4.3.22) w formie macierzowej zgodnej z (4.3.19) przyjmuje postać

$$\begin{Bmatrix} \tilde{w}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{w}_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{w}_3(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix} = \Xi(\boldsymbol{\xi}) \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \delta\boldsymbol{\vartheta}_a = \Xi(\boldsymbol{\xi}) \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \begin{Bmatrix} \delta\vartheta_{1a} \\ \delta\vartheta_{2a} \\ \delta\vartheta_{3a} \end{Bmatrix}, \quad (4.3.23)$$

$$\boldsymbol{\xi} \in \pi(e).$$

Schematy interpolacji funkcji (4.3.16), (4.3.11) i (4.3.22) są niezależne od wyboru typu parametryzacji lokalnej $(U_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ grupy obrotów. Jednak wzór interpolacyjny (4.3.22), wobec jawnej zależności od wirtualnych zmian niezależnych parametrów lokalnych $\delta\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$ o narzuconych warunkach ciągłości międzyelementowej, ogranicza zakres ważności ogólnego algorytmu do obszaru objętego pojedynczą parametryzacją (U, \mathcal{O}) . Przynależność parametrów węzłowych $\delta\boldsymbol{\vartheta}_a$ do przestrzeni \mathbb{R}^3 w podejściu (4.3.23) pozwala na bezpośrednie łączenie różnych płatów $M^{(b)}$ powłoki wielopłatowej $M = \cup M^{(b)}$.

B. *Bezpośrednia interpolacja składowych wektora wirtualnego obrotu* $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) \in C(\pi(e), E)$ w bazie aktualnej $\{\mathbf{t}_i\}$ wykorzystuje fakt, że przestrzeń styczna

$T_{\mathcal{Q}}SO(3)$ ma strukturę przestrzeni liniowej. Umożliwia to zastosowanie interpolacji wektora wirtualnego obrotu, bez potrzeby wprowadzania węzłowych parametrów lokalnych $\{\delta\vartheta_{pa}\}$, $p = 1, 2, 3$, według schematu (4.3.4):

$$\tilde{\mathbf{w}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{w}_a, \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{w}_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{w}_3(\boldsymbol{\xi}) \end{array} \right\} = \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \begin{array}{l} w_{1a} \\ w_{2a} \\ w_{3a} \end{array} \right\}, \quad (4.3.24)$$

$$\boldsymbol{\xi} \in \pi(e).$$

W ogólnym przypadku $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\xi}_1) \neq \mathcal{Q}(\boldsymbol{\xi}_2)$ dla $\boldsymbol{\xi}_1 \neq \boldsymbol{\xi}_2$ i $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \pi(e)$ (także w węzłach $\mathbf{Q}_a \neq \mathbf{Q}_b$ dla $a \neq b$). Stąd wirtualne obroty \mathbf{w}_a w różnych węzłach należą na ogół do różnych przestrzeni stycznych $T_{\mathcal{Q}_a}SO(3)$, zależnych od $\boldsymbol{\xi}_a \in \Delta$. W tym kontekście interpolacja (4.3.24) nie jest całkowicie poprawna²¹ (CARDONA i GÉRADIN [1988]).

Wobec odniesienia w (4.3.24) wektorów węzłowych $\mathbf{w}_a = w_{ia} \mathbf{t}_{ia}$ do bazy lokalnej $\{\mathbf{t}_{ia}\}$, pojawiają się trudności z opisem łączenia płatów w złożonej powłoce wielopłatowej. W tym przypadku można użyć klasycznej transformacji wynikowych macierzy elementowych do wspólnej dla całego układu bazy globalnej \mathbf{e}_i . Taka transformacja jest wykonywana przy pomocy macierzy skonstruowanej na podstawie macierzy transformacji \mathbf{T}_a lokalnych baz węzłowych $\mathbf{t}_{ia} = \mathbf{T}_a \mathbf{e}_i$.

C. *Bezpośrednia interpolacja składowych wektora wirtualnego obrotu* $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) \in C(\pi(e), E)$ w stałej bazie globalnej \mathbf{e}_i wykorzystuje transformację \mathbf{T} : $\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{t}_i$. Przedstawienie wektora $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi})$ w korotującej bazie lokalnej $\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\xi})$ i stałej bazie globalnej \mathbf{e}_i ,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) &= w_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_i(\boldsymbol{\xi}) = \bar{w}_j(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_j = \bar{w}_j(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_j(\boldsymbol{\xi}) \\ &= t_{ji}(\boldsymbol{\xi}) \bar{w}_j(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_i(\boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

dostarcza relacji między składowymi $w_i(\boldsymbol{\xi}) = t_{ji}(\boldsymbol{\xi}) \bar{w}_j(\boldsymbol{\xi})$, stanowiąc podstawę wzoru interpolacyjnego

²¹Interpolacja łącząca w jednym wyrażeniu wielkości z różnych przestrzeni stycznych występuje powszechnie w zakrzywionych jedno- i dwuwymiarowych elementach prętowych i powłokowych. W przypadku elementów klasy C^1 źródło tego opisu tkwi w naturalnym dla wyjściowej teorii powłok typu Kirchhoffa–Love’a sposobie formułowania problemu na przestrzeni $T_x M \oplus T_x M^\perp$, gdzie $T_x M$ jest przestrzenią styczną do powierzchni podstawowej M w punkcie $\mathbf{x} \in M$, a $T_x M^\perp$ przestrzenią do niej ortogonalną. Dekompozycja wektora przesunięć na składowe styczne i normalną, o różnej określonej teorią roli, pociąga za sobą analogiczny i często o różnicowanym rzędzie sposób ich interpolacji. W elementach klasy C^0 typu Timoszenko–Reissnera czy zdegenerowanych ten typ interpolacji ma swoje źródło w dwuparametrowym (bez owinięcia) opisie obrotu, jednoznaczny tylko w przestrzeni stycznej do sfery jednostkowej S^2 .

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{w}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{w}_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{w}_3(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix} &= \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \begin{Bmatrix} \bar{w}_{1a} \\ \bar{w}_{2a} \\ \bar{w}_{3a} \end{Bmatrix}, \\ \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}) : \begin{Bmatrix} \bar{w}_{1a}(\boldsymbol{\xi}) \\ \bar{w}_{2a}(\boldsymbol{\xi}) \\ \bar{w}_{3a}(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix} &\rightarrow \begin{Bmatrix} w_{1a}(\boldsymbol{\xi}) \\ w_{2a}(\boldsymbol{\xi}) \\ w_{3a}(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \pi_{(e)}. \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Można powiedzieć, że obecność w (4.3.26) macierzy transformacji $\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi})$ z krotującego układu lokalnego $\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\xi})$ do globalnego \mathbf{e}_i „odkręca” do położenia kolinearnego przestrzenie styczne $T_{Q(\boldsymbol{\xi})}SO(3)$ z różnych punktów $Q(\boldsymbol{\xi})$ dziedziny $\pi_{(e)}$. W tym sensie wzór interpolacyjny (4.3.26), w przeciwieństwie do (4.3.24), „widzi” zakrzywienie przestrzeni bazowej – grupy $SO(3)$. Ponadto, obrotowe parametry węzłowe, w postaci składowych \bar{w}_{ia} węzłowego wektora wirtualnego obrotu, odniesione są do stałej bazy globalnej \mathbf{e}_i , wspólnej dla wszystkich węzłów $a = 1, 2, \dots, N$ i elementów $\pi_{(e)}$. Odniesienie w podejściu (4.3.26) wszystkich \bar{w}_{ia} do wspólnej bazy również pozwalała na bezpośrednie łączenie różnych płatów $M^{(b)}$ powłoki wielopłatowej $M = \cup M^{(b)}$.

Składowe \bar{w}_{ia} w (4.3.26), w odróżnieniu od parametrów lokalnych $\delta\vartheta_a$, mają zawsze dobrą interpretację inżynierską. Dlatego spełnienie przemieszczeniowych warunków brzegowych w powłoce nie sprawia tu kłopotu.

Podejścia (4.3.23), (4.3.24) i (4.3.26) można również ująć jednym wzorem

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{w}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{w}_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{w}_3(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix} &= \mathbb{Y}(\boldsymbol{\xi}) \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \begin{Bmatrix} \delta\phi_{1a} \\ \delta\phi_{2a} \\ \delta\phi_{3a} \end{Bmatrix} \\ \text{gdzie} \quad \begin{cases} \text{A. } \mathbb{Y} = \Xi, & \delta\phi_{ia} = \delta\vartheta_{ia}, \\ \text{B. } \mathbb{Y} = \mathbb{I}, & \delta\phi_{ia} = w_{ia}, \\ \text{C. } \mathbb{Y} = \mathbb{T}, & \delta\phi_{ia} = \bar{w}_{ia}, \end{cases} & \quad \boldsymbol{\xi} \in \pi_{(e)}. \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Formuła (4.3.27) stanowi podstawę opracowanego podprogramu autorskiego, ujmującego jednocześnie wszystkie trzy warianty interpolacji wektora wirtualnego obrotu.

4.4. Iteracyjne rozwiązanie nieliniowych problemów statyki powłok

4.4.1. Linearyzacja zagadnienia początkowo–brzegowego

Rozwiązanie nieliniowych zadań powłok, tak jak i innych problemów nieliniowych, wymaga zastosowania odpowiedniej procedury iteracyjnej. Procedury

charakteryzujące się dobrą zbieżnością sprowadzają się najczęściej do sukcesywnej aproksymacji problemu nieliniowego przez ciąg problemów zlinearyzowanych. Dlatego poprawnie sformułowany problem zlinearyzowany zagadnienia jest zasadniczym punktem procedury aproksymacyjnej.

Zasada wirtualnych przemieszczeń, oparta na funkcjonale $G: \mathcal{U}_A \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{W}_A \rightarrow \mathbb{R}$, jest najbardziej ogólnym ze słabych sformułowań zagadnienia początkowo-brzegowego, która daje już podstawę do uzyskania rozwiązań. Dlatego przedstawione w dalszych rozważaniach szczegóły rozwiązania iteracyjnego ograniczymy tylko do tej zasady.

Zlinearyzowaną postać zasady wirtualnych przemieszczeń $G[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] = 0, \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}_A, t \in [0, +\infty)$, w otoczeniu rozwiązania podstawowego $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \in \mathcal{U}_A$, można wyprowadzić następująco. Rozważmy jednoparametrową rodzinę deformacji $\mathbf{u}(\eta) = (\mathbf{u}(\eta), \mathbf{Q}(\eta)), \eta \in \mathbb{R}, \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}$, interpretowaną jako ruch rzeczywisty powłoki, zapisaną w reprezentacji przestrzennej w postaci

$$\mathbf{u}(\eta) = \mathbf{u} + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{Q}(\eta) = \exp(\eta \Delta \mathbf{W}) \mathbf{Q}. \quad (4.4.1)$$

Tu wektor styczny $\Delta \mathbf{w} = (\Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{W}) \in \mathcal{W}_A$ do krzywej $\mathbf{u}(\eta)$ w punkcie \mathbf{u} oznacza kinematycznie dopuszczalne pole wirtualnych przemieszczeń, w którym $\Delta \mathbf{w} = \text{ad}^{-1} \Delta \mathbf{W}$ jest wektorem osiowym tensora skośnie symetrycznego $\Delta \mathbf{W}$.

Pochodna kierunkowa funkcjonału $G[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] = 0$ w punkcie \mathbf{u} i w kierunku $\Delta \mathbf{w}$ jest zdefiniowana przez

$$\begin{aligned} \delta G[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] &= \frac{d}{d\eta} G[\mathbf{u}(\eta), t; \mathbf{w}]|_{\eta=0} \\ &= \delta G_d[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] + \delta G_i[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] \\ &\quad - \delta G_e[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}]. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Funkcjonał wewnętrznej pracy wirtualnej podlegający linearyzacji w (4.4.2) ma postać

$$\begin{aligned} G_i[\mathbf{u}(\eta), t; \mathbf{w}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T(\eta) \boldsymbol{s}(\eta) \, da \\ &= \iint_{M \setminus \Gamma} \left\{ \mathbf{n}^\beta(\eta) \cdot (\mathbf{v}_{,\beta} + (\vec{\mathbf{y}}_{,\beta} + \eta \Delta \mathbf{v}_{,\beta}) \times \mathbf{w}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{m}^\beta(\eta) \cdot \mathbf{w}_{,\beta} \right\} da. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

W (4.4.3) przekrojowe miary naprężeń $\boldsymbol{s}(\eta)$ są funkcjami przemieszczeń $\mathbf{u}(\eta)$ poprzez równania konstytutywne materiału sprężystego i zależności kinematyczne.

Obliczenie pochodnej z funkcjonału (4.4.3) prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned} \delta G_i[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} \left\{ \delta \mathbf{n}^\beta \cdot (\mathbf{v}_{,\beta} + \vec{\mathbf{y}}_{,\beta} \times \mathbf{w}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{n}^\beta \cdot (\Delta \mathbf{v}_{,\beta} \times \mathbf{w}) + \delta \mathbf{m}^\beta \cdot \mathbf{w}_{,\beta} \right\} da. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

W wyrażeniu (4.4.4) wielkości $\delta \mathbf{n}^\beta$ i $\delta \mathbf{m}^\beta$ są wektorami wirtualnych zmian przekrojowych miar naprężeń które, zgodnie z postacią równań konstytutywnych powłoki sprężystej w reprezentacji przestrzennej (zob. p. 2.2.7), dane są przez

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{n}^\beta &\equiv \frac{d}{d\eta} \mathcal{N}^\beta (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\eta), \boldsymbol{\kappa}_\alpha(\eta))|_{\eta=0} = \Delta \mathbf{n}^\beta + \Delta \mathbf{w} \times \mathbf{n}^\beta, \\ \delta \mathbf{m}^\beta &\equiv \frac{d}{d\eta} \mathcal{M}^\beta (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\eta), \boldsymbol{\kappa}_\alpha(\eta))|_{\eta=0} = \Delta \mathbf{m}^\beta + \Delta \mathbf{w} \times \mathbf{m}^\beta,\end{aligned}\quad (4.4.5)$$

gdzie przyrosty $\Delta \mathbf{n}^\beta$ i $\Delta \mathbf{m}^\beta$ wyrażają się przez zlinearyzowane miary odkształceń

$$\Delta \mathbf{n}^\alpha = \mathbf{C}_1^{\alpha\beta} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta + \mathbf{C}_3^{\alpha\beta} \Delta \boldsymbol{\kappa}_\beta, \quad \Delta \mathbf{m}^\alpha = \mathbf{C}_4^{\alpha\beta} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta + \mathbf{C}_2^{\alpha\beta} \Delta \boldsymbol{\kappa}_\beta. \quad (4.4.6)$$

Tutaj $\mathbf{C}_p^{\alpha\beta} = \mathbf{C}_p^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma, \boldsymbol{\kappa}_\gamma)$, $p = 1, 2, 3, 4$, są tensorami sprężystości w reprezentacji przestrzennej określonymi przez

$$\mathbf{C}_1^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{N}^\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\beta}, \quad \mathbf{C}_2^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{M}^\alpha}{\partial \boldsymbol{\kappa}_\beta}, \quad \mathbf{C}_3^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{N}^\alpha}{\partial \boldsymbol{\kappa}_\beta}, \quad \mathbf{C}_4^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{M}^\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\beta}. \quad (4.4.7)$$

W przypadku powłok hipersprężystych (zob. p. 2.2.5 i p. 2.2.6) tensory sprężystości obliczane są z zależności

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_1^{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \partial \boldsymbol{\varepsilon}_\beta}, & \mathbf{C}_3^{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \partial \boldsymbol{\kappa}_\beta}, \\ \mathbf{C}_4^{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{\kappa}_\alpha \partial \boldsymbol{\varepsilon}_\beta}, & \mathbf{C}_2^{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{\kappa}_\alpha \partial \boldsymbol{\kappa}_\beta},\end{aligned}\quad (4.4.8)$$

gdzie Φ jest skalarną funkcją gęstości energii sprężystej powłoki.

Obliczenie zlinearyzowanej postaci miar odkształceń $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta$ i $\Delta \boldsymbol{\kappa}_\beta$ w reprezentacji przestrzennej, jako elementów przestrzeni stycznej w punkcie $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$, przebiega według tego samego schematu jak i w przypadku $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta$ i $\delta \boldsymbol{\kappa}_\beta$:

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta &= \frac{d}{d\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\eta)|_{\eta=0} = \Delta \mathbf{v}_{,\beta} + \vec{\mathbf{y}}_{,\beta} \times \Delta \mathbf{w}, \\ \Delta \boldsymbol{\kappa}_\beta &= \frac{d}{d\eta} d\boldsymbol{\kappa}_\beta(\eta)|_{\eta=0} = \Delta \mathbf{w}_{,\beta}.\end{aligned}\quad (4.4.9)$$

Podstawienie (4.4.5)–(4.4.9) do (4.4.4) prowadzi do

$$\delta G_i[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] = \iint_{M \setminus \Gamma} (\Delta \sigma_M + \Delta \sigma_G) da. \quad (4.4.10)$$

Część materialną $\Delta\sigma_M$ wyrażenia podcałkowego w (4.4.10), po uwzględnieniu definicji (4.1.16) i (4.1.17) wirtualnych odkształceń oraz relacji (4.4.6), można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_M &= \Delta\mathbf{n}^\alpha \cdot (\mathbf{v}_{,\alpha} + \vec{\mathbf{y}}_{,\alpha} \times \mathbf{w}) + \Delta\mathbf{m}^\alpha \cdot \mathbf{w}_{,\alpha} = \delta\varepsilon_\alpha \cdot \Delta\mathbf{n}^\alpha + \delta\kappa_\alpha \cdot \Delta\mathbf{m}^\alpha \\ &= \delta\varepsilon_\alpha \cdot \left(\mathbf{C}_1^{\alpha\beta} \Delta\varepsilon_\beta + \mathbf{C}_3^{\alpha\beta} \Delta\kappa_\beta \right) + \delta\kappa_\alpha \cdot \left(\mathbf{C}_4^{\alpha\beta} \Delta\varepsilon_\beta + \mathbf{C}_2^{\alpha\beta} \Delta\kappa_\beta \right).\end{aligned}\quad (4.4.11)$$

Drugi składnik $\Delta\sigma_G$ w (4.4.10), pochodzący od zmian geometrii powłoki, ma formę

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_G &= (\Delta\mathbf{w} \times \mathbf{n}^\beta) \cdot (\mathbf{v}_{,\beta} + \vec{\mathbf{y}}_{,\beta} \times \mathbf{w}) + \mathbf{n}^\beta \cdot (\Delta\mathbf{v}_{,\beta} \times \mathbf{w}) + (\Delta\mathbf{w} \times \mathbf{m}^\beta) \cdot \mathbf{w}_{,\beta} \\ &= -\mathbf{v}_{,\beta} \cdot (\mathbf{n}^\beta \times \Delta\mathbf{w}) - \mathbf{w}_{,\beta} \cdot (\mathbf{m}^\beta \times \Delta\mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot (\mathbf{n}^\beta \times \Delta\mathbf{v}_{,\beta}) \\ &\quad + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}^\beta)(\vec{\mathbf{y}}_{,\beta} \cdot \Delta\mathbf{w}) - (\mathbf{n}^\beta \cdot \vec{\mathbf{y}}_{,\beta})(\mathbf{w} \cdot \Delta\mathbf{w}).\end{aligned}\quad (4.4.12)$$

W notacji symboliczno-macierzowej wyrażenia (4.4.11) i (4.4.12) przyjmują postać

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_M &= (\mathbb{B}\mathbf{w})^T \Delta\mathbf{s} = (\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbb{C} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbb{C} \mathbb{B} \Delta\mathbf{w}, \\ \Delta\sigma_G &= \mathbf{w}^T (\mathbb{B}^T(\mathbf{u}) \mathbf{s})_{,\mathbf{u}} \Delta\mathbf{w} = (\mathbb{D}\mathbf{w})^T \mathbb{G} \mathbb{D} \Delta\mathbf{w},\end{aligned}\quad (4.4.13)$$

co pozwala pochodną kierunkową wewnętrznej pracy wirtualnej (4.4.10) zapisać w zwartej postaci

$$\delta G_i[\mathbf{u}, t; \Delta\mathbf{w}, \mathbf{w}] = \iint_{M \setminus \Gamma} ((\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbb{C} (\mathbb{B} \Delta\mathbf{w}) + (\mathbb{D}\mathbf{w})^T \mathbb{G} (\mathbb{D} \Delta\mathbf{w})) \, da. \quad (4.4.14)$$

W (4.4.13) i (4.4.14), \mathbb{C} oznacza styczną macierz konstytutywną określoną przez

$$\mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{\alpha\beta} & \mathbf{C}_3^{\alpha\beta} \\ \mathbf{C}_4^{\alpha\beta} & \mathbf{C}_2^{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad (4.4.15)$$

\mathbb{B} i \mathbb{D} są macierzowymi operatorami różniczkowymi z relacji (4.1.24), zaś \mathbb{G} ujmuje uogólnione miary naprężeń początkowych

$$\mathbb{G}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{n}^1 \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{n}^2 \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{m}^1 \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{m}^2 \times (\cdot) \\ \mathbf{n}^1 \times (\cdot) & \mathbf{n}^2 \times (\cdot) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad (4.4.16)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{n}^\beta \otimes (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta) - \left(\mathbf{n}^\beta \cdot (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta) \right) \mathbf{1}. \quad (4.4.17)$$

Wszystkie wchodzące do (4.4.16) zależności są funkcjami przemieszczeń poprzez równania konstytutywne i relacje kinematyczne.

Funkcjonał wirtualnej pracy sił bezwładności, podlegający linearyzacji w (4.4.2), ma postać

$$\begin{aligned} G_d[\mathbf{u}(\eta), t; \mathbf{w}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{b}(\eta) \, da \\ &= \iint_{M \setminus \Gamma} \{ \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_1(\eta) \ddot{\mathbf{u}}(\eta) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{J}_2(\eta) \mathbf{a}(\eta) \} \, da. \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

Ze względu na omawiane później różne sposoby formułowania algorytmów całkowania po czasie, obliczenie pochodnej kierunkowej (4.4.18) przeprowadzimy w dwóch etapach. W pierwszym etapie pola prędkości i przyspieszeń traktujemy jako zmienne niezależne. Prowadzi to do wyrażenia

$$\begin{aligned} \delta G_d[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} \{ \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_1 \Delta \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{J}_2 \Delta \mathbf{a} \\ &\quad + \mathbf{w} \cdot [\mathbf{J}_2 \boldsymbol{\Omega} - \text{ad}(\mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega})] \Delta \boldsymbol{\omega} \\ &\quad + \mathbf{w} \cdot [\mathbf{J}_2 \mathbf{A} - \text{ad}(\mathbf{J}_2 \mathbf{a}) + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\Omega} \\ &\quad - \boldsymbol{\Omega} \text{ad}(\mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega})] \Delta \mathbf{w} \} \, da, \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

które ma dobrą interpretację fizyczną w terminach prędkości obrotowej i przyspieszenia obrotowego. Zależność (4.4.19) w notacji symboliczno-macierzowej przyjmie postać

$$\delta G_d[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] = \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{w}^T \{ \mathfrak{m}_\rho \Delta \mathbf{a} + \mathfrak{c}_\rho \Delta \mathbf{v} + \mathfrak{k}_\rho \Delta \mathbf{w} \} \, da, \quad (4.4.20)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_\rho &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix}, & \mathfrak{c}_\rho &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\Omega} - \text{ad}(\mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix}, \\ \mathfrak{k}_\rho &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 \mathbf{A} - \text{ad}(\mathbf{J}_2 \mathbf{a}) + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \text{ad}(\mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

W drugim etapie uwzględniamy, że wielkości $\Delta \boldsymbol{\omega}$ i $\Delta \mathbf{a}$ są wirtualnymi zmianami wektorów prędkości obrotowej i przyspieszenia obrotowego (por. (4.2.33) i (4.2.40)), które wyrażone przez pochodne czasowe przyrostu obrotu w reprezentacji przestrzennej mają postać

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\omega} &= \delta \boldsymbol{\omega}[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}] = \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times \Delta \mathbf{w}, \\ \Delta \mathbf{a} &= \delta \mathbf{a}[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}] = \Delta \dot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\omega} \times \Delta \dot{\mathbf{w}} - \mathbf{a} \times \Delta \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Podstawienie (4.4.22) do (4.4.19) daje

$$\delta G_d[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] = \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{w}^T \{ \mathfrak{m}_\rho \Delta \ddot{\mathbf{w}} + \bar{\mathfrak{c}}_\rho \Delta \dot{\mathbf{w}} + \bar{\mathfrak{k}}_\rho \Delta \mathbf{w} \} da, \quad (4.4.23)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{c}}_\rho &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\Omega} - \text{ad}(\mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathfrak{k}}_\rho &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\text{ad}(\mathbf{J}_2 \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Macierze (4.4.21) i (4.4.24) reprezentują dynamiczne charakterystyki włókna powłoki. Analogicznie do pojęć występujących w dynamice ciała sztywnego, macierze te można nazwać, odpowiednio, *macierzą mas*, *macierzą żyroskopową*²² i *macierzą sztywności odśrodkowej (cyrkulacyjnej)*. Cechą charakterystyczną tych macierzy w reprezentacji przestrzennej jest ich zależność, poprzez tensor bezwładności, od wartości aktualnego obrotu \mathbf{Q} . Zauważmy, że tylko macierz \mathfrak{m}_ρ jest symetryczna. Macierz $\bar{\mathfrak{c}}_\rho$ zależy liniowo od prędkości obrotowej, zaś macierz $\bar{\mathfrak{k}}_\rho$ zależy liniowo od przyspieszenia obrotowego i kwadratowo od prędkości obrotowej.

Przyjmując używane najczęściej w klasycznej mechanice powłok postacie tensorów konstytutywnych dla pędu i momentu pędu (zob. p. 2.2.8))

$$\mathbf{J}_1 = m_0 \mathbf{1}, \quad \mathbf{J}_2 = I_0 \mathbf{1}, \quad (4.4.25)$$

z (4.4.21) otrzymamy $\mathfrak{c}_\rho = \mathfrak{k}_\rho = \mathbf{0}$, zaś macierze (4.4.21)₁ i (4.4.24) ulegają znacznemu uproszczeniu

$$\mathfrak{m}_\rho = \begin{bmatrix} m_0 \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_0 \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathfrak{c}}_\rho = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_0 \text{ad } \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathfrak{k}}_\rho = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_0 \text{ad } \mathbf{a} \end{bmatrix}. \quad (4.4.26)$$

W tym przypadku macierz \mathfrak{m}_ρ jest już diagonalna, natomiast macierze $\bar{\mathfrak{c}}_\rho$ i $\bar{\mathfrak{k}}_\rho$ są skośnie symetryczne. W zależnościach (4.4.25) i (4.4.26), m_0 jest gęstością masy a I_0 skalarnym współczynnikiem bezwładności przekroju poprzecznego powłoki, mierzonymi na jednostkę powierzchni M . Dla tensorów konstytutywnych pędu i momentu pędu (4.4.25) funkcjonal G_d , wyrażający wirtualną pracę sił bezwładności (4.1.34)₂, daje się prosto wyrazić przez macierz \mathfrak{m}_ρ i przyjmuje postać

$$G_d[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] = \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{w}^T \mathfrak{b} da = \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{w}^T \mathfrak{m}_\rho \mathbf{a} da. \quad (4.4.27)$$

²²Powiązane z antysymetryczną macierzą żyroskopową $\bar{\mathfrak{c}}_\rho$ siły żyroskopowe $-\bar{\mathfrak{c}}_\rho \Delta \dot{\mathbf{w}}$ nie powodują rozpraszania energii.

Funkcjonał zewnętrznej pracy wirtualnej podlegający linearyzacji w (4.4.2) ma postać

$$G_e[\mathbf{u}(\eta), t; \mathbf{w}] = \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{p}(\eta) da + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_\Gamma^T \mathbf{p}_\Gamma(\eta) dl + \int_{\partial M_f} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^*(\eta) dl + \sum_a \mathbf{w}_a^T \mathbf{p}_a(\eta). \quad (4.4.28)$$

Przyjmując, że obciążenia zewnętrzne, działające na powłokę, mogą również zależeć od deformacji, oznaczmy przez

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(\mathbf{u}) &= \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{p}(\mathbf{u}), & \mathbb{F}_\Gamma(\mathbf{u}) &= \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{p}_\Gamma(\mathbf{u}), \\ \mathbb{F}^*(\mathbf{u}) &= \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{s}^*(\mathbf{u}), & \mathbb{F}_a(\mathbf{u}) &= \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{p}_a(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

ich pochodne względem \mathbf{u} . Wtedy pochodna kierunkowa zewnętrznej pracy wirtualnej (4.4.28) może być formalnie zapisana w postaci

$$\begin{aligned} \delta G_e[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{w}^T (\mathbb{F} \Delta \mathbf{w}) da + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_\Gamma^T (\mathbb{F}_\Gamma \Delta \mathbf{w}_\Gamma) dl \\ &+ \int_{\partial M_f} \mathbf{w}^T (\mathbb{F}^* \Delta \mathbf{w}) dl + \sum_a \mathbf{w}_a^T (\mathbb{F}_a \Delta \mathbf{w}_a). \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

Jawna postać δG_e musi być jednak wyprowadzona oddzielnie dla każdego szczególnego typu obciążenia²³.

4.4.2. Technika sukcesywnej linearyzacji, metoda Newtona

Zakładamy, że typowy problem nieliniowy statyki powłok można scharakteryzować pojedynczym parametrem $\lambda \in \mathbb{R}$, nazywanym *parametrem sterującym*.

²³Przykładowo, dla obciążenia typu ciśnienie otrzymuje się $G_e[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] = \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{v} da \equiv \iint_{\overline{M} \setminus \overline{\Gamma}} \overline{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} d\overline{a}$, gdzie kreska nad symbolem oznacza wielkość zdefiniowaną na konfiguracji aktualnej $\overline{M} = M(t)$. W zależności od definicji wektora \mathbf{p} , przy oznaczeniach q — wartość ciśnienia oraz \mathbf{n} i $\overline{\mathbf{n}}$ — wektory normalne do powierzchni M i \overline{M} , wyróżnia się następujące często występujące przypadki obciążenia:

- $\overline{\mathbf{p}} = -\overline{q} \overline{\mathbf{n}}$ tzw. *ciśnienie hydrostatyczne*, o kierunku normalnym do powierzchni aktualnej \overline{M} , mierzone na jej jednostkę powierzchni (na ogół zachowawcze, istnieje potencjał),
- $\mathbf{p}_0 = -q_0 \overline{\mathbf{n}}$ tzw. *ciśnienie śledzące*, o kierunku normalnym do powierzchni aktualnej \overline{M} , ale mierzone na jednostkę powierzchni M (na ogół niezachowawcze),
- $\mathbf{p}_0 = -q_0 \mathbf{n}$ tzw. *ciśnienie martwe*, o stałym kierunku normalnym do powierzchni M (na ogół niezachowawcze).

Zazwyczaj parametr λ związany jest ze specyfikacją obciążenia zewnętrznego \mathfrak{p} , \mathfrak{p}_Γ lub \mathfrak{s}^* . Taki rodzaj obciążenia nazywamy *obciążeniem jednoparametrowym*.

Przyjmujemy, że gładkim w pewnym zakresie Λ zmianom parametru sterującego $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ odpowiada lokalnie regularne rozwiązanie sformułowanego w przemieszczeniach zagadnienia brzegowego. Rozwiązanie to kreśli w przestrzeni konfiguracyjnej parametryzowaną przez λ odcinkowo gładką krzywą

$$\mathbb{R} \supset \Lambda \ni \lambda \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}(\lambda) = (\mathbf{u}(\lambda), \mathbf{Q}(\lambda)) \in \mathcal{U}_A, \quad (4.4.31)$$

zwaną *ścieżką równowagi*²⁴.

Oparta na funkcjonale $G: \mathcal{U}_A \times \mathcal{W}_A \rightarrow \mathbb{R}$ zasada wirtualnych przemieszczeń jest najbardziej ogólnym ze słabych sformułowań zagadnienia brzegowego, dającym już podstawę do uzyskania rozwiązań. Na mocy zasady wirtualnych przemieszczeń, dla ustalonego λ , lokalnie (w punkcie regularnym) kinematycznie dopuszczalne pole uogólnionych przemieszczeń $\mathbf{u}(\lambda) \in \mathcal{U}_A$ jest słabym rozwiązaniem wcześniej postawionego zagadnienia brzegowego powłoki, jeśli zachodzi

$$G[\mathbf{u}(\lambda); \mathbf{w}] = G_i[\mathbf{u}(\lambda); \mathbf{w}] - G_e[\mathbf{u}(\lambda); \mathbf{w}] = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}(\lambda)} \mathcal{W}_A. \quad (4.4.32)$$

Procedura przyrostowo–iteracyjnego śledzenia ścieżki równowagi $\mathbf{u}(\lambda) \in \mathcal{U}_A$ formułowana jest następująco: Poszukujemy rozwiązań w skończonej liczbie uporządkowanych sekwencyjnie dyskretnych wartości parametru sterującego $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots \in \Lambda$. Zakładamy, że znane są rozwiązania do wartości parametru λ_n włącznie. Dla kolejnej wartości parametru λ_{n+1} oznaczymy przez $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}(\lambda_{n+1}) \in \mathcal{U}_A$ aktualnie poszukiwane rozwiązanie, a przez $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} \in \mathcal{U}$ jego znane i -te przybliżenie. Zaznaczmy, że $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} \in \mathcal{U}$ nie musi leżeć na poszukiwanej ścieżce równowagi $\mathbf{u}(\lambda) \in \mathcal{U}_A$. Zadaniem jest obliczenie poprawki $\Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)}$, która jednocześnie ze znanym $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$ określi jednoznacznie następne przybliżenie $\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}$ poszukiwanego rozwiązania \mathbf{u}_{n+1} .

Większość wydajnych metod konstrukcji kolejnych poprawek $\Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)}$ zbliżających nas do rozwiązania \mathbf{u}_{n+1} opiera się na technice sukcesywnej linearyzacji równania (4.4.32). W celu wyznaczenia następnego przybliżenia $\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}$ do \mathbf{u}_{n+1} , zastępuje się równanie (4.4.32) równaniem zlinearyzowanym w otoczeniu $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$

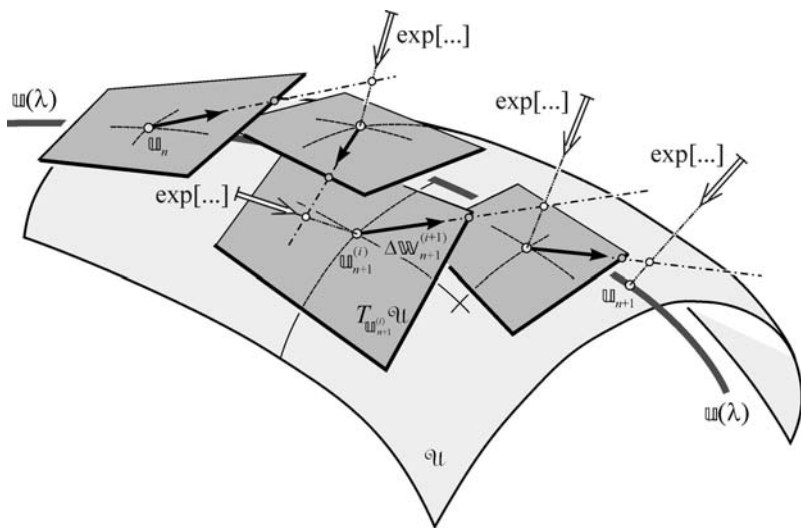
$$\delta G \left[\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}; \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)}, \mathbf{w} \right] + G \left[\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}; \mathbf{w} \right] = 0. \quad (4.4.33)$$

Tutaj $\delta G \left[\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}; \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)}, \mathbf{w} \right]$ jest pochodną kierunkową (4.4.2) funkcjonau G w punkcie $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} \in \mathcal{U}$ w kinematycznie dopuszczalnym kierunku $\Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)} \in T_{\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}} \mathcal{U}_A$.

²⁴Gładkim zmianom λ nie musi odpowiadać gładka krzywa $\mathbf{u}(\lambda)$ na \mathcal{U}_A (np. mogą pojawić się punkty rozgałęzień).

Fizyczny sens równania (4.4.33) jest standardowy. Składnik $G[\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}; \mathbf{w}]$ reprezentuje *niezrównoważone siły* w konfiguracji $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} \in \mathcal{U}$, zaś liniowy względem niewiadomej $\Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)}$ składnik $\delta G[\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}; \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)}, \mathbf{w}]$ reprezentuje tzw. *sztynność styczną*. Jeśli $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$ pokryje się z konfiguracją równowagi $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{u}_{n+1} \in \mathcal{U}_A$, to wówczas, zgodnie z zasadą wirtualnych przemieszczeń, musi zachodzić $G[\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}; \mathbf{w}] = 0$ dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych wirtualnych przemieszczeń $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}} \mathcal{U} \equiv T_{\mathbf{u}_{n+1}} \mathcal{U}_A$.

Metoda określona przez (4.4.33) do analizy nieliniowych równań funkcyjnych na przestrzeni Banacha jest znana jako metoda Newtona lub Newtona–Kantorowicza (KRASNOSEL'SKIJ i inni [1972]). Podstawowe twierdzenie o zbieżności w przestrzeni Banacha mówi, że jeśli \mathbf{u}_{n+1} jest punktem regularnym, to kolejne przybliżenia $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$ otrzymane metodą Newtona zbiegają się do \mathbf{u}_{n+1} z prędkością postępu geometrycznego pod warunkiem, że przybliżenie początkowe $\mathbf{u}_{n+1}^{(0)}$ jest dostatecznie bliskie \mathbf{u}_{n+1} . Wynika stąd, że główny problem, decydujący o efektywności metody Newtona, wiąże się z wyborem odpowiedniego przybliżenia początkowego²⁵ $\mathbf{u}_{n+1}^{(0)}$ do rozwiązania \mathbf{u}_{n+1} .



Rys. 4.4.1. Iteracyjna procedura rozwiązywania zadania nieliniowego na rozmaiłości (lokalnie).

W rozpatrywanym tu przypadku nieliniowej analizy powłok, przestrzeń konfiguracyjna \mathcal{U} nie jest przestrzenią liniową. Nawet przy ograniczeniu odwzorowań

²⁵W metodach kontynuacyjnych (przyrostowo–iteracyjnych lub różnicowych), kiedy podstawiamy $\mathbf{u}_{n+1}^{(0)} \equiv \mathbf{u}_n$, problem sprowadza się do wyboru odpowiedniej wartości przyrostu parametru sterującego lub kroku całkowania.

do pojedynczego płata lub do powłoki regularnej, gdy powierzchnia odniesienia M jest dwuwymiarową rozmaitością różniczkową, przestrzeń konfiguracyjna \mathcal{U} ma strukturę nieskończenie wymiarowej grupy Banacha–Liego. Dyskutowaną tutaj metodę (4.4.33) powinno się więc traktować raczej jako metodę *typu Newtona*, ponieważ twierdzenia dotyczące samej metody Newtona konstruowano na przestrzeniach liniowych.

Podstawową wadą metody (4.4.33) jest konieczność rozwiązywania dla każdej iteracji równania liniowego z nowym operatorem stycznym. Z tego powodu do równania (4.4.33) wprowadzane są często różnego typu modyfikacje. Jednak uproszczeniu obliczeń, wynikającemu z wprowadzonych modyfikacji, towarzyszy na ogół pogarszanie się zbieżności rozwiązania. W rezultacie, w zadaniach silnie nieliniowych zmodyfikowane metody często zawodzą lub stają się mniej efektywne od wersji standardowej.

Typowa procedura rozwiązywania iteracyjnego problemu statycznego składa się więc z trzech zasadniczych kroków:

1. Znając i -te przybliżenie $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} = \left(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{Q}_{n+1}^{(i)} \right) \in \mathcal{U}$ do poszukiwanego rozwiązania $(\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{Q}_{n+1}) \in \mathcal{U}_A$, odpowiadającego wartości parametru sterującego $\lambda_{n+1} \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, obliczamy wielkości niezbędne do budowy równania zlinearyzowanego typu (4.4.33).
2. Rozwiązujemy zlinearyzowane równanie typu (4.4.33), wyznaczając poprawkę $\Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)}$ do znanego przybliżenia $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$.
3. Obliczamy następne przybliżenie $\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} \left(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)} \right) \in \mathcal{U}$ do poszukiwanego rozwiązania $(\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{Q}_{n+1}) \in \mathcal{U}_A$.

Proces 1.–3. powtarzamy aż do wyznaczenia przybliżenia dostatecznie bliskiego (w sensie przyjętej definicji) do wartości dokładnej \mathbf{u}_{n+1} , leżącej na ścieżce równowagi. Obliczenia wykonujemy dla ciągu wartości $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots \in \Lambda$ hipotetycznie potrzebnych do śledzenia całej ścieżki równowagi w analizowanym zakresie zmienności parametru sterującego $\lambda \in \Lambda$.

4.4.3. Aktualizacja zmiennych

Główne zadanie trzeciego kroku procedury rozwiązywania iteracyjnego z p. 4.4.2, tj. uaktualnienie przemieszczeń $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$, dotyczy pola obrotów \mathbf{Q} . Pole translacji \mathbf{u} , przyjmując wartości w przestrzeni wektorowej E , podlega zwykłemu dodawaniu (akumulacji addytywnej).

Zgodnie z pierwszym i drugim krokiem procedury przyjmujemy, że $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} = \left(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{Q}_{n+1}^{(i)} \right) \in \mathcal{U}$ jest znanym i -tym przybliżeniem do poszukiwanego rozwiązania $\mathbf{u}_{n+1} \in \mathcal{U}_A$, a po wykorzystaniu schematu (4.3.27) dla części obrotowej, poprawkę w postaci $\Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)} = \left(\Delta \mathbf{v}_{n+1}^{(i+1)}, \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)} \right) \in T_{\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}} \mathcal{U}$ obliczamy

jako rozwiązanie problemu zlinearyzowanego typu (4.4.33). Kolejne przybliżenie $\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} = \left(\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}, \mathbf{Q}_{n+1}^{(i+1)} \right) \in \mathcal{U}$ wyznaczamy stosując reguły

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{v}_{n+1}^{(i+1)}, \quad \mathbf{Q}_{n+1}^{(i+1)} = \exp(\Delta \mathbf{W}_{n+1}^{(i+1)}) \mathbf{Q}_{n+1}^{(i)}, \quad (4.4.34)$$

gdzie $\Delta \mathbf{W}_{n+1}^{(i+1)} = \text{ad} \left(\Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)} \right)$.

Użyta w (4.4.34) postać funkcji wykładniczej (4.2.17) dana jest w tym przypadku wzorem

$$\exp \mathbf{W} = \mathbf{1} + \frac{\sin w}{w} \mathbf{W} + \frac{1 - \cos w}{w^2} \mathbf{W}^2, \quad w = -\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{W}^2, \quad (4.4.35)$$

$$\forall \mathbf{W} \in so(3),$$

również obowiązującym dla tensora $\Delta \mathbf{W}_{n+1}^{(i+1)} \in so(3)$ ze wzoru (4.4.34)₂.

Po obliczeniu przybliżenia $\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} \in \mathcal{U}$ zgodnie z (4.4.34), na podstawie zależności kinematycznych obliczamy towarzyszące $\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}$ miary odkształceń $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{(i+1)} = \left((\boldsymbol{\epsilon}_\beta)_{n+1}^{(i+1)}, (\boldsymbol{\kappa}_\beta)_{n+1}^{(i+1)} \right)$. Odpowiadające $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{(i+1)}$ miary naprężeń $\boldsymbol{s}_{n+1}^{(i+1)} = \left((\mathbf{n}^\beta)_{n+1}^{(i+1)}, (\mathbf{m}^\beta)_{n+1}^{(i+1)} \right)$ wyznaczamy następnie wykorzystując równania konstytutywne.

4.4.4. Główne aspekty implementacyjne procedury iteracyjnej

Poza wymienioną w p. 4.4.3 aktualizacją przemieszczeń $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$, z implementacją procedury iteracyjnej wiążą się następujące zagadnienia:

- Wybór odpowiednich miar do kryteriów oceny zbieżności procesu iteracyjnego. Klasyczne miary definiowane są za pomocą norm odpowiedniej przestrzeni liniowej. W rozpatrywanym przypadku przestrzeń konfiguracyjna \mathcal{U} nie posiada struktury przestrzeni liniowej.
- Wprowadzenie przestrzennej aproksymacji skończenie wymiarowej, która ze względu na strukturę \mathcal{U} także nie może być standardową.
- Lokalizacja na ścieżce równowagi i określenie rozwiązań osobliwych (punktów nieregularnych).
- W przypadku rozszerzenia na zagadnienia dynamiki, wprowadzenie aproksymacji względem czasu, która ze względu na strukturę \mathcal{U} także nie może być standardową.

Z wymienionych zagadnień, charakteryzujących się różną skalą złożoności i trudności, kluczowym ze względu na obszerność i uciążliwość realizacji jest aproksymacja skończenie elementowa. Przedstawiona w podrozdziale 4.3 ogólna koncepcja interpolacji rozwinięta zostanie w rozdziale 5. Podamy tam również szczegóły formułowania powłokowych elementów skończonych, odpowiadających sformułowanej wcześniej ogólnej mechanice powłok.

4.5. Metody kontynuacyjne w nieliniowych zagadnieniach statyki

4.5.1. Zadania metod kontynuacyjnych

Typowe zadanie nieliniowej analizy konstrukcji polega na znalezieniu nie tylko pojedynczego rozwiązania, odpowiadającego ustalonym wartościom obciążeń zewnętrznych, ale również całej rodziny rozwiązań przy lokalnie gładkich zmianach parametrów kontrolnych (zazwyczaj obciążenia).

W przypadku obciążenia proporcjonalnego tylko do pojedynczego parametru skalarnego λ , śledzenie ścieżki rozwiązania w funkcji tego parametru można uzyskać metodami kontynuacyjnymi (przyrostowymi, według literatury inżynierskiej). Istnieje obszerna literatura tego zagadnienia, w której problem jest analizowany zarówno formalnie od strony matematycznej (zob. np. KELLER [1978], DEN HEIJER i RHEINBOLDT [1981], RHEINBOLDT [1986], ORTEGA i RHEINBOLDT [2000]), jak i od strony szczególnych implementacji kodów obliczeniowych w zagadnieniach inżynierskich (zob. np. WASZCZYSZYN [1981, 1983], WASZCZYSZYN, CICHON i RADWAŃSKA [1990, 1994], KLEIBER [1995], CRISFIELD [1997], RIKS [1998], CARDONA i HUESPE [1999]). Rozważania niniejszego podrozdziału ograniczamy do przedstawienia praktycznej strony stosowanych w programach inżynierskich technik śledzenia ścieżek równowagi skończenie wymiarowych problemów dyskretnych.

O ile można uznać, że podstawowe koncepcje metod kontynuacyjnych są już dobrze opracowane, to ich realizacja komputerowa wymaga indywidualnej pomyślności. Obejmuje to między innymi następujące zadania:

- określenie maksymalnej i minimalnej wartości przyrostu parametru kontrolnego;
- dobór zasad określania wielkości zmian przyrostu parametru kontrolnego w trakcie analizy problemu;
- określenie sposobu rozpoznawania braku zbieżności procesu iteracyjnego (w przeciwieństwie do jego wolnej zbieżności) i decydowania o zakończeniu obliczeń lub redefiniowaniu wielkości przyrostu parametru kontrolnego;
- określenie kryterium zbieżności procesu iteracyjnego i jego zakończenia;
- wybór odpowiedniej miary (normy) dla niewiadomych problemu;
- kryterium oceny, czy rozwiązanie pozostaje na śledzonej ścieżce rozwiązania.

Przedstawioną w tym podrozdziale koncepcję obliczeniową zrealizowano w programach autorskich, wykorzystanych do analizy numerycznej przykładów przedstawionych w rozdziale 6. W tych programach rozwiązanie nieliniowego układu równań dyskretnego zadania mechaniki powłok jest realizowane w procesie przyrostowym. W procesie przyrostowym stosuje się zwykle jednokrokową metodę Eulera w wersji klasycznej bez iteracji (z/bez współczynnika samokorygującego pierwszego rzędu), albo z iteracjami odpowiadającymi zmodyfikowanej

lub standardowej wersji metody Newtona–Raphsona. Sterowanie procesem rozwiązania jest wykonywane w sposób automatyczny, półautomatyczny lub interaktywny.

4.5.2. Cel algorytmu obliczeniowego

Rozważmy sposoby poszukiwania rozwiązań problemu skończenie wymiarowego opisanego nieliniowym układem równań algebraicznych, uzyskanych na drodze linearyzacji a następnie dyskretyzacji problemu ciągłego. Przykładem takiego problemu może być zawężona do zagadnień statyki, zlinearyzowana techniką podaną w p. 4.4.2 a następnie zdyskretyzowana sposobami opisanymi w podrozdziale 4.3 zasada wirtualnych przemieszczeń nieliniowej mechaniki powłok w postaci $G[\mathbf{u}(\lambda); \mathbf{w}] = 0$, gdzie $\mathbf{u}(\lambda) \in \mathcal{U}_A$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{U}_A$. Skalar λ nazywa się *parametrem sterującym*, zaś zależność $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda)$ jest poszukiwanym rozwiązaniem, nazywanym w mechanice konstrukcji *ścieżką równowagi*.

W sformułowaniu algorytmu zakładamy, że w pewnym zakresie $A \subset \mathbb{R}$ zmienności parametru sterującego wektor prawych stron (obciążenia) jest proporcjonalny do pojedynczego parametru λ . W ramach procedury iteracyjnej poszukujemy rozwiązania w skończonej liczbie uporządkowanych sekwencyjnie dyskretnych wartości parametru sterującego $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots \in A$. Oznaczając przez λ_n wartość λ po kroku n , nadajemy przyrostowo-iteracyjnemu równaniu z p. 4.3.2 postać macierzową²⁶

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{(l)} \Delta \mathbf{q}^{(i+1)} = \Delta \lambda^{(i+1)} \mathbf{p}_{\text{ref}}^{(i)} + z \mathbf{j}^{(i)}, & & \\ \delta G \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}; \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)}, \mathbf{w} \\ \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}; \mathbf{w} \\ \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)} \end{array} \right] & \longleftrightarrow & \begin{array}{c} \mathbb{K}^{(l)} \Delta \mathbf{q}^{(i+1)} \\ \Delta \lambda^{(i+1)} \mathbf{p}_{\text{ref}}^{(i)} + z \mathbf{j}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{q}^{(i+1)} \end{array} \end{array} \quad (4.5.1)$$

odpowiedniki
w dyskretyzacji MES

będącą podstawą dalszej dyskusji. Tutaj i oznacza numer aktualnej iteracji, l numer ostatniej aktualizacji macierzy sztywności (operatora styczności) $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}_T$, natomiast parametr z jest tzw. współczynnikiem nadrelaksacji metody samokorygującej pierwszego rzędu (zob. np. STRICKLIN, HAISLER i RIESEMANN [1971, 1973]).

Zgodnie z ogólną koncepcją procedury iteracyjnej (zob. p. 4.4.2) zakładamy, że wszystkie zmienne stanu w i -tej iteracji, potrzebne do budowy równania (4.5.1), są znane. Celem jest znalezienie poprawki $\Delta \mathbf{q}^{(i+1)}$, która jednocześnie ze znanym $\mathbf{q}^{(i)}$ określi jednoznacznie następne przybliżenie $\mathbf{q}^{(i+1)}$ do poszukiwanego rozwiązania $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}(\lambda_n)$. Tutaj

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}^T \in \mathbb{R}^N \quad (4.5.2)$$

²⁶Jest to wynik skończenie wymiarowej reprezentacji (linearyzacji/dyskretyzacji) problemu ciągłego $G[\mathbf{u}(\lambda); \mathbf{w}] = 0$.

jest N -wymiarowym wektorem uogólnionych przemieszczeń (stopni swobody), otrzymanym w wyniku dyskretyzacji problemu ciągłego²⁷. W równaniu (4.5.1) wyrażenie

$$\Delta\lambda^{(i+1)}\mathbf{p}_{\text{ref}}^{(i)} = \left(\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}\right)\mathbf{p}_{\text{ref}}^{(i)}, \quad \Delta\lambda = \sum_{k=1}^i \Delta\lambda^{(k)}, \quad (4.5.3)$$

jest zmianą wektora prawych stron (obciążenia) \mathbf{p} i sumarycznym przyrostem parametru sterującego λ , natomiast

$$\mathbf{j}^{(i)} = \lambda^{(i)}\mathbf{p}_{\text{ref}}^{(i)} + \mathbf{p}_{\text{old}} - \mathbf{r}^{(i)} \quad (4.5.4)$$

jest wektorem sił niezrównoważonych. W (4.5.4), \mathbf{r} przedstawia węzłowy wektor sił wewnętrznych reprezentujących wewnętrzny stan naprężeń ciała po dyskretyzacji skończenie elementowej.

W standardowej wersji metody Newtona–Raphsona przyjmujemy $l = i$, co oznacza, że $\mathbb{K}^{(l)} = \mathbb{K}^{(i)}$ jest aktualną styczną macierzą sztywności. W wersji zmodyfikowanej macierz $\mathbb{K}^{(l)} = \mathbb{K}^{(0)} = \text{const}$ pozostaje stała w trakcie kolejnych iteracji $i > 0$ w ramach tego samego kroku n .

Wprowadzenie w (4.5.4) dodatkowego wektora \mathbf{p}_{old} ujmuje pewną klasę obciążeń wieloparametrowych, dopuszczając odcinkową (w ramach przyrostów) zmianę obciążenia zewnętrznego układu mechanicznego. Najprostszy sposób realizacji wieloparametrowości obciążenia można uzyskać przez „restartowanie” obliczeń, w ramach rekurencyjnej reguły uaktualniania ($\mathbf{p}_{\text{old}}, \lambda$)

$$(\text{nowe})\mathbf{p}_{\text{old}} \equiv \lambda (\text{aktualne})\mathbf{p}_{\text{ref}} + (\text{aktualne})\mathbf{p}_{\text{old}} \quad (4.5.5)$$

i określania (wczytywania) nowego wektora odniesienia

$$(\text{nowe})\mathbf{p}_{\text{ref}} \quad \text{przyjmując} \quad \lambda = 0. \quad (4.5.6)$$

Wektor \mathbf{p}_{old} zawiera kumulację historii obciążania układu do chwili ostatniej zmiany sposobu obciążenia konstrukcji. Po określeniu nowego wektora odniesienia obciążeń zewnętrznych \mathbf{p}_{ref} , kontynuujemy obliczenia zgodnie z (4.5.1)–(4.5.4).

Podstawowa trudność, a zarazem jedno z zadań technik śledzenia ścieżek równowagi $\mathbf{q}(\lambda)$, wiąże się z wykrywaniem i przechodzeniem punktów osobliwych na śledzonej ścieżce równowagi. Te punkty odpowiadają stanom krytycznym badanego układu mechanicznego.

²⁷Zagadnienie aproksymacji skończenie elementowej mechaniki powłok podamy w rozdziale 5. Omówimy tam szczegóły formułowania powłokowych elementów skończonych, prowadzące do układu równań algebraicznych typu (4.5.1)₁.

4.5.3. Klasyfikacja punktów krytycznych

Klasyfikacja punktów krytycznych wiąże się z typem osobliwości operatora stycznego $\mathbb{K}(\lambda)$ z równania (4.5.1).

Zgodnie z założeniem, w punktach równowagi układu, takich jak $(\mathbf{q}^{(0)}, \lambda^{(0)})$, (\mathbf{q}, λ) lub $(\mathbf{q}_n, \lambda_n)$, obciążenia są zrównoważone, tzn. $\mathbf{j}^{(0)} = \mathbb{O}$, $\mathbf{j} = \mathbb{O}$ lub $\mathbf{j}_n = \mathbb{O}$. Na tej podstawie, wprowadzając oznaczenia wskaźnikowe, można przedstawić równanie (4.5.1) w bardziej przydatnej tu postaci²⁸

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \Delta \mathbf{q} &= \Delta \lambda \mathbf{p}_{\text{ref}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{K}^{(0)} \Delta \mathbf{q}^{(1)} = \Delta \lambda^{(1)} \mathbf{p}_{\text{ref}}^{(0)}, \\ K_{pq} \Delta q_q &= \Delta \lambda p_p, \quad p, q = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{K}(\lambda) = \mathbb{K}(\mathbf{q}(\lambda), \lambda)$, $\mathbf{p}_{\text{ref}} = \mathbf{p}_{\text{ref}}(\lambda) = \mathbf{p}_{\text{ref}}(\mathbf{q}(\lambda), \lambda)$.

Osobliwość układu równań (4.5.7) ma miejsce dla wartości λ , przy których nie istnieje macierz odwrotna $\mathbb{K}^{-1}(\lambda)$. Warunek ten ma postać

$$\det \mathbb{K}(\lambda) \equiv |\mathbb{K}(\lambda)| = 0. \quad (4.5.8)$$

Wartość parametru λ , przy której zachodzi warunek (4.5.8), określa punkt krytyczny równania (4.5.7).

Ze wzoru Cramera rozwiązywania układu równań liniowych metodą wyznaczników wynika, że

$$\Delta q_p \det \mathbb{K}(\lambda) = \Delta \lambda \det \mathbb{K}_p(\lambda), \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad (4.5.9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \det \mathbb{K}_p &\equiv \frac{\partial (\det \mathbb{K})}{\partial K_{rp}} p_r, \quad r = 1, 2, \dots, N, \\ \mathbb{K}_p &\equiv \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1p-1} & p_1 & K_{1p+1} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & \cdots & K_{2p-1} & p_2 & K_{2p+1} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & \cdots & K_{Np-1} & p_N & K_{Np+1} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Z (4.5.9) i (4.5.10) otrzymujemy warunek będący podstawą następującej klasyfikacji typu punktu krytycznego rozwiązania:

$$\Delta \lambda \det \mathbb{K}_p(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta \lambda = 0 \text{ i } \det \mathbb{K}_p(\lambda) \neq 0, \\ \lambda \equiv \lambda_{\text{gr}} - \text{punkt graniczny,} \\ \Delta \lambda \neq 0 \text{ i } \det \mathbb{K}_p(\lambda) = 0, \\ \lambda \equiv \lambda_{\text{kr}} - \text{punkt bifurkacji,} \\ p = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (4.5.11)$$

²⁸W obliczeniach numerycznych warunek równowagi $\mathbf{j} = \mathbb{O}$ jest realizowany w sposób iteracyjny i może być spełniony tylko z przyjętą dokładnością. Zatem, na ogół jest $\mathbf{j}^{(i)} \neq \mathbb{O}$ nawet dla $i = 0$ i wektor sił niezrównoważonych na ogół nie znika z równania (4.5.1).

Powyższe bezpośrednie kryterium wymaga obliczenia $N + 1$ wyznaczników z macierzy kwadratowej $N \times N$. Już dla $N > 3$ to kryterium staje się mało przydatne w obliczeniach, podobnie jak sam wzór Cramera.

W przypadku stosowania bezpośrednich metod rozwiązania układu równań (4.5.1) istnieje jednak możliwość innego obliczenia $\det \mathbb{K}$. Wykorzystajmy typowy rozkład macierzy sztywności w postaci

$$\mathbb{K} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{U}, \quad K_{pq} = L_{pr}D_{rr}U_{rq}, \quad (4.5.12)$$

gdzie \mathbb{L} jest dolną macierzą trójkątną, \mathbb{U} górną macierzą trójkątną, zaś \mathbb{D} macierzą diagonalną,

$$\begin{aligned} L_{rr} = U_{rr} = 1, \quad L_{pq} = U_{qp} = 0 \quad \text{dla } p < q, \\ D_{pq} = 0 \quad \text{dla } p \neq q. \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

Wykorzystując własności wyznaczników macierzy trójkątnych i diagonalnych, z (4.5.13) otrzymujemy²⁹

$$\det \mathbb{K} = \det(\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{U}) = \det \mathbb{L} \det \mathbb{D} \det \mathbb{U} = \det \mathbb{D} = \prod_{r=1}^N D_{rr}. \quad (4.5.14)$$

Inną możliwość określenia typu punktów krytycznych dostarcza rozwiązanie problemu własnego

$$[\mathbb{K}(\lambda) - \omega_p(\lambda)\mathbb{I}] \mathbf{a}_p(\lambda) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_p(\lambda) \neq \mathbf{0}, \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad (4.5.15)$$

gdzie $\omega_p(\lambda)$ jest p -tą wartością własną, zaś $\mathbf{a}_p(\lambda)$ związanym z nią p -tym wektorem własnym. Ponieważ wszystkie wartości własne ω_p symetrycznej macierzy rzeczywistej $\mathbb{K}^T = \mathbb{K}$ są rzeczywiste, a wektory własne \mathbf{a}_p i \mathbf{a}_q odpowiadające dwóm różnym wartościom własnym $\omega_p \neq \omega_q \neq 0$ są ortogonalne, $\mathbf{a}_p^T \mathbf{a}_q = 0$, można przyjąć na przykład uporządkowanie³⁰

$$\begin{aligned} \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N, \quad \mathbb{W} \equiv \text{diag}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N] \\ \Rightarrow \mathbb{A} \equiv [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N]. \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

²⁹Charakterystyczną cechą rozwiązań zadań inżynierskich MES jest występowanie, nawet w pobliżu punktów krytycznych (dotyczy to szczególnie punktów bifurkacji), dużej wartości wyznacznika z macierzy sztywności $\det \mathbb{K}$, co prowadzi w obliczeniach komputerowych do nadmiaru w maszynowej reprezentacji liczb rzeczywistych. Zamiast $\det \mathbb{K}$, sensowne jest więc obliczanie $\log|\det \mathbb{K}| = \log|\det \mathbb{D}| = \sum_{r=1}^N \log|D_{rr}|$, z jednoczesnym śledzeniem zmiany znaku $\det \mathbb{K}$ i liczby ujemnych wyrazów w $\mathbb{D} = [D_{rr}]$.

³⁰W macierzy \mathbb{W} każda wartość własna ω_p występuje tyle razy ile wynosi jej algebraiczna wielokrotność.

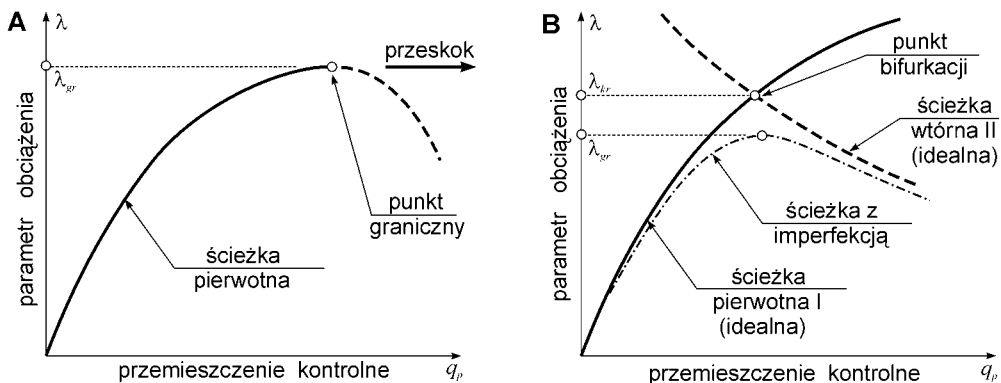
Wykorzystując że macierz \mathbf{A} jest ortogonalna³¹ (a zatem nieosobliwa $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$), można przy pomocy \mathbf{A} przekształcić (diagonalizować) macierz \mathbf{K} przez podobieństwo, otrzymując wynik

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{W} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{W}. \quad (4.5.17)$$

Z (4.5.17)₂ otrzymujemy

$$\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}^{-1} \det \mathbf{K} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{K} \equiv \det \mathbf{W} \\ \Rightarrow \quad \det \mathbf{K}(\lambda) = \prod_{p=1}^N \omega_p(\lambda). \quad (4.5.18)$$

Z (4.5.18) wynika, że pojedynczemu punktowi krytycznemu odpowiada zerowanie się pewnej wartości własnej $\omega(\lambda) = 0$, z którą powiązany jest wektor własny $\mathbf{a}(\lambda) \neq \mathbf{0}$.



Rys. 4.5.1. Typowe punkty krytyczne na ścieżce równowagi układu mechanicznego.

W przypadku stanu krytycznego układu ma być spełniony warunek ortogonalności $\mathbf{a}(\lambda)$ z niejednorodną częścią równania³² (4.5.7), umożliwiając następującą klasyfikację typu punktu krytycznego:

$$\omega(\lambda) = \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} = \Delta \lambda \mathbf{a}^T \mathbf{p}_{\text{ref}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta \lambda = 0 \text{ i } \mathbf{a}^T(\lambda) \mathbf{p}_{\text{ref}}(\lambda) \neq 0, \\ \lambda \equiv \lambda_{\text{gr}} - \text{punkt graniczny,} \\ \Delta \lambda \neq 0 \text{ i } \mathbf{a}^T(\lambda) \mathbf{p}_{\text{ref}}(\lambda) = 0, \\ \lambda \equiv \lambda_{\text{kr}} - \text{punkt bifurkacji.} \end{cases} \quad (4.5.19)$$

³¹Nawet dla wielokrotnej wartości własnej ω_p można tak dobrać wektory własne, aby były one wzajemnie ortogonalne — liniowo niezależne.

³²Ponieważ w stanie krytycznym $\omega(\lambda) = 0$, można zatem wykonać podstawienie $\Delta \mathbf{q} = \alpha \mathbf{a}(\lambda)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Gdy oba warunki występujące w (4.5.11) lub (4.5.19) spełnione są jednocześnie, wówczas w punkcie granicznym występuje także bifurkacja rozwiązania.

Bardziej szczegółowa klasyfikacja, w ramach wyróżnionych tu typów punktów krytycznych, wymaga dodatkowego wykorzystania informacji o pochodnej kierunkowej operatora stycznego $\mathbb{K}(\lambda)$ (zob. np. SPENCE i JEPSON [1985], WRIGGERS i SIMO [1993], WASZCZYSZYN, CICHONŃ i RADWAŃSKA [1990, 1994]), lub znajomości wszystkich rozwiązań pokrytycznych w badanym punkcie.

Trudności wyznaczania i badania typu punktu krytycznego w trakcie śledzenia nieliniowych ścieżek równowagi występują głównie w punktach bifurkacji, niezależnie od tego czy stosujemy kryterium (4.5.11), (4.5.19), czy proste przeszukiwanie (4.5.18). Poza uciążliwością numeryczną realizacji samego kryterium, występują tu także kłopoty związane z dokładnym obliczeniem położenia punktów bifurkacji na ścieżce równowagi. Wynika to z na ogół dobrego uwarunkowania macierzy $\mathbb{K}(\lambda)$ w otoczeniu punktów bifurkacji $(\mathbf{q}_{kr}, \lambda_{kr})$, mimo że w samym punkcie $\det \mathbb{K}(\lambda_{kr}) = 0$ i następuje zmiana znaku $\det \mathbb{K}(\lambda)$ przy przechodzeniu $(\mathbf{q}_{kr}, \lambda_{kr})$. Dlatego w trakcie śledzenia ścieżki równowagi przy użyciu dużego kroku często zdarzają się niezauważone przeskoczenia punktów bifurkacji rozwiązania.

W odróżnieniu od punktów bifurkacji, w punktach granicznych rozwiązania warunek $\Delta\lambda = 0$ sprawdza się łatwo. Także pogorszenie uwarunkowania macierzy $\mathbb{K}(\lambda)$ w pobliżu punktów granicznych jest na ogół wyraźne i sygnalizowane znacznie wcześniej.

W układach zaburzonych (a do takich należą konstrukcje rzeczywiste) punkty bifurkacji na ogół nie występują, pomijając szczególne przypadki imperfekcji (zaburzeń od stanu idealnego). Jeśli układ idealny po bifurkacji rozwiązania staje się układem niestatecznym³³, to należy oczekiwać, że w układzie zaburzonym zamiast punktów bifurkacji układu idealnego mogą pojawić się punkty graniczne³⁴. Konstrukcje, w opisie zachowania których występują punkty bifurkacji rozwiązań, nazywane są konstrukcjami *wrażliwymi na imperfekcje*. Z punktu widzenia stateczności konstrukcji szczególnie istotne (niebezpieczne) są przypadki, gdy na ścieżce równowagi punkty bifurkacji występują przed pierwszym punktem granicznym.

4.5.4. Wyznaczanie punktów bifurkacji techniką zaburzeń

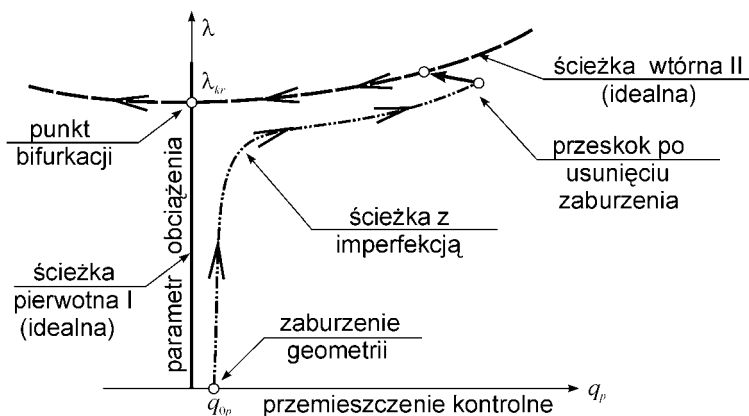
Technika zaburzeń idealnego rozwiązania pierwotnego jest chyba najprostszym sposobem wyznaczania punktów bifurkacji w rozwiązaniach nieliniowych. Podstawą koncepcji jest fakt na ogół regularnego, przez co łatwiejszego do śledzenia metodami kontynuacyjnymi, przebiegu ścieżki zaburzonej poniżej odpowiedniego rozwiązania pokrytycznego na ścieżce idealnej, rys. 4.5.2. Zaburzenie

³³Niestateczność rozumie się tu jako spadek bezwzględnej wartości obciążenia ze wzrostem wartości parametru długości ścieżki równowagi.

³⁴To zależy od charakteru niestatecznej ścieżki pobifurkacyjnej (stanu pokrytycznego) oraz od charakteru i wielkości występującego zaburzenia.

początkowe (imperfekcja) może mieć różny charakter, np.: geometryczny, obciążeniowy, materiałowy wyrażony przez równania konstytutywne, w warunkach brzegowych itp.

Wyznaczenie punktu bifurkacji techniką zaburzeń przebiega w trzech etapach. W pierwszym etapie posuwamy się po ścieżce zaburzonej, początkowo w pobliżu pierwotnej ścieżki równowagi, aż do momentu wyraźnego wpisania się rozwiązania pod ścieżkę wtórną. W drugim etapie, stosując odpowiednie techniki sterowania, przez usunięcie zaburzenia początkowego doprowadzamy do przeskoku rozwiązania na sąsiadującą wtórną ścieżkę rozwiązania problemu idealnego. Etap trzeci polega na cofnięciu rozwiązania na idealnej, wtórnej ścieżce pokrytycznej aż do osiągnięcia punktu bifurkacji (rys. 4.5.2).



Rys. 4.5.2. Koncepcja wyznaczania punktów bifurkacji rozwiązań nieliniowych techniką zaburzeń.

W przypadkach złożonych układów konstrukcyjnych, wadą tego podejścia są kłopoty z interpretacją otrzymanych wyników i możliwość wyznaczenia tym sposobem jednorazowo tylko jednego punktu bifurkacji. Dla porównania, rozwiązanie problemu własnego liniowego zagadnienia stateczności

$$[\mathbb{K}_M + \lambda \mathbb{K}_G(\mathbf{p}_{\text{ref}})]\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (4.5.20)$$

daje, o ile jest poprawne, możliwość określenia od razu wszystkich punktów bifurkacji jako N par własnych $(\lambda_{kr,p}, \mathbf{a}_p)$ – (mnożnik obciążenia krytycznego, odpowiadająca forma wybożenia), $p = 1, 2, \dots, N$. W (4.5.20), \mathbb{K}_M jest macierzą sztywności materiałowej, zaś $\mathbb{K}_G(\mathbf{p}_{\text{ref}})$ jest zależną od obciążenia macierzą sztywności geometrycznej, nazywaną także macierzą naprężeń początkowych.

Inną wadą techniki zaburzeń w analizie nieliniowej jest nie zawsze dająca się kontrolować zależność wyniku od postaci wprowadzanych zaburzeń (imperfekcji) układu. Dlatego dodatkowe liniowe rozwiązanie problemu (4.5.20), nawet jeśli (np. ze względu na silną nieliniowość początkową układu) nie są poprawne, mogą

dostarczyć istotnej jakościowo informacji wspomagającej interpretację rozwiązań nieliniowych, lub też mogą one posłużyć do wygenerowania dobrze określonej początkowej imperfekcji geometrycznej³⁵. Poza typowo numerycznymi uwarunkowaniami, o skuteczności techniki zaburzeń decyduje wybór odpowiedniego parametru kontrolnego³⁶, wybór właściwego momentu do przeskoku na ścieżkę wtórną oraz użycie odpowiednich technik sterowania rozwiązaniem.

4.5.5. Technika sterowania parametrem obciążenia

Technika ta jest podejściem standardowym, używanym w sposób naturalny. Polega ona na bezpośrednim rozwiązaniu równania (4.5.1), przyjmując za niezależną zmienną sterującą parametr obciążenia λ . W tym przypadku, przyrost parametru sterującego $\Delta\lambda = \Delta\lambda^{(0)} = \Delta\lambda^* = \text{const}$ na każdym kroku rozwiązania jest stały i określany z góry, co oznacza, że w iteracjach $i > 0$ korekcja wynosi $\Delta\lambda^{(i)} = 0$. Poszukiwany jest przyrost wektora przemieszczeń $\Delta\mathbf{q} = \Delta\mathbf{q}(\Delta\lambda^*)$, zaś parametr obciążenia obliczany jest z zależności

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda. \quad (4.5.21)$$

4.5.6. Technika sterowania parametrem przemieszczenia

W tym przypadku za parametr sterujący rozwiązaniem (4.5.1) wybieramy jedną ze składowych wektora przyrostu przemieszczeń $\Delta\mathbf{q}$, np. p -tą składową Δq_p . Składowa Δq_p staje się wtedy zmienną niezależną o ustalonej z góry wartości Δv^* . W tym podejściu, poza wyznaczeniem przyrostu przemieszczeń $\Delta\mathbf{q} = \Delta\mathbf{q}(\Delta v^*)$, poszukiwanym jest także przyrost parametru obciążenia $\Delta\lambda = \Delta\lambda(\Delta v^*)$ odpowiadający zadanemu wymuszeniu kinematycznemu Δv^* .

Przyjęcie jako zmiennej niezależnej (parametru sterującego) jednej ze składowych wektora przyrostu przemieszczeń $\Delta q_p \equiv \Delta v^*$ dzieli macierz układu równań (4.5.1) na podbloki, prowadząc do rozwiązania dwuetapowego

$$\begin{aligned} \text{Etap I} &\rightarrow \left[\begin{array}{cc} \mathbb{K}_{AA}^{(l)} & \mathbb{K}_{Ap}^{(l)} \\ \mathbb{K}_{pA}^{(l)} & \mathbb{K}_{pp}^{(l)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta\mathbf{q}_A^{(i+1)} \\ \Delta q_p^{(i+1)} \end{array} \right\} = \Delta\lambda^{(i+1)} \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{P}_{\text{ref},A}^{(i)} \\ p_{\text{ref},p}^{(i)} \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{c} j_A^{(i)} \\ j_p^{(i)} \end{array} \right\}, \\ \text{Etap II} &\rightarrow \end{aligned}$$

$$A = N - 1. \quad (4.5.22)$$

W przyroście $i, l = 0$, wprowadzamy do (4.5.22) wartość $\Delta q_p^{(1)} = \Delta q_p \equiv \Delta v^*$.

³⁵W przypadku poszukiwania punktu bifurkacji, odpowiadającego konkretnej wartości obciążenia krytycznego z rozwiązania liniowego, wskazane jest przyjęcie imperfekcji geometrycznej w postaci sprzężonego wektora własnego. Należy jednak zaznaczyć, że w silnie nieliniowych układach tego typu odpowiednik nie musi istnieć.

³⁶Najlepszymi parametrami kontrolnymi są w tym przypadku uogólnione przemieszczenia, zlokalizowane w płaszczyznach symetrii układu, których wartość na ścieżce pierwotnej przed punktem bifurkacji jest równa zero, zaś po punkcie bifurkacji na ścieżce wtórnej jest różna od zera.

W etapie I z rozwiązania górnego podukładu (4.5.22)

$$\mathbb{K}_{AA}^{(0)} \Delta \mathbf{q}_A^{(1)} = -\Delta v^* \mathbb{K}_{Ap}^{(0)} + \Delta \lambda^{(1)} \mathbf{p}_{\text{ref},A}^{(0)} + z \mathbf{j}_A^{(0)} \quad (4.5.23)$$

dla Δv^* , $\Delta \lambda^{(1)}$ i z , jako parametrów swobodnych, wyznaczamy jako rozłączne trzy stany przemieszczeń $\Delta \mathbf{q}_A^{(1)}$, wynikające z sumy prawych stron (4.5.23), tj.

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{AA}^{(0)} \left[\Delta \mathbf{q}_A^{(1)} \left(-\mathbb{K}_{Ap}^{(0)} \right); \Delta \mathbf{q}_A^{(1)} \left(\mathbf{p}_{\text{ref},A}^{(0)} \right); \Delta \mathbf{q}_A^{(1)} \left(\mathbf{j}_A^{(0)} \right) \right] \\ = \left[-\mathbb{K}_{Ap}^{(0)}; \mathbf{p}_{\text{ref},A}^{(0)}; \mathbf{j}_A^{(0)} \right]. \end{aligned} \quad (4.5.24)$$

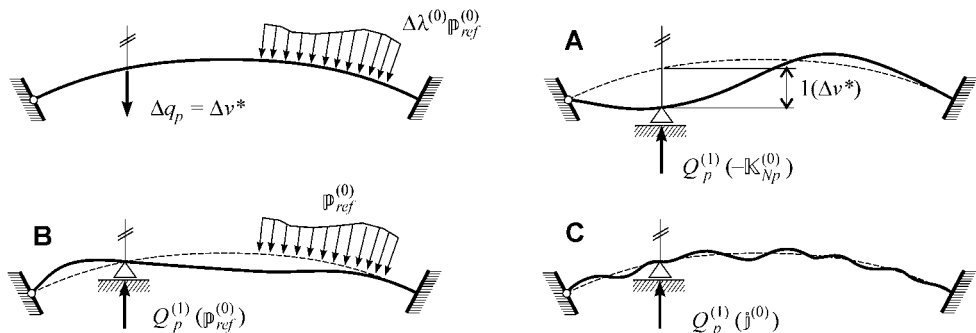
W etapie II, podstawiając rozwiązania cząstkowe (4.5.24)

$$\Delta \mathbf{q}_A^{(1)}(\mathbb{X}_A^{(0)}) = \left[\mathbb{K}_{AA}^{(0)} \right]^{-1} \mathbb{X}_A^{(0)}, \quad \mathbb{X}_A^{(0)} = \left[-\mathbb{K}_{Ap}^{(0)}; \mathbf{p}_{\text{ref},A}^{(0)}; \mathbf{j}_A^{(0)} \right] \quad (4.5.25)$$

do dolnej części układu (4.5.22), obliczamy fikcyjne reakcje $Q_p^{(0)}$, odpowiadające prawym stronom (4.5.23), jako poszczególnym stanom obciążenia (zob. rys. 4.5.3 A, B, C)

$$\begin{aligned} Q_p^{(1)}(\mathbb{X}^{(0)}) &= \mathbb{K}_{pA}^{(0)} \Delta \mathbf{q}_A^{(1)}(\mathbb{X}_A^{(0)}) - X_p^{(0)}, \\ X_p^{(0)} &= \left\{ -K_{pp}^{(0)}; p_{\text{ref},p}^{(0)}; j_p^{(0)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

Reakcje (4.5.26) utrzymują nałożone więzy kinematyczne $\Delta q_p \equiv \Delta v^*$.



Rys. 4.5.3. Interpretacja geometryczna fikcyjnych reakcji w sterowaniu przemieszczeniowym dla przyrostu w pierwszym kroku.

Ze względu na ich fikcyjny charakter, reakcje te muszą zniknąć

$$\Delta v^* Q_p^{(1)} \left(-\mathbb{K}_{Np}^{(0)} \right) + \Delta \lambda^{(1)} Q_p^{(1)} \left(\mathbf{p}_{\text{ref}}^{(0)} \right) + z Q_p^{(1)} \left(\mathbf{j}^{(0)} \right) = 0. \quad (4.5.27)$$

Przy zadanych wartościach Δv^* i z , wyznaczamy z (4.5.27) poszukiwany przyrost parametru obciążenia

$$\Delta\lambda^{(1)} = -\frac{\Delta v^* Q_p^{(1)} \left(-\mathbb{K}_{Np}^{(0)} \right) + z Q_p^{(1)} \left(j^{(0)} \right)}{Q_p^{(1)} \left(\mathbb{p}_{\text{ref}}^{(0)} \right)}. \quad (4.5.28)$$

W procesie iteracyjnej korekcji rozwiązania (odpowiada to etykietcie $i > 1$ i parametrowi $z = 1$) wartość przyrostu zmiennej kontrolnej musi pozostać stała $\Delta q_p \equiv \Delta v^*$, co oznacza że jej korekcja $\Delta q_p^{(i+1)}$ jest równa zero. Postać (4.5.22) wskazuje, że po podstawieniu wartości $\Delta q_p^{(i+1)} = 0$, $i > 1$, cały algorytm (4.5.23)–(4.5.28) upraszcza się, a warunek równowagi dla fikcyjnych reakcji (4.5.27) i wzór na korekcję przyrostu parametru obciążenia (4.5.28) przyjmują formę

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^{(i+1)} Q_p^{(i+1)} \left(\mathbb{p}_{\text{ref}}^{(i)} \right) + z Q_p^{(i+1)} \left(j^{(i)} \right) &= 0, \\ \Delta\lambda^{(i+1)} &= -z \frac{Q_p^{(i+1)} \left(j^{(i)} \right)}{Q_p^{(i+1)} \left(\mathbb{p}_{\text{ref}}^{(i)} \right)}, \quad i > 1. \end{aligned} \quad (4.5.29)$$

Poszukiwany przyrost $\Delta\lambda$ oblicza się zgodnie z (4.5.3)₂, a całkowity parametr obciążenia ze wzoru (4.5.21). Interpretację geometryczną sterowania przemieszczeniowego można znaleźć np. w pracy ZIENKIEWICZ [1971].

4.5.7. Technika sterowania parametrem łuku

W technice tej jako zmienną sterującą rozwiązaniem (4.5.1) przyjmujemy długość parametru łuku s w rozszerzonej $(N+1)$ -wymiarowej przestrzeni rozwiązań dyskretnych. Sterowanie parametrem łuku przeprowadzamy według koncepcji zaproponowanej w pracach RIKS [1970, 1972] i WEMPNER [1971].

W tym podejściu traktujemy równocześnie, jako zmienne niezależne, przyrost wektora przemieszczeń $\Delta\mathbf{q}$ i przyrost parametru obciążenia $\Delta\lambda$, tworząc z nich przyrost miary łukowej Δs . Wielkości te zestawiamy we wspólny wektor

$$\Delta\bar{\mathbf{q}}^{(i)} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta\mathbf{q}^{(i)} \\ \Delta\lambda^{(i)} \end{array} \right\}, \quad \Delta\bar{\mathbf{q}} = \sum_{k=1}^i \Delta\bar{\mathbf{q}}^{(k)} = \sum_{k=1}^i \left\{ \begin{array}{c} \Delta\mathbf{q}^{(k)} \\ \Delta\lambda^{(k)} \end{array} \right\}. \quad (4.5.30)$$

Całkowity przyrost niewiadomych $\Delta\bar{\mathbf{q}}$ ograniczony jest warunkiem „stałego” przyrostu długości łuku na śledzonej ścieżce rozwiązania

$$\Delta s^2 = \Delta\bar{\mathbf{q}}^T \Delta\bar{\mathbf{q}} = \Delta\mathbf{q}^T \Delta\mathbf{q} + \Delta\lambda^2, \quad \Delta s = \text{const}. \quad (4.5.31)$$

Definiując jednostkowy wektor $\bar{\mathbf{e}}$, warunek (4.5.31)₂ zapisuje się w postaci

$$\bar{\mathbf{e}} = \frac{\Delta\bar{\mathbf{q}}}{\|\Delta\bar{\mathbf{q}}\|}, \quad \bar{\mathbf{e}}^T \Delta\bar{\mathbf{q}} = \Delta s = \text{const}. \quad (4.5.32)$$

Z powyższego wynika, że po przyroście $i = 0$ w kolejnych iteracjach $\Delta\bar{\mathbf{q}}^T \Delta\bar{\mathbf{q}}^{(i)} = 0$ dla $i > 1$.

Zestawiając wyjściowe równanie (4.5.1) z warunkiem stałego przyrostu długości łuku (4.5.32)₂ w sposób zaproponowany w pracy WASZCZYŹYŃ [1983], otrzymujemy układ równań

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}^{(k)} & \mathbf{p}_{\text{ref}}^{(i)} \\ \bar{\mathbf{e}}^T & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q}^{(i+1)} \\ \Delta\lambda^{(i+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_{\mathbf{j}}^{(i)} \\ \Delta s \end{Bmatrix}. \quad (4.5.33)$$

W rozwiązaniu układu równań (4.5.33) dla przyrostu ($i = 0$) podstawiamy $\Delta s = \Delta s^*$, $z = 0$ lub $z \geq 1$, zaś dla iteracji ($i > 0$) odpowiednio $\Delta s = 0$, $z = 1$. Układ (4.5.33) jest niesymetryczny względem wiersza $\bar{\mathbf{e}}^T$ i kolumny $\mathbf{p}_{\text{ref}}^{(i)}$. W literaturze zaproponowano wiele modyfikacji przedstawionej tu podstawowej wersji algorytmu (zob. np. CRISFIELD [1997]).

Przy rozwiązywaniu niektórych zadań mogą pojawić się kłopoty z sensownym, od strony numerycznej, obliczaniem długości łuku (4.5.31). Rząd wielkości $\Delta\lambda$ w (4.5.31) nie przysparza na ogół problemów, ponieważ zawsze można go zmienić przez odpowiednie przeskalowanie wektora \mathbf{p}_{ref} . Przyczyną trudności jest zróżnicowanie rzędów wartości i jednostek składowych wektora $\Delta\mathbf{q}$ (np. translacji i obrotów, czy innych składowych niefizycznych, np. wyższych pochodnych przemieszczeń). Jedną z możliwości ominięcia tego problemu, zaproponowaną w pracy CHRÓŚCIELEWSKI i NOLTE [1985] (por. również np. SCHWEIZERHOF [1989]), jest selektywny sposób obliczania długości łuku. Polega on na eliminacji z $\Delta\mathbf{q}$ wskazanych składowych (lub ich przeskalowaniu), co można zapisać symbolicznie w postaci

$$\Delta\bar{\mathbf{q}}^{(i)} = \mathbb{S} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q}^{(i)} \\ \Delta\lambda^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbb{S} = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_N; 1], \quad (4.5.34)$$

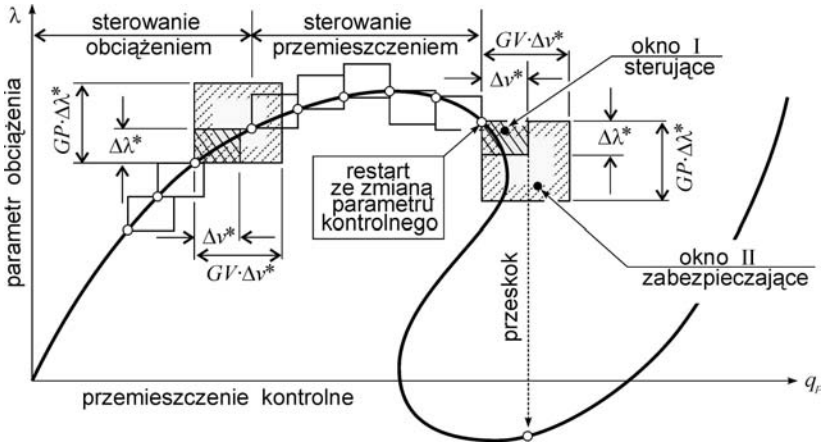
$$0 \leq s_p \leq 1, \quad p = 1, 2, \dots, N.$$

Składowe s_p w macierzy \mathbb{S} dobierane są selektywnie na podstawie analogii wymiarowej, uwzględniając różne wymiary fizyczne składowych w uogólnionym wektorze przemieszczeń (translacje, obroty, pochodne itp.).

4.5.8. Kontrola procesu rozwiązania

Specyficznie rozumiana tutaj stabilność rozwiązania kontrolowana jest *techniką okien (kosteł)*, zaproponowaną w pracach CHRÓŚCIELEWSKI i SCHMIDT [1985, 1986a,b] (rys. 4.5.4).

W programach autorskich zakładamy, że niezależnie od omówionych w p. 4.5.5–4.5.7 technik sterowania rozwiązaniem, wprowadzone cztery parametry sterujące $\{\Delta\lambda^*; \Delta v^*; p\text{-ta składowa kontrolna}; \Delta s^*\}$ dodatkowo występują



Rys. 4.5.4. Sterowanie i kontrola procesu rozwiązania, technika okien.

jako ograniczenia w trzech następujących słabych nierównościach:

$$|\Delta\lambda| = \left| \sum_{k=1}^i \Delta\lambda^{(k)} \right| \leq \Delta\lambda^*,$$

$$|\Delta q_p| = \left| \sum_{k=1}^i \Delta q_p^{(k)} \right| \leq \Delta v^*, \quad (4.5.35)$$

$$\Delta s = \sqrt{\Delta\mathbf{q}^T \Delta\mathbf{q} + \Delta\lambda^2} \leq \Delta s^*,$$

gdzie $\Delta\mathbf{q} = \sum_{k=1}^i \Delta\mathbf{q}^{(k)}$. Nierówności (4.5.35) nazywamy *pierwszym oknem kontrolno-sterującym* przyrostem (rys. 4.5.4). W przypadku niespełnienia jednego z warunków (4.5.35), w kolejnym przyroście następuje przełączenie na inną technikę sterowania, zależnie od historii rozwiązania, ze zmianą lub bez zmiany wielkości okna i położenia p -tej składowej kontrolnego przemieszczenia.

Analogicznie do (4.5.35), w formie silnych nierówności definiujemy *drugie okno zabezpieczające* (rys. 4.5.4)

$$|\Delta\lambda| < GP \Delta\lambda^*, \quad |\Delta q_j| < GV \Delta v^*, \quad \Delta s < GS \Delta s^* \quad (4.5.36)$$

dla $GP, GV, GS > 1$,

gdzie (GP, GV, GS) są danymi współczynnikami.

W programach autorskich niespełnienie którejś z nierówności (4.5.36) albo powoduje przerwanie procesu rozwiązania i przejście w stan pracy interaktywnej, albo archiwację poprzedniego kroku a następnie zatrzymanie procesu obliczeń.

4.5.9. Kontrola zbieżności procesu iteracyjnego

Do określenia zbieżności procesu iteracyjnego proponujemy użycie sześciu kryteriów (seminorm).

Trzy kryteria odnoszą się do zmiany poprawek przyrostów przemieszczeń, wynikających z procesu iteracyjnego $\delta(\Delta \mathbf{q}) = \Delta \mathbf{q}^{(i)}$, $i > 1$:

$$U1 > \frac{\|\delta(\mathbb{S}\Delta \mathbf{q})\|}{\|\mathbb{S}\Delta \mathbf{q}\|}, \quad \mathbb{S} = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_{M \cdot N}, 1], \quad (4.5.37)$$

$$s_k = \{0, 1\}, \quad k = 1, 2, \dots, M \cdot N,$$

$$U2 > \max_{\substack{r=1, N \\ s=1, M}} \frac{|\delta(\Delta q_{rs})|}{|\Delta q_{s, \text{ref}}|}, \quad U3 > \left(\frac{1}{M \cdot N} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^M \frac{[\delta(\Delta q_{rs})]^2}{(\Delta q_{s, \text{ref}})^2} \right)^{1/2}, \quad (4.5.38)$$

gdzie wielkości odniesienia przyjmujemy jako

$$\Delta q_{s, \text{ref}} = \max_{r=1, 2, \dots, N} |\Delta q_{rs}|, \quad s = 1, 2, \dots, M. \quad (4.5.39)$$

Z tych samych powodów co w (4.5.34), normy w (4.5.37) obliczamy w sposób selektywny.

Dodatkowe trzy kryteria konstruowane są dla sił niezerównoważonych \mathbf{j} :

$$P1 > \frac{\|\mathbf{j}\|}{\|\mathbf{p}\|}, \quad \mathbf{p} = \begin{cases} \lambda \mathbf{p}_{\text{ref}} + \mathbf{p}_{\text{old}} & \text{dla } |\lambda| > 1, \\ \mathbf{p}_{\text{ref}} + \mathbf{p}_{\text{old}} & \text{dla } |\lambda| \leq 1, \end{cases} \quad (4.5.40)$$

$$P2 > \max_{\substack{r=1, N \\ s=1, M}} \frac{|j_{rs}|}{|p_{s, \text{ref}}|}, \quad P3 > \left(\frac{1}{M \cdot N} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^M \frac{(j_{rs})^2}{(p_{s, \text{ref}})^2} \right)^{1/2}. \quad (4.5.41)$$

Wielkości odniesienia w (4.5.41) albo wczytujemy jako dodatkowe dane, albo określamy dwójako na podstawie składowych wektora obciążenia \mathbf{p}

$$p_{r, \text{ref}} = \begin{cases} p_{r, \text{ref}} & \text{dla } p_{r, \text{ref}} \neq 0, \\ \max_{s=1, 2, \dots, M} p_{s, \text{ref}} & \text{dla } p_{r, \text{ref}} = 0, \end{cases} \quad (4.5.42)$$

$$p_{s, \text{ref}} = \max_{r=1, 2, \dots, N} |p_{rs}|, \quad s = 1, 2, \dots, M.$$

Tutaj wprowadzono następujące oznaczenia: $\|\cdot\|$ — seminorma euklidesowa, N — całkowita liczba węzłów, M — liczba stopni swobody w węzle.

W programach autorskich przyjęcie w algorytmach zerowej wartości w zbiorze parametrów $U1$, $U2$, $U3$, $P1$, $P2$, $P3$ powoduje pominięcie sprawdzania odpowiedniego kryterium.

W rozwiązaniu typowego zadania nieliniowego liczbę iteracji $i = 3 \div 4$ uważa się za standardową, $i > 7$ za dużą. Przyjmowane w obliczeniach własnych za standardowe wartości parametrów kontrolnych i sterujących zestawiono w tab. 4.5.1.

Tabela 4.5.1. Standardowe wartości parametrów kontrolnych i sterujących.

GV	GP	GS	$U1$	$U2$	$U3$	$P1^*$	$P2^*$	$P3^*$
1,2	1,2	1,5	0,001	0,01	0,0001	0,01	0,01	0,01

* używane tylko dla elementów C^1 i C^0 (FI — całkowanie pełne)

Kryterium (4.5.37) z wartością $U1$, nałożone na względną seminormę globalnych zmian przyrostu do przyrostu aktualnego, traktujemy jako podstawowe. Wartość ograniczenia na $U1$ przyjęto według pracy LAMBERT [1971], określoną w niej jako poziom małej dokładności ($> 10^{-4}$). Wobec względnego i globalnego charakteru (4.5.37), jest to jednak dość silne ograniczenie, przeważnie silniejsze od (4.5.38)₂ z $10^{-6} \leq U3 \leq 10^{-4}$, uważane za wartości na przeciętnym poziomie dokładności i słabsze od (4.5.38)₁.

Kryteria (4.5.40)–(4.5.42) nakładane na siły niezerównoważone traktuje się raczej jako pomocnicze. W przypadku elementów klasy C^1 i C^0 z całkowaniem pełnym (FI), gdy zachodzi zbieżność w sensie przemieszczeń, kryteria (4.5.40)–(4.5.42) spełnione są najczęściej na znacznie silniejszym, niż założony tutaj jako przeciętny, poziomie dokładności. W analogicznej sytuacji, w przypadku elementów klasy C^0 całkowanych w sposób zredukowany (RI), a także w sformułowaniach alternatywnych, nie udaje się na ogół w rozsądnych granicach spełnić kontrolowanych równolegle kryteriów zbieżności dla sił niezerównoważonych i muszą być one często wyłączone.

4.6. Wybrane problemy nieliniowej dynamiki konstrukcji

4.6.1. Uwagi wstępne

Od strony formalnej zależności opisujące zagadnienia dynamiki przestrzennej zdyskretyzowanych nieliniowych zadań mechaniki mają charakter układów równań różniczkowych zwyczajnych. Z tego względu metody numeryczne rozwiązywania zwyczajnych równań różniczkowych odgrywają istotną rolę w analizie dynamicznej konstrukcji (BATHE [1982], KLEIBER [1985]).

Zagadnienie całkowania równań różniczkowych zwyczajnych należy do podstawowych zadań metod numerycznych, co znajduje swe szerokie odbicie w literaturze dotyczącej równań różniczkowych, np. COLLATZ [1960], ARNOLD [1983], KRUPOWICZ [1986], PALCZEWSKI [1999], OMBACH [1999] oraz w książkach z dziedziny metod numerycznych, np. DEMIDOWICZ, MARON i SZUWAŁOWA [1965], RALSTON [1975], STOER i BULIRSCH [1980], BJÖRCK i DAHLQUIST [1983].

Pod pojęciem problemów dynamiki konstrukcji, do których ograniczamy rozważania zawarte w tej książce, rozumiemy zagadnienia, w których zachowanie analizowanych układów charakteryzuje tylko niewielka liczba drgań o niskiej częstotliwości³⁷ (zob. KLEIBER [1985]). Jako niskie częstotliwości rozumiemy tu

³⁷ Wystarczającą w takich przypadkach może okazać się przybliżona analiza dynamiczna konstrukcji zredukowanej do układu zastępczego o niewielkiej liczbie stopni swobody. Jednak zagadnieniami i metodami redukcji bazy w przestrzeni rozwiązań nie będziemy się tu zajmowali.

drgania, którym odpowiadają długości fal znacznie większe od charakterystycznych długości fal akustycznych w badanym ośrodku.

Algorytmy całkowania po czasie stosowane w metodzie elementów skończonych wykorzystują dwa podstawowe schematy: jawne³⁸ i niejawne³⁹. W problemach dynamiki konstrukcji bardziej przydatne są schematy typu niejawnego, podczas gdy schematy typu jawnego są bardziej efektywne w zagadnieniach propagacji fal, np. w problemach modelowania zderzeń, wybuchów itp. Schematy niejawne używają najczęściej algorytmów typu predyktor/korektor podobnych jak w przypadku statycznej analizy nieliniowej (zob. podrozdział 4.4).

Zadaniem analizy dynamicznej konstrukcji jest głównie znalezienie ewolucji przemieszczeń układu, poddanego działaniu obciążenia zależnego od czasu.

Typowe zagadnienie klasycznej liniowej dynamiki konstrukcji, reprezentujące wyrażone w przemieszczeniach równania ruchu ciała zdyskretyzowanego, ma postać

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbb{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbb{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t), \quad t \in [t_0, b = t_0 + a], \quad (4.6.1)$$

gdzie \mathbb{M} , \mathbb{C} , \mathbb{K} są, odpowiednio, macierzami mas, tłumienia, sztywności, $\mathbf{p}(t)$ jest wektorem obciążeń zewnętrznych, a $\mathbf{q}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ są wektorami przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń układu dyskretnego. Równanie macierzowe (4.6.1) jest układem N równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego o stałych współczynnikach.

W dynamice konstrukcji opracowano wiele metod przeznaczonych specjalnie do bezpośredniego rozwiązania równania (4.6.1). W wielu przypadkach praktycznych metody te umożliwiają dokonanie bezpośredniego całkowania układu typu (4.6.1). Określenie *bezpośrednie całkowanie* rozumiane jest tu w tym sensie, że przed przystąpieniem do numerycznego całkowania względem czasu metodą krok po kroku równań wyjściowych (4.6.1) nie poddaje się żadnej transformacji.

Ogólnym zadaniem całkowania równania typu (4.6.1) jest znalezienie rozwiązania w przedziale czasu $[t_0, b = t_0 + a]$ przy założeniu, że stan układu jest znany w chwili początkowej t_0 . Metody bezpośredniego całkowania oparte są na dwóch podstawowych założeniach:

- 1) rozwiązywane równanie jest spełniane tylko w wybranych chwilach⁴⁰ $t_0, t_1, t_2, \dots, b \in [t_0, b = t_0 + a]$,
- 2) w typowym przedziale pojedynczego kroku całkowania $[t_n, t_{n+1}]$, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, zakłada się z góry typ zmienności przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń.

³⁸Nazywane także typu *explicit*, otwartego, bezpośredniego, ekstrapolacyjnego.

³⁹Nazywane także typu *implicit*, zamkniętego, pośredniego, iteracyjnego.

⁴⁰To oznacza, że w dyskretnych chwilach $t_0, t_1, t_2, \dots, b \in [t_0, b = t_0 + a]$ istnieje możliwość stosowania algorytmów analizy statycznej do wyznaczenia położenia dynamicznej równowagi układu, tzn. równowagi układu poddanego działaniu obciążeń zewnętrznych oraz sił bezwładności i tłumienia.

Celem dalszych rozważań jest budowa algorytmu pozwalającego na znalezienie rozwiązań w każdej rozpatrywanej chwili t_{n+1} na podstawie znajomości rozwiązań w chwilach poprzednich $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$.

Podstawowe problemy związane z ogólnymi schematami całkowania po czasie — stabilność i dokładność — są także najczęściej dyskutowanymi właściwościami w ramach dynamiki konstrukcji. W pracach dotyczących metod całkowania po czasie *liniowych układów dynamicznych*, podstawowym tematem jest rząd dokładności schematów, ponieważ w większości z nich kryterium bezwarunkowej stabilności jest stosunkowo proste do spełnienia. W przypadku *nieliniowych układów dynamicznych*, głównym problemem jest zapewnienie stabilności tych algorytmów. Okazuje się, że algorytmy bezwarunkowo stabilne w zagadnieniach liniowych często tracą stabilność w zadaniach nieliniowych.

W nieliniowej dynamice konstrukcji za warunek konieczny stabilności rozwiązań przyjmowane jest zwykle kryterium zachowania lub zanikania całkowitej energii mechanicznej na kroku czasowym. Kryterium to pierwotnie sformułowali BELYTSCHKO i SCHOEBERLE [1975] w postaci nierówności

$$U_{n+1} - U_n + K_{n+1} - K_n \leq \Delta G_{\text{ext}}, \quad (4.6.2)$$

gdzie U_{n+1} i U_n reprezentują energię odkształcenia na początku i końcu kroku czasowego, K_{n+1} i K_n są odpowiadającą tym chwilom energią kinetyczną, zaś ΔG_{ext} symbolizuje pracę wykonaną przez obciążenia zewnętrzne na rozważanym kroku czasowym⁴¹.

W kontekście warunku spełnienia kryterium energetycznego (4.6.2), opracowano szereg procedur całkowania po czasie, których omówienie można znaleźć np. w CRISFIELD [1991], KUHL i CRISFIELD [1999], KUHL i RAMM [1996a,b]. Ponieważ zagadnienia te są same w sobie bardzo szerokim problemem badawczym i nie dotyczą tylko dynamiki powłok, nie będą one w tej książce szerzej omawiane. Aktualne prace, ujmujące aspekty obliczeniowe nieliniowej dynamiki konstrukcji, zawierają materiały AMBRÓSIO i KLEIBER [2000, 2001].

Wśród metod numerycznych, stosowanych do rozwiązywania nieliniowych zadań mechaniki konstrukcji, do najbardziej popularnych i efektywnych należy jednokrokowa niejawna metoda Newmarka. Stąd dalsze rozważania ograniczamy do dyskusji klasycznego schematu Newmarka i jego rozszerzenia na, towarzyszące formułowanym powłokowym elementom skończonym, zagadnienie całkowania na grupie obrotów $SO(3)$ (por. CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i PIETRASZKIEWICZ [2000, 2002], LUBOWIECKA [2001], LUBOWIECKA i CHRÓŚCIELEWSKI [2002], CHRÓŚCIELEWSKI, LUBOWIECKA i PIETRASZKIEWICZ [2004]).

⁴¹Pojęcie „zachowanie energii” odnosi się do układów Hamiltonowskich, gdy $\Delta G_{\text{ext}} = 0$. W rozważanym przypadku odpowiada to zachowaniu sumy całkowitej energii, wliczając w to pracę sił zewnętrznych i pracę sił tłumienia całego układu dynamicznego.

4.6.2. Metoda Newmarka, modelowe zadanie liniowe

Liniowe równanie ruchu (4.6.1) w chwili $t_{n+1} = t_n + \Delta t \in [t_0, b = t_0 + a]$ (konfiguracji poszukiwanej) przyjmuje postać

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbb{C}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbb{K}\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}, \quad (4.6.3)$$

gdzie $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}(t_{n+1})$.

W rodzinie jednokrokowych metod Newmarka (NEWMARK [1959]) rozwiązanie w chwili t_{n+1} zapisujemy w postaci rozwinięcia w szereg Taylora, ograniczony do pierwszych wyrazów z aproksymacją reszty kwadraturą:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \int_0^{\Delta t} (\Delta t - \tau) \ddot{\mathbf{q}} \, d\tau \\ &\approx \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}], \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \int_0^{\Delta t} \ddot{\mathbf{q}} \, d\tau \approx \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}],$$

gdzie β i γ są swobodnymi parametrami kwadratury. Przez specjalizację β i γ otrzymujemy różne znane schematy całkowania. W obliczeniach inżynierskich wartości parametrów β i γ określane są na podstawie badań stabilności i dokładności otrzymywanych rozwiązań⁴². Zazwyczaj przyjmuje się wartości $\beta = 1/4$ i $\gamma = 1/2$ dające regułę punktu środkowego, która w zadaniach liniowych jest równoważna regule trapezów.

Wyznaczając $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ z (4.6.4)₁ i podstawiając wynik do (4.6.4)₂, otrzymujemy zależności na $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ i $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ w funkcji jedynie niewiadomego wektora \mathbf{q}_{n+1}

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{q}}_n, \\ \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \left[\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n - \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n - (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\mathbf{q}}_n \right]. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

⁴²Metoda Newmarka w zagadnieniach liniowych jest bezwarunkowo stabilna dla $\gamma \geq 1/2$ i $\beta \geq \frac{1}{4}(\gamma + 1/2)^2$. Jeśli istnieje ograniczenie na długość kroku Δt , którego przekroczenie prowadzi do rozbieżności rozwiązania (brak absolutnej stabilności), to taki algorytm nazywa się *warunkowo stabilnym*. Jeśli algorytm jest absolutnie stabilny niezależnie od długości kroku Δt , to mówi się, że jest on *bezw warunkowo stabilny*.

Podstawiając (4.6.5) do (4.6.3), otrzymujemy liniowe równanie ruchu w postaci

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbb{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbb{C} + \mathbb{K} \right] \mathbf{q}_{n+1} \\ &= \mathbf{p}_{n+1} + \mathbb{M} \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{q}_n + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{q}}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{q}}_n \right] \\ &+ \mathbb{C} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{q}_n + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{q}}_n \right]. \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Równanie (4.6.6) pozwala wyliczyć niewiadomy wektor przemieszczeń \mathbf{q}_{n+1} w chwili t_{n+1} na podstawie znanych wektorów przemieszczeń \mathbf{q}_n , prędkości $\dot{\mathbf{q}}_n$ i przyspieszeń $\ddot{\mathbf{q}}_n$ w chwili t_n (konfiguracji aktualnej), a następnie z (4.6.5) poszukiwane wektory $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ i $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ w chwili t_{n+1} . W realizacji algorytmu przy ustalonej wartości długości kroku Δt i stałych wartościach parametrów β i γ , współczynniki równania (4.6.6) można wyznaczyć z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}, & a_1 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t}, & a_2 &= \frac{1}{\beta \Delta t}, & a_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1, \\ a_4 &= \frac{\gamma}{\beta} - 1, & a_5 &= \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right), & a_6 &= \Delta t(1 - \gamma), & a_7 &= \Delta t \gamma, \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

które pozwalają zapisać równanie (4.6.6) w postaci

$$\begin{aligned} [a_0 \mathbb{M} + a_1 \mathbb{C} + \mathbb{K}] \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{p}_{n+1} + \mathbb{M} [a_0 \mathbf{q}_n + a_2 \dot{\mathbf{q}}_n + a_3 \ddot{\mathbf{q}}_n] \\ &+ \mathbb{C} [a_1 \mathbf{q}_n + a_4 \dot{\mathbf{q}}_n + a_5 \ddot{\mathbf{q}}_n], \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

a relacje (4.6.5) w formie

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= a_1(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) - a_4 \dot{\mathbf{q}}_n - a_5 \ddot{\mathbf{q}}_n = \dot{\mathbf{q}}_n + a_6 \ddot{\mathbf{q}}_n + a_7 \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}, \\ \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} &= a_0(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) - a_2 \dot{\mathbf{q}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{q}}_n, \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

zwartej i wygodnej do obliczeń.

Przyrostowy względem Δt charakter równań typu (4.6.6), zastosowany w metodach bezpośredniego całkowania liniowych równań dynamiki konstrukcji, pozwala bez zasadniczych modyfikacji zastosować to podejście również do problemów nieliniowych.

4.6.3. Metoda Newmarka, modelowe zadanie nieliniowe

W literaturze wyróżnia się dwa podejścia do analizy nieliniowych problemów dynamiki konstrukcji. Pierwsze podejście, nazywane *metodą pseudo-sił*, polega na pogrupowaniu wpływów nieliniowych po prawej stronie równań ruchu i traktowanie ich łącznie z obciążeniem zewnętrznym jako uogólnionego obciążenia

(pseudo-obciążenia). W drugim podejściu, nazywanym *metodą sztywności stycznej*, równania ruchu zapisuje się w formie przyrostowej względem przemieszczeń i traktuje się je, na małych przyrostach, jak liniowe. Reprezentatywne są tu prace GOUDREAU i TAYLOR [1972], BATHE, RAMM i WILSON [1975], MONDKAR i POWELL [1977], ADELI, GERE i WEAVER [1978], HUGHES, LIU i LEVIT [1981], CERVERA, HINTON i BICANIC [1987], czy CHRÓŚCIELEWSKI i inni [1996], KŁOSOWSKI [1999].

W metodzie sztywności stycznej zlinearyzowanym przemieszczeniowym równaniom ruchu ciała zdyskretyzowanego można nadać klasyczną, podobną do liniowej (4.6.3), postać

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbb{C}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbb{K}_T\Delta\mathbf{q} &= \Delta\mathbf{p} + (\mathbf{p}_n - \mathbf{r}_n), \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta\mathbf{q}, \quad \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n. \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Tutaj iloczynny $\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ i $\mathbb{C}\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ reprezentują siły bezwładności i tłumienia w konfiguracji poszukiwanej, \mathbb{K}_T jest macierzą sztywności stycznej (jak w statyce) określoną w chwili aktualnej, zaś \mathbf{r}_n wektorem sił odpowiadającym aktualnemu stanowi naprężeń układu.

W ogólnym przypadku nieliniowego charakteru sił bezwładności i tłumienia, odpowiednik równania (4.6.10) ma postać

$$\mathbb{M}_n\Delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{C}_n\Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}_n\Delta\mathbf{q} = \Delta\mathbf{p} + \mathbf{j}_n, \quad \mathbf{j}_n = \mathbf{p}_n - \mathbf{r}_n - \mathbf{b}_n, \quad (4.6.11)$$

gdzie \mathbb{M}_n , \mathbb{C}_n i \mathbb{K}_n są macierzami odniesionymi do konfiguracji aktualnej t_n , otrzymanymi na drodze formalnej linearyzacji słabej postaci równań równowagi dynamicznej w ramach procedury rozwiązywania iteracyjnego (zob. podrozdział 4.4). Wektor $\Delta\mathbf{p}$ reprezentuje przyrost obciążeń zewnętrznych przy przejściu od konfiguracji aktualnej w chwili t_n do konfiguracji poszukiwanej w chwili t_{n+1} , zaś \mathbf{j}_n jest wektorem uogólnionych sił niezrównoważonych, reprezentujących warunek równowagi w konfiguracji aktualnej. Równania (4.6.10) i (4.6.11) wyrażają warunek równowagi dynamicznej układu w chwili t_{n+1} i stanowią podstawę opracowania algorytmów całkowania względem czasu.

Przyjmując aproksymację rozwiązania (4.6.10)₁ metodą Newmarka (4.6.4), po wykorzystaniu założenia (4.6.10)₂ i wstawieniu $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n$ do (4.6.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} &= a_0\Delta\mathbf{q} - a_2\dot{\mathbf{q}}_n - a_3\ddot{\mathbf{q}}_n, \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= a_1\Delta\mathbf{q} - a_4\dot{\mathbf{q}}_n - a_5\ddot{\mathbf{q}}_n, \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

Uwzględniając zależności (4.6.12) w (4.6.10)₁, aproksymowane po czasie równanie ruchu przyjmuje postać

$$\begin{aligned} [a_0\mathbb{M} + a_1\mathbb{C} + \mathbb{K}_T]\Delta\mathbf{q} &= \Delta\mathbf{p} + (\mathbf{p}_n - \mathbf{r}_n) \\ &+ \mathbb{M}[a_2\dot{\mathbf{q}}_n + a_3\ddot{\mathbf{q}}_n] + \mathbb{C}[a_4\dot{\mathbf{q}}_n + a_5\ddot{\mathbf{q}}_n]. \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Równaniu (4.6.13) można nadać charakterystyczną dla statyki formę

$$\tilde{\mathbb{K}}_T \Delta \mathbf{q} = \Delta \tilde{\mathbf{p}}, \quad (4.6.14)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{K}}_T &= \mathbb{K}_T + a_0 \mathbb{M} + a_1 \mathbb{C}, \\ \Delta \tilde{\mathbf{p}} &= \Delta \mathbf{p} + (\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{r}_n) + \mathbb{M}[a_2 \dot{\mathbf{q}}_n + a_3 \ddot{\mathbf{q}}_n] + \mathbb{C}[a_4 \dot{\mathbf{q}}_n + a_5 \ddot{\mathbf{q}}_n]. \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

Jeśli obowiązuje addytywność wektorów przyspieszeń $\ddot{\mathbf{q}}$, prędkości $\dot{\mathbf{q}}$ oraz przemieszczeń \mathbf{q} z dwóch różnych sąsiednich konfiguracji n i $n+1$, dla przyrostów otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{q}} &= \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{q}}_n = a_0 \Delta \mathbf{q} - a_2 \dot{\mathbf{q}}_n - (a_3 + 1) \ddot{\mathbf{q}}_n, \\ \Delta \dot{\mathbf{q}} &= \dot{\mathbf{q}}_{n+1} - \dot{\mathbf{q}}_n = a_1 \Delta \mathbf{q} - (a_4 + 1) \dot{\mathbf{q}}_n - a_5 \ddot{\mathbf{q}}_n, \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

a stąd

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_n (a_0 \Delta \mathbf{q} - a_2 \dot{\mathbf{q}}_n - (a_3 + 1) \ddot{\mathbf{q}}_n) \\ + \mathbb{C}_n (a_1 \Delta \mathbf{q} - (a_4 + 1) \dot{\mathbf{q}}_n - a_5 \ddot{\mathbf{q}}_n) + \mathbb{K}_n \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{p} + \mathbf{j}_n, \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

co pozwala zapisać równanie (4.6.17) w postaci (4.6.14) przy następujących oznaczeniach:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{K}}_T &= a_0 \mathbb{M}_n + a_1 \mathbb{C}_n + \mathbb{K}_n, \\ \Delta \tilde{\mathbf{p}} &= \Delta \mathbf{p} + \mathbf{j}_n + \mathbb{M}_n (a_2 \dot{\mathbf{q}}_n + (a_3 + 1) \ddot{\mathbf{q}}_n) + \mathbb{C}_n ((a_4 + 1) \dot{\mathbf{q}}_n + a_5 \ddot{\mathbf{q}}_n). \end{aligned} \quad (4.6.18)$$

Rozwiązując równanie (4.6.14), otrzymamy pewną wartość wektora przyrostu uogólnionych przemieszczeń $\Delta \mathbf{q}$, która ze względu na dokonaną linearyzację jest jedynie wartością przybliżoną. Postać zlinearyzowanych równań ruchu typu (4.6.14), wynikająca ze schematów niejawnych, jest identyczna jak w nieliniowych zadaniach statyki. Pozwala to na zwiększenie dokładności uzyskiwanego rozwiązania przez wykorzystanie procedur iteracyjnych, opracowanych do analizy nieliniowych problemów statyki.

Modelowy proces iteracyjnego poprawiania dokładności spełnienia nieliniowych równań ruchu (4.6.10)₁ w chwili t_{n+1} przy użyciu metody Newtona obejmuje następujące czynności:

Predykcja ($i = 0$) — po obliczeniu (4.6.15) i sformułowaniu układu równań (4.6.14) oraz jego rozwiązaniu

$$\Delta \mathbf{q} = \tilde{\mathbb{K}}_T^{-1} \Delta \tilde{\mathbf{p}}, \quad (4.6.19)$$

wykonujemy obliczenia i podstawienia wstępne

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(0)} &= a_0 \Delta \mathbf{q} - a_2 \dot{\mathbf{q}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{q}}_n, \\
 \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(0)} &= a_1 \Delta \mathbf{q} - a_4 \dot{\mathbf{q}}_n - a_5 \ddot{\mathbf{q}}_n, \\
 \mathbf{q}_{n+1}^{(0)} &= \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}, \\
 \Delta \mathbf{q}_n^{(0)} &\equiv \Delta \mathbf{q}, \\
 i &\equiv 1,
 \end{aligned} \tag{4.6.20}$$

które kończą fazę przyrostu czasowego.

Cykl iteracyjny $i > 0$ poprawiania rozwiązania (korekcja) obejmuje następujące kroki:

- a. Obliczenie wektora niezrównoważonych sił z poprzedniej iteracji

$$\mathbf{j}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{r}_{n+1}^{(i)} \left(\mathbf{q}_{n+1}^{(i)} \right) - \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)}. \tag{4.6.21}$$

- b. W przypadku obliczeń standardową⁴³ metodą Newtona–Raphsona, utworzenie efektywnej macierzy sztywności uwzględniającej efekty nieliniowe

$$\tilde{\mathbb{K}}_T^{(i)} = \mathbb{K}_T^{(i)} \left(\mathbf{q}_{n+1}^{(i)} \right) + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}. \tag{4.6.22}$$

- c. Obliczenie nowej ($i + 1$) poprawki do wektora przyrostu przemieszczeń

$$\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} = \left(\tilde{\mathbb{K}}_T^{(i)} \right)^{-1} \mathbf{j}_{n+1}^{(i)}. \tag{4.6.23}$$

- d. Obliczenie nowego przybliżenia wektora całkowitego przyrostu przemieszczeń liczonego od konfiguracji n

$$\Delta \mathbf{q}_n^{(i+1)} = \Delta \mathbf{q}_n^{(i)} + \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)}. \tag{4.6.24}$$

- e. Obliczenie nowego przybliżenia wektorów przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} &= \Delta \mathbf{q}_n^{(i+1)} + \mathbf{q}_n &= \mathbf{q}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)}, \\
 \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i+1)} &= a_1 \Delta \mathbf{q}_n^{(i+1)} - a_4 \dot{\mathbf{q}}_n - a_5 \ddot{\mathbf{q}}_n = \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)} + a_1 \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)}, \\
 \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i+1)} &= a_0 \Delta \mathbf{q}_n^{(i+1)} - a_2 \dot{\mathbf{q}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{q}}_n = \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)} + a_0 \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)}.
 \end{aligned} \tag{4.6.25}$$

⁴³W przypadku stosowania zmodyfikowanej metody Newtona–Raphsona, wypada punkt b. i z punktu c. odwracanie stycznej macierzy sztywności, ponieważ efektywna macierz sztywności pozostaje stała $\tilde{\mathbb{K}}_T^{(i)} = \tilde{\mathbb{K}}_T (\equiv \tilde{\mathbb{K}}_T^{(0)}) = \text{const}$ w całym procesie iteracyjnym.

- f. Sprawdzenie warunku zbieżności procesu iteracyjnego, (zob. p. 4.5.9, (4.5.37), (4.5.40))

$$\frac{\|\mathcal{S} \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)}\|}{\|\mathcal{S} \Delta \mathbf{q}_n^{(i+1)}\|} < U1, \quad \frac{\|\mathcal{S} \mathbf{j}_{n+1}^{(i)}\|}{p_{\text{ref}}} \leq P1. \quad (4.6.26)$$

Tutaj p_{ref} jest przyjętą wielkością odniesienia tak dobraną, aby była reprezentatywna dla wartości sprowadzonego do węzłów wektora sił wewnętrznych \mathbf{r} lub obciążenia \mathbf{p} .

- g₁. Kontynuacja procesu iteracyjnego (korekcja)

$$i \leftarrow i + 1, \quad (4.6.27)$$

gdy warunki zbieżności (4.6.26) nie są spełnione i kiedy zachodzi $i \leq i_{\text{max}}$.

- g₂. Jeśli warunki zbieżności procesu iteracyjnego (4.6.26) są spełnione, przedstawiamy

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n &\leftarrow \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)}, \\ \dot{\mathbf{q}}_n &\leftarrow \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i+1)}, \quad i = 0, \\ \ddot{\mathbf{q}}_n &\leftarrow \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i+1)}, \end{aligned} \quad (4.6.28)$$

a następnie, po ustaleniu długości nowego przyrostu czasu Δt oraz obliczeniu współczynników (4.6.7) i macierzy (4.6.15), przechodzimy do obliczeń wstępnych (4.6.19) kolejnego kroku (predykcji).

- g₃. W przypadku przekroczenia założonej maksymalnej liczby iteracji $i > i_{\text{max}}$ należy powtórzyć obliczenia na danym przyroście ze zmniejszoną długością kroku⁴⁴ Δt .

W algorytmach niejawnych zasadniczą część czasu obliczeń pochłania konieczność tworzenia w każdej iteracji efektywnej macierzy sztywności stycznej i jej dekompozycja oraz pozostałe operacje związane z procesem iteracyjnym.

Przedstawiony powyżej modelowy algorytm rozwiązania równania (4.6.10) jest słuszny przy założeniu, że przestrzeń konfiguracyjna nieliniowego układu dynamicznego ma strukturę przestrzeni liniowej. Niestety, w przypadku rozważanej w tej książce sześcioparametrowej mechaniki powłok i sformułowanych na tej podstawie elementach skończonych, tak wygodna sytuacja nie ma miejsca. Przedstawiony algorytm modelowy wymaga zatem rozszerzenia na przypadek przestrzeni konfiguracyjnej zawierającej w definicji grupę obrotów.

⁴⁴W przypadku obliczeń zmodyfikowaną metodą Newtona–Raphsona można ewentualnie próbować rozwiązywania metodą standardową, z uaktualnianiem efektywnej macierzy sztywności (4.6.22) przy niezmiennym kroku całkowania.

4.6.4. Uogólniony algorytm Newmarka całkowania na grupie obrotów

W literaturze inżynierskiej można znaleźć różne wersje uogólnienia schematu Newmarka na zagadnienia całkowania po czasie na grupie obrotów $SO(3)$. Opracowano je głównie na potrzeby rozwiązywania problemów dynamiki ciała sztywnego, np. SIMO i WONG [1991], BORRI, MELLO i ATLURI [1991], BRISEGHIELLA, MAJORANA i PELLEGRINO [1999] oraz prętów przestrzennych, np. SIMO i VU-QUOC [1988], CARDONA i GERADIN [1988], IBRAHIMBEGOVIĆ i AL MIK-DAD [1998], gdzie również mamy do czynienia z przestrzenią konfiguracyjną zawierającą w definicji grupę obrotów $SO(3)$. Uogólnienia takie były proponowane również w ramach mechaniki powłok, np. SIMO, RIFAI i FOX [1992], SIMO i TARNOW [1994], KUHLE i RAMM [1996a], BETSCH, MENZEL i STEIN [1998], BRANK i inni [1998]. Dotyczą one jednak zasadniczo wariantu pięcioparametrowej teorii powłok, gdzie modelem kinematycznym obrotowej części deformacji jest przestrzeń ilorazowa $SO(3)/SO(2)$ homeomorficzna ze sferą jednostkową S^2 , a nie grupa obrotów $SO(3)$.

W rozważanym poniżej, stosowanym dla sześcioparametrowej teorii powłok, uogólnionym algorytmie Newmarka całkowania na grupie obrotów $SO(3)$ wykorzystujemy następujące fakty (por. np. LUBOWIECKA [2001]):

Obciążenia zewnętrzne mają przejrzystą interpretację fizyczną przeważnie w reprezentacji przestrzennej. Z tego powodu naturalnym sformułowaniem dla zasad zachowania pędu i momentu pędu jest reprezentacja przestrzenna. W proponowanym niejawnym algorytmie całkowania po czasie zlinearyzowane równania ruchu, opisujące zachowanie układu dynamicznego, zapisujemy w reprezentacji przestrzennej względem ostatnio wyznaczonej konfiguracji chwilowej, wynikającej z procesu iteracyjnego $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} \in \mathcal{U}$, tj. i -tego przybliżenia do $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}(t_{n+1}) \in \mathcal{U}_A$. W odróżnieniu od algorytmów, przyjmujących za punkt odniesienia ostatnio wyznaczoną konfigurację równowagi $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_n) \in \mathcal{U}_A$ (zob. np. SIMO i VU-QUOC [1988]), takie podejście pozwala uniknąć konieczności wprowadzania do przestrzennej aproksymacji skończenie wymiarowej transformacji typu $\Xi_n(Q_{n+1}^{(i)}): T_{Q_{n+1}^{(i)}} SO(3) \rightarrow T_{Q_n} SO(3)$. Wiąże ona wektory z przestrzeni stycznej do grupy obrotów w punkcie $\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$, odpowiadającym konfiguracji chwilowej, z wektorami z przestrzeni stycznej do grupy obrotów w punkcie \mathbf{u}_n , odpowiadającym konfiguracji aktualnej. W proponowanym tu algorytmie macierz transformacji Ξ jest macierzą jednostkową.

W formułowaniu algorytmu całkowania po czasie uwzględniamy również, że prędkości kątowe i przyspieszenia kątowe z różnych kroków czasowych mogą być bezpośrednio dodawane tylko w reprezentacji materialnej, a nie w reprezentacji przestrzennej.

Aby podkreślić wagę powyższego stwierdzenia, za pracą SIMO i WONG [1991] przytaczamy następujące rozważania. Rozpatrzmy problem ruchu ciała sztywnego $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \mathbf{Q}(t)$, jednak opisanego kompozycją tensorów obrotu $\mathbf{Q}^+(t) = \mathbf{R}\mathbf{Q}(t)$, którą utworzono przez lewostronne nałożenie stałego tensora obrotu

$\mathbf{R} = \text{const}$, $\mathbf{R} \in SO(3)$, na dany ruch ciała opisany tensorem obrotu $\mathbf{Q}(t) \in SO(3)$. Fizycznie \mathbf{R} można interpretować jako transformację układu odniesienia. Zależności związane z ruchem łącznym opisanym przez $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \mathbf{Q}^+(t)$ otrzymujemy przez różniczkowanie po czasie tensora obrotu $\dot{\mathbf{Q}}^+(t) = \mathbf{R}\dot{\mathbf{Q}}(t)$. Zgodnie z definicją, obliczona prędkość kątowna w reprezentacji przestrzennej wynosi $\text{ad } \boldsymbol{\omega}^+ \equiv \dot{\mathbf{Q}}^+(\mathbf{Q}^+)^T = \mathbf{R}\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{R}^T = \mathbf{R}(\text{ad } \boldsymbol{\omega})\mathbf{R}^T \Rightarrow \boldsymbol{\omega}^+ \equiv \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}$, a prędkość kątowna w reprezentacji materialnej ma postać $\text{ad } \boldsymbol{\omega}^+ \equiv (\mathbf{Q}^+)^T \dot{\mathbf{Q}}^+ = \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{Q}} = \text{ad } \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}^+ \equiv \boldsymbol{\omega}$. Otrzymany wynik pokazuje, że bezpośrednio dodawanie wektorów prędkości obrotowej ma sens fizyczny tylko w reprezentacji materialnej, tylko bowiem w tym przypadku zachodzi $\boldsymbol{\omega}^+ - \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Bezpośrednie dodawanie prędkości w reprezentacji przestrzennej jest pozbawione sensu fizycznego. W tym przypadku należy przeprowadzić dodatkową transformację $\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}$ do wspólnego układu odniesienia, tak aby spełniona była zależność $\boldsymbol{\omega}^+ - \mathbf{R}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.

W rozważanym tutaj algorytmie aproksymację po czasie prędkości kątownej i przyspieszenia kątownego wykonujemy w reprezentacji materialnej, a następnie tak obliczone wielkości poddajemy odpowiedniej transformacji przed uwzględnieniem ich w równaniach ruchu sformułowanych w reprezentacji przestrzennej.

Opracowana procedura numerycznego całkowania po czasie pola obrotów używa niejawnego schematu, otrzymanego z uogólnienia klasycznej metody Newmarka (p. 4.6.3) z użyciem iteracji typu Newtona. Procedurę tę formułuje się następująco:

Niech $[t_n, t_{n+1}] \subset I \subset \mathbb{R}_+$ będzie typowym przedziałem czasu, spełniającym warunek

$$\mathbb{R}_+ \ni I = \bigcup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}] \quad \text{i} \quad [t_{n-1}, t_n] \cap [t_n, t_{n+1}] = t_n, \quad (4.6.29)$$

gdzie $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ jest przyrostem czasu. Tutaj etykieta n oznacza wartość zmiennej zależnej od czasu w chwili t_n . Stąd dla uogólnionych przemieszczeń zapisujemy $\mathbf{u}_n \equiv (\mathbf{u}_n, \mathbf{Q}_n) \approx \mathbf{u}(t_n) \equiv (\mathbf{u}(t_n), \mathbf{Q}(t_n))$ oraz $\mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}(t_n)$, $\mathbf{a}_n \approx \dot{\mathbf{v}}(t_n)$.

Zakładamy, że (na początku kroku) w chwili t_n znane są wszystkie dyskretne wartości rozwiązania z poprzedniego kroku, tzn. jest całkowicie określona konfiguracja aktualna układu:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &= (\mathbf{u}_n, \mathbf{Q}_n) - \text{uogólnione przemieszczenia} && \mathbf{q}_n, \\ \mathbf{v}_n &= (\dot{\mathbf{u}}_n, \boldsymbol{\omega}_n) - \text{uogólnione prędkości} && \dot{\mathbf{q}}_n, \\ & \quad (\text{reprezentacja materialna}) && \text{w odpowiedniki} \\ & && \text{w dyskretyzacji MES} \\ \mathbf{a}_n &= (\ddot{\mathbf{u}}_n, \mathbf{a}_n) - \text{uogólnione przyspieszenia} && \ddot{\mathbf{q}}_n. \end{aligned} \quad (4.6.30)$$

Podstawowy problem uaktualniania w dyskretnych chwilach jest formułowany następująco:

Dla danych \mathbf{u}_n , \mathbf{v}_n i \mathbf{a}_n w chwili aktualnej t_n poszukujemy \mathbf{u}_{n+1} , \mathbf{v}_{n+1} i \mathbf{a}_{n+1} w chwili następnej $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ w taki sposób, aby były one zgodne z równaniami problemu (np. p. 4.1.6) i stabilne w sensie numerycznym (np. (4.6.2)).

Obliczenia związane z częścią translacyjną uogólnionych zmiennych kinematycznych przeprowadzane są w sposób standardowy. Dalsze rozważania ograniczymy więc do części związanej z obrotami. Rozwiązanie wplecione w algorytm modelowy dany zależnościami (4.6.19)–(4.6.27) wymaga wyróżnienia szeregu poniższych kroków.

Na etapie przyrostu ($i = 0$) przeprowadzamy transformację wektorów prędkości kątowych i przyspieszeń kątowych z reprezentacji materialnej (4.6.30) do reprezentacji przestrzennej zgodnie z regułą

$$\boldsymbol{\omega}_n = \mathbf{Q}_n \boldsymbol{\omega}_n, \quad \mathbf{a}_n = \mathbf{Q}_n \mathbf{a}_n. \quad (4.6.31)$$

Transformacja (4.6.31) pozwala utworzyć zależności (4.6.11) i (4.6.15) zapisane w reprezentacji przestrzennej.

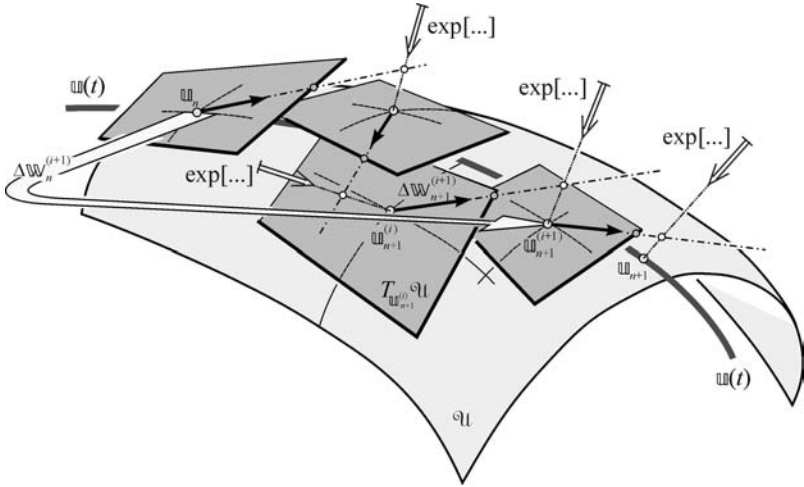
Następnie z równania (4.6.19) obliczamy poszukiwany przyrost uogólnionych przemieszczeń (4.6.20), $\Delta \mathbf{q} \Rightarrow \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(0)} = (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(0)}, \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(0)})$, określony w każdym węźle dyskretyzacji. W tym momencie uważamy, że znamy wyjaśniony dalej sposób akumulacji przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń odpowiadający wzorom (4.6.20)_{1–4}. Zatem, zgodnie z algorytmem modelowym, możemy przejść do iteracyjnego ($i > 0$) poprawiania dokładności spełnienia nieliniowych dynamicznych równań ruchu. Obejmuje to następujące dodatkowe w porównaniu z (4.6.19)–(4.6.27) czynności:

- Aktualizację tensora obrotu, odpowiednią do uzyskanej poprawki rozwiązania $\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} \Rightarrow \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)} = (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}, \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)})$ z reprezentacji przestrzennej (por. (4.6.25)₃ oraz (4.6.20)₃)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{n+1}^{(i+1)} &= \exp\left(\Delta \mathbf{W}_{n+1}^{(i+1)}\right) \mathbf{Q}_{n+1}^{(i)}, \quad \Delta \mathbf{W}_{n+1}^{(i+1)} = \text{ad}\left(\Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)}\right), \\ \mathbf{Q}_{n+1}^{(0)} &\equiv \mathbf{Q}_n. \end{aligned} \quad (4.6.32)$$

- Obliczenie wektora całkowitego przyrostu obrotu $\Delta \mathbf{w}_n^{(i+1)}$ w reprezentacji materialnej, ujmującego przejście z konfiguracji \mathbf{u}_n do konfiguracji $\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}$ (rys. 4.6.1, por. (4.6.24) oraz (4.6.20)₄ dla $i = 0$)

$$\exp\left(\Delta \mathbf{W}_n^{(i+1)}\right) = \mathbf{Q}_n^T \mathbf{Q}_{n+1}^{(i+1)}, \quad \Delta \mathbf{w}_n^{(i+1)} = \text{ad}^{-1}\left(\Delta \mathbf{W}_n^{(i+1)}\right). \quad (4.6.33)$$



Rys. 4.6.1. Wektor całkowitego przyrostu $\Delta \mathbf{w}_n^{(i+1)}$, ujmujący przejście z konfiguracji \mathbf{u}_n do $\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}$.

- Obliczenie prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego w reprezentacji materialnej (por. (4.6.25)_{1,2} oraz (4.6.20)_{1,2})

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_{n+1}^{(i+1)} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{w}_n^{(i+1)} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \boldsymbol{\omega}_n + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \mathbf{a}_n \\
 &= a_1 \Delta \mathbf{w}_n^{(i+1)} - a_4 \boldsymbol{\omega}_n - a_5 \mathbf{a}_n, \\
 \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} &= \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \left[\Delta \mathbf{w}_n^{(i+1)} - \Delta t \boldsymbol{\omega}_n - (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \mathbf{a}_n \right] \\
 &= a_0 \Delta \mathbf{w}_n^{(i+1)} - a_2 \boldsymbol{\omega}_n - a_3 \mathbf{a}_n.
 \end{aligned} \tag{4.6.34}$$

- Transformację wektorów (4.6.34) do reprezentacji przestrzennej zgodnie z regułą

$$\boldsymbol{\omega}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{Q}_{n+1}^{(i+1)} \boldsymbol{\omega}_{n+1}^{(i+1)}, \quad \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{Q}_{n+1}^{(i+1)} \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)}. \tag{4.6.35}$$

Odpowiednio do punktu f) algorytmu modelowego, tj. sprawdzenia warunku zbieżności procesu iteracyjnego, zależności (4.6.32)₁ do (4.6.35) pozwalają utworzyć zapisane w reprezentacji przestrzennej zależności (4.6.21) i (4.6.22) i rozwiązać równanie (4.6.23), otrzymując albo nową poprawkę uogólnionych przemieszczeń $\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)}$, albo zależności (4.6.14)–(4.6.19) pozwalające obliczyć nowy ich przyrost $\Delta \mathbf{q}$.

Metoda elementów skończonych

5.1. Elementy skończone w powłokach

5.1.1. Strategie formułowania elementów skończonych w powłokach

Różnorodność konstrukcji powierzchniowych i złożoność ich zachowania czyni z nieliniowej analizy powłok trudną dziedzinę badań, wymagającą dużej ogólności, dobrej teorii oraz elastycznych i skutecznych metod obliczeniowych.

W pełni nieliniowa analiza konstrukcji powłokowych, uwzględniająca dowolność kształtu, warunków brzegowych, własności materiałowych i obciążenia, przedstawia trudne zadanie analityczne, prowadzące również do potrzeby wykorzystywania zaawansowanych metod numerycznych i nowoczesnej bazy komputerowej. Najczęściej proponowanym narzędziem rozwiązywania zadań nieliniowej teorii konstrukcji jest metoda elementów skończonych¹ (MES). W analizie konstrukcji powłokowych MES odgrywa także rolę dominującą².

Prace nad rozwinięciem niezawodnych i efektywnych elementów powłokowych prowadzone są z dużą intensywnością od ponad czterdziestu lat. Opracowano już szeroką gamę różnych elementów. Wiele z nich wykorzystano z sukcesem w zastosowaniach inżynierskich. Jednak nawet w zakresie analizy liniowej nie można jeszcze stwierdzić, że już istnieje uniwersalny i powszechnie akceptowany element powłokowy (por. np. TAYLOR [1988], CHAPELLE i BATHE [2003]). W przypadku ogólnej deformacji i skończonych odkształceń sytuacja jest jeszcze bardziej złożona. Źródła trudności występują zarówno po stronie formułowania teorii powłok, jak i w procesie aproksymacji metodą elementów skończonych.

Obecnie istnieje kilka elementów powłokowych, które można uznać za niezawodne w zastosowaniach do ograniczonej klasy problemów nieliniowych pod warunkiem, że stosuje się je z pewną ostrożnością. Jednak żaden z tych elementów nie spotkał się z ogólnym uznaniem jako wyraźnie lepszy od pozostałych³. Brak

¹Porównaj np.: COOK, MALKUS i PLESHA [1974, 1981, 1989], BATHE [1982, 1996], WOŹNIAK i KLEIBER [1982], KLEIBER [1985, 1995, 1998], CRISFIELD [1991, 1997], WASZCZY-SZYN, CICHON i RADWAŃSKA [1990, 1994], KLEIBER i WOŹNIAK [1991], DACKO i inni [1994], ZIENKIEWICZ [1972], BABUŠKA i SZABO [1997], ZIENKIEWICZ i TAYLOR [2000a,b], FUNG i PIN TONG [2001], HARTMANN i KATZ [2002], BELYTSCHKO, LIU i MORAN [2003].

²Porównaj np.: HUGHES i HINTON [1986a,b], i CHAPELLE i BATHE [2003].

³Nie powinno to zaskakiwać, ponieważ zbyt często elementy powłokowe formułuje się na bazie specjalnych technik, nie mających formalnych podstaw matematycznych. Praktycznie, tylko nieliczne elementy (np. liniowy element płytowy typu T-R) doczekały się ścisłego opracowania matematycznego, włącznie z analizą błędów.

dostępu do dokładnych i pełnych wyników liczbowych badań numerycznych, przytaczanych w literaturze jedynie fragmentarycznie, dodatkowo utrudnia porównanie i ocenę formułowanych tam elementów. Poszukiwania niezawodnych i efektywnych elementów skończonych, nadających się do ogólnej nieliniowej analizy konstrukcji powłokowych o dowolnej geometrii, obciążeniu, warunkach brzegowych i prawach materiałowych są więc nadal przedmiotem intensywnych badań.

W obliczeniach konstrukcji powłokowych wyróżnić można trzy strategie stosowania MES (por. np. RADWAŃSKA [1990], WASZCZYSZYN, CICHON i RADWAŃSKA [1990, 1994]), wykorzystujące:

- 1) trójwymiarowe sformułowanie kontynualne (elementy bryłowe);
- 2) degenerację, redukującą ośrodek trójwymiarowy do dwumiarowego zgodnie z założeniami teorii powłok, z jednoczesną dyskretyzacją (elementy zdegenerowane);
- 3) jedną z wersji teorii powłok lub płyt prowadzącą do:
 - a) elementów płaskich, przeważnie 3- lub 4-węzłowych, jako superpozycji elementów płaskiego stanu naprężeń i elementów płytowych;
 - b) elementów zakrzywionych, bazujących na różnych wariantach teorii powłok, zazwyczaj typu Kirchhoffa–Love’a lub Timoszenko–Reissnera.

Dwie ostatnie strategie dotyczą formułowania elementów powłokowych. Przeglądy zagadnienia, łącznie z klasyfikacją, znajdują się między innymi w pracach GALLAGHER [1976], ORKISZ i WASZCZYSZYN [1978], MACNEAL [1987], TAYLOR [1988], WEMPNER [1989], RADWAŃSKA [1990], YANG, SAIGAL i LIAW [1990], GILEWSKI i RADWAŃSKA [1991], YANG i inni [2000]. Te prace i cytowana w nich literatura dają pełny przegląd osiągnięć, trendów i bibliografii (zob. również MACKERLE [1997, 2000, 2002a,b]) z tego zakresu.

5.1.2. Płaskie elementy płytowo-tarczowe

Elementy płaskie należą do najprostszych i najwcześniej stosowanych w analizie powłok. Z powodu swojej prostoty elementy te mają ustaloną pozycję w literaturze powłokowej. W zakresie liniowym są one bezpośrednim złożeniem różnego typu zgodnych geometrycznie elementów płytowych (zob. HRABOK i HRUDEY [1984]) i tarczowych.

Przy klasyfikacji tych elementów, poza kształtem i liczbą węzłów, podaje się również rząd aproksymacji stanu membranowego, typ wykorzystanej teorii płyt i stosowane ujęcia niestandardowe. Najczęściej są to elementy o maksymalnie $5+1$ stopniach swobody w węźle. W przypadku teorii płyt typu Kirchhoffa, będą to proste elementy niedostosowane klasy C^1 nie spełniające warunków ciągłości międzyelementowej. W ramach teorii płyt typu Reissnera pojawiła się cała gama różnych elementów. Taka sytuacja jest wynikiem poszukiwań sposobu przezwyciężenia negatywnego zjawiska blokady (przesztynnienia rozwiązań, zakleszczenia), występującego przy niskim rzędzie interpolacji klasy C^0 .

W tych elementach efekt geometrycznej nieliniowości uwzględniany jest na różne sposoby: albo bezpośrednio z definicji w ramach teorii przybliżonych, albo przez zmianę geometrii w ramach jednej z odmian tzw. podejścia uaktualnionego, lub też przez połączenie obu tych sposobów. Do podstawowych wad dyskretyzacji „prostymi” elementami płaskimi, niezależnie od sposobu ich formułowania, należą:

- a) ubogie odtwarzanie geometrii zakrzywienia powłoki (wypłaszczenie);
- b) brak w elemencie znamiennego dla zakrzywienia powłoki sprzężenia stanu membranowego i zgięciowego;
- c) naruszenie warunków ciągłości pól przemieszczeń wzdłuż boków elementu (niedostosowanie, wytworzenie fikcyjnych krawędzi);
- d) sztuczne nieciągłości przekrojowych sił i momentów wewnętrznych, powstające w zakrzywionych powłokach regularnych;
- e) złe uwarunkowanie, a nawet osobliwości macierzy sztywności przy łączeniu elementów leżących prawie lub dokładnie w jednej płaszczyźnie.

Możliwa jest redukcja części tych wad przez pewne sztuczne zabiegi. Postępowanie takie staje się nieodzowne, szczególnie w analizie nieliniowej i badaniu problemów wyboczenia. W odniesieniu do zadań, w których dominuje stan giętny, na podstawie literatury i doświadczeń własnych można stwierdzić, że płaskie elementy powłokowe wykazują dostateczną zbieżność podziału typu h .

5.1.3. Zakrzywione, trójparametrowe elementy wyższej precyzji typu Kirchhoffa–Love’a

Elementy zakrzywione, formułowane głównie na bazie różnych wersji trójparametrowej teorii powłok typu Kirchhoffa–Love’a (K–L) z wykorzystaniem zasady stacjonarności całkowitej energii potencjalnej (zob. np. WEMPNER [1989]), były głównym przedmiotem badań lat siedemdziesiątych. Obecnie obserwuje się pewien nawrót zainteresowania tym kierunkiem badań⁴.

Formułowanie powłokowych elementów typu K–L jest często utrudnione w wyniku dziedziczenia przez element złożoności wyjściowej teorii powłok oraz przez występującą „globalność” w geometrii powłoki. W teoriach typu K–L miarami odkształceń są dwa tensory symetryczne — odkształcenia i zginania — w płaszczyźnie stycznej do powierzchni podstawowej powłoki. Tensory te są wyrażone jednoznacznie przez trzy składowe pola przesunięć (PIETRASZKIEWICZ [1977]). Tensor odkształcenia jest wielomianem kwadratowym względem

⁴Badania elementów klasy C^1 prowadzone są od lat przez Bernadou i Ciarlet oraz ich współpracowników, por. np. CIARLET [1990a,b], BERNADOU [1993a,b], BERNADOU [1996]. Elementy klasy C^1 były badane również w pracach SCHIECK [1989], BERNADOU i TROUVE [1990], VAN KEULEN [1993], VAN KEULEN, BOUT i ERNST [1993], BERNADOU i CUBIER [1998a,b].

przesunięć i ich gradientu, jednak tensor zginania ma bardzo złożoną (przy skończonych odkształceniach — niewymierną) postać względem przesunięć i ich pierwszego i drugiego gradientu (por. p. 3.6.1). Złożoność ta jest powodem poszukiwania i tworzenia licznych wariantów uproszczonych teorii, opartych na uproszczonych zależnościach kinematycznych, por. podrozdział 3.7. Jednak elementy skończone wykorzystujące te warianty są nadal skomplikowane i trudne do formułowania w przypadku powłok o dowolnej geometrii.

W celu spełnienia koniecznych warunków zbieżności aproksymacji, od elementów formułowanych w ramach teorii typu K–L wymaga się globalnej ciągłości klasy C^1 . Podstawową trudnością staje się potrzeba zapewnienia aproksymowanemu polu przesunięć międzyelementowej ciągłości klasy C^1 (elementy wyższej precyzji). Warunek ten prowadzi do rozbudowanej bazy elementowej (wysoki rząd wielomianów interpolacyjnych⁵) i do nieinżynierskich stopni swobody w węzłach, wyrażonych przez wyższe pochodne pola przesunięć.

Z rozwijaniem bazy wysokiego rzędu wiąże się również szereg trudności. Powszechnie stosowane są więc znaczne uproszczenia schematów interpolacji (por. dyskusję w pracy SANDER i IDELSOHN [1982]), przy rezygnacji z pełnej ciągłości klasy C^1 w odniesieniu do niektórych składowych pola przesunięć (elementy niedostosowane). Występują także trudności ze spełnieniem kryterium ruchu sztywnego (HARTE [1982]). Trudności te na poziomie teoretycznym powoduje zbyt daleko posunięte uproszczenie relacji kinematycznych, a na poziomie aproksymacji numerycznej — niezgodność rzędów odtwarzania geometrii aktualnej i początkowej (często ściśle⁶ lub o innym schemacie interpolacji). Ponadto, baza wysokiego rzędu jest przeważnie zbyt „silna” przy formułowaniu problemów nieregularności. Występują więc trudności z właściwym łączeniem niegładkich części konstrukcji powłoki czy dołączaniem jednowymiarowych prętów, tworzących np. podparcia, usztywnienia itp. Trudności te wpływają na mniejszą atrakcyjność tego kierunku w badaniach numerycznych⁷. Jednak na podstawie literatury można stwierdzić, że elementy typu K–L w przykładach, spełniających poczynione na gruncie teorii założenia upraszczające, wykazują bardzo dobrą zbieżność podziału^{8,9} (typu h).

⁵Najprostszy wielomian interpolacyjny (Hermitowski), spełniający warunki ciągłości klasy C^1 , prowadzi do 16 stopni swobody w płytowym prostokątnym 4-węzłowym elemencie dostosowanym.

⁶Elementy tego typu wymagają redefiniowania przy zmianie formy geometrii początkowej.

⁷Przykładem użycia w badaniach nieliniowych elementu wyższej precyzji typu K–L mogą być analizy dwukrzywiznowym trójbocznym elementem 3-węzłowym o 54 st. swobody, przytoczone w pracach CHRÓŚCIELEWSKI i NOLTE [1985] oraz NOLTE i CHRÓŚCIELEWSKI [1986].

⁸Spotykane są rozwiązania przykładów wykraczających poza założenia teoretyczne, leżące u podstaw sformułowania elementu. W takich przykładach, zależnie od niezgodności z założeniami, rozwiązania zbiegają się, lecz do wartości różnych od uzyskanych z innych sformułowań.

⁹W kontekście tej dyskusji zaznaczmy, że w elementach klasy C^1 praktycznie nie występuje zjawisko blokady. Można jednak podać „złośliwe” przykłady, w których ujawnia się blokada membranowa.

Sformułowanie klasyczne elementów typu K–L ogranicza także obowiązująca hipoteza kinematyczna. Wyklucza ona deformację od ścinania poprzecznego i deformację powiązaną ze zmianą grubości powłoki. To drugie ograniczenie można jednak osłabić do poziomu, umożliwiającego analizę dużych odkształceń o postaci charakterystycznej dla powłok z materiałów gumopodobnych. Jeśli założyc pewien ograniczony rząd odkształceń to okazuje się, że tak sformułowana teoria powłok zachowuje klasyczną strukturę typu K–L (SIMMONDS [1985], CZERNYCH [1986], STUMPF i MAKOWSKI [1986], SACZUK [1988], SCHIECK [1989] oraz SCHIECK, PIETRASZKIEWICZ i STUMPF [1992], PIETRASZKIEWICZ [1992b, 1993a]). Z obliczeniowego punktu widzenia oznacza to, że elementy powłokowe typu K–L, sformułowane w tradycyjny sposób, znajdują zastosowanie również w zagadnieniach powłok gumopodobnych.

5.1.4. Trójwymiarowe elementy bryłowe w analizie powłok

Traktując powłokę jako ciało trójwymiarowe¹⁰, dzięki mechanice ośrodków ciągłych dysponujemy kompletem równań i warunków ubocznych problemu. Wykorzystując więc moc obliczeniową współczesnych komputerów, można analizować bezpośrednio równania trójwymiarowe ciała typu powłoka i uzyskać odpowiednie wyniki numeryczne. W ramach MES mogą być użyte stosunkowo proste w implementacji standardowe (liniowe, paraboliczne czy sześciennie) izoparametryczne elementy trójwymiarowe. Elementy tego typu opisane są praktycznie w każdym podręczniku MES (np. ZIENKIEWICZ [1972], ZIENKIEWICZ i TAYLOR [2000a,b]).

Bezpośrednie rozwiązywanie problemów powłok stosunkowo cienkich, przy wykorzystaniu klasycznych bryłowych elementów trójwymiarowych, wiąże się jednak z istotnymi trudnościami:

1. Traktowanie w każdym węźle w sposób jednolity wszystkich trzech stopni swobody prowadzi do niewspółmiernie dużych składników sztywności, odpowiadających względnym przemieszczeniom wzdłuż brzegów elementu w kierunku grubości powłoki. W rezultacie, przy zmniejszającej się grubości pojawia się złe uwarunkowanie układu równań. Problem ten uwiadcza się szczególnie wyraźnie w przypadku stosowania w dyskretyzacji pojedynczego elementu na kierunku grubości powłoki¹¹ (zob. np. AHMAD,

¹⁰Z fizycznego punktu widzenia powłoka, obojętnie jak cienka, jest zawsze ciałem trójwymiarowym.

¹¹W tym kontekście pojawia się pytanie: czy rozwiązania za pomocą jednego elementu bryłowego ze z góry ustaloną w kierunku grubości liczbą węzłów (najczęściej dwóch), powiązane z zaniechaniem w tym kierunku rozwijania dyskretyzacji, można nadal traktować jako rozwiązania trójwymiarowe? Ustalenie w kierunku grubości rzędu interpolacji narzuca sposób deformacji ciała po grubości, co jest równoważne z wprowadzeniem węzłów kinematycznych tak charakterystycznych dla teorii powłok. Zatem, czy nie jest to już procesem omawianej dalej degeneracji? Na szczęście, jest to tylko kwestia klasyfikacji, nie zmieniająca istoty problemu.

IRONS i ZIENKIEWICZ [1970] i dodatek w KANOK-NUKULCHAI, TAYLOR i HUGHES [1981]).

2. Elementy trójwymiarowe na ogół generują większe (lub o większej liczbie współczynników niezerowych) układy równań algebraicznych i wymagają całkowania numerycznego w całej swojej objętości. W obu przypadkach pociąga to za sobą znaczny wzrost czasu obliczeń i kosztów rozwiązania.
3. Izoparametryczne (wykorzystujące interpolację klasy C^0) elementy trójwymiarowe niższego rzędu nie są wolne od efektu blokady przy tzw. pełnym całkowaniu (FI). Efekt ten, jako wynik złego uwarunkowania (BRAESS [1992]), ujawnia się szczególnie przy obliczeniach konstrukcji powierzchniowych. W takich konstrukcjach występują bowiem silne dysproporcje sztywności, będące wynikiem charakterystycznych stosunków wymiarów geometrycznych tych konstrukcji.

Wersja p lub p, q izoparametrycznych elementów trójwymiarowych (zob. przegląd BABUŠKA i SURI [1990] czy np. SCHWAB [1998], ACTIS, SZABO i SCHWAB [1999], ZBOIŃSKI i OSTACHOWICZ [2000], ZBOIŃSKI [2001]) wykorzystywana jest w płytach i powłokach jako sposób ominięcia lub zmniejszenia efektów blokady przez podniesienie rzędu elementu do $p \geq 4$. Lokalne współrzędne krzywoliniowe pozwalają na zróżnicowanie rzędów wielomianów interpolacyjnych: p — odpowiedzialnych za blokadę w powierzchni powłoki, q — odpowiedzialnych za blokadę w kierunku grubości¹². Funkcje interpolacyjne najczęściej dobiera się tak, aby spełniały własność „hierarchiczności”. Hierarchiczność rozumiana jest w tym sensie, że wielomiany aproksymacyjne i zmienne węzłowe, odpowiadające rzędowi p , są podzbiorem wielkości rzędu $p + 1$.

Wadą stosowania p -aproksymacji jest gwałtowny wzrost kosztów obliczeń wraz ze zwiększaniem rzędu p . Z drugiej strony, zastosowanie p -wersji elementów bryłowych umożliwia prawidłową analizę konstrukcji powłokowych, nawet gdy inne rozwiązania wykazują silne osobliwości (BABUŠKA i SCAPOLLA [1989]).

Trójwymiarowe, bryłowe wielowęzłowe elementy skończone z sukcesem użyto do modelowania ciał typu powłoka w zagadnieniach dotyczących urządzeń energetycznych poddanych złożonym obciążeniom o różnym charakterze. W takich urządzeniach obok pól mechanicznych występują również pola chemo-elektrotermiczne. Silne sprzężenia wszystkich tych pól wymagają zachowania jednakowej ich aproksymacji przestrzennej realizowanej w elementach bryłowych. Tak sformułowane elementy wykorzystywane są np. do określenia stopnia degradacji konstrukcji energetycznych w trakcie eksploatacji urządzenia (zob. BADUR i inni [2002, 2003], BADUR i KOZŁÓW [2002], BANASZKIEWICZ i inni [2003]).

¹²W cienkich powłokach zazwyczaj stosuje się tylko funkcję liniową w kierunku grubości q .

5.1.5. Zdegenerowane elementy powłokowe i pięcioparametrowe elementy typu Timoszenko–Reissnera

Rozwój powłokowych elementów skończonych dotyczy ostatnio głównie dwóch sformułowań: a) tzw. koncepcji elementu zdegenerowanego¹³, b) koncepcji klasycznej, bazującej na teorii powłok typu Timoszenko–Reissnera (T–R). W konwencjonalnym ujęciu¹⁴ oba podejścia mają wiele wspólnego (BÜCHTER i RAMM [1992]). W szczególności, oba podejścia bazują na tych samych założeniach (zob. p. 2.7.1), będących klasycznymi hipotezami¹⁵ teorii płyt z uwzględnieniem poprzecznych odkształceń postaciowych:

- 1) włókno materialne, pierwotnie proste i prostopadłe do powierzchni podstawowej ciała typu powłoka, pozostaje proste i nierozciągliwe w trakcie całego procesu deformacji;
- 2) naprężenia normalne na powierzchniach równoległych do powierzchni podstawowej są pomijalnie małe (założenie płaskiego stanu naprężenia).

Założenia te są powszechnie akceptowane jako podstawa formułowania elementów zdegenerowanych, por. RAMM [1977], STANLEY, PARK i HUGHES [1986]. Założenie kinematyczne 1) prowadzi do pięcioparametrowej teorii powłok z trzema translacjami i dwoma parametrami obrotu jako zmiennymi niezależnymi¹⁶. Uwzględnienie w stosunku do teorii typu K–L dodatkowego efektu deformacji od poprzecznego ścinania rozszerza stosowalność takich sformułowań na powłoki umiarkowanie grube lub o silnej anizotropii poprzecznej. Z drugiej strony, klasyczna hipoteza typu T–R w części dotyczącej kinematyki, zakładając nadal nierozciągliwość włókien normalnych, ogranicza stosowalność takiej teorii do problemów, w których występują względnie małe odkształcenia. Podobnie jednak, jak w przypadku hipotez typu K–L, osłabienie tego założenia jest tutaj także możliwe (zob. np. PIETRASZKIEWICZ [1979b], PARISCH [1986], SIMO, RIFAI i FOX [1990] czy BÜCHTER, RAMM i ROEHL [1994], BAŞAR i ITSKOV [1998]), przy zachowaniu podstawowej pięcioparametrowej struktury teorii powłok.

Powyższe hipotezy, mimo że są one założeniami klasycznymi, pozostają nadal najczęściej stosowanymi w numerycznych implementacjach mechaniki powłok¹⁷

¹³Niezrozumiałe jest przytaczane w literaturze stwierdzenie, że koncepcja elementu zdegenerowanego jest niezależna od jakiegokolwiek teorii powłok (np. HUGHES i LIU [1981]). Przecież założenia leżące u podstaw koncepcji degeneracji są jednymi z najstarszych hipotez, przyjmowanymi przy formułowaniu kompletu równań powłokowych.

¹⁴Za standardowy element zdegenerowany przyjmuje się koncepcję (ujmującą zagadnienia nieliniowe) przedstawioną w pracy HUGHES i LIU [1981] oraz książce BATHE [1982].

¹⁵Rodowód tych założeń w teorii płyt wynika z prac TIMOSZENKO [1916], REISSNER [1945], HENCKY [1947], BOLLE [1947], UFLJAND [1948] i MINDLIN [1951].

¹⁶Pewną dyskusję o redukcji parametrów obrotowych zawiera praca SCHMIDT [1993].

¹⁷Odwolując się do ostatnich wyników badań nad sformułowaniem, sprowadzającym równania ruchu ciała trójwymiarowego do dwuwymiarowych równań ruchu teorii powłok, okazuje się, tak jak czynimy to w niniejszej pracy, że na tym etapie nie są w ogóle potrzebne założenia upraszczające typu hipotez kinematycznych, zob. SIMMONDS [1984a], także MAKOWSKI i STUMPF [1990].

zarówno w zakresie liniowym, jak i nieliniowym (np. SIMO i FOX [1989], GRUTTMANN [1988], BAŞAR i DING [1992], CHAPELLE i BATHE [2003]). Aktualnie dominującym jest sformułowanie związane z nazwiskiem Simo, w którym powłokę traktuje się jako powierzchnię Cosserat z pojedynczym nierozciągliwym wektorem kierunkowym (*direktorem*) (por. NAGHDI [1972]), podsumowane w pracach SIMO i FOX [1989] oraz SIMO, FOX i RIFAI [1989, 1990]). Godnymi uwagi, z punktu widzenia implementacji numerycznej, aspektami tego sformułowania są¹⁸:

1. Brak obiektów typu symboli Christoffela, sprawiających trudności obliczeniowe, w sformułowaniu zagadnienia brzegowego w słabej postaci.
2. Wprowadzenie ogólnej, wolnej od osobliwości, parametryzacji pola direktorów, odpowiedniej w obliczeniach numerycznych powłok regularnych.
3. Zastosowanie ścisłej procedury uaktualniania konfiguracji, wykorzystującej odwzorowanie wykładnicze, niewrażliwej na wielkość przyrostu obrotów.
4. Zastosowanie częściowo mieszanego sformułowania typu Hellingera–Reissnera i Hu–Washizu, inspirowanego hybrydową propozycją PIAN i SUMIHARA [1984], co pozwala na ominięcie efektu blokady.

Rozszerzającymi to sformułowanie są prace SIMO, RIFAI i FOX [1990] — zmiana grubości powłoki, SIMO i KENNEDY [1992] — zakres plastyczny, SIMO [1993] — powłoki załamane, SIMO, RIFAI i FOX [1992], SIMO i TARNOW [1994] — dynamika powłok¹⁹.

Koncepcja elementu zdegenerowanego. Koncepcję elementu zdegenerowanego zaproponowali AHMAD, IRONS i ZIENKIEWICZ [1970]. Znalazła one szczególnie szerokie zastosowanie w analizie numerycznej powłok. Ta koncepcja, zastosowana początkowo w liniowych zagadnieniach statycznych, rozszerzona została kolejno na zakres geometrycznie i fizycznie nieliniowy z zastosowaniem również do zagadnień dynamiki powłok.

W tym podejściu element powłokowy tworzy się przez modyfikację klasycznego, trójwymiarowego, izoparametrycznego elementu skończonego do elementu zgodnego z hipotezami powłokowymi, ale bez bezpośredniego odwoływania się do samej teorii powłok (KANOK-NUKULCHAI, TAYLOR i HUGHES²⁰ [1981]). Połączenie razem dwóch procesów — uwzględnienia hipotez powłokowych i dyskretyzacji — nazwano *degeneracją* (RAMM [1977], NOOR i ANDERSEN [1982]).

¹⁸Wymienione aspekty spełnia również sformułowanie sześcioparametrowe rozwinięte w tej książce.

¹⁹Te prace zawierają zarówno zapisane w nowoczesnej notacji geometryczno-różniczkowej sformułowania teorii powłok jak i ich implementacje numeryczne. Rozważany przez zespół Simo model teoretyczny powłoki był jednak przedmiotem intensywnych badań prowadzonych znacznie wcześniej przez szkołę radziecką i polską, zob. np. MUSZTARI i TIEREGULOW [1959], AJNOŁA [1965, 1968], WOŹNIAK [1966], PIETRASZKIEWICZ [1971, 1976, 1979a,b], GALIMOW [1977].

²⁰Podejście zbliżone do koncepcji opisu przemieszczeń użytego w pracy KANOK-NUKULCHAI, TAYLOR i HUGHES [1981] można odnaleźć w artykule HAUPTMANN i SCHWEIZERHOF [1998].

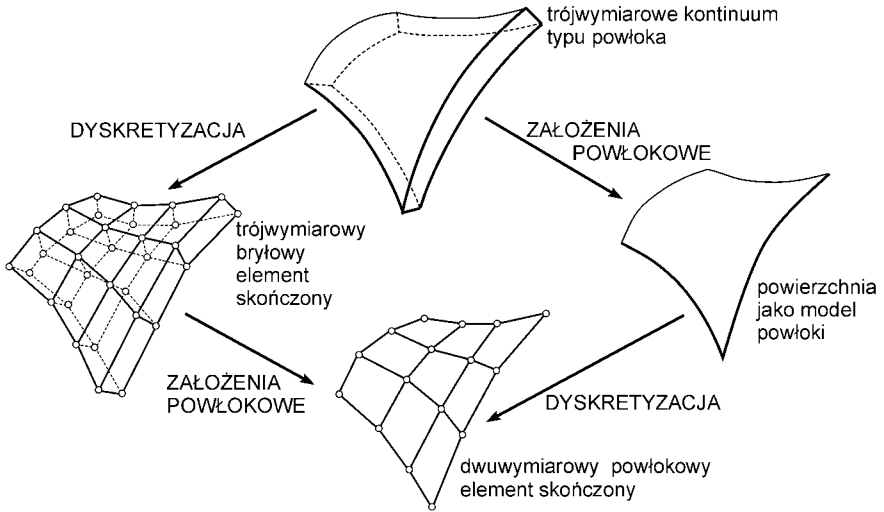
Koncepcja degeneracji jest wynikiem poszukiwań sposobu przewyciężenia wymienionych w p. 5.1.4 trudności numerycznych, występujących przy stosowaniu elementów trójwymiarowych do obliczeń powłok cienkich (RAMM [1976]). Hipotezy powłokowe wprowadzono tu w celu uniknięcia trudności numerycznych, wywoływanych niewspółmiernie dużym współczynnikiem sztywności w kierunku grubości. Hipotezę kinematyczną (2.7.3), o prostym i nierozciągliwym włóknie podczas deformacji, wprowadza się przez przyjęcie w opisie geometrii elementu liniowych funkcji kształtu wzdłuż grubości powłoki przeprowadzonych poprzez dwa węzły, leżące na górnej i dolnej powierzchni, z warunkiem zachowania ich początkowej odległości podczas deformacji (HUGHES i LIU [1981]). W wyniku otrzymuje się niezmienną grubość powłoki i zerową deformację poprzeczną po grubości. Umożliwia to zastąpienie niezależnych przesunięć obu węzłów przez przemieszczenia, wynikające z translacji i obrotu węzła wprowadzonego na powierzchni podstawowej (najczęściej powierzchni środkowej) elementu. Komplementarna hipoteza o płaskim stanie naprężenia ma na celu zapewnienie rozkładu naprężeń po grubości zgodnego z klasyczną teorią powłok. Wprowadza się ją przez modyfikację stycznego tensora konstytutywnego w definiowanych warstwach (STANLEY, PARK i HUGHES [1986]).

Element powłokowy, powstały w wyniku takiej degeneracji elementu bryłowego, reprezentuje prosty model powłoki ze ścinaniem typu Timoszenko-Reissnera. W odróżnieniu od teorii powłok, w której więzy tego typu nakładane są na ośrodek trójwymiarowy w ramach rozważań teoretycznych, w koncepcji degeneracji realizowane są one na drodze numerycznej w sposób dyskretny, przez ich włączenie do procesu interpolacji w węzłach i punktach całkowania. Takie podejście uniemożliwia separację dwóch różnych jakościowo błędów — błędu teorii powłok, jako wyniku wprowadzenia założeń upraszczających, i błędu dyskretyzacji, jako wyniku przybliżenia numerycznego. Nie ma dotąd metod analizy tego typu sprzężonych błędów. Pozbawia to możliwości dyskusji dokładności rozwiązania albo przez badanie błędów metody numerycznej, lub przez jakościowe szacowanie błędu teorii.

Dyskusja aproksymacji skończonej elementowej. W pracy KANOK-NUKULCHAI, TAYLOR i HUGHES [1981] podano podstawy strategii formułowania elementów powłokowych, której sens w zbliżonej graficznie czy logicznie formie przytacza również wielu autorów (rys. 5.1.1).

Rysunek 5.1.1, tak jak jego pierwowzór, myląco sugeruje przemienność i jedność wyniku wymienionych wcześniej dwóch procesów — hipotez powłokowych i dyskretyzacji — przy formułowania elementów powłokowych. Rysunek ten sugeruje, że w koncepcji degeneracji zachodzi również odwrotna do koncepcji klasycznej sekwencja rozdzielnych procesów — najpierw dyskretyzacja, a następnie wprowadzenie hipotez powłokowych. Jednak taka rozdzielność nie jest zgodna z pojęciem degeneracji (RAMM [1977]).

RAMM [1977, rys. 1, str. 265] podał logicznie podobny schemat, który sugeruje (co znajduje odbicie w tekście), że w klasycznym podejściu dwuwymiarowym wy-



Rys. 5.1.1. Strategia wyprowadzania elementów powłokowych wg wzoru z pracy KANOK-NUKULCHAI, TAYLOR i HUGHES [1981] (rys. 1, str. 20).

magane są kolejne założenia upraszczające już na etapie dyskretyzacji MES. Inaczej mówiąc, *dotatkowe założenia* do rozwiązywanych równań dwuwymiarowych w procesie implementowania metody numerycznej. Wymienia się przy tym geometrię powierzchni powłoki i zmienne połowe. MES, jak każda przybliżona metoda rozwiązywania, nie wprowadza założeń do rozwiązywanych równań, lecz tylko je aproksymuje (zob. np. PRENTER [1975] czy BRAESS [1992]). Pojawiają się tu inne założenia ograniczające, dotyczące samej metody numerycznego rozwiązania i obejmujące sprecyzowanie warunków, dla jakich dana metoda numeryczna została skonstruowana, np. typ operatora, przestrzenie odwzorowań, dziedziny, sposób aproksymacji, warunki i kryteria zbieżności itp.

Analizując obie strategie formułowania elementów powłokowych — klasyczną i degeneracji — należy więc zauważać różnice zarówno w strukturze matematycznej wynikowych równań jak i w podstawach realizacji numerycznej.

Dyskusja relacji konstytutywnych. Hipotezy typu T–R w elemencie zdegenerowanym wydają się silniejsze, niż to wynika z potrzeb teorii powłok tego typu. W teorii powłok hipotezy typu T–R pozwalają w wielu przypadkach (zależnych od typu materiału) wyprowadzić jawną postać materiałowych równań konstytutywnych, wyrażonych w zmiennych określonych na powierzchni podstawowej powłoki (np. SIMO, FOX i RIFAI [1990]). Natomiast w standardowym sformułowaniu elementów zdegenerowanych nadal konieczne jest całkowanie po objętości elementu.

Nie należy tu jednak mylić pozornie podobnych procesów — trójwymiarowego całkowania po objętości elementu i dwuwymiarowego całkowania po powierzchni

podstawowej powłoki łączonego, w każdym punkcie całkowania powierzchniowego, z dodatkowym jednowymiarowym całkowaniem po grubości powłoki²¹. Całkowanie po grubości jest typowe dla teorii płyt i powłok wykonanych z materiałów nieliniowych, kiedy nie jest możliwe wyprowadzenie zamkniętej postaci materiałowych równań konstytutywnych. Całkowanie po grubości (o ile zachodzi taka potrzeba) jest wykonywane w podprogramach dotyczących materiału, a nie na poziomie elementu (np. MILFORD i SCHNOBRICH [1985, 1986]). Właśnie poszukiwania możliwości wyeliminowania z obliczeń kosztownego całkowania w objętości elementu doprowadziły do sformułowania szeregu nowych elementów zdegenerowanych.

Jednym z pierwszych był element z tak zwanym „prze całkowaniem” (właśnie jednowymiarowym) w kierunku grubości. W tym elemencie, na podstawie założenia o cienkości powłoki, pomija się w odwróconym Jacobianie objętościowym składniki wyższego rzędu przy parametrze grubości. Zabieg ten umożliwia już jednowymiarowe, często jawne, „prze całkowanie” z kierunku grubości do powierzchni odniesienia. Dalsze poszukiwania, na drodze kolejnych założeń, doprowadziły w końcu do dwuwymiarowego elementu przekrojowego²² (zob. STANLEY, PARK i HUGHES [1986]). Dyskusję tego typu elementów w kontekście teorii powłok zawiera praca BÜCHTER i RAMM [1992].

Z obliczeniowego punktu widzenia, największym udogodnieniem towarzyszącym wprowadzeniu elementów powłokowych typu T–R, w stosunku do sformułowania opartego na teorii powłok typu K–L, jest obniżenie rzędu ciągłości międzyelementowej z C^1 do C^0 . Warunek ciągłości jedynie klasy C^0 prowadzi do znacznie prostszej konstrukcji aproksymacji skończenie elementowej. Standardowy przemieszczeniowy element zdegenerowany, pomimo na pozór idealnej przydatności takiego sformułowania, posiada jednak następujące ujemne cechy:

1. Rozszerzenie tego sformułowania na analizę obejmującą duże odkształcenia nie jest bezpośrednio oczywiste. Hipoteza kinematyczna typu T–R narzuca brak deformacji poprzecznej wzdłuż normalnej, co wyklucza zmianę grubości powłoki tak charakterystyczną dla skończonych odkształceń²³.
2. Tak jak w elemencie wyjściowym (bryłowym), stosuje się tu kosztowne trójwymiarowe całkowanie numeryczne w całej objętości elementu.
3. Nie ma możliwości bezpośredniego włączenia trzeciego obrotowego stopnia swobody.

²¹Koncepcja ta odgrywa istotną rolę w implementacji numerycznej teorii powłok.

²²W języku polskim element ten nazywa się często „całkowym” (WASZCZYŹYŃ, CICHÓŃ i RADWAŃSKA [1990]). Jednak nazwa ta ma ustalone miejsce w literaturze matematycznej i dotyczy innego problemu. W niniejszej książce pozostajemy przy nazwie „element przekrojowy” (WOŹNIAK [1966]), jako operujący na zsebelu przekroju (ŻYCZKOWSKI [1973]).

²³Dotyczy to nie tylko elementów zdegenerowanych. Jednak w przypadku klasycznych elementów powłokowych klasy C^0 łatwiejsze jest formalne osłabienie tego założenia na drodze teoretycznej.

4. Podobnie jak w elementach bryłowych, w granicznym przypadku analizy powłok cienkich użycie niskiego rzędu funkcji interpolacyjnych klasy C^0 prowadzi do wystąpienia efektu blokady rozwiązania przy pełnym całkowaniu zależności elementowych.

Literatura dotycząca elementów zdegenerowanych ujawnia również dodatkowe założenia upraszczające. Pojawiają się one często na poziomie formułowania macierzy elementowych. To wskazuje, że w elementach zdegenerowanych założenia są na ogół silniejsze od tych, których wymaga dobrze sformułowana teoria powłok. Cecha 4. dotyczy nie tylko elementów zdegenerowanych, ale praktycznie wszystkich typów przemieszczeniowych elementów klasy C^0 , wykorzystujących niskiego²⁴ rzędu funkcje interpolacyjne. Problem przewycięzania blokady jest więc nadal jednym z kierunków najbardziej intensywnych badań w zakresie formułowania elementów powłokowych i płytowych.

5.1.6. Blokada rozwiązań

Klasyczne przemieszczeniowe sformułowania elementów klasy C^0 oparte są na zasadzie stacjonarności całkowitej energii potencjalnej lub bardziej ogólnej zasadzie wirtualnych przemieszczeń. W tych elementach wykorzystuje się schemat interpolacji typu Lagrange'owskiego. Znajomość rzędu wielomianów podcałkowych (funkcji kształtu²⁵ i struktury macierzy elementowych) pozwala ustalić reguły dokładnego całkowania w ramach przyjętej metody numerycznej²⁶

W literaturze MES dla liczby punktów całkowania, spełniającej warunek dokładnego obliczenia całek z macierzy elementowych, przyjęto nazwę *całkowanie pełne* (normalne) z oznaczeniem FI (ang. *Full Integration*). W przypadku mniejszej liczby punktów całkowania, nie spełniającej tej reguły, wprowadzono nazwę *całkowanie zredukowane* i oznaczenie RI (ang. *Reduced Integration*). Przykładowo, przyporządkowanie nazw „pełne/normalne” i „zredukowane” odpowiednim schematom całkowania dla różnych elementów (w kontekście analizy zginania płyt) zawiera praca PUGH, HINTON i ZIENKIEWICZ [1978].

W obliczeniach konstrukcji powierzchniowych (płyty, powłoki) i prętowych (belki, łuki) znaną ujemną stroną klasycznego sformułowania przemieszczeniowych elementów klasy C^0 jest tzw. *efekt blokady* lub *zakleszczenia*. Efekt ten od strony mechanicznej objawia się jako nadmierne przeszywnienie rozwiązań badanego układu przy przejściu do analizy konstrukcji cienkich obliczanych przy

²⁴Elementy wyższego rzędu, np. bisześcienne Lagrange'owskie (płytowe — PUGH, HINTON i ZIENKIEWICZ [1978], powłokowe: zdegenerowane — RAMM i STEGMÜLLER [1982], klasyczne — HEPPLER i HANSEN [1986]) wykazują niską (zanikającą w sensie zbieżności typu p) tendencję do blokady, spełniając (jednak stosunkowo wolno) zbieżność typu h .

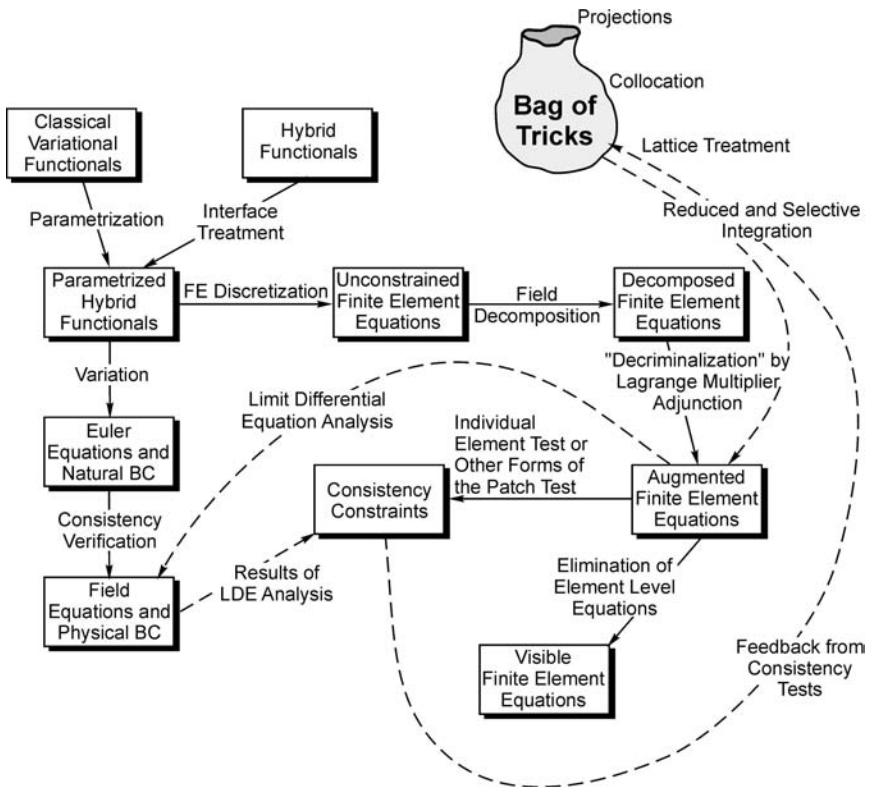
²⁵W MES wielomiany interpolujące zmienne problemu nazywa się *funkcjami kształtu*.

²⁶W MES stosowana jest głównie kwadratura Gaussa jako formuła najwyższej dokładności. W kwadraturze Gaussa przy n punktach całkowania otrzymuje się dokładną wartość całki z wielomianu rzędu nie większego niż $2n + 1$ (RALSTON [1975]).

stosowaniu całkowania pełnego. Zjawisko blokady ma naturę czysto numeryczną, towarzyszącą stosowaniu schematu jednolitej interpolacji niskiego rzędu typu Lagrange'owskiego. Z matematycznego punktu widzenia, jest to specyficznie złe uwarunkowanie układu równań (BRAESS [1992]).

Badania numeryczne wykazały, że obniżenie rzędu kwadratury przy całkowaniu macierzy elementowych do poziomu całkowania zredukowanego powoduje „odblokowanie się” rozwiązań, pozwalając uzyskać w wielu zadaniach poprawne rozwiązania. Jednak zastosowaniu całkowania zredukowanego towarzyszy powstawanie na poziomie elementu dodatkowych, fizycznie nieuzasadnionych zeroenergetycznych form deformacji, które mogą ujawnić się w procesie rozwiązania. Z uwagi na ich typowy charakter, względny w stosunku do pozostałej części rozwiązania, nazywa się je *formami pasożytniczymi*.

W celu omięcia bardzo niepożądanego efektu blokady, rozwinięto wiele inżynierskich sposobów ich uniknięcia (zob. np. materiały konferencyjne ASHWELL i GALLAGHER [1976] lub NOOR, BELYTSCHKO i SIMO [1990] i cytowaną tam literaturę, czy zestawienie YANG i inni [2000]). Wymienić tu można np. całkowanie



Rys. 5.1.2. Program of attack on the variational formulation of HP elements, wg wzoru z prac FELIPPA i MILITELLO [1990a,b].

jednolicie (URI) i selektywnie (SRI) zredukowane, użycie niezgodnych węzłów, sformułowanie mieszane i hybrydowe, projekcję naprężeń i odkształceń, sformułowanie swobodne, dwustopniową interpolację odkształceń, lub dyskretne więzy Kirchhoffa. Te i inne techniki realizowane są w elementach płytowych i powłokowych na różne sposoby, często bez konsystentnego sformułowania wariacyjnego. We wczesnej fazie rozwoju część z tych sposobów traktowano bardziej jako triki numeryczne, niż uzasadnione matematycznie podejścia (zob. rys. 5.1.2 wg FELIPPA i MILITELLO [1990a,b]).

5.1.7. Analiza nieregularnych powłok wielopłatowych

Zastosowanie elementów powłokowych w wersjach standardowych²⁷ do analizy złożonych konstrukcji inżynierskich napotyka na istotną trudność związaną z łączeniem elementów w struktury.

Rzeczywiste konstrukcje inżynierskie charakteryzuje daleko posunięta złożoność formy. Często ich schematy obliczeniowe zawierają jednocześnie zarówno pręty i słupy, jak i wielopłatowe segmenty złożone z płyt i/lub powłok. Często występuje również skokowa zmienność grubości lub własności materiałowych, załamania, rozwidlenia, przecięcia, wzmocnienia itp. komplikacje konstrukcyjne. Połączenia różnych części i określenie obciążenia wymagają często modelowania w sposób punktowy i/lub krzywoliniowy. Typowymi przykładami takich złożonych konstrukcji z dziedziny budownictwa są blachownice, tarczownice, wielokomorowe konstrukcje skrzynkowe, silosy, uźebrowane powłoki czy stropy wsparte na słupach. Wspólnymi cechami, wymagającymi odpowiedniego uwzględnienia, są tu nieregularności w geometrii i obciążeniu, połączenia, usztywnienia, a także możliwość wystąpienia nieciągłej deformacji.

Koncepcji analizy takich konstrukcji jako całości (z uwzględnieniem wymienionych wyżej aspektów) poszukuje się od dawna. Jednak na tym polu nie osiągnięto takich rezultatów jak w przypadku powłok gładkich i regularnych, którym poświęca się wiele miejsca w literaturze. Szczególne trudności w zastosowaniach elementów powłokowych do takich złożonych konstrukcji występują w przypadku elementów wyższej precyzji typu K–L z węzłowymi stopniami swobody, zawierającymi wyższe pochodne pola przesunięć. Fakty te znane są od dawna i od dawna rozwijane są różne koncepcje ominięcia tych ograniczeń.

W kontekście obliczeń MES należy zauważyć, że zagadnienie początkowo-brzegowe powłok nieregularnych powinno zawierać kompletny układ równań pola i warunków ubocznych — brzegowych, początkowych i ciągłości wzdłuż nieregularności — dla zmiennych kinematycznych i dynamicznych. W przypadku braku sformułowania warunków ciągłości, klasyczny układ równań pola i warunków

²⁷Mamy na myśli zarówno elementy oparte na koncepcji degeneracji, jak też typu Timoszenko–Reissnera (oba z pięcioma parametrami węzłowymi) i elementy wyższej precyzji typu Kirchhoffa–Love'a z nieinżynierskimi stopniami swobody.

ubocznych zagadnienia jest niekompletny²⁸ i jego rozwiązanie jest niemożliwe. Ma to szczególne znaczenie w kontekście powszechnego stosowania rozwiązań numerycznych MES, kiedy, wprowadzając na potrzeby obliczeniowe różne techniki łączenia konstrukcji w całość, traci się często z pola widzenia miejsce, w którym leży zasadniczy problem mechaniki połączeń powłok wielopłatowych.

W analizie powłok wielopłatowych z wykorzystaniem elementów klasy C^0 i C^1 wyróżnić można cztery zasadnicze podejścia.

I. Podejście bezpośrednie²⁹ pozwala stosować elementy powłokowe z pięcioma stopniami swobody w węźle do analizy powłok załamanych i rozgałęzionych. Polega ono na użyciu jednego z dwóch prostych sposobów (np. HUGHES i LIU [1981], HUANG i HINTON [1986a], VU-QUOC i MORA [1989], BATHE i BOURCHI [1980]):

- a. Transformacji dwóch parametrów obrotu, zdefiniowanych w lokalnej bazie węzła elementu, do bazy globalnej, gdzie elementy łączy się w całą strukturę. W wyniku transformacji wzrasta liczba niewiadomych węzłowych z pięciu do sześciu³⁰.
- b. Zdefiniowaniu — przy przejściu przez nieciągłości połączeń różnych części powłoki — wspólnego, ciągłego, uśrednionego pola wektorów kierunkowych. Łączenie elementów z różnych części odbywa się wtedy bez udziału układu globalnego.

W literaturze MES, często już w kontekście prezentacji elementów, wymienia się głównie dwie powyższe możliwości. Jednak na ogół nie podaje się odpowiednich numerycznych przykładów testowych powłok wielopłatowych, ograniczając się tylko do wyników badań powłok gładkich, nie wymagających tego typu dodatkowych zabiegów. Dla obu sposobów a. i b. brak jest więc reprezentatywnych testów numerycznych, potwierdzających te możliwości i granice ich stosowalności.

Podejście bezpośrednie, wykorzystujące transformację problemu do innego układu współrzędnych, nie rozwiązuje żadnego problemu analizy powłok załamanych i rozgałęzionych, gdyż nie są tu spełniane ani dynamiczne (statyczne) ani kinematyczne warunki ciągłości. Dlatego ten sposób podejścia daje się zastosować do obliczeń tylko ograniczonej klasy zadań. W obliczeniach konstrukcji zawierających połączenia segmentów powłokowych z nieciągłością płaszczyzny stycznej, brak w sposobie a. sztywności, odpowiadającej obrotowi wokół nor-

²⁸Nieregularność w sformułowaniu klasycznym manifestuje się jedynie przez odpowiednie warunki ciągłości. Inne zależności, w stosunku do odpowiedniego problemu powłok regularnych, nie ulegają zmianie.

²⁹Pod hasłem „podejście bezpośrednie” rozumiemy techniki pozwalające na stosowanie elementów klasycznych do analizy problemów złożonych, na potrzeby których te elementy nie były formułowane.

³⁰Taka transformacja może być ograniczona tylko do węzłów leżących na brzegu łączonych płatów. Wówczas miejscowo, tylko w tych węzłach, wzrasta liczba stopni swobody z pięciu do sześciu.

malnej do powierzchni podstawowej poszczególnych płatów, może prowadzić do poważnych błędów i sztucznych form wybożenia (zob. np. SCHMIDT, DAMRATH i PAHL [1977]). Sposób b. daje się zastosować praktycznie tylko do modelowania powłok załamanych (połączeń złożonych z dwóch płatów, zob. np. GEBHARDT [1990]). Oba sposoby całkowicie zawodzą w przypadku ortogonalnego łączenia elementów prętowych i płytowych/powłokowych.

Próbie sformalizowania na drodze wariacyjnej sposobu a., przy tylko miejscowej transformacji dwóch parametrów obrotu do układu globalnego, podjęto w pracy SIMO [1993]. W wyniku otrzymano element o $5/6$ stopniach swobody w węzłach z otoczenia załamania powłoki³¹.

II. Podejście wprowadzające szósty stopień swobody. W tym podejściu, stosowanym w elementach sformułowanych na podstawie teorii klasycznych trój- lub pięcioparametrowych, próbuje się rozwiązać problem analizy powłok wielopłatowych na poziomie numerycznym przez rozszerzenie liczby parametrów obrotu w węzle z dwóch do trzech³². Trzeci parametr obrotu, za BURZYŃSKIM [1949] zwany tu *owinięciem* (ang. *drilling rotation*), formułuje i wbudowuje się do elementów powłokowych o pięciu parametrach w węzle na wiele — z reguły nierównoważnych — sposobów. Podejście to jest jednym z popularniejszych, co znajduje odbicie w stosunkowo licznej literaturze potwierdzającej jedynie napotykaną trudności (zob. np. FREY [1990], nota historyczna BERGAN i FELIPPA [1985]). Wyróżnić tu można dwa sposoby:

IIa. Inżynierski sposób wprowadzenia szóstego stopnia swobody. Polega on na dodaniu (przez różne zabiegi) sztywności sprężonej z szóstym stopniem swobody. Najbardziej popularne sposoby polegają na dodaniu bezpośrednio do węzła elementu fikcyjnej sztywności obrotowej³³ (zorientowanej sprężynki, jak to opisuje np. ZIENKIEWICZ [1972], implementacja np. BATHE i HO [1981], TALBOT i DHATT [1986], także CHRÓSCIELEWSKI, GÓRSKI i IWICKI [1995]) lub na wbudowaniu w element (płaski) wzdłuż jego boków zastępczej belki o odpowiednio dobranej i ukierunkowanej sztywności giętnej (ARGYRIS i inni [1979]).

³¹Praca SIMO [1993] zawiera pewne niedomówienie odnośnie szóstego stopnia swobody. Zaważono, że w ramach więzów T-R trzeci obrotowy stopień swobody jest nieokreślony. Nie oznacza to jednak, że można przyjąć, tak jak się to sugeruje, jego zerową wartość (zero jest wartością *określoną*, a zatem trzeba podać również odpowiednią do tej wartości relację więzów). W tej pracy wyraźnie mówi się o powłokach nieładkich i w pewnym sensie o kinematycznych warunkach ciągłości. Praca SIMO [1993], w kontekście szóstego stopnia swobody, łączy w sobie cechy dyskutowanych dalej podejść — dyskretnego **IIb** i kontynualnego w wersji wariacyjnej **IIIb**.

³²Przez trzeci parametr obrotu (szósty stopień swobody) rozumiemy zarówno naturalny parametr, wynikający z teorii powłok lub jego wielkość pochodną, jak i jego dyskretny odpowiednik, związany z opisem szeroko pojętego obrotu normalnego do powierzchni podstawowej powłoki.

³³W pracy JETTEUR i FREY [1986] podano, że zastosowanie fikcyjnej sprężynki o powszechnie przyjmowanej sztywności równej $10^{-4} \times$ *mniejsza sztywność węzłowa na zginanie* (BATHE i HO [1981]), w przypadku analizy wstępnie skręconej belki (zob. p. 6.5.3) prowadzi do stukrotnego zawyżenia wyników w przesunięciach.

Sposób ten, wprowadzający energetycznie sprzężoną z owinięciem sztywność obrotową, ma pewne cechy formalnego podejścia do problemu od strony dynamicznej i kinematycznej.

IIb. Dyskretyzacyjny sposób wprowadzenia szóstego stopnia swobody.

Źródeł tego podejścia można dopatrywać się w próbie poprawienia własności elementów płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia zginianych w swojej płaszczyźnie (MACNEAL i HARDER [1988]). Poprawę modelowania efektu zginania otrzymuje się przez podniesienie rzędu interpolacji pól niewiadomych. W wyniku zwiększenia rzędu interpolacji pojawiają się dodatkowe stopnie swobody w węzłach elementu. Każdy z tych stopni można zinterpretować jako obrót normalny do płaszczyzny elementu. Stosując analogiczne postępowanie, próbuje się na poziomie dyskretnym wbudować szósty stopień swobody w standardowe elementy powłokowe, zdegenerowane lub klasyczne. W standardowych elementach klasy C^1 proponuje się interpretację szóstego stopnia swobody przez kombinację składowych pierwszych pochodnych przesunięć w powierzchni elementu (np. TOCHER i HARTZ [1967] dla tarcz, OLSON i BEARDEN [1979], LEE i HARRIS [1979], TALBOT i DHATT [1986], także CHRÓŚCIELEWSKI [1983]). Pozostałe nieinżynierskie parametry węzłowe są eliminowane na drodze kondensacji statycznej.

Jedna z możliwości rozszerzenia elementów powłokowych o szósty stopień swobody, wymagająca w aproksymacji stanu membranowego ciągłości klasy C^0 (np. STOLARSKI i inni [1984], JETTEUR i FREY [1986]³⁴, JASINA [2003]), bazuje na tzw. *niekonwencjonalnej interpolacji Allmana*, zaproponowanej w pracy ALLMAN [1984]. W tym podejściu do płaskiego elementu trójwęzłowego wprowadzono pojęcie obrotu łącznika wierzchołków elementu³⁵ (ang. *vertex rotation*). Inny sposób wprowadzenia normalnego, obrotowego stopnia swobody do elementu tarczowego, na gruncie tzw. *sformułowania swobodnego*, zaproponowano w pracy BERGAN i FELIPPA [1985]. Ten typ podejścia, operującego bezpośrednio na poziomie macierzy sztywności, zastosowano do konstrukcji elementu powłokowego (np. BERGAN i NYGARD [1986]).

Propozycje *niekonwencjonalnej interpolacji Allmana* i *sformułowania swobodnego* zapoczątkowały istotny postęp od strony numerycznej, owocujący wieloma pracami nad wbudowaniem szóstego stopnia swobody do elementów powłokowych. Wspólne obu koncepcjom doświadczenia pokazują, że do wykluczenia nieoczekiwanych rozwiązań muszą być użyte specjalne środki (FREY [1990]). Ponadto, zastosowanie obu podejść ograniczone jest do określonej geometrii elementu i nie może być użyte w powłokowych elementach wielowęzłowych. Tak wbudowany na poziomie dyskretnym (jedynie w węzłach) szósty stopień swobody

³⁴W późniejszej pracy JAAMEI, FREY i JETTEUR [1989] pokazano (Tab. 2b), że analiza zbieżności podziału elementem JET opracowanym w JETTEUR i FREY [1986], w przypadku wstępnie skróconej belki (zob. przykład 3.3), jest procesem rozbieżnym.

³⁵JASINA [2003] dla tak wprowadzonej wielkości (ang. *vertex rotation*) proponuje w języku polskim nazwę *wiert*.

pozwała łączyć elementy w analizie powłok nieregularnych. Jest to zasadniczo równoważne spełnieniu kinematycznych warunków ciągłości, lecz jedynie w węzłach. Problem dynamicznych warunków ciągłości pozostaje całkowicie poza tą analizą.

III. Podejście kontynualne. Wychodząc z założenia, że w rozwiązywaniu problemu powłok nieregularnych nieodzowne są wszystkie trzy parametry obrotu, w ramach tego podejścia usiłuje się wprowadzić szósty stopień swobody na poziomie sformułowania kontynualnego (teoretycznego) problemu. Podejście to stosuje się zarówno w problemach powłokowych jak i trójwymiarowych. Należy tu wyraźnie wydzielić dwa sposoby, które można nazwać fizycznym i wariacyjnym.

IIIa. Fizyczne podejście kontynualne polega na zastąpieniu klasycznych modeli — trójwymiarowego ośrodka Cauchy’ego lub dwuwymiarowego, pięcioparametrowego modelu powłoki typu Timoszenko–Reissnera — modelami wzbogaconymi: odpowiednio trójwymiarowym lub dwuwymiarowym ośrodkiem Cosserat. Przyjęcie modelu wzbogaconego ze wszystkimi sześcioma stopniami swobody rozwiązuje problem tylko szóstego stopnia swobody. W tym przypadku elementy skończone (zob. np. SZILARD [1974] w dodatku B) formułuje się stosując standardowe postępowanie MES.

Koncepcja modelowania powłok powierzchnią typu Cosserat³⁶ jest znana, ale nie były w niej w pełni analizowane warunki ciągłości dla powłok nieregularnych. W ramach klasycznego opisu trójwymiarowego przyjmuje się, że ciało typu powłoka jest ośrodkiem Cauchy’ego, natomiast wzbogacony dwuwymiarowy model powłoki typu Cosserat jest wynikiem *ściśtej redukcji* problemu z trzech do dwóch wymiarów (REISSNER [1974], LIBAI i SIMMONDS [1983, 1998], SIMMONDS [1984a], CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i STUMPF [1992, 1994, 1997], MAKOWSKI i STUMPF [1994], CHRÓŚCIELEWSKI [1996], MAKOWSKI i CHRÓŚCIELEWSKI [1998], PIETRASZKIEWICZ [2001b]).

Można jednak za punkt wyjścia przyjąć trójwymiarowy ośrodek Cosserat, a następnie zredukować problem z trzech do dwóch wymiarów. Stosując takie postępowanie, w pracy SANSOUR i BEDNARCZYK [1995] (zob. także SANSOUR i BOCKO [1998]) otrzymano dwuwymiarowy model Cosserat. Podejście takie wydaje się jednak raczej sztuczne, ponieważ nigdy nie wyznaczono stałych materiałowych nawet dla liniowo sprężystych trójwymiarowych materiałów tego typu. Ponadto, nie jest też wcale oczywistym jak należy dobrać założenia potrzebne do redukcji problemu z trzech do dwóch wymiarów (zwłaszcza dla obrotów).

³⁶Zaproponowaną oryginalnie przez braci COSSERAT [1909] koncepcję podjęto na gruncie teoretycznym (zakres liniowy) w pracach GÜNTHER [1961], REISSNER [1970] oraz (zakres nie liniowy) ŽILIN [1982], ALTENBACH i ŽILIN [1988]. W pracy ATLURI i PIAN [1972], poświęconej zagadnieniom liniowym, koncepcję tę rozważano w kontekście MES, jednak bez opracowania elementów i przeliczenia stosownych przykładów. Podano tam zasady wariacyjne z osłabionymi warunkami ciągłości dla pól niewiadomych w ramach teorii powłok regularnych.

IIIb. Wariacyjne podejście kontynuualne. W ramach trójwymiarowego ośrodka ciągłego typu Cauchy’ego dobrze zdefiniowanym obrotem lokalnym jest tensor obrotu \mathbf{R} , wynikający z rozkładu biegunowego gradientu deformacji $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$. W mechanice ośrodka ciągłego tensor \mathbf{R} nie jest jednak wielkością niezależną i wyraża się przez gradient pola przesunięć $\nabla\mathbf{u}$.

BADUR i PIETRASZKIEWICZ [1986] przeformułowali klasyczny, trójwymiarowy model mechaniki ośrodka Cauchy’ego do równoważnej postaci, ale wyrażonej przez strukturę kinematyczną ośrodka Cosserat ze związanymi mikroobrotami tak, aby były one zawsze równe makroobrotom \mathbf{R} . W tym przypadku mnożniki Lagrange’a równań więzów narzuconych na mikroobroty są dodatkowymi zmiennymi dynamicznymi, wchodzącymi również do energii sprężystej ośrodka. Do takiego ośrodka typu Cosserat wprowadzono następnie hipotezy teorii powłok typu K–L i skonstruowano odpowiedni dwuwymiarowy funkcjonal całkowitej energii potencjalnej. W tym funkcjonale trzy przesunięcia, trzy obroty i cztery dodatkowe mnożniki Lagrange’a są podstawowymi zmiennymi niezależnymi. Ta koncepcja została rozwinięta w pracy PIETRASZKIEWICZ [1989], gdzie podano szereg dodatkowych zasad globalnych i przyrostowych, a odpowiadające temu sformułowaniu kinematyczne i dynamiczne warunki ciągłości na krzywych i w punktach osobliwych sformułował PIETRASZKIEWICZ [2001a]. Niestety, dla tego sformułowania nie opracowano dotąd odpowiednich elementów skończonych.

Można również, wykorzystując koncepcję mnożników Lagrange’a, skonstruować trójwymiarowy funkcjonal dwupolowy z \mathbf{u} i \mathbf{R} jako zmiennymi niezależnymi, włączając warunek uboczny $\mathbf{1} + \nabla\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ z odpowiednim mnożnikiem Lagrange’a (zob. HUGHES i BREZZI [1989] — płaskie zagadnienie liniowe, SIMO, FOX i HUGHES [1992] — teoria nieliniowa). Funkcjonał taki stanowi następnie podstawę formułowania trójwymiarowych elementów skończonych przy zastosowaniu koncepcji elementów mieszanych (np. elementy płaskie HUGHES, MASUD i HARARI [1995] — w zagadnieniach liniowych, IBRAHIMBEGOVIĆ [1993], IBRAHIMBEGOVIĆ i FREY [1995] — w zagadnieniach nieliniowych). Dyskretyzacji podlegają w tym przypadku \mathbf{u} , \mathbf{R} i odpowiedni mnożnik Lagrange’a \mathbf{M} , mający interpretację tensora naprężeń momentowych.

W przypadku powłok często stosuje się podobną koncepcję. Punktem wyjścia jest tu pięcioparametrowy model typu T–R z dwoma parametrami obrotu. Analogiczną do przypadku trójwymiarowego zasadę wariacyjną tworzy się wprowadzając dodatkowo jedynie trzeci parametr obrotu jako zmienną niezależną. Trzeba jednak zauważyć, że w ramach teorii powłok typu T–R nie istnieje oczywisty warunek uboczny typu $\mathbf{1} + \nabla\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{U}$. Zwykle przyjmuje się, że rolę takiego warunku spełnia obrót w płaszczyźnie stycznej do powierzchni podstawowej powłoki, określony całkowicie przez przesunięcia styczne i ich gradienty. To przybliżone założenie jest uzasadnione w tym sensie, że w przypadku redukcji zagadnienia do tarczy pokrywa się ono ze sformułowaniem trójwymiarowym. Koncepcja

ta rozwinięta została pracach³⁷ np. FOX i SIMO [1990]³⁸, GRUTTMANN, WAGNER i WRIGGERS [1992], RADWAŃSKA, URBAŃSKI i WASZCZYŻYŃ [1993], IBRAHIM-BEGOVIĆ [1994], IBRAHIM-BEGOVIĆ i FREY [1994a,b], RENGARAJAN, AMINPOUR i KNIGHT [1995].

W pracach WIŚNIEWSKI [1997, 1998], WIŚNIEWSKI, KLEIBER i TURSKA [2000], WIŚNIEWSKI i TURSKA [2000, 2001] punktem wyjścia jest trójwymiarowa mieszana zasada prac wirtualnych, wyrażona za pomocą wektora deformacji χ i trzech parametrów tensora obrotu \mathbf{Q} oraz skośnie-symetrycznego tensora naprężeń $\mathbf{T}_a^B = \text{skew}(\mathbf{Q}^T \mathbf{T})$, gdzie \mathbf{T} jest pierwszym tensorem naprężeń Pioli-Kirchhoffa. Miarą naprężeń jest symetryczny tensor Biota $\mathbf{T}_s^B = \text{sym}(\mathbf{Q}^T \mathbf{T})$, a miarą odkształceń jest symetryczny tensor rozciągnięcia $\mathbf{H} = \text{sym}(\mathbf{Q}^T \mathbf{F}) - \mathbf{I}$. Równania powłok otrzymuje się, nakładając hipotezę typu T-R na kinematykę deformacji χ i aproksymację obrotu \mathbf{Q} po grubości powłoki. Przyjmując różne założenia dotyczące kinematyki i aproksymacji obrotu, wyprowadzono trzy warianty równań powłok o różnej liczbie (3, 4, 6) parametrów związanych z obrotem.

W cytowanych powyżej pracach, jak i w innych wykorzystujących tę koncepcję, nie dyskutuje się dynamicznych warunków ciągłości.

W pracy KANOK-NUKULCHAI [1979], w ramach klasycznej koncepcji elementu zdegenerowanego, trzeci parametr obrotu dołączany jest za pośrednictwem funkcji kary przez odpowiednie zdefiniowanie energii odkształcenia sprężystego. W pracy ALLMAN [1988] najpierw sformułowano elementy skończone bez odpowiedniej zasady wariacyjnej, a dopiero później zauważono, że tak sformułowane elementy mają uzasadnienie matematyczne w omówionej wyżej koncepcji.

Reasumując należy podkreślić, że zarówno w problemach trój- jak i dwuwymiarowych uzyskane odpowiednie zasady wariacyjne, z przesunięciami, obrotami i mnożnikami Lagrange'a jako zmiennymi niezależnymi, pozwalają formułować różne elementy skończone o sześciu parametrach kinematycznych w węzłach. Jednak w elementach tego typu, tak jak w przypadku innych zasad mieszanych, występują dodatkowe utrudnienia towarzyszące dyskretyzacji tego typu zasad wielopolowych.

IV. Podejście wykorzystujące elementy przejściowe. W obszarze połączenia wielopłatowego lub innej nieregularności, gdzie teoria powłok z założenia nie może dostarczyć ścisłych rozwiązań, można wprowadzić elementy przejściowe, uwzględniające odpowiednie cechy mechaniczne połączenia. Występują tu dwie możliwości.

³⁷Podejście to cechuje pewna niekonsekwencja, wynikająca chyba z historii rozwoju teorii powłok. Polega ona na tym, że najpierw wprowadza się hipotezę kinematyczną typu T-R, eliminującą trzeci parametr obrotu (owinięcie), a następnie na drodze wariacyjnej, poprzez mnożniki Lagrange'a, usiłuje się wbudować ten obrót z powrotem w teorię.

³⁸Praca ta do tej pory nie doczekała się kontynuacji w postaci opracowania elementów skończonych i przeliczenia stosownych przykładów powłok nieregularnych.

Pierwsza, to pozostawienie opisu obszaru połączenia wielopłatowego na poziomie trójwymiarowym. W obszarze połączenia stosuje się wtedy odpowiednią dyskretyzację bryłowymi elementami skończonymi i elementami specjalnymi, przechodzącymi poza obszarem połączenia (na podstawie założeń kinematycznych) w elementy powłokowe. Koncepcję tego typu elementów przejściowych (z trzech do dwóch wymiarów) w ramach elementów zdegenerowanych przedstawiono np. w pracach BATHE i BOLOURCHI [1980] i BATHE [1996]. Analizę porównawczą, w kontekście teorii powłok z zastosowaniem elementów przejściowych, na przykładzie modelowania naroża ramy, zawiera praca BATHE, LEE i BUCALEM [1990]. Odpowiednie przykłady zastosowań technicznych do analizy połączenia rur stalowych (włącznie z modelowaniem spoin) przedstawili np. COFER i WILL [1991, 1992].

Drugą możliwością jest konstrukcja specjalnego łącznika³⁹ płatów powłoki, typu prętowego elementu przestrzennego, na zasadzie redukcji do jednego wymiaru ośrodką trójwymiarowego, geometrycznie pokrywającego się z obszarem połączenia wielopłatowego (por. MAKOWSKI i STUMPF [1994]). W tym przypadku, poza zależnościami wynikającymi z redukcji z trzech do jednego wymiaru, pręt taki można wyposażyć w dodatkowe własności potrzebne do właściwego opisu rozważanego zagadnienia (np. MEES i VERMEIR [1993]).

Ten typ podejścia, wykorzystujący elementy przejściowe, zarówno trój- jak i jednowymiarowe, konstruowane odpowiednio do potrzeb, wydaje się najwłaściwszym sposobem modelowania połączeń wielopłatowych powłok. Podejście to wychodzi jednak poza rozważania samej teorii powłok i w implementacji numerycznej wymaga rozszerzenia biblioteki elementów skończonych. W pierwszym przypadku zastosowanie dyskretyzacji elementami bryłowymi powoduje znaczny wzrost czasu obliczeń, a stąd i kosztów rozwiązania.

Warto wspomnieć także o stosowaniu takich elementów przejściowych, których celem nie jest udoskonalenie teorii powłok, lecz uproszczenie opisu przez zastosowanie jednowymiarowych elementów prętowych w miejsce elementów skończonych bryłowych czy powłokowych. Sposób ten jest od dawna powszechnie stosowany w praktycznych obliczeniach inżynierskich złożonych konstrukcji cienkościennych (np. BRANICKI, CHRÓŚCIELEWSKI i TARASZKIEWICZ [1984]). W tego typu konstrukcjach miejsca o szczególnym znaczeniu dla ich nośności, takie jak węzły połączenia prętów i naroża ram, obszary podparcia i przyłożenia obciążeń, miejsca przewidywanej koncentracji naprężeń czy zagrożone lokalnym wyboczeniem itp., modelowane są (dokładniej) elementami powłokowymi, a pozostałe czę-

³⁹W inżynierskich obliczeniach MES złożonych struktur przestrzennych stosowane jest podobne podejście. Łączenie w strukturę części konstrukcji modelowanych jednocześnie różnymi elementami (np. tarczowymi o 2, bryłowymi o 3, wiotkimi membranowymi o 3, płytowymi o 3 czy powłokowymi o 5 stopniach swobody w węźle) polega na wprowadzeniu w miejscach złącza fikcyjnego belkowego elementu o 6 stopniach swobody w węźle. Przykład takiego podejścia, z łącznikiem wyposażonym w równania konstytutywne, odnieść można w pracy BERNADOU, FAYOLLE i LENE [1989], dotyczącej modelowania „zawiasowego” połączenia płyt typu Kirchhoffa.

ści modelowane są (zgrubnie) elementami prętowymi. Obszary, w których wskazane jest zastosowanie opisu elementami powłokowymi, określa się najczęściej na podstawie wcześniejszej wstępnej analizy problemu modelem prętowym. Podejście to wymaga wprowadzenia specjalnego elementu lub szczególnego sposobu opisu obszaru przejścia, zapewniającego spójność modelu powłokowego i prętowego (zob. np. WAGNER [2000]).

5.2. Przemieszczeniowe elementy skończone

5.2.1. Współrzędne fizyczne

W poprzednich rozdziałach posługiwaliśmy się pewną dowolną parametryzacją lokalną $\xi \equiv (\xi^1, \xi^2)$ nieodkształconej powierzchni podstawowej powłoki M z przyjętą, w każdym punkcie powierzchni M , trójką wektorów kierunkowych (tzw. *wektorów najeżenia*) $\{t_i^0\}$. W ogólnym przypadku, omawiane na tak sparametryzowanej powierzchni M składowe zmiennych dynamicznych i kinematycznych teorii powłok są pozbawione wymiarów fizycznych.

Przy rozwiązywaniu konkretnych zadań, a także na potrzeby wyprowadzenia powłokowych elementów skończonych, bardziej pożądane są składowe fizyczne tych zmiennych. Otrzymuje się je w sposób przedstawiony w podrozdziale 2.4. Dostosujemy więc te wyniki do konwencji używanej przy formułowaniu elementów skończonych.

Od strony formalnej zakładamy, że powierzchnia podstawowa powłoki M jest lokalnie parametryzowana przez *współrzędne ortogonalne* $\eta = (\eta^1, \eta^2)$ tworzące siatkę na M . W szczególności, mogą być one współrzędnymi wzdłuż głównych krzywizn powierzchni M . Przez $s = (s_1, s_2)$ oznaczmy poszukiwane przez nas współrzędne w postaci *parametrów długości łuku* wzdłuż $\eta = (\eta^1, \eta^2)$, dla których

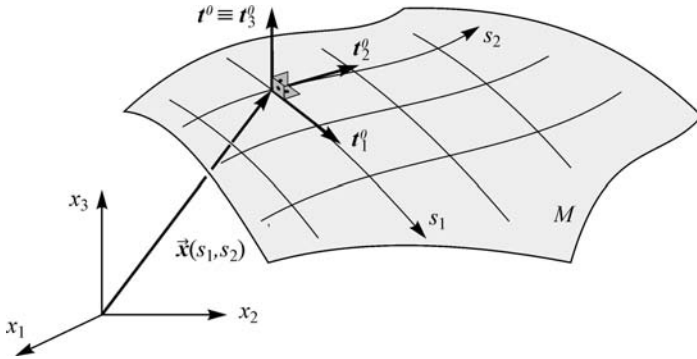
$$ds_\alpha = \alpha_\alpha d\eta^\alpha, \quad \alpha_\alpha = \sqrt{\vec{x}_{,\alpha} \cdot \vec{x}_{,\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{nie sumować}). \quad (5.2.1)$$

Stowarzyszone z parametrami $s = (s_1, s_2)$ jednostkowe wektory bazy naturalnej t_α^0 i jednostkowy wektor normalny t^0 do tak sparametryzowanej powierzchni podstawowej mają z definicji postać (rys. 5.2.1)

$$t_\alpha^0 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial s_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{nie sumować}), \quad t^0 \equiv t_3^0 = t_1^0 \times t_2^0. \quad (5.2.2)$$

Wektory t_i^0 tworzą *ortonormalną bazę*, określoną w każdym punkcie powierzchni podstawowej M . Tak zdefiniowana ortonormalna baza jest bardzo wygodna w obliczeniach, bowiem umożliwia zapisanie wszystkich relacji mechaniki powłok bezpośrednio we współrzędnych fizycznych.

W ramach rozważanej tu ogólnej teorii powłok, geometria konfiguracji nieodkształconej powłoki jest określana przez wektor wodzący \vec{x} powierzchni podstawowej oraz przez niezależne pole trójek wektorów kierunkowych $\{t_i^0\}$. Pola te od tego miejsca traktujemy lokalnie jako funkcje parametrów łukowych, tj.



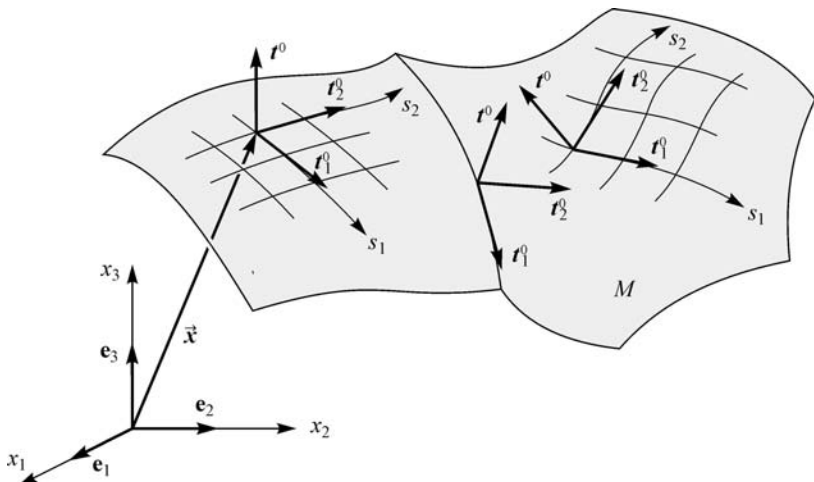
Rys. 5.2.1. Formalna parametryzacja nieodkształconej powierzchni podstawowej.

$\vec{x} = \vec{x}(s_\beta)$, $t_i^0(s_\beta)$. Takie formalne podejście wymaga określenia lokalnej parametryzacji $s = (s_1, s_2)$ powierzchni M . Od strony obliczeniowej bezpośrednie określenie parametrów długości łuku $s = (s_1, s_2)$, szczególnie w zadaniach dotyczących powłok wielopłatowych, jest kłopotliwe i nie jest bezpośrednio potrzebne.

W kontekście sformułowania elementów skończonych pola najeżenia $\{t_i^0\}$ traktuje się z góry jako część danych zadania, tak jak pole wektora wodzącego \vec{x} . Najeżenie $\{t_i^0\}$ definiujemy w najwygodniejszej do obliczeń postaci, a więc jako trójkę ortonormalną:

$$t_i^0 \cdot t_j^0 = \delta_{ij}, \quad t_i^0 = t_0^i, \quad t^0 \equiv t_0^3. \quad (5.2.3)$$

Zatem od tej chwili przyjęcie $\{t_i^0\}$ jako danych w postaci (5.2.3), na podstawie (5.2.2), jest równoważne z określeniem parametrów łukowych $s = (s_1, s_2)$ na M (rys. 5.2.2).



Rys. 5.2.2. Parametryzacja nieodkształconej powierzchni podstawowej przez podanie wektorów kierunkowych.

Ponieważ ortonormalną trójkę najeżenia $\{t_i^0\}$ z (5.2.3) można zdefiniować w każdym punkcie M przez właściwą transformację ortogonalną bazy $\{e_i\}$ globalnego układu odniesienia

$$t_i^0(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.2.4)$$

to podanie jako danych najeżenia $\{t_i^0\}$ jest równoważne z określeniem tensora $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ interpretowanego w tym przypadku jako tensor obrotu.

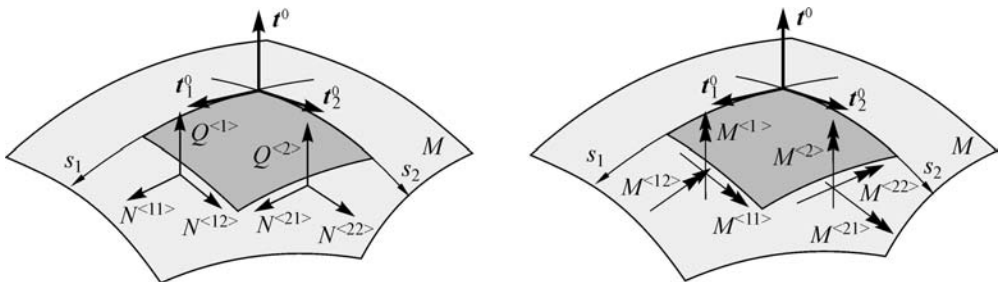
Z zależności (5.2.4) i wcześniejszych związków, określających deformację wektorów kierunkowych wynika, że

$$t_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) t_i^0(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i. \quad (5.2.5)$$

Ponieważ tensor $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ jest ustalony i stanowi część danych wejściowych algorytmu rozwiązania, stąd wynika, że zamiast tensora $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ można równoważnie przyjąć tensor obrotu $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ jako zmienną niezależną zagadnienia początkowo-brzegowego.

5.2.2. Składowe fizyczne

Gdy powierzchnia podstawowa M jest sparametryzowana przez długości łuku $s = (s_1, s_2)$ współrzędnych ortogonalnych, wówczas wszystkie wielkości kinematyczne i dynamiczne oraz wiążące je relacje mają wymiary fizyczne. Przyjęcie takiego sposobu parametryzacji prowadzi bezpośrednio do pojawienia się we wszystkich zależnościach współrzędnych fizycznych wszystkich zmiennych bez konieczności stosowania dodatkowych zabiegów.



Rys. 5.2.3. Składowe fizyczne przekrojowych sił i momentów.

Zatem pamiętając, że $\{t_i^0\}$ jest teraz bazą ortonormalną, składowe fizyczne wektorów przekrojowych sił i momentów w reprezentacji materialnej zdefiniowane

są następująco (por. p. 2.4.5):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}^{(1)} &= N^{(11)} \mathbf{t}_1^0 + N^{(12)} \mathbf{t}_2^0 + Q^{(1)} \mathbf{t}^0, \\
 \mathbf{n}^{(2)} &= N^{(21)} \mathbf{t}_1^0 + N^{(22)} \mathbf{t}_2^0 + Q^{(2)} \mathbf{t}^0, \\
 \mathbf{m}^{(1)} &= -M^{(12)} \mathbf{t}_1^0 + M^{(11)} \mathbf{t}_2^0 + M^{(1)} \mathbf{t}^0, \\
 \mathbf{m}^{(2)} &= -M^{(22)} \mathbf{t}_1^0 + M^{(21)} \mathbf{t}_2^0 + M^{(2)} \mathbf{t}^0.
 \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

W podobny sposób są definiowane składowe fizyczne zarówno wektorów powłokowych miar odkształceń jak i wszystkich innych wielkości dynamicznych i kinematycznych w reprezentacji materialnej, pojawiających się w równaniach mechaniki powłok (por. p. 2.4.4), np.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} &= \varepsilon_{(11)} \mathbf{t}_1^0 + \varepsilon_{(12)} \mathbf{t}_2^0 + \varepsilon_{(1)} \mathbf{t}^0, \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} &= \varepsilon_{(21)} \mathbf{t}_1^0 + \varepsilon_{(22)} \mathbf{t}_2^0 + \varepsilon_{(2)} \mathbf{t}^0, \\
 \boldsymbol{\kappa}_{(1)} &= -\kappa_{(12)} \mathbf{t}_1^0 + \kappa_{(11)} \mathbf{t}_2^0 + \kappa_{(1)} \mathbf{t}^0, \\
 \boldsymbol{\kappa}_{(2)} &= -\kappa_{(22)} \mathbf{t}_1^0 + \kappa_{(21)} \mathbf{t}_2^0 + \kappa_{(2)} \mathbf{t}^0.
 \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

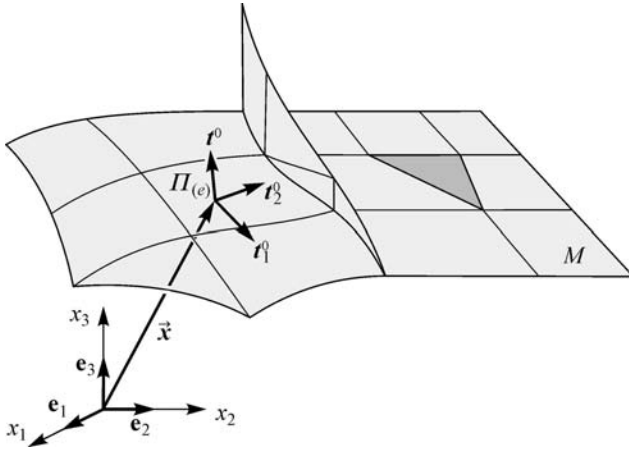
Z zależności (5.2.5) wynika, że składowe fizyczne wektorów przekrojowych sił i momentów ($\mathbf{n}^\beta, \mathbf{m}^\beta$) oraz powłokowych miar odkształceń ($\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta$) w reprezentacji przestrzennej, zdefiniowane względem obracającej się trójki wektorów kierunkowych $\{\mathbf{t}_i\}$ związanych z aktualną powierzchnią podstawową, są zgodne ze składowymi fizycznymi wektorów przekrojowych sił i momentów ($\mathbf{n}^\beta, \mathbf{m}^\beta$) i powłokowych miar odkształceń ($\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta$) w reprezentacji materialnej zdefiniowanymi zależnościami (5.2.6) i (5.2.7). W rezultacie, oba zestawy przekrojowych miar naprężeń i miar odkształceń mogą być równoważnie użyte w formułowaniu elementów skończonych.

5.2.3. Typowy element skończony

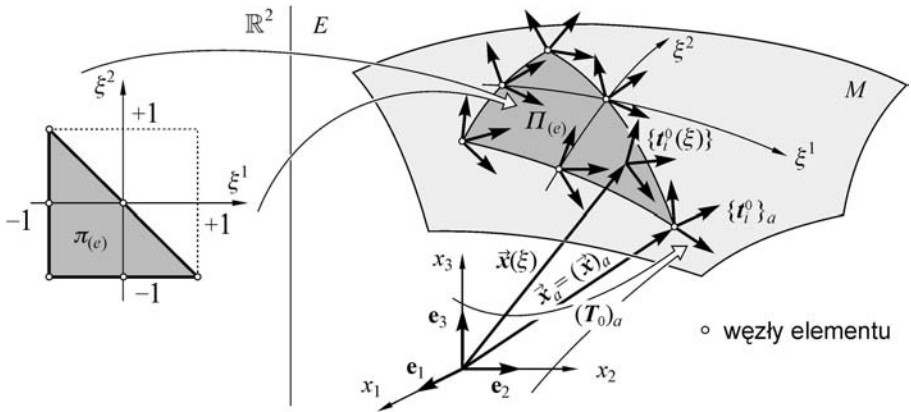
W elementach powłokowych, tak jak w innych elementach skończonych, aproksymacji podlegają nie tylko pola niewiadomych, lecz także ich dziedzina, tutaj powierzchnia podstawowa M . W ramach rozważanej ogólnej teorii powłok opis początkowej konfiguracji wymaga, poza określeniem powierzchni M przez wektor wodzący \vec{x} , podania także jej najeżenia trójką wektorów kierunkowych $\{\mathbf{t}_i^0\}$, $i = 1, 2, 3$.

Zgodnie ze standardową procedurą metody elementów skończonych, powierzchnia podstawowa powłoki $M = \bigcup_{e \in N_e} \Pi(e)$ jest reprezentowana jako suma nie pokrywających się poddziedzin — elementów skończonych $\Pi(e)$. W ramach koncepcji elementów izoparametrycznych, typowy element skończony jest definiowany jako gładkie odwzorowanie elementu standardowego $\pi_{(e)} \in \mathbb{R}^2$, odniesionego do współrzędnych naturalnych (zob. podrozdział 4.3)

$$\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi^1, \xi^2) \in [-1, +1] \times [-1, +1] \subset \mathbb{R}^2. \tag{5.2.8}$$



Rys. 5.2.4. Dyskretyzacja nieodkształconej powierzchni podstawowej jako dziedziny problemu.



Rys. 5.2.5. Koncepcja aproksymacji powierzchni podstawowej i jej najeżenia.

Standardowy (wzorcowy) element $\pi_{(e)}$ jest obszarem trójkątnym lub prostokątnym o n węzłach określonych przez wartości współrzędnych naturalnych

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n, \quad \xi_a = (\xi_a^1, \xi_a^2) \in \pi_{(e)} \subset \mathbb{R}^2. \quad (5.2.9)$$

Węzły typowego elementu skończonego $\Pi_{(e)}$ są określone przez ich wektory wodzące \vec{x}_a , $a = 1, 2, \dots, n$.

Ortonormalne trójki wektorów $\{t_i^0\}_a \equiv \{t_i^0(x_a)\}$ w każdym węzle elementu dane są przez właściwą transformację ortogonalną $T_0(x)$ ustalonej bazy globalnej e_i zgodnie z (5.2.4) zależnością

$$t_i^0(x_a) = (T_0)_a e_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad a = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2.10)$$

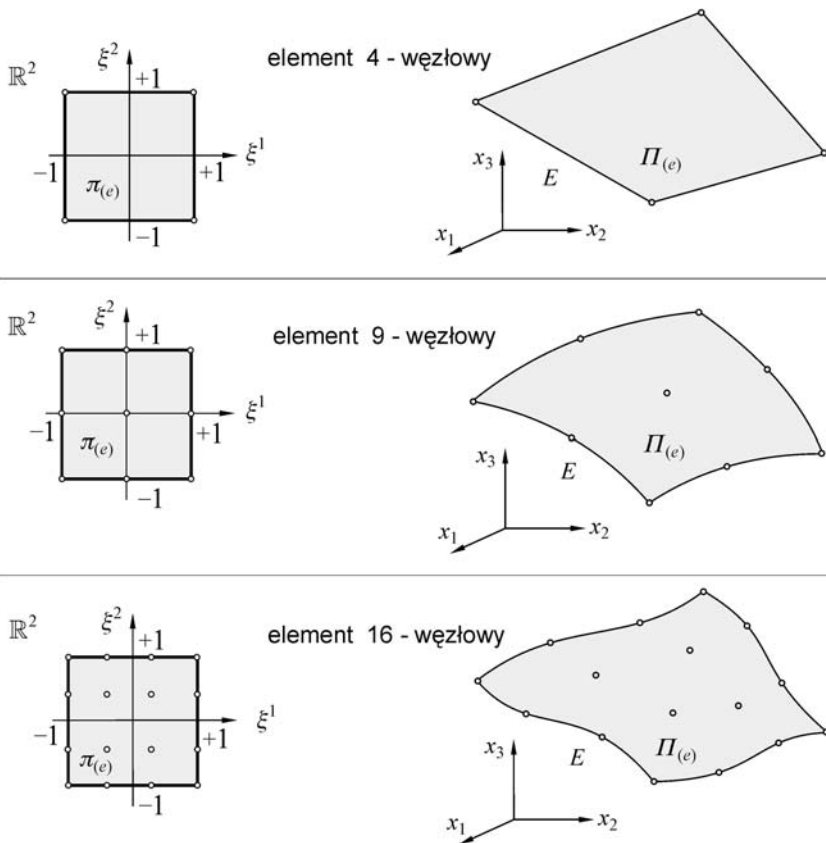
W ten sposób typowy element skończony jest całkowicie określony przez uporządkowane pary $(\vec{x}, \mathbf{T}_0)_a$, $a = 1, 2, \dots, n$. Wektor wodzący $\vec{x}(\boldsymbol{\xi})$ i tensor ortogonalny $\mathbf{T}_0(\boldsymbol{\xi})$ w dowolnym punkcie wewnątrz elementu skończonego trzymujemy poprzez interpolację ich wielkości węzłowych.

5.2.4. Interpolacja wektora wodzącego, funkcje kształtu

Wektor wodzący \vec{x} w dowolnym punkcie typowego elementu skończonego jest określony przez standardową formułę interpolacyjną

$$\vec{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^n L_a(\boldsymbol{\xi}) \vec{x}_a, \quad L_a(\boldsymbol{\xi}_b) = \delta_{ab}, \quad a, b = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.11)$$

gdzie $L_a(\boldsymbol{\xi})$ są *funkcjami kształtu*. W przypadku prostokątnych elementów skończonych funkcje kształtu przyjmuje się zazwyczaj w postaci iloczynów jednowymiarowych Lagrange'owskich wielomianów interpolacyjnych.



Rys. 5.2.6. Interpolacja Lagrange'owska w powierzchniowych czworobocznych elementach skończonych.

5.2.5. Interpolacja obrotów

W ramach rozważanej teorii powłok, główne trudności związane są z interpolacją pola obrotów. Wynika to z faktu, że grupa obrotów nie posiada struktury przestrzeni liniowej. Problem ten można obejść, używając lokalnie wolnej od osłabiłości trójparametrowej reprezentacji grupy obrotów.

Dla danej parametryzacji $SO(3)$ tensor \mathbf{T}_0 jest (lokalnie) reprezentowany przez trzy parametry obrotu $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ w sposób opisany w podrozdziale 4.2. Wartości węzłowe $\boldsymbol{\vartheta}_a$ parametrów obrotu oblicza się na podstawie danego tensora obrotu $(\mathbf{T}_0)_a$ w węzłach. Parametry obrotu $\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi})$ w dowolnym punkcie typowego elementu skończonego są interpolowane z wartości węzłowych przy użyciu formuły analogicznej do (5.2.11), a następnie na ich podstawie, zgodnie z wybraną parametryzacją $SO(3)$, obliczany jest tensor obrotu

$$\mathbf{T}_0(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{T}_0(\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi})), \quad \boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^n L_a(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\vartheta}_a. \quad (5.2.12)$$

Ogólną koncepcję i szczegółowy algorytm interpolacji na grupie obrotów zastosowany w programach autorskich omówiono w podrozdziale 4.3.

5.2.6. Reguła transformacyjna

Typowy element skończony $\Pi_{(e)}$ jest parametryzowany przez współrzędne naturalne $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi^1, \xi^2)$. Z drugiej strony, podstawowe równania mechaniki powłok zawierają pochodne cząstkowe względem współrzędnych (długości łuku) powierzchniowych $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$. Niezbędna jest zatem reguła transformacyjna, pozwalająca wyrazić pochodne względem współrzędnych powierzchniowych $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ przez pochodne względem współrzędnych naturalnych $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi^1, \xi^2)$.

Ponieważ wektor wodzący $\vec{\mathbf{x}}$ może być rozpatrywany jako dana funkcja obu współrzędnych, $\vec{\mathbf{x}}(s_\beta) = \vec{\mathbf{x}}(\xi^\alpha(s_\beta))$, z reguły zamiany zmiennych otrzymujemy

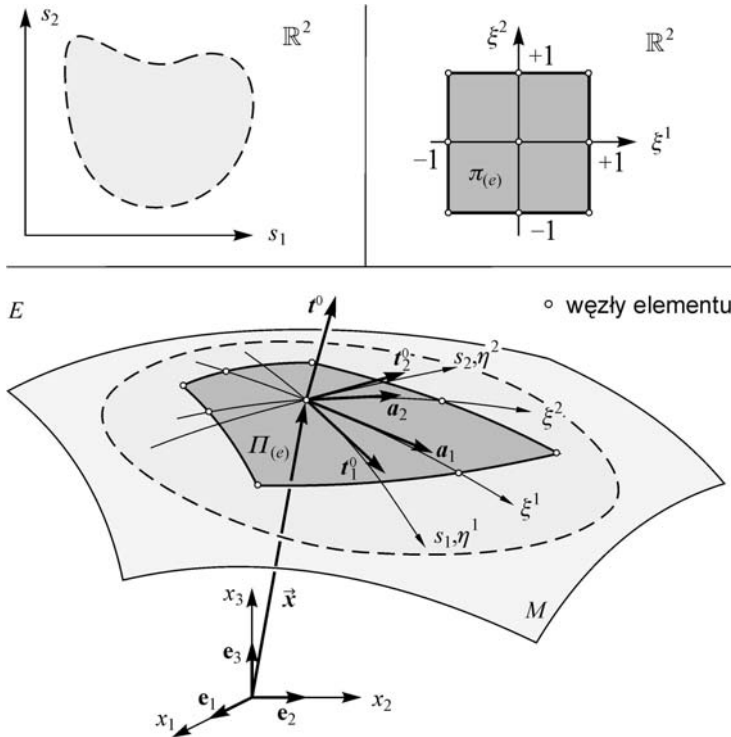
$$t_\beta^0 = \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial s_\beta} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial s_\beta}, \quad \beta = 1, 2 \text{ (nie sumować)}. \quad (5.2.13)$$

Ta reguła jest stosowalna do dowolnych zmiennych występujących w zależnościach mechaniki powłok, takich jak np. pole wektorów przesunięć \mathbf{u} lub pole tensorów obrotu \mathbf{Q} . Pamiętając o zależnościach (5.2.2) i znanym najeżeniu (5.2.3), po uwzględnieniu reguły interpolacyjnej typu (5.2.12) na podstawie (5.2.13) otrzymujemy układ równań

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial s_\beta}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi^\alpha} \cdot t_\beta^0(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{T}_0(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (5.2.14)$$

gdzie

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{P}_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial \xi^\alpha}. \quad (5.2.15)$$



Rys. 5.2.7. Układy współrzędnych elementu skończonego.

Stąd różniczkowy element powierzchniowy jest określony przez

$$da = ds_1 ds_2 = \alpha(\boldsymbol{\xi}) d\xi^1 d\xi^2, \quad \alpha(\boldsymbol{\xi}) = \det \left[\frac{\partial s_\alpha}{\partial \xi^\beta} \right]. \quad (5.2.16)$$

Wzór (5.2.16) wykorzystuje się przy numerycznym obliczaniu całek z wielkości elementowych.

5.2.7. Dyskretyzacja skończenie elementowa

Przemieszczeniowe elementy skończone można m.in. wyprowadzić ze słabego sformułowania zagadnienia początkowo-brzegowego w postaci zasady wirtualnych przemieszczeń. W takim sformułowaniu zadaniem jest znalezienie zależnego od czasu pola uogólnionego przemieszczenia $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \in \mathcal{U}_A$ takiego, że (zob. p. 4.1.6)

$$G[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \equiv G_d[\mathbf{u}; \mathbf{w}] + G_i[\mathbf{u}; \mathbf{w}] - G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = 0, \quad (5.2.17)$$

$$\forall \mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{W}_A, \quad t \in [0, +\infty).$$

Zlinearyzowana postać zasady (5.2.17) jest formułowana tak jak to przedstawiono w p. 4.4.1.

Konstrukcja dyskretyzacji skończone elementowej jest zasadniczo równoważna określeniu rozwiązania przybliżonego $\mathbf{u}^h = (\mathbf{u}^h, \mathbf{Q}^h) \in \mathcal{U}_A^h$ w skończonej wymiarowej podprzestrzeni (dokładniej — podrozmaitości) $\mathcal{U}_A^h \subset \mathcal{U}_A$ funkcji podstawowych takich, że

$$G[\mathbf{u}^h, t; \mathbf{w}^h] \equiv G_d[\mathbf{u}^h, t; \mathbf{w}^h] + G_i[\mathbf{u}^h, t; \mathbf{w}^h] - G_e[\mathbf{u}^h, t; \mathbf{w}^h] = 0, \quad (5.2.18)$$

$$\forall \mathbf{w}^h = (\mathbf{v}^h, \mathbf{w}^h) \in \mathcal{W}_A^h, \quad t \in [0, +\infty),$$

gdzie $\mathcal{W}_A^h \subset \mathcal{W}_A$ oznacza skończonej wymiarową podprzestrzeń funkcji testowych, zaś h jest charakterystycznym parametrem dyskretyzacji takim, że $\mathbf{u}^h \rightarrow \mathbf{u}$ gdy $h \rightarrow 0$ w sensie przyjętej definicji. Dalej indeks h będziemy pomijali, pozostawiając go w domyśle.

U podstaw metody elementów skończonych leży idea konstrukcji funkcji aproksymacyjnych. Jeśli przyjęty schemat interpolacji wzdłuż brzegów międzyelementowych zapewnia wymaganą przez rozważaną teorię ciągłość (tutaj klasy C^0), to funkcjonały $G[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}]$ i $\delta G[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}]$ można zapisać w postaci sumy funkcjonałów po obszarach elementów

$$G[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] = \sum_{e=1}^{N_e} G^{(e)}[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}], \quad (5.2.19)$$

$$\delta G[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] = \sum_{e=1}^{N_e} \delta G^{(e)}[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}].$$

W rezultacie, zlinearyzowany problem $\delta G[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] + G[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] = 0$ przyjmuje postać

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left(\delta G^{(e)}[\mathbf{u}, t; \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}] + G^{(e)}[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] \right) = 0. \quad (5.2.20)$$

Wobec sumowania w zależnościach (5.2.19) i (5.2.20) dalsze rozważania można prowadzić, ograniczając się do pojedynczego typowego elementu skończonego.

5.2.8. Węzłowe stopnie swobody, interpolacja pól podstawowych zmiennych kinematycznych

W wyniku wyboru parametryzacji grupy obrotów, tensor \mathbf{Q} jest (lokalnie) reprezentowany przez trzy skalarnie parametry obrotu $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta})$, w sposób opisany w p. 4.2.2. W każdym węźle a typowego n -węzłowego elementu skończonego można więc zdefiniować sześć parametrów

$$\mathbf{q}_a = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_a \\ \boldsymbol{\vartheta}_a \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_a) \\ \boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}_a) \end{array} \right\}, \quad a = 1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_{(e)} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{array} \right\}. \quad (5.2.21)$$

Tutaj $\mathbf{q}_{(e)}$ jest wektorem uogólnionych przemieszczeń węzłowych elementu.

W kontekście sformułowania elementów skończonych, wprowadzone w (5.2.21) wektory \mathbf{q}_a i $\mathbf{q}_{(e)}$ złożone są z odpowiedniej sekwencji fizycznych składowych wektorów translacji \mathbf{u}_a i wektorów parametrów obrotu $\boldsymbol{\vartheta}_a$, zapisanych jako macierze jednokolumnowe. Na podstawie (5.2.21) niewiadome problemu (5.2.20) — translacje i parametry obrotu — są interpolowane w ramach elementu skończonego przez wartości węzłowe według następującej reguły:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \\ \boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix} = \bar{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{q}_{(e)}, \quad (5.2.22)$$

gdzie $\bar{\mathbb{L}}$ jest macierzą złożoną z funkcji kształtu $L_a(\boldsymbol{\xi})$ (zob. podrozdział 4.3). Na podstawie (5.2.22) i zależności odwrotnej, charakteryzującej wybraną parametryzację grupy obrotów, obliczamy interpolowany tensor obrotu $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}))$, tak jak to pokazano w p. 4.3.3.

Wynikowy element skończony ma w każdym węźle sześć stopni swobody: trzy przesunięcia i trzy reprezentujące obrót. Podczas gdy trzy translacyjne stopnie swobody mają jasną interpretację geometryczną, to interpretacja trzech stopni rotacyjnych zależy od wcześniej wybranej parametryzacji grupy obrotów. Wygodną parametryzację obrotów, o jasnej interpretacji geometrycznej, otrzymuje się przez użycie wektora obrotu skończonego $\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{e}$ takiego, że $\mathbf{Q} = \exp \boldsymbol{\Psi}$, gdzie $\boldsymbol{\Psi} = \text{ad } \boldsymbol{\psi}$ oznacza tensor skośnie symetryczny, którego wektorem osiowym jest $\boldsymbol{\psi}$. W przypadku takiej parametryzacji obrotów, zmienne węzłowe składają się z trzech składowych wektora przesunięć \mathbf{u} i trzech składowych wektora obrotu skończonego $\boldsymbol{\psi}$.

Pochodne czasowe parametrów opisujących deformację elementu określone są w sposób analogiczny do (5.2.21)

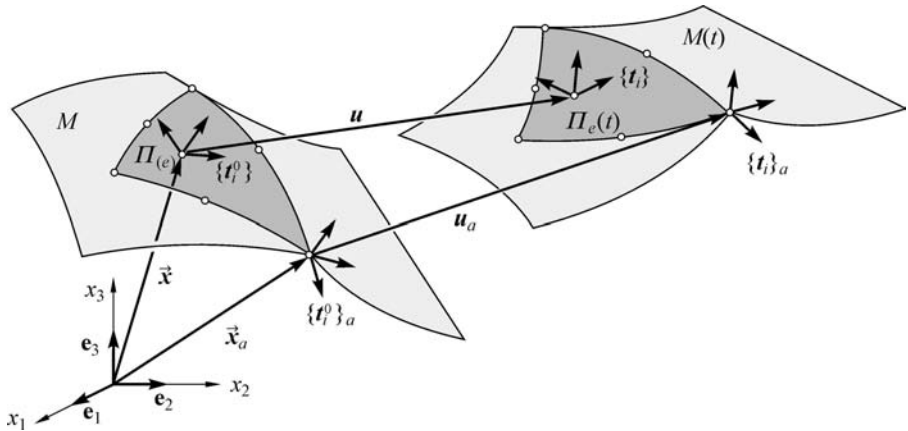
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_a &= \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}_a) \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\xi}_a) \end{Bmatrix}, & \ddot{\mathbf{q}}_a &= \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}_a) \\ \ddot{\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\xi}_a) \end{Bmatrix}, & a &= 1, 2, \dots, n \\ \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{q}}_{(e)} &= \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix}, & \ddot{\mathbf{q}}_{(e)} &= \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{Bmatrix}, & (5.2.23) \end{aligned}$$

stąd ich interpolacja, zgodnie z (5.2.22), przyjmuje postać

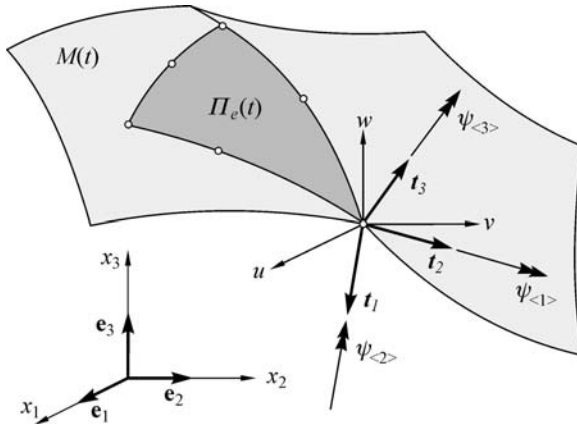
$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix} = \bar{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\xi}) \dot{\mathbf{q}}_{(e)}, \quad \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \ddot{\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix} = \bar{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\xi}) \ddot{\mathbf{q}}_{(e)}. \quad (5.2.24)$$

Schemat interpolacyjny (5.2.22) używany jest także do aproksymacji wirtualnych translacji i wirtualnych parametrów obrotu

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) \\ \delta \boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix} = \bar{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{q}_{(e)}. \quad (5.2.25)$$



Rys. 5.2.8. Powłokowy element skończony: opis geometrii początkowej i aktualnej.



Rys. 5.2.9. Powłokowy element skończony: węzłowe stopnie swobody, reprezentacja przestrzenna.

Wykorzystując regułę $w(\vartheta) = \Xi(\vartheta) \delta\vartheta$ (p. 4.2.2), uogólnione wirtualne przemieszczenia wyrażane są przez

$$w(\xi) = \begin{Bmatrix} v(\xi) \\ w(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Xi(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(\xi) \\ \delta\vartheta(\xi) \end{Bmatrix}, \quad (5.2.26)$$

gdzie macierz $\Xi(\xi)$ jest funkcją parametrów obrotu $\vartheta(\xi)$. Parametry $\vartheta(\xi)$ obliczane są przy użyciu schematu interpolacyjnego (5.2.22). Podstawiając (5.2.25) do (5.2.26), otrzymujemy

$$w(\xi) = \mathbb{L}(\xi) \delta q_{(e)}, \quad \mathbb{L}(\xi) = \bar{\mathbb{Y}}(\xi) \bar{\mathbb{L}}(\xi), \quad \bar{\mathbb{Y}}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Xi(\xi) \end{bmatrix}. \quad (5.2.27)$$

Ponieważ przestrzeń wirtualnych obrotów ma strukturę przestrzeni liniowej, ich interpolacja może być przeprowadzona bezpośrednio. Można to otrzymać jako szczególny przypadek interpolacji (5.2.27) przez przyjęcie $\Xi(\xi)$ jako macierzy jednostkowej $\mathbf{1}$. Nie ma więc potrzeby wyróżniania tego postępowania jako oddzielnego przypadku. Należy jednak odnotować fakt, że wirtualne obroty w różnych punktach elementu zakrzywionego, w tym w węzłach, należą do *różnych* przestrzeni stycznych i w tym sensie taki sposób bezpośredniej interpolacji nie jest do końca poprawny (zob. p. 4.3.4).

Na podstawie zależności $\omega(\vartheta) = \Xi(\vartheta)\dot{\vartheta}$ (por. p. 4.2.2) wektor uogólnionych prędkości, złożony z wektorów prędkości translacyjnej \mathbf{v} i prędkości obrotowej ω , interpolujemy analogicznie do (5.2.26) i (5.2.27)

$$\mathbf{v}(\xi) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}(\xi) \\ \omega(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Xi(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(\xi) \\ \dot{\vartheta}(\xi) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}(\xi) = \mathbb{L}(\xi) \dot{\mathbf{q}}_{(e)}. \quad (5.2.28)$$

W przypadku wektora uogólnionych przyspieszeń \mathbf{a} , złożonego z wektora przyspieszeń translacyjnych $\ddot{\mathbf{u}}$ i wektora przyspieszeń obrotowych \mathbf{a} , schemat interpolacji ma znacznie bardziej złożoną formę. Wynika to z zależności macierzy \mathbb{L} w (5.2.27)₂ od czasu t poprzez macierz $\Xi(\vartheta(\xi, t))$. Wykorzystując regułę $\mathbf{a}(\vartheta) = \dot{\omega}(\vartheta) = \Xi(\vartheta)\ddot{\vartheta} + \dot{\Xi}(\vartheta)\dot{\vartheta}$ (p. 4.2.2), otrzymujemy

$$\mathbf{a}(\xi) = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(\xi) \\ \mathbf{a}(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Xi(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(\xi) \\ \ddot{\vartheta}(\xi) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\Xi}(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(\xi) \\ \dot{\vartheta}(\xi) \end{Bmatrix}. \quad (5.2.29)$$

Stąd schemat interpolacji wektora uogólnionych przyspieszeń przyjmuje postać

$$\mathbf{a}(\xi) = \mathbb{L}(\xi) \ddot{\mathbf{q}}_{(e)} + \dot{\mathbb{L}}(\xi) \dot{\mathbf{q}}_{(e)}, \quad \dot{\mathbb{L}}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\Xi}(\xi) \end{bmatrix} \bar{\mathbb{L}}(\xi). \quad (5.2.30)$$

W przypadku interpolacji pól uogólnionych prędkości \mathbf{v} i uogólnionych przyspieszeń \mathbf{a} występuje inna sytuacja, niż w przypadku interpolacji uogólnionych wirtualnych przemieszczeń \mathbf{w} (przyrostów $\Delta\mathbf{w}$). Bowiemy w procesie rozwiązania, w wyniku zastosowania algorytmu całkowania (aproksymacji) po czasie t , oba pola \mathbf{v} i \mathbf{a} występują w aproksymacji przestrzennej tylko jako wielkości „znane” (dane). Dlatego, tak jak w przypadku interpolacji ortogonalnego tensora obrotu $\mathbf{Q}(\xi)$, można zastosować analogiczną do opisanej w p. 4.3.3 konstrukcję funkcji interpolacyjnej z przesunięciem, usuwającą osobliwość $\Xi(\vartheta)$. Ponieważ przestrzenie prędkości i przyspieszeń, tak jak przestrzenie wirtualnych obrotów, mają struktury przestrzeni liniowej, interpolacja \mathbf{v} i \mathbf{a} może być również przeprowadzona bezpośrednio. Taką interpolację można otrzymać jako szczególny przypadek (5.2.28) i (5.2.30) przez położenie $\Xi(\xi) = \mathbf{1} \Rightarrow \dot{\Xi}(\xi) = \mathbf{0}$. Warto jednak przypomnieć, że taki sposób bezpośredniej interpolacji nie jest również do końca poprawny (zob. p. 4.3.4).

5.2.9. Macierze i wektory elementowe

Podstawiając obowiązujący dla pojedynczego elementu schemat interpolacji (5.2.27) do wyrażenia na zlinearyzowaną wewnętrzną pracę wirtualną δG_i (p. 4.4.1), na podstawie (5.2.19) i (5.2.20) otrzymujemy

$$\delta G_i^{(e)} = \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \left(\mathbb{K}_M^{(e)} + \mathbb{K}_G^{(e)} \right) \Delta \mathbf{q}_{(e)}, \quad (5.2.31)$$

gdzie część materialna $\mathbb{K}_M^{(e)}$ i geometryczna $\mathbb{K}_G^{(e)}$ elementowej macierzy sztywności stycznej $\mathbb{K}_T^{(e)}$ są dane przez

$$\mathbb{K}_M^{(e)} = \iint_{\Pi(e)} \mathbb{L}^T \mathbb{B}^T \mathbb{C} \mathbb{B} \mathbb{L} da, \quad \mathbb{K}_G^{(e)} = \iint_{\Pi(e)} \mathbb{L}^T \mathbb{D}^T \mathbb{G} \mathbb{D} \mathbb{L} da. \quad (5.2.32)$$

Uwzględniając (5.2.19) i (5.2.20), po podstawieniu schematów interpolacji (5.2.27), (5.2.28) i (5.2.30), obowiązujących dla pojedynczego elementu, do wyrażenia na zlinearyzowaną wirtualną pracę sił bezwładności δG_d (p. 4.4.1), w ogólnym przypadku otrzymamy

$$\delta G_i^{(e)} = \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \left(\mathbb{M}^{(e)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_{(e)} + \mathbb{C}^{(e)} \Delta \dot{\mathbf{q}}_{(e)} + \mathbb{K}_d^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} \right), \quad (5.2.33)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(e)} &= \iint_{\Pi(e)} \mathbb{L}^T \mathbf{m}_\rho \mathbb{L} da, \\ \mathbb{C}^{(e)} &= \iint_{\Pi(e)} \mathbb{L}^T (\mathbf{c}_\rho \mathbb{L} + \mathbf{m}_\rho \dot{\mathbb{L}}) da, \\ \mathbb{K}_d^{(e)} &= \iint_{\Pi(e)} \mathbb{L}^T \mathbf{k}_\rho \mathbb{L} da. \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

Analogicznie do pojęć dynamiki ciała sztywnego, macierze występujące w (5.2.34) nazywa się, odpowiednio, *macierzą mas*, *rozszerzoną macierzą żyroskopową* i *macierzą sztywności odśrodkowej* elementu.

W szczególnym przypadku interpolacji bezpośredniej ($\Xi(\xi) = \mathbf{1}$) oraz klasycznej dla mechaniki powłok postaci tensorów konstytutywnych pędu $\mathbf{J}_1 = m_0 \mathbf{1}$ i momentu pędu $\mathbf{J}_2 = I_0 \mathbf{1}$ (zob. p. 2.1.10), otrzymujemy $\mathbb{C}^{(e)} = \mathbb{K}_d^{(e)} = \mathbb{O}$, zaś macierz mas przyjmuje postać

$$\mathbb{M}^{(e)} = \iint_{\Pi(e)} \bar{\mathbb{L}}^T \mathbf{m}_\rho \bar{\mathbb{L}} da, \quad \mathbf{m}_\rho = \begin{bmatrix} m_0 \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_0 \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (5.2.35)$$

W przypadku obciążeń zależnych od deformacji, macierze elementowe zależą od wartości obciążenia i aktualnych przemieszczeń \mathbf{u} . Macierze te są wynikiem linearyzacji wyrażenia na zewnętrzną pracę wirtualną G_e (p. 4.1.6). Gdy ograniczymy rozważania do obciążenia powierzchniowego $\mathbf{p} = \mathbf{p}(q, \mathbf{u})$, po użyciu schematu interpolacyjnego (5.2.27) do zależności

$$\delta G_e = \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{w}^T (\mathbb{F} \Delta \mathbf{w}) da \quad (5.2.36)$$

dla pojedynczego elementu otrzymujemy

$$\delta G_e^{(e)} = \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbb{K}_L^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)}, \quad K_L^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbb{L}^T \mathbb{F} \mathbb{L} da, \quad (5.2.37)$$

gdzie $\mathbb{K}_L^{(e)}$ nazywa się *macierzą obciążeń* elementu. Macierz $\mathbb{K}_L^{(e)}$ musi być obliczana oddzielnie dla każdego typu zależności obciążenia \mathbf{p} od przemieszczeń \mathbf{u} .

Elementowy wektor obciążeń zewnętrznych otrzymujemy z zależności

$$G_e = \iint_{M \setminus \Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{p}(q, \mathbf{u}) da \quad (5.2.38)$$

po zastosowaniu interpolacji (5.2.27)

$$G_e^{(e)} = \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{p}^{(e)}, \quad \mathbf{p}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbb{L}^T \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) da. \quad (5.2.39)$$

Zależności dla obciążenia liniowego \mathbf{p}_Γ , działającego na krzywej Γ połączeń płatów regularnych, i obciążenia liniowego \mathbf{s}^* , działającego na brzegu powłoki ∂M_f o zadanych naprężeniowych warunkach brzegowych, otrzymuje się w sposób analogiczny do (5.2.37)–(5.2.39). Jednak dziedziną całkowania nie jest tu powierzchnia $\Pi_{(e)}$ lecz odpowiednie krzywe, które z *założenia* pokrywają się z brzegami odpowiednich elementów skończonych $\partial \Pi_{(e)}$. W ramach metody elementów skończonych uwzględnia się również obciążenia w postaci sił i momentów skupionych $\sum_a \mathbf{w}_a^T \mathbf{p}_a$ działających w węzłach a , wprowadzając je bezpośrednio do globalnego wektora obciążenia.

Węzłowy wektor sił wewnętrznych jest składnikiem funkcjonału $G[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}]$. Z funkcjonału G_i (zob. p. 4.1.6) po użyciu schematu interpolacyjnego (5.2.27) otrzymujemy

$$G_i^{(e)} = \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{r}^{(e)}, \quad \mathbf{r}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbb{L}^T \mathbb{B}^T \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{u}) da. \quad (5.2.40)$$

Analogicznie do (5.2.40), z funkcjonału G_d (zob. p. 4.1.6) obliczamy dla ogólnego przypadku węzłowy wektor sił bezwładności

$$G_d^{(e)} = \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{b}^{(e)}, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \iint_{\Pi^{(e)}} \mathbb{L}^T \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{a}, \mathbf{v}) da. \quad (5.2.41)$$

Dla szczególnych postaci tensorów konstytutywnych pędu i momentu pędu, prowadzących do (5.2.35)₂, wektor $\mathbf{b}^{(e)}$ określony jest następująco:

$$\mathbf{b}^{(e)} = \iint_{\Pi^{(e)}} \mathbb{L}^T \mathbf{m}_{\rho a} da = \mathbb{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)}. \quad (5.2.42)$$

Ostatecznie, dla typowego elementu skończonego zlinearyzowane równanie (5.2.20) przyjmuje w ogólnym przypadku dyskretną formę

$$\mathbb{M}^{(e)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_{(e)} + \mathbb{C}^{(e)} \Delta \dot{\mathbf{q}}_{(e)} + \mathbb{K}_T^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} = \Delta \mathbf{p}^{(e)} + \mathbf{j}^{(e)}, \quad (5.2.43)$$

gdzie sumaryczna elementowa macierz sztywności stycznej i elementowy wektor sił niezerównoważonych mają postać

$$\mathbb{K}_T^{(e)} = \mathbb{K}_M^{(e)} + \mathbb{K}_G^{(e)} - \mathbb{K}_L^{(e)} + \mathbb{K}_d^{(e)}, \quad \mathbf{j}^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}^{(e)} - \mathbf{b}^{(e)}. \quad (5.2.44)$$

Podczas formułowania zależności występujących po lewej stronie równania (5.2.43) często stosuje się różnego typu zabiegi upraszczające, co prowadzi do ułatwienia obliczeń. W przypadku prawej strony, reprezentującej poprzez $\mathbf{j}^{(e)}$ warunki równowagi układu $G[\mathbf{u}, t; \mathbf{w}] = 0$, tego typu przybliżenia nie powinny mieć miejsca. Wynika to z faktu, że w metodach iteracyjnych lewa strona (5.2.43) ma wpływ tylko na zbieżność i szybkość zbieżności procesu rozwiązania iteracyjnego, zaś prawa strona odpowiada za błąd rozwiązania.

5.2.10. Elementy Lagrange'owskie

Zgodnie z koncepcją standardowych elementów izoparametrycznych, niewiadome problemu są interpolowane przez ich wartości węzłowe w formie rozprzężonej, przyjmującej w przypadku (5.2.25) postać

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) \\ \delta \boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}) \end{array} \right\} = \sum_{a=1}^n L_a(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \begin{array}{c} \delta \mathbf{u}_a \\ \delta \boldsymbol{\vartheta}_a \end{array} \right\} = \sum_{a=1}^n L_a(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{q}_a. \quad (5.2.45)$$

Wtedy macierz interpolacyjna przyjmuje formę

$$\bar{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\xi}) = [\bar{\mathbb{L}}_1(\boldsymbol{\xi}) \quad \bar{\mathbb{L}}_2(\boldsymbol{\xi}) \quad \dots \quad \bar{\mathbb{L}}_n(\boldsymbol{\xi})], \quad \bar{\mathbb{L}}_a(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} L_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (5.2.46)$$

gdzie $L_a(\boldsymbol{\xi})$ są iloczynami standardowych wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a, zob. rys. 4.3.1.

Korzystając z (5.2.46) i uwzględniając (5.2.27)₃, obliczamy dyskretne operatory (zob. p. 4.1.5)

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbb{B}\bar{\mathbb{Y}}(\boldsymbol{\xi})\bar{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\xi}) = [\bar{\mathbb{B}}_1(\boldsymbol{\xi}) \ \bar{\mathbb{B}}_2(\boldsymbol{\xi}) \ \dots \ \bar{\mathbb{B}}_n(\boldsymbol{\xi})], \\ \bar{\mathbb{D}}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbb{D}\bar{\mathbb{Y}}(\boldsymbol{\xi})\bar{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\xi}) = [\bar{\mathbb{D}}_1(\boldsymbol{\xi}) \ \bar{\mathbb{D}}_2(\boldsymbol{\xi}) \ \dots \ \bar{\mathbb{D}}_n(\boldsymbol{\xi})].\end{aligned}\quad (5.2.47)$$

Podstawiając (5.2.47) do (5.2.32) i (5.2.40)₂, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_M^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbb{k}_{11}^M & \dots & \mathbb{k}_{1n}^M \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{k}_{n1}^M & \dots & \mathbb{k}_{nn}^M \end{bmatrix}, \\ \mathbb{K}_G^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbb{k}_{11}^G & \dots & \mathbb{k}_{1n}^G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{k}_{n1}^G & \dots & \mathbb{k}_{nn}^G \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(e)} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix},\end{aligned}\quad (5.2.48)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\mathbb{k}_{ab}^M &= \iint_{\Pi(e)} \bar{\mathbb{B}}_a^T \mathbb{C} \bar{\mathbb{B}}_b \, da, \\ \mathbb{k}_{ab}^G &= \iint_{\Pi(e)} \bar{\mathbb{D}}_a^T \mathbb{G} \bar{\mathbb{D}}_b \, da, \quad r_a = \iint_{\Pi(e)} \bar{\mathbb{B}}_a^T \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{u}) \, da.\end{aligned}\quad (5.2.49)$$

Uwzględniając (5.2.27)₃ i postać macierzy interpolacyjnej (5.2.46)₂, można ją zapisać jako

$$\bar{L}_a(\boldsymbol{\xi}) = \bar{\mathbb{Y}}(\boldsymbol{\xi}) \bar{\mathbb{L}}_a(\boldsymbol{\xi}), \quad \dot{\bar{L}}_a(\boldsymbol{\xi}) = \dot{\bar{\mathbb{Y}}}(\boldsymbol{\xi}) \bar{\mathbb{L}}_a(\boldsymbol{\xi}).\quad (5.2.50)$$

Stąd pozostałe macierze i wektory elementowe przyjmują następujące postacie:

$$\begin{aligned}\mathbb{M}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbb{m}_{11} & \dots & \mathbb{m}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{m}_{n1} & \dots & \mathbb{m}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbb{c}_{11} & \dots & \mathbb{c}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{c}_{n1} & \dots & \mathbb{c}_{nn} \end{bmatrix}, \\ \mathbb{K}_d^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbb{k}_{11}^d & \dots & \mathbb{k}_{1n}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{k}_{n1}^d & \dots & \mathbb{k}_{nn}^d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbb{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{b}_n \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (5.2.51)$$

dla części dynamicznej, a dla części związanej z obciążeniem

$$\mathbb{K}_L^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbb{k}_{11}^L & \dots & \mathbb{k}_{1n}^L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{k}_{n1}^L & \dots & \mathbb{k}_{nn}^L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbb{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{p}_n \end{Bmatrix},\quad (5.2.52)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 m_{ab} &= \iint_{\Pi(e)} \mathbb{L}_a^T \mathfrak{m}_\rho \mathbb{L}_b \, da, & c_{ab} &= \iint_{\Pi(e)} \mathbb{L}_a^T \left(\mathfrak{c}_\rho \mathbb{L}_b + \mathfrak{m}_\rho \dot{\mathbb{L}}_b \right) da, \\
 k_{ab}^d &= \iint_{\Pi(e)} \mathbb{L}_a^T \mathfrak{k}_\rho \mathbb{L}_b \, da, & b_a &= \iint_{\Pi(e)} \mathbb{L}_a^T \mathfrak{b} \, da, \\
 k_{ab}^L &= \iint_{\Pi(e)} \mathbb{L}_a^T \mathbb{F} \mathbb{L}_b \, da, & p_a &= \iint_{\Pi(e)} \mathbb{L}_a^T \mathfrak{p} \, da.
 \end{aligned} \tag{5.2.53}$$

Przedstawione powyżej operacje zawierają pochodne funkcji kształtu po parametrach długości łuku. Te pochodne obliczamy przy użyciu reguły transformacyjnej podanej w p. 5.2.6. Obliczenie całek w zależnościach (5.2.49) wykonujemy na drodze numerycznej.

5.2.11. Całkowanie numeryczne

Jak to wynika z (5.2.49), w praktycznych obliczeniach macierzy elementowych występuje konieczność obliczania całek typu

$$\mathbb{K} \equiv \iint_{\Pi(e)} \mathfrak{k}(\boldsymbol{\xi}) \, da = \iint_{\pi(e)} \mathfrak{k}(\boldsymbol{\xi}) \alpha(\boldsymbol{\xi}) \, d\xi^1 \xi^2, \quad \boldsymbol{\xi} \equiv (\xi^1, \xi^2), \tag{5.2.54}$$

gdzie $\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \det [\partial s_\alpha / \partial \xi^\beta]$. Całkowanie (5.2.54) wykonywane jest za pomocą jednej z metod całkowania numerycznego.

Większość formuł całkowania numerycznego ma postać

$$\mathbb{K}^I = \sum_{p=1}^I w_p \mathfrak{k}(\boldsymbol{\xi}_p), \quad \boldsymbol{\xi}_p \equiv (\xi_p^1, \xi_p^2), \tag{5.2.55}$$

gdzie $p = 1, 2, \dots, I$ są *punktami całkowania*, $\boldsymbol{\xi}_p \in \pi(e)$ *współrzędnymi punktów całkowania*, zaś w_p *współczynnikami wagowymi w punktach całkowania*. Podstawowym problemem metod całkowania numerycznego jest dobór punktów całkowania i wag całkowania tak, aby zapewnić zbieżność aproksymacji $\mathbb{K}^I \rightarrow \mathbb{K}$ przy $I \rightarrow \infty$ dla możliwie najszerszej klasy funkcji $\mathfrak{k}(\boldsymbol{\xi})$. Najczęściej wybieraną i należącą do najbardziej efektywnych metod całkowania numerycznego jest kwadratura Gaussa–Legendre’a. Znana jest ona z prostoty i wysokiej dokładności.

Zastosowaniu całkowania numerycznego do obliczeń macierzy i wektorów elementowych towarzyszą dwa pytania: jakiego rodzaju schematu całkowania użyć i jaki przyjąć rząd całkowania? Z punktu widzenia kosztów obliczeń, kwadratura Gaussa–Legendre’a jest bardzo wydajna i powszechnie stosowana. Z drugiej

Tabela 5.2.1. Zera wielomianów Legendre'a i współczynniki kwadratury Gaussa–Legendre'a.

$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{p=1}^I w_p f(\xi_p)$						
I	węzły ξ_p			współczynniki w_p		
1	0,00000	00000	00000	2,00000	00000	00000
2	\mp 0,57735	02691	89626	1,00000	00000	00000
3	\mp 0,77459	66692	41483	0,55555	55555	55556
	0,00000	00000	00000	0,88888	88888	88888
4	\mp 0,86113	63115	94053	0,34785	48451	37454
	\mp 0,33998	10435	84856	0,65214	51548	62546

strony, dokładność obliczania całek z macierzy i wektorów elementowych wymaga zastosowania dostatecznie wysokiego rzędu schematu całkowania numerycznego, ponieważ ma on bezpośredni wpływ na dokładność otrzymywanych rozwiązań.

Eksperymenty numeryczne wykazały, że w przypadku Lagrange'owskich elementów skończonych wymagany rząd całkowania jest równy n dla jednowymiarowych⁴⁰ elementów n -węzłowych. Analogicznie wykazano, że w przypadku czworobocznych elementów powierzchniowych o $n \times n$ węzłach wymagany rząd całkowania wynosi również $n \times n$. W literaturze MES takie całkowanie nazywa się całkowaniem pełnym⁴¹ i w skrócie oznacza się przez FI (ang. *Full Integration*).

5.2.12. Efekt blokady

Prostota i jasność sformułowania przemieszczeniowych elementów skończonych, wykorzystującego standardowy schemat interpolacji Lagrange'owskiej, są charakterystycznymi cechami tej klasy elementów. Elementy przemieszczeniowe okazały się solidne w analizie grubych i umiarkowanie grubych powłok. Jednak występują tu następujące trudności:

1. Rozwiązania elementami skończonymi tego typu są wrażliwe na zmianę grubości powłoki. Wrażliwość taka nie występuje w rozwiązaniach analitycznych. W miarę zmniejszania się grubości powłoki, rozwiązania numeryczne wykazują rażąco duże błędy w wartościach przemieszczeń. Dlatego przydatność tej klasy standardowych elementów skończonych z małą liczbą węzłów gwałtownie maleje w zastosowaniu do obliczeń powłok cienkich. Zjawisko to znane jest jako *efekt blokady* lub *zakleszczania* (ang. *locking effect*).

⁴⁰Wiąże się to z tzw. rzędem dokładności kwadratury. Udowodniono, że wzór $\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{p=1}^I w_p f(\xi_p) + bład$ daje dokładny wynik całkowania ($bład = 0$) dla wielomianów do stopnia $2I - 1$ włącznie (zob. np. RALSTON [1975]).

⁴¹Terminy *całkowanie pełne* i *całkowanie zredukowane* są charakterystyczne dla inżynierskiej literatury MES i nie występują w piśmiennictwie matematycznym.

2. Deformacje powłok o nierozciągłej lub bliskiej nierozciągłości powierzchni podstawowej są słabo reprezentowane przez te elementy.
3. Dokładność przekrojowych sił membranowych i przekrojowych sił poprzecznych, obliczona w węzłach tych elementów, jest niska.

Te niedostatki dotyczą przede wszystkim ekonomicznych w obliczeniach elementów niskiego rzędu⁴² (np. standardowego 4-węzłowego (2×2) elementu czworobocznego) i ze wzrostem rzędu elementów istotnie się zmniejszają (np. dla 16-węzłowego (4×4) elementu czworobocznego) lub wręcz się redukują⁴³. Spośród stosowanych w obliczeniach inżynierskich powłokowych elementów skończonych klasy C^0 z użyciem pełnego całkowania (FI), np. zdegenerowanych typu Ahmada (zob. np. AHMAD, IRONS i ZIENKIEWICZ [1970]), dopiero 16-węzłowy izoparametryczny powłokowy element skończony może być stosowany do analizy powłok cienkich bez specjalnych zabiegów. Ten 16-węzłowy element nie jest wrażliwy na dystorsje siatki dyskretyzacyjnej, jednak jego zbieżność podziału jest wolna (BATHE i DVORKIN [1986]), a stąd i koszt uzyskiwanych rozwiązań jest nieakceptowalnie wysoki w zastosowaniach inżynierskich MES. Stymuluje to poszukiwanie sposobów ominięcia efektu blokady w elementach niższych rzędów, np. 3-, 4-, 5- oraz 8- i 9-węzłowych.

Trzecią trudność można stosunkowo łatwo ominąć, obliczając naprężenia w punktach kwadratury odpowiadających całkowaniu zredukowanemu (tzw. punktach superzbieżności), a nie w węzłach elementu. Zabieg ten jest powszechnie stosowany w praktyce inżynierskiej dla powłok sprężystych. Jednak problem powraca szczególnie ostro w analizie powłok sprężysto-plastycznych (i nie tylko), w której właściwe śledzenie rozwoju lokalnych stref uplastycznienia wymaga uwzględnienia większej liczby punktów analizy naprężeń, niż ta, która wynika z liczby punktów całkowania zredukowanego.

Z powyższych trzech trudności efekt blokady jest główną przeszkodą stojącą na drodze powszechnego stosowania przemieszczeniowych elementów typu Lagrange'a niskiego rzędu. Źródło efektu blokady jest dobrze znane. Charakterystycznie duże błędy analizy w przypadku powłok cienkich wywodzą się ze złożonej interakcji pomiędzy działaniem membranowym a względnie małą sztywnością na ścinanie i bardzo małą na zginanie. Dlatego w elementach powłokowych niskiego rzędu, nawet w przypadku liniowym, tak trudno jest zapewnić, aby deformacja zgięciowa nie była obciążona pasożytniczą deformacją membranową i deformacją od ścinania.

Zjawisku blokady poświęcono wiele tomów literatury. Ogólnie uważa się, że efekt blokady wynika z niemożności odtworzenia przez element skończony niskiego rzędu stanów deformacji, w których poprzeczne odkształcenia od ścinania

⁴²Tzn. o niskim rzędzie wielomianów interpolacyjnych — elementów o małej liczbie węzłów.

⁴³Stosunkowo prosto można to prześledzić na płaskim zagadnieniu jednowymiarowym. Okazuje się, że przy zastosowaniu standardowych Lagrange'owskich elementów wyższego rzędu (tj. o 5 i więcej węzłach) efekt blokady już się nie pojawia.

i odkształcenia membranowe znikają wszędzie w elemencie. Konsekwencje tych niedogodności są różne, a szczególnie ostro występują one przy przejściu granicznym do powłok cienkich. Właśnie w powłokach względnie cienkich bardzo małe odkształcenia membranowe lub bardzo małe poprzeczne odkształcenia od ścinania powodują, że energia membranowa lub energia od poprzecznego ścinania tak dominuje w wyrażeniu na sumaryczną energię układu, że wręcz usuwa w cień (blokuje, zakleszcza) decydującą właśnie o rozwiązaniu część energii od zginania.

W celu ominięcia efektu blokady w literaturze zaproponowano wiele różnych technik, z których dalej omówimy te użyte w programach autorskich.

5.2.13. Technika jednolicie zredukowanego całkowania

Technika ta, oznaczana w skrócie symbolem URI (ang. *Uniform Reduced Integration*), jest najprostszym znanym sposobem złagodzenia skutków efektu blokady. Polega ona na zastosowaniu w obliczeniach wszystkich zależności elementowych całkowania numerycznego niższego rzędu (niedocałkowania) niż ten, który wynika z warunku uzyskania wyników „dokładnych” (tj. całkowania pełnego FI). W wyniku takiego zabiegu całkowanie zredukowane „wycina” (eliminuje) odpowiedzialne za blokadę fragmenty wielomianów wyższego rzędu, „dopasowując” je w ten sposób do ich pochodnych⁴⁴ sumowanych razem w zależnościach elementowych⁴⁵.

W przypadku jednolicie zredukowanego całkowania, p we wzorze (5.2.55) przebiega następujące wartości:

$$p \in \{1\} \text{ dla elementu 4-węzłowego } (1 \times 1),$$

$$p \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ dla elementu 9-węzłowego } (2 \times 2),$$

$$p \in \{1, 2, \dots, 9\} \text{ dla elementu 16-węzłowego } (3 \times 3).$$

Odpowiednio, przy całkowaniu pełnym p we wzorze (5.2.55) przebiega wartości:

$$p \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ w elemencie 4-węzłowym } (2 \times 2),$$

$$p \in \{1, 2, \dots, 9\} \text{ w elemencie 9-węzłowym } (3 \times 3),$$

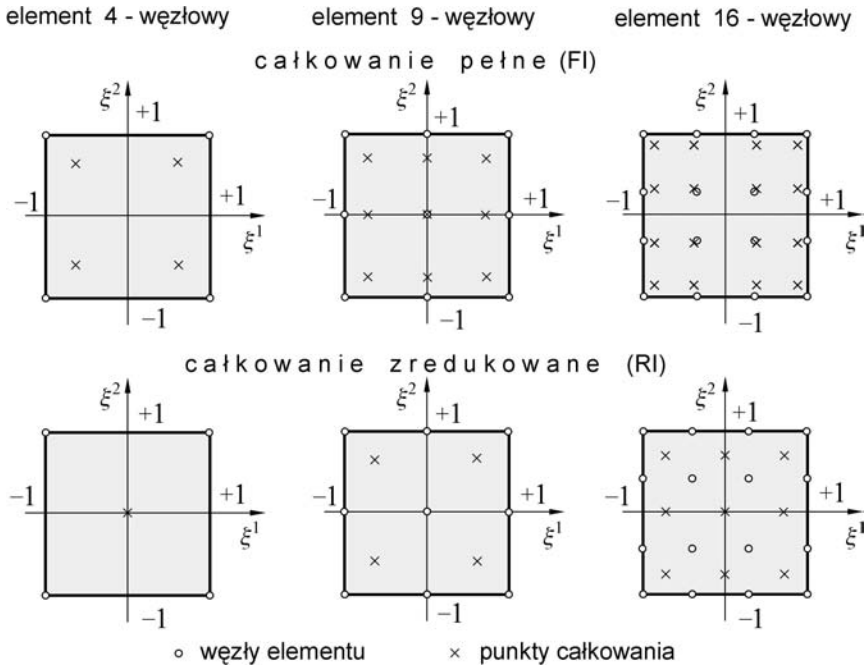
$$p \in \{1, 2, \dots, 16\} \text{ w elemencie 16-węzłowym } (4 \times 4).$$

Niestety, zabiegowi niedocałkowania zależności elementowych zwykle towarzyszą dodatkowe *pasżytnicze formy deformacji*⁴⁶ (tzw. *postacie fałszywe, zero-energetyczne*, ang. *spurious, zero-energy modes*), których ograniczenie wymaga

⁴⁴Ten typ sumowania – funkcji i ich pochodnych – wynika z postaci poszczególnych składników, występujących w definicji powłokowych miar odkształceń oraz ich wariacjach (p. 4.1.5). Występują one przy traktowaniu w sposób jednakowy aproksymacji wszystkich pól niewiadomych.

⁴⁵Ciekawe badania dotyczące efektu blokady i całkowania zredukowanego dla zadań jedno- i dwuwymiarowych na płaszczyźnie można odnaleźć w pracach KREJA [1988], KREJA i CYWIŃSKI [1988, 1991].

⁴⁶Formy pasżytnicze w elemencie 4-węzłowym występują często pod nazwą *postaci klepsydralnych* (ang. *hourglass modes*, zob. np. BELYTSCHKO, LIU i ENGELMANN [1984]).



Rys. 5.2.10. Powłokowe elementy skończone: węzły elementu i punkty całkowania kwadratury Gaussa.

z kolei użycia specjalnych procedur stabilizujących (filtrujących). Dlatego wydaje się, że bardziej wiarygodnym jest ograniczenie efektu blokady wynikające z różnych modyfikacji sformułowania wariacyjnego zagadnienia.

5.2.14. Formy pasyżnicze

Podstawową wadą całkowania zredukowanego jest „wycięcie” nie tylko części wielomianu powiązanej z blokadą rozwiązania, ale również innych fragmentów składników odpowiedzialnych za pewne względne formy deformacji elementu. W wyniku nadmiernego zaniżenia rzędu całkowania numerycznego, element, poza postaciami opisującymi ruch sztywny, ma dodatkowe zeroenergetyczne (nieuzasadnione fizycznie) formy deformacji \mathbf{v}_a , które tworzą zbiór wektorów

$$\mathbf{g} = \{ \mathbf{v}_a \mid \mathbf{v}_a^T \mathbf{K}^{URI} \mathbf{v}_a = 0, \quad \mathbf{v}_a^T \mathbf{r}^{URI} = 0, \\ \mathbf{v}_a \text{ to postacie liniowo niezależne, różne od ruchu sztywnego} \}. \quad (5.2.56)$$

Tutaj \mathbf{K}^{URI} i \mathbf{r}^{URI} są, odpowiednio, macierzą sztywności i węzłowym wektorem sił wewnętrznych pojedynczego elementu skończonego, całkowanego w sposób jednolicie zredukowany (URI). Z uwagi na źródło pochodzenia zbioru (5.2.56)

i względny charakter w stosunku do innych „fizycznych” postaci deformacji elementu, formy $\{\mathcal{V}_a\}$ nazywa się *postaciami pasożytniczymi*.

5.2.15. Technika selektywnie zredukowanego całkowania

Technika ta, oznaczana w skrócie symbolem SRI (ang. *Selective Reduced Integration*), polega na wybiórczym stosowaniu różnych rzędów kwadratur, tj. całkowania zredukowanego (RI) i całkowania pełnego (FI), do rozseparowanych składników macierzy elementowych.

W elementach powłokowych separacja na odpowiednie składniki macierzy sztywności \mathbb{K} i węzłowego wektora sił wewnętrznych \mathfrak{r} , o ile da się przeprowadzić, ma postać

$$\mathbb{K} = (\mathbb{K}_M + \mathbb{K}_Q)^{RI} + \mathbb{K}_B^{FI}, \quad \mathfrak{r} = (\mathfrak{r}_M + \mathfrak{r}_Q)^{RI} + \mathfrak{r}_B^{FI}. \quad (5.2.57)$$

Tutaj etykiety M i Q oznaczają składniki powiązane z efektami, odpowiednio, membranowym i od ścinania poprzecznego (postaciowym), w których może wystąpić blokada. Składniki te całkuje się w sposób zredukowany (RI). Efekt zginania ujmuje część oznaczona etykietą B , przyjmowana dla małych odkształceń jako hipotetycznie wolna od blokady. Składnik B całkuje się w sposób pełny (FI).

Technika selektywna wymaga rozłącznego, różnego całkowania rozseparowanych wcześniej składników. W przypadku materiałów o złożonych związkach konstytutywnych, występuje trudność w jawnym rozdzieleniu (5.2.57) na części M , Q , B (zob. np. HUANG [1987b]).

Na potrzeby testowania różnych elementów skończonych separację można otrzymać prostym sposobem formalnym bez specjalnych modyfikacji programu. W tym celu wystarczy tylko zależności elementowe (5.2.49) przecałkować dwukrotnie w sposób jednolity, raz z rzędem odpowiadającym całkowaniu zredukowanemu (RI) i raz z rzędem odpowiadającym całkowaniu pełnemu (FI). Dwukrotne całkowanie należy wykonać podstawiając zamiennie zera na odpowiednie współczynniki w macierzy konstytutywnej i macierzy składowych naprężenia tak, aby powodowały one wykluczenie z obliczeń tej części, której nie chcemy całkować w sposób, odpowiednio, RI lub FI. Całkowanie selektywne jest zabiegiem tylko częściowo ograniczającym powstawanie form pasożytniczych⁴⁷.

5.2.16. Procedury stabilizacji form pasożytniczych

Koncepcja jednolicie zredukowanego całkowania jest dość powszechnie akceptowana w zagadnieniach jednowymiarowych (np. płaskie lub przestrzenne elementy prętowe), w których jej użycie na ogół nie powoduje powstawania form pasożytniczych.

⁴⁷ Analizę porównawczą zastosowania różnych reguł całkowania RI, SRI, FI w nieliniowych zadaniach statyki powłok zawiera np. praca KREJA, SCHMIDT i REDDY [1997]. Z kolei, w pracy KŁOSOWSKI [1999] całkowania SRI użyto do analizy nieliniowych zadań dynamiki powłok.

W przypadkach dwuwymiarowych i trójwymiarowych zastosowanie techniki zredukowanego całkowania, w wyniku obecności form pasożytniczych (5.2.56), prowadzi do niestabilności rozwiązań. Przejawia się ona w tzw. *niestabilności siatki podziału*, na tyle charakterystycznej, że w szczególnym przypadku dwuwymiarowych elementów 4-węzłowych nazywana jest ona *formami klepsydralnymi* deformacji. W zagadnieniach statycznych ich ujawnienie się występuje tylko dla niektórych warunków brzegowych i może prowadzić nawet do osobliwości globalnej macierzy sztywności analizowanego układu. Zaproponowano wiele różnych technik złagodzenia osobliwości związanych z powstawaniem postaci pasożytniczych, wynikających ze stosowania techniki całkowania zredukowanego. Niestety, zaproponowane dotąd procedury wydają się bardziej chwytami typu heurystycznego lub trikami numerycznymi, niż uzasadnionym matematycznie podejściem do rozwiązywanego problemu.

Główną motywacją konstrukcji procedur stabilizacyjnych jest zwiększenie zakresu stosowalności elementów całkowanych w sposób jednolicie zredukowany. Bowiem elementy z użyciem całkowania zredukowanego, w przeciwieństwie do elementów całkowanych w sposób pełny, często wykazują korzystną, bardzo szybką zbieżność wyników do rozwiązań poprawnych. Koncepcja procedur stabilizujących polega na dodaniu do macierzy elementowych, całkowanych w sposób jednolicie zredukowany, dodatkowej fikcyjnej sztywności. Zadaniem fikcyjnej sztywności jest ograniczenie powstawania form pasożytniczych, przy jednoczesnym nie naruszaniu właściwych, uzasadnionych fizycznie postaci deformacji elementu.

Większość technik stabilizacyjnych umożliwia przedstawienie stycznej macierzy sztywności i wektora sił rezydualnych jako następujących sum:

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}^{URI} + \gamma \mathbb{K}^S, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}^{URI} + \gamma \mathbf{r}^S. \quad (5.2.58)$$

Tutaj \mathbb{K}^{URI} i \mathbf{r}^{URI} oznaczają macierze elementowe, obliczone przy użyciu całkowania zredukowanego (a więc dające rozwiązania, które mogą być obarczone formami pasożytniczymi $\{\mathbf{v}_a\}$, (5.2.56)), natomiast \mathbb{K}^S i \mathbf{r}^S są tzw. *macierzami stabilizującymi*, których zadaniem jest uniemożliwienie wyzwolenia się postaci $\{\mathbf{v}_a\}$.

W (5.2.58), γ jest tzw. *współczynnikiem perturbacji*, nazywanym często także *współczynnikiem filtracji*. Jego wartość $0 < \gamma \ll 1$ określa się na podstawie eksperymentu numerycznego, przyjmując najczęściej $\gamma = 10^{-6}$. Macierze stabilizujące⁴⁸ \mathbb{K}^S i \mathbf{r}^S winny być tak skonstruowane, aby dawały wkład do energii tylko z wektorem form pasożytniczych.

⁴⁸W pracy VU-QUOC i MORA [1989] sugeruje się, jako najprostszy schemat filtracji, włączenie do zależności (5.2.58) w miejsce macierzy stabilizującej \mathbb{K}^S macierzy sztywności całkowanej w sposób pełny $\mathbb{K}^S \equiv \mathbb{K}^{FI}$ z bardzo małym współczynnikiem perturbacji γ . Przeprowadzone eksperymenty własne, w ramach sformułowania elementów zdegenerowanych, nie wykazały skuteczności tego typu filtracji w przedziale wartości $0 < \gamma \leq 10^{-6}$. W zakresie $\gamma > 10^{-6}$, przy wartościach γ , dla których obserwowano wyraźną stabilizację form pasożytniczych, wystąpił jednocześnie efekt znacznego przeszczywnienia (blokady) rozwiązań.

Dekomponując formalnie dowolny wektor przemieszczeń elementu, uzyskany przy zastosowaniu całkowania zredukowanego (RI), zgodnie z zasadą

$$\Delta \mathbf{q}_{(e)}^{URI} = \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \sum \alpha_a \mathbf{v}_a, \quad \mathbf{v}_a \in \mathbf{g}, \quad \alpha_a \in \mathbb{R}, \quad (5.2.59)$$

zapisuje się warunek nakładany na macierze stabilizujące w postaci

$$\Delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbb{K}^S \Delta \mathbf{q}_{(e)} = 0, \quad \Delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{r}^S = 0, \quad \mathbf{v}_a^T \mathbb{K}^S \mathbf{v}_a \neq 0, \quad \mathbf{v}_a^T \mathbf{r}^S \neq 0. \quad (5.2.60)$$

Tutaj $\Delta \mathbf{q}_{(e)}$ jest dowolnym, nie obciążonym formami pasożytniczymi $\{\mathbf{v}_a\}$, wektorem przemieszczeń elementu, ujmującym także ruch sztywny.

Jedną z ciekawszych możliwości obliczania macierzy stabilizujących \mathbb{K}^S i \mathbf{r}^S jest przedstawiona w pracach LIU, ONG i URAS [1985], LIU i inni [1985, 1986] koncepcja unifikacji. Opiera się ona na pseudo-rozwinięciu w szereg Taylora w otoczeniu punktu całkowania p interpolacyjnej formuły dla relacji kinematycznych $\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) = \overline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{q}$. Koncepcja ta opiera się na spostrzeżeniu, że funkcje kształtu form zeroenergetycznych (bazę w przestrzeni \mathbf{g} zdefiniowanej przez (5.2.56)) można otrzymać w wyniku różniczkowania wektora uogólnionych wirtualnych odkształceń $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ po współrzędnych naturalnych $\boldsymbol{\xi}$ (por. LIU, ONG i URAS [1985]).

Z formalnego rozwinięcia w szereg w otoczeniu punktu p formuły interpolacyjnej $\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) = \overline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{q}$ (zob. (5.2.47)) i uzupełnieniu jej współczynnikiem $\gamma^{1/2}$ tak, aby końcowa postać macierzy stabilizującej była zgodna z (5.2.58), po ograniczeniu rozwinięcia do wyrazów liniowych otrzymujemy

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}_p + \Delta \boldsymbol{\xi}) \approx \left[\overline{\mathbb{B}}^0(\boldsymbol{\xi}_p) + \sqrt{\gamma} \overline{\mathbb{B}}^1(\boldsymbol{\xi}_p) \Delta \xi^1 + \sqrt{\gamma} \overline{\mathbb{B}}^2(\boldsymbol{\xi}_p) \Delta \xi^2 \right] \delta \mathbf{q}, \quad (5.2.61)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\beta = \boldsymbol{\varepsilon}^\beta - \boldsymbol{\varepsilon}_p^\beta,$$

gdzie

$$\overline{\mathbb{B}}^0(\boldsymbol{\xi}_p) \equiv \overline{\mathbb{B}}^{URI}(\boldsymbol{\xi}_p), \quad \overline{\mathbb{B}}^\beta(\boldsymbol{\xi}_p) = \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \overline{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\xi}) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_p}, \quad \beta = 1, 2. \quad (5.2.62)$$

Analogicznie do (5.2.61) i (5.2.62) zapisuje się kolejno:

$$\text{wektor } \delta \mathbf{d}(\boldsymbol{\xi}) = \overline{\mathbb{D}}(\boldsymbol{\xi}) \delta \mathbf{q},$$

$$\delta \mathbf{d}(\boldsymbol{\xi}_p + \Delta \boldsymbol{\xi}) \approx \left[\overline{\mathbb{D}}^0(\boldsymbol{\xi}_p) + \sqrt{\gamma} \overline{\mathbb{D}}^1(\boldsymbol{\xi}_p) \Delta \xi^1 + \sqrt{\gamma} \overline{\mathbb{D}}^2(\boldsymbol{\xi}_p) \Delta \xi^2 \right] \delta \mathbf{q}, \quad (5.2.63)$$

wektor uogólnionych odkształceń

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}_p + \Delta \boldsymbol{\xi}) \approx \boldsymbol{\varepsilon}^0(\boldsymbol{\xi}_p) + \sqrt{\gamma} \boldsymbol{\varepsilon}^1(\boldsymbol{\xi}_p) \Delta \xi^1 + \sqrt{\gamma} \boldsymbol{\varepsilon}^2(\boldsymbol{\xi}_p) \Delta \xi^2, \quad (5.2.64)$$

a następnie oblicza się wektor uogólnionych naprężeń na podstawie (5.2.64), zgodnie z równaniem konstytutywnym

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}_p + \Delta \boldsymbol{\xi}) &\approx \mathbb{C}(\boldsymbol{\xi}_p) [\boldsymbol{\varepsilon}^0(\boldsymbol{\xi}_p) + \sqrt{\gamma} \boldsymbol{\varepsilon}^1(\boldsymbol{\xi}_p) \Delta \xi^1 + \sqrt{\gamma} \boldsymbol{\varepsilon}^2(\boldsymbol{\xi}_p) \Delta \xi^2] \\ &= \mathbf{s}^0(\boldsymbol{\xi}_p) + \sqrt{\gamma} \mathbf{s}^1(\boldsymbol{\xi}_p) \Delta \xi^1 + \sqrt{\gamma} \mathbf{s}^2(\boldsymbol{\xi}_p) \Delta \xi^2. \end{aligned} \quad (5.2.65)$$

Tworząc z wyrażeń (5.2.61) i (5.2.63)–(5.2.65) macierze elementowe, tak jak w zależności (5.2.49), w sposób spójny z formułą całkowania numerycznego (5.2.55) otrzymuje się

$$\mathbb{K}_M = \sum_{p=1}^I \left(\sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \overline{\mathbb{B}}^{nT}(\boldsymbol{\xi}_p) \mathbb{C}(\boldsymbol{\xi}_p) \overline{\mathbb{B}}^m(\boldsymbol{\xi}_p) \rho^{nm} \right) \alpha(\boldsymbol{\xi}_p) w_p, \quad (5.2.66)$$

$$\mathbb{K}_G = \sum_{p=1}^I \left(\sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \overline{\mathbb{D}}^{nT}(\boldsymbol{\xi}_p) \mathbb{G}(\boldsymbol{\xi}_p) \overline{\mathbb{D}}^m(\boldsymbol{\xi}_p) \rho^{nm} \right) \alpha(\boldsymbol{\xi}_p) w_p, \quad (5.2.67)$$

oraz węzłowy wektor sił wewnętrznych

$$\mathbf{r} = \sum_{p=1}^I \left(\sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \overline{\mathbb{B}}^{nT}(\boldsymbol{\xi}_p) \mathbf{s}^m(\boldsymbol{\xi}_p) \rho^{nm} \right) \alpha(\boldsymbol{\xi}_p) w_p. \quad (5.2.68)$$

Występujące powyżej współczynniki ρ^{nm} , $n, m = 0, 1, 2$, mają postać

$$\rho^{nm} = \frac{1}{4} \int_{-1+\xi_p^2}^{+1-\xi_p^2} \int_{-1+\xi_p^1}^{+1-\xi_p^1} \rho_n \rho_m d\xi^1 d\xi^2, \quad \rho_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, \\ \sqrt{\gamma} \Delta \xi^1 & \text{dla } n = 1, \\ \sqrt{\gamma} \Delta \xi^2 & \text{dla } n = 2. \end{cases} \quad (5.2.69)$$

Począwszy od (5.2.61), utrzymano tu linię prac LIU, ONG i URAS [1985], LIU i inni [1985, 1986], rezygnując ze spójności matematycznej. Formalne przekształcenia (bez uproszczeń) prowadzą do skomplikowanych wyrażeń, podważając sens takiej koncepcji filtrowania.

Przegląd literatury tematu i doświadczenia własne wskazują, że techniki filtrowania jedynie redukują (tłumią) z różną skutecznością rząd fikcyjnej deformacji związanej z formami pasożytniczymi. W przypadku powłok i płyt stosunkowo dobre efekty uzyskuje się dla pól przesunięć $\Delta \mathbf{u}$, najczęściej eksponowanych w literaturze, gorsze natomiast dla pól obrotów $\Delta \boldsymbol{\psi}$. Skuteczność filtrowania zmniejsza się w zagadnieniach nieliniowych, pogarszając się wraz z rozwojem deformacji. Mimo to koncepcja stabilizacji form pasożytniczych, szczególnie w kontekście bardzo oszczędnych 4-węzłowych powłokowych i 8-węzłowych bryłowych elementów skończonych z jednym punktem całkowania, jest nadal przedmiotem badań i jest rozwijana w różnych odmianach wariantu podstawowego (zob. np. ZENG i COMBESURE [1998], REESE, WRIGGERS i REDDY [2000]).

5.2.17. Globalne równanie macierzowe

Prezentowane powyżej sformułowanie przemieszczeniowe nie jest ograniczone do specjalnej klasy elementów, co stanowi jego podstawową zaletę. Różne typy elementów są definiowane przez obszar geometryczny (np. krzywoliniowy czworoboczny, trójboczny) oraz liczbę i położenie węzłów. Odpowiednie funkcje kształtu konstruowane są metodą interpolacji. Zależności macierzowe, tworzące tzw. globalny układ równań MES, budowane są przez odpowiednie sumowanie macierzy elementowych, zwane *agregacją* (zob. np. ZIENKIEWICZ [1972]).

Aby operacja agregacji miała sens, agregowane wyrazy poszczególnych macierzy elementowych muszą mieć te same wymiary fizyczne (być wyrażone w tych samych jednostkach) oraz muszą być one odniesione do wspólnej bazy. Oznacza to, że elementowe stopnie swobody wszystkich elementów we wspólnym węzle muszą być odniesione do tego samego układu współrzędnych, który dodatkowo powinien umożliwiać proste spełnienie warunków brzegowych. W ramach przedstawionego sformułowania elementów powłokowych, podobnie jak w przypadku standardowych przemieszczeniowych elementów izoparametrycznych, warunki te spełnione są z założenia. Dlatego formułowanie macierzy globalnych z macierzy elementowych typu (5.2.43) przeprowadza się w sposób standardowy (zob. np. ZIENKIEWICZ [1972], KLEIBER [1985, 1989], CRISFIELD [1991])

$$\mathbb{M} \Delta \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{C} \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}_T \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{p} + \mathbf{j}, \quad (5.2.70)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &= \bigoplus_{e=1}^N \mathbb{M}^{(e)}, & \mathbb{C} &= \bigoplus_{e=1}^N \mathbb{C}^{(e)}, & \mathbb{K}_T &= \bigoplus_{e=1}^N \mathbb{K}_T^{(e)}, \\ \Delta \mathbf{p} &= \bigoplus_{e=1}^N \Delta \mathbf{p}^{(e)}, & \mathbf{j} &= \bigoplus_{e=1}^N \mathbf{j}^{(e)}. \end{aligned} \quad (5.2.71)$$

W (5.2.70), $\Delta \mathbf{q}$, $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ i $\Delta \ddot{\mathbf{q}}$ są odpowiednimi globalnymi wektorami uogólnionych przyrostów przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń węzłowych. Symbol \bigoplus oznacza agregację, tj. operację sumowania macierzy o różnych wymiarach, przez przyporządkowanie położenia zależności elementowych w tablicach globalnych z jednoczesnym uwzględnieniem kinematycznych jednorodnych warunków brzegowych, zaś N jest liczbą elementów.

Równanie macierzowe (5.2.70) jest podstawą zastosowania procedur całkowania po czasie rozważanego zagadnienia początkowo-brzegowego (podrozdział 4.6). W przypadku redukcji do zagadnienia statyki ($\mathbb{M} = \mathbb{C} = \mathbb{O}$), równanie (5.2.70) jest podstawą rozwiązania przyrostowo-iteracyjnego metodą Newtona–Raphsona (podrozdziały 4.4 i 4.5) badanego zagadnienia brzegowego.

5.3. Mieszane modele elementów skończonych

5.3.1. Uwagi wstępne

Mieszane modele elementów skończonych mogą być formułowane albo bezpośrednio z lokalnych równań i zależności różniczkowych mechaniki powłok przy wykorzystaniu metody rezyduów ważonych, albo, równoważnie, używając podejścia wariacyjnego.

W ramach ogólnej mechaniki powłok, przedstawionej w części I, istnieje możliwość konstruowania wielu różnych funkcjonałów wielopolowych, przy zastosowaniu formalnej procedury transformacyjnej, podanej np. w COURANT i HILBERT [1953]. Podstawy teoretyczne tworzenia różnych funkcjonałów i sformułowań wariacyjnych zawierają między innymi prace SEWELL [1982], TONTI [1984], REDDY [1984], GAO [1998], a w zakresie nieliniowej teorii sprężystości np. TIEREGUŁOW [1962], DE VEUBEKE [1972], GUO [1980], EDELEN [1981], VALID [1981, 1995], BERDICZEWSKIJ [1983], BUFLER [1983, 1985], ATLURI [1984] i PEDREGAL [2000], w których podana jest obszerna literatura źródłowa.

Punktem wyjścia do sformułowania wariacyjnego mechaniki powłok jest zazwyczaj funkcjonal całkowitej energii potencjalnej, wyrażony przez przemieszczenia $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$ jako jedyne zmienne niezależne. Formułując odpowiednie relacje więzów z mnożnikami Lagrange'a, do tego funkcjonału wprowadza się jako dodatkowe zmienne niezależne albo pola powłokowych miar odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{E}, \mathbf{K})$, albo pola przekrojowych miar naprężeń $\mathbf{s} = (\mathbf{N}, \mathbf{M})$, lub też oba pola jednocześnie. Ponieważ składniki bezwładnościowe w sformułowaniu elementów mieszanych nie ulegają zmianie w stosunku do sformułowania przemieszczeniowego, dalsze rozważania ograniczamy do zadań statycznych powłok sprężystych.

5.3.2. Zasada zachowania całkowitej energii potencjalnej

Przy formułowaniu zasady zachowania całkowitej energii potencjalnej zakładamy, że obciążenia zewnętrzne działające na powłokę są potencjalne⁴⁹. Wówczas istnieje potencjał obciążenia $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ taki, że

$$\delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = -G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}]. \quad (5.3.1)$$

Jeśli ponadto przyjmiemy, że powłoka jest hipersprężysta, to istnieje funkcja powierzchniowej gęstości energii odkształcenia sprężystego

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}) = \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta), \quad (5.3.2)$$

określająca materiałowe równania konstytutywne np. w następującej postaci:

$$\mathbf{s} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\} = \tilde{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \left\{ \begin{array}{c} \partial_{\mathbf{E}} \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}) \\ \partial_{\mathbf{K}} \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}) \end{array} \right\}. \quad (5.3.3)$$

⁴⁹Warunki potencjalności różnych obciążeń powierzchniowych badali między innymi SEWELL [1965], ZUBOW [1975], BUFLER [1984], SIMMONDS [1984b], FISHER [1988], PIETRASZKIEWICZ [1989].

Przy spełnieniu (5.3.1) i (5.3.3) funkcjonal całkowitej energii potencjalnej $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, z przemieszczeniami $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ jako jedynymi zmiennymi niezależnymi, może być zdefiniowany jako

$$J(\mathbf{u}) = \iint_M \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \, da + V(\mathbf{u}). \quad (5.3.4)$$

Pierwsza pochodna (5.3.4), po uwzględnieniu relacji kinematycznych $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w}$, przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \delta J[\mathbf{u}; \mathbf{w}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{E}[\mathbf{u}; \mathbf{w}] + \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{K}[\mathbf{u}; \mathbf{w}]) \, da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \\ &= \iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbf{s} \, da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

która w rozważanym przypadku potencjalnego obciążenia zewnętrznego (5.3.1) pokrywa się z zasadą wirtualnych przemieszczeń, ważną dla każdego kinematycznie dopuszczalnego pola $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_A$

$$\delta J[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = G[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = 0. \quad (5.3.6)$$

Zasada (5.3.6) orzeka, że ze wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń tylko te czynią funkcjonal $J(\mathbf{u})$ stacjonarnym, które spełniają równania równowagi i statyczne warunki brzegowe.

Funkcjonał całkowitej energii potencjalnej (5.3.4) jest określony na przestrzeni kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_A$. Uogólnione odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ i uogólnione naprężenia \mathbf{s} (przekrojowe siły i momenty) są wielkościami wprowadzonymi z relacji kinematycznych i równań konstytutywnych.

5.3.3. Dwupolowa zasada wariacyjna, wariant naprężeniowy

W przypadku fizycznie liniowej teorii powłok, macierz konstytutywna z założenia jest odwracalna. Umożliwia to wyrażenie równań konstytutywnych $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\varepsilon})$ w odwrotnej postaci $\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{s})$.

W ogólniejszym przypadku również założymy, że relacje konstytutywne $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\varepsilon})$ są lokalnie odwracalne do postaci

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{array} \right\} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{s}) = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{E}}(N, M) \\ \tilde{\mathbf{K}}(N, M) \end{array} \right\}. \quad (5.3.7)$$

Stąd możemy, wprowadzając kontaktową transformację Legendre'a, zdefiniować funkcję gęstości powierzchniowej energii dopełniającej

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{s}) &= \mathbf{s}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{s}) - \Phi(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{s})) = N \cdot \tilde{\mathbf{E}}(N, M) + M \cdot \tilde{\mathbf{K}}(N, M) \\ &\quad - \Phi(\tilde{\mathbf{E}}(N, M), \tilde{\mathbf{K}}(N, M)). \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Pierwsza pochodna z funkcji (5.3.8) ma postać

$$\delta \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \partial_{\mathbf{s}} \Psi(\mathbf{s})) + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{s} - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon})) = 0. \quad (5.3.9)$$

Wobec dowolności $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ i $\delta \mathbf{s}$, (5.3.9) prowadzi do następujących równań konstytutywnych (porównaj (5.3.3)₁):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &\equiv \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{array} \right\} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{s}) \equiv \partial_{\mathbf{s}} \Psi(\mathbf{s}) = \left\{ \begin{array}{c} \partial_{\mathbf{N}} \Psi(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \\ \partial_{\mathbf{M}} \Psi(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \end{array} \right\}, \\ \mathbf{s} &\equiv \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\} = \tilde{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \left\{ \begin{array}{c} \partial_{\mathbf{E}} \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}) \\ \partial_{\mathbf{K}} \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}) \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Rozwiązując (5.3.8) względem Φ , a następnie podstawiając tak obliczone Φ do funkcjonału całkowitej energii potencjalnej (5.3.4) z użyciem relacji kinematycznej $\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$, otrzymujemy nowy funkcjonał z polami $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$ i $\mathbf{s} = (\mathbf{N}, \mathbf{M})$ jako zmiennymi niezależnymi

$$\begin{aligned} H(\mathbf{u}, \mathbf{s}) &= \iint_{M \setminus \Gamma} (\mathbf{s}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{s})) \, da + V(\mathbf{u}) \\ &= \iint_{M \setminus \Gamma} \left(\mathbf{N} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) + \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \right) \, da + V(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Pierwsza pochodna powyższego funkcjonału dana jest przez

$$\delta H[\mathbf{u}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{s}] = \iint_{M \setminus \Gamma} ((\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbf{s} + \delta \mathbf{s}^T (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \partial_{\mathbf{s}} \Psi)) \, da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \quad (5.3.12)$$

gdzie

$$\begin{aligned} (\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbf{s} &= \mathbf{N} \cdot \delta \tilde{\mathbf{E}}[\mathbf{u}; \mathbf{w}] + \mathbf{M} \cdot \delta \tilde{\mathbf{K}}[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \\ \delta \mathbf{s}^T (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \partial_{\mathbf{s}} \Psi) &= \delta \mathbf{N} \cdot \left(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) - \partial_{\mathbf{N}} \Psi(\mathbf{s}) \right) \\ &\quad + \delta \mathbf{M} \cdot \left(\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) - \partial_{\mathbf{M}} \Psi(\mathbf{s}) \right). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Ponieważ \mathbf{u} i \mathbf{s} są teraz polami niezależnymi, z powyższego wynika, że

$$\delta H[\mathbf{u}, \mathbf{s}; \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{s}] = 0 \quad (5.3.14)$$

dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych wirtualnych przemieszczeń $\delta \mathbf{u}$ i dowolnego $\delta \mathbf{s}$ wtedy i tylko wtedy, jeśli spełnione są równania równowagi, równania konstytutywne i statyczne warunki brzegowe. Są to równania Eulera–Lagrange’a zasady wariacyjnej (5.3.14) typu Hellingera–Reissnera.

Zasada (5.3.14) stanowi podstawę formułowania mieszanych elementów skończonych. Należy podkreślić, że \mathbf{u} musi być tutaj kinematycznie dopuszczalne, podczas gdy na pole \mathbf{s} nie nałożono żadnych ograniczeń; pole \mathbf{s} musi być jedynie na tyle gładkie, by całka w (5.3.11) dała się obliczyć. Dlatego pole \mathbf{s} może być tylko odcinkowo ciągłe.

5.3.4. Równania zlinearyzowane, wariant naprężeniowy

Rozwiązanie nieliniowych równań zagadnienia brzegowego, sformułowanego powyżej w postaci wariacyjnej (5.3.14), otrzymuje się, podobnie jak w sformułowaniu przemieszczeniowym, przez sukcesywną linearyzację problemu (5.3.11).

Odpowiednie równanie zlinearyzowane problemu (5.3.14) przyjmuje postać

$$\delta^2 H[\mathbf{u}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{s}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \mathbf{s}] + \delta H[\mathbf{u}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{s}] = 0, \quad (5.3.15)$$

gdzie pierwsza pochodna jest dana przez (5.3.12).

Druga pochodna z funkcji energii dopełniającej (5.3.8) (lub pierwsza z (5.3.9))

$$\delta \mathbf{s}^T (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \partial_{\mathbf{s}\mathbf{s}} \Psi(\mathbf{s}) \Delta \mathbf{s}) + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\Delta \boldsymbol{\sigma} - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad (5.3.16)$$

prowadzi do zależności

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \partial_{\mathbf{s}\mathbf{s}} \Psi(\mathbf{s}) \Delta \mathbf{s} = \mathbb{H}(\mathbf{s}) \Delta \mathbf{s}, \quad \Delta \boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.3.17)$$

Z (5.3.17) wynika, że macierz podatności sprężystej $\mathbb{H}(\mathbf{s})$ musi być odwrotnością macierzy sprężystości,

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}) = \mathbb{C}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{s})). \quad (5.3.18)$$

Stąd $\det[\mathbb{C}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{s}))] \neq 0$ jest warunkiem koniecznym lokalnej odwracalności równań konstytutywnych (5.3.10). W postaci rozpisanej, macierz podatności sprężystej

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \partial_{NN} \Psi(\mathbf{s}) & \partial_{NM} \Psi(\mathbf{s}) \\ \partial_{MN} \Psi(\mathbf{s}) & \partial_{MM} \Psi(\mathbf{s}) \end{bmatrix} \quad (5.3.19)$$

zawiera drugie pochodne funkcji energii dopełniającej po uogólnionych naprężeniach.

Do obliczenia drugiej pochodnej funkcjonału (5.3.11) wystarczy obliczyć pierwszą pochodną z (5.3.12). Postępując tak samo jak w przypadku sformułowania przemieszczeniowego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta^2 H[\mathbf{u}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{s}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \mathbf{s}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} ((D\mathbf{w})^T \mathbb{G} D \Delta \mathbf{w} + (B\mathbf{w})^T \Delta \mathbf{s} \\ &\quad + \delta \mathbf{s}^T B \Delta \mathbf{w} - \delta \mathbf{s}^T \mathbb{H} \Delta \mathbf{s}) da \\ &\quad + \delta^2 V[\mathbf{u}; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}]. \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

Operatory (macierze) \mathbb{B} , \mathbb{D} i \mathbb{G} mają tu identyczną postać jak w sformułowaniu przemieszczeniowym. W rozważanym przypadku potencjalnego obciążenia (5.3.1), druga pochodna potencjału obciążeń zewnętrznych jest, oczywiście, równa ujemnej pierwszej pochodnej wyrażenia na wirtualną pracę obciążeń zewnętrznych

$$\delta^2 V[\mathbf{u}; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}] = -\delta G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}]. \quad (5.3.21)$$

5.3.5. Aproksymacja skończenie elementowa, wariant naprężeniowy

Zgodnie ze standardową procedurą formułowania elementów skończonych, powierzchnia podstawowa powłoki M jest reprezentowana przez sumę $M = \bigcup_{e \in N_e} \Pi_{(e)}$ nie pokrywających się poddziedzin $\Pi_{(e)}$ — elementów skończonych. Dlatego niewiadome problemu interpolowane są przez swoje wartości węzłowe. Jeśli interpolacja pola przemieszczeń \mathbf{u} zapewnia wymaganą w (5.3.20) ciągłość klasy C^0 wzdłuż brzegów międzyelementowych, funkcjonal (5.3.11) można wyrazić w postaci sumy funkcjonałów po elementach

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = \sum_{e=1}^{N_e} H^{(e)}(\mathbf{u}, \mathbf{s}), \quad (5.3.22)$$

ponieważ od \mathbf{s} wymagamy tylko ciągłości odcinkowej. Zatem zlinearyzowany problem wariacyjny przyjmuje formę

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left(\delta^2 H^{(e)}[\mathbf{u}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{s}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \mathbf{s}] + \delta H^{(e)}[\mathbf{u}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{s}] \right) = 0. \quad (5.3.23)$$

Zmienne kinematyczne, jako funkcje przemieszczeń, są interpolowane w obrębie typowego elementu $\Pi_{(e)}$ w taki sam sposób, jak w przypadku omówionych wcześniej przemieszczeniowych elementów Lagrange'owskich (rozdz. 5.2.10).

Wektor uogólnionych naprężeń \mathbf{s} składa się z sekwencji sześciu składowych wektorów przekrojowych sił \mathbf{n}^β i z sześciu składowych wektorów przekrojowych momentów \mathbf{m}^β . W aproksymacji skończenie elementowej wektor uogólnionych naprężeń \mathbf{s} i jego wariacje $\delta \mathbf{s}$ (równoważnie przyrosty $\Delta \mathbf{s}$) w obrębie dowolnego elementu są interpolowane w terminach elementowych parametrów naprężeniowych $\beta_{(e)}$ zgodnie z regułą

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}) \beta_{(e)}, \quad \Delta \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}) \Delta \beta_{(e)}. \quad (5.3.24)$$

Podstawiając zależność (5.3.24)₂ i standardową relację dla przyrostu przemieszczeń $\Delta \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{L}(\boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{q}_{(e)}$ (por. p. 5.2.8) do zlinearyzowanej postaci funkcjonału mieszanego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta^2 H^{(e)} &= \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbb{K}_G^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T (\mathbb{K}_m^{(e)})^T \Delta \beta_{(e)} \\ &+ \delta \beta_{(e)}^T \mathbb{K}_m^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \delta \beta_{(e)}^T \mathbb{K}_H^{(e)} \Delta \beta_{(e)} + \delta^2 V^{(e)}, \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

gdzie macierze $\mathbb{K}_m^{(e)}$ i $\mathbb{K}_H^{(e)}$ są zdefiniowane przez

$$\mathbb{K}_m^{(e)} = \iint_{\Pi(e)} \mathbb{P}^T \mathbb{B} \mathbb{L} da, \quad \mathbb{K}_H^{(e)} = \iint_{\Pi(e)} \mathbb{P}^T \mathbb{H} \mathbb{P} da, \quad (5.3.26)$$

a macierz $\mathbb{K}_G^{(e)}$ jest taka sama jak w przypadku sformułowania przemieszczeniowego.

W ten sam sposób, w wyniku aproksymacji skończenie elementowej (5.3.12) otrzymujemy

$$\delta H^{(e)} = \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{r}_d^{(e)} + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{r}_m^{(e)} + \delta V^{(e)}, \quad (5.3.27)$$

gdzie

$$\mathbf{r}_d^{(e)} = \iint_{\Pi(e)} (\mathbb{B} \mathbb{L})^T \mathbf{s} da, \quad \mathbf{r}_m^{(e)} = \iint_{\Pi(e)} \mathbb{P}^T ((\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \partial_{\mathbf{s}} \Psi(\mathbf{s})) da. \quad (5.3.28)$$

Uwzględniając składniki od obciążenia zewnętrznego $\mathbb{K}_L^{(e)}$ i $\mathbf{p}^{(e)}$, takie same jak w sformułowaniu przemieszczeniowym, zlinearyzowane równanie dla pojedynczego elementu można zapisać w formie

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \left(\left(\mathbb{K}_G^{(e)} - \mathbb{K}_L^{(e)} \right) \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \right)^T \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \mathbf{r}_d^{(e)} - \mathbf{p}^{(e)} \right) \\ + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \mathbb{K}_H^{(e)} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \mathbf{r}_m^{(e)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

Wobec dowolności pól wirtualnych $\delta \mathbf{q}_{(e)}$ i $\delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}$, (5.3.29) rozprzęga się i wynikowy układ równań przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{K}_G^{(e)} - \mathbb{K}_L^{(e)} \right) \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \right)^T \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} &= \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}_d^{(e)}, \\ - \mathbb{K}_m^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbb{K}_H^{(e)} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} &= \mathbf{r}_m^{(e)}. \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

Ponieważ wymagamy aby pola uogólnionych naprężeń były tylko odcinkowo ciągłe, interpolujemy je lokalnie wewnątrz elementu, a następnie wykorzystując (5.3.30)₂ kondensujemy je na poziomie rozważań elementowych

$$\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} = \left(\mathbb{K}_H^{(e)} \right)^{-1} \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbf{r}_m^{(e)} \right), \quad (5.3.31)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{K}_G^{(e)} - \mathbb{K}_L^{(e)} + \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \right)^T \left(\mathbb{K}_H^{(e)} \right)^{-1} \mathbb{K}_m^{(e)} \right) \Delta \mathbf{q}_{(e)} \\ = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}_d^{(e)} - \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \right)^T \left(\mathbb{K}_H^{(e)} \right)^{-1} \mathbf{r}_m^{(e)}. \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

W rezultacie otrzymujemy klasyczną postać równania zlinearyzowanego dla typowego elementu

$$\mathbb{K}_T^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}^{(e)}, \quad (5.3.33)$$

gdzie macierz sztywności stycznej $\mathbb{K}_T^{(e)}$ i wektor sił wewnętrznych $\mathbf{r}^{(e)}$ mają charakterystyczną dla elementów mieszanych postać

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_T^{(e)} &= \mathbb{K}_G^{(e)} - \mathbb{K}_L^{(e)} + \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \right)^T \left(\mathbb{K}_H^{(e)} \right)^{-1} \mathbb{K}_m^{(e)}, \\ \mathbf{r}^{(e)} &= \mathbf{r}_d^{(e)} + \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \right)^T \left(\mathbb{K}_H^{(e)} \right)^{-1} \mathbf{r}_m^{(e)}. \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

Ponieważ parametry naprężeniowe są tu eliminowane na poziomie elementu, wynikowe elementy powłokowe mają takie same węzłowe stopnie swobody, jak wcześniej sformułowany element przemieszczeniowy.

Wyliczenie macierzy sztywności w (5.3.34)₁ wymaga odwrócenia macierzy podatności $\mathbb{K}_H^{(e)}$, co jest podstawową wadą elementów mieszanych. Z tego punktu widzenia bardziej efektywna aproksymacja skończenie elementowa może być skonstruowana na podstawie rozważań przedstawionych w następnym podrozdziale, dotyczącym elementów częściowo mieszanych.

5.3.6. Dwupolowa zasada wariacyjna, wariant odkształceniowy

Odwracanie macierzy sprężystości (5.3.18), przy złym jej uwarunkowaniu w przypadkach silnej nieliniowości materiałowej, może prowadzić do niestabilności numerycznej. Zatem ma sens poszukiwanie sformułowania nie wymagającego tego typu zabiegu.

Takie sformułowanie może polegać na zbudowaniu mieszanej zasady dwupolowej z polami przemieszczeń $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$ i miar odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{E}, \mathbf{K})$ jako zmiennymi niezależnymi. W takich odkształceniowych zasadach mieszanych wyróżnić można dwa następujące podejścia:

A. Jeśli naprężenia \mathbf{s} są liniowo zależne od odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$, zasada (5.3.14) z \mathbf{u} i \mathbf{s} jako polami niezależnymi może być odwrócona do zasadniczo równoważnej zasady z \mathbf{u} i $\boldsymbol{\varepsilon}$ jako zmiennymi niezależnymi. Podejście takie znane jest w liniowej teorii powłok, jednak jego ułomnością jest potrzeba odwrócenia macierzy konstytutywnej \mathbb{C} . Dla skończonych odkształceń sprężystych tego typu trójwymiarowe zasady wariacyjne rozważano np. w pracach NEMAT-NASSER [1974] oraz LEE i SHIELD [1980].

B. Przyjmuje się z góry jako niezależne pola $\boldsymbol{\varepsilon}$, wyrażając przez nie funkcję odkształcenia sprężystego $\Phi = \Phi(\boldsymbol{\varepsilon})$. Cała koncepcja opiera się na równaniu konstytutywnym $\mathbf{s} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon})$, za pomocą którego eliminuje się naprężenia \mathbf{s} z równań pola i statycznych warunków brzegowych. Następnie interpretując $\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon})$ jako mnożnik Lagrange'a, wstawia się zależność $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ do funkcjonału

całkowitej energii potencjalnej (5.3.4), wymuszając wariacyjnie spełnienie relacji kinematycznych. Wynikiem tych przekształceń jest nowy funkcjonal z \mathbf{u} i $\boldsymbol{\varepsilon}$ jako polami niezależnymi

$$H(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \iint_{M \setminus \Gamma} (\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) + (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}))^T (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})) da + V(\mathbf{u}). \quad (5.3.35)$$

Tutaj, tak jak w (5.3.14), $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_A$ jest polem kinematycznie dopuszczalnym, zaś niezależne pole odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$, podobnie jak \mathbf{s} w (5.3.14), winno być co najmniej odcinkowo ciągłe.

Pierwsza pochodna funkcjonału (5.3.35), po uwzględnieniu relacji $\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbb{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w}$, prowadzi do

$$\begin{aligned} \delta H[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} ((\mathbb{B}\mathbf{w})^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})) da \\ &\quad + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \\ &= \iint_{M \setminus \Gamma} ((\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbf{s} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{C} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})) da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \end{aligned} \quad (5.3.36)$$

gdzie

$$\begin{aligned} (\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbf{s} &= \mathbf{N} \cdot \delta \tilde{\mathbf{E}}[\mathbf{u}; \mathbf{w}] + \mathbf{M} \cdot \delta \tilde{\mathbf{K}}[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{C} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}) &= \{\delta \mathbf{E}, \delta \mathbf{K}\} \begin{bmatrix} \partial_{\mathbf{E}\mathbf{E}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) & \partial_{\mathbf{E}\mathbf{K}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \partial_{\mathbf{K}\mathbf{E}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) & \partial_{\mathbf{K}\mathbf{K}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) - \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) - \mathbf{K} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

Ponieważ \mathbf{u} i $\boldsymbol{\varepsilon}$ są polami niezależnymi, warunek stacjonarności funkcjonału (5.3.35)

$$\delta H[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}] = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}} \mathcal{U}, \quad (5.3.38)$$

wobec dowolności $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, wymaga aby były spełnione jako równania Eulera-Lagrange'a następujące zależności: równania równowagi, statyczne warunki ciągłości, statyczne warunki brzegowe i warunek dodatkowy

$$\mathbb{C}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{0} \quad \text{przy} \quad \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (5.3.39)$$

Przy $\det \partial_{\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) \neq 0$ w dziedzinie określoności Φ , warunek (5.3.39) sprowadza się do spełnienia relacji kinematycznej $\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$.

5.3.7. Równania zlinearyzowane, wariant odkształceniowy

Tak jak dotychczas, rozwiązanie nieliniowych równań zagadnienia brzegowego otrzymujemy na drodze iteracyjnej przez sukcesywną linearyzację (5.3.38). Tym razem równanie zlinearyzowane przyjmuje postać

$$\delta^2 H[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}] + \delta H[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}] = 0, \quad (5.3.40)$$

gdzie pierwsza pochodna jest dana wzorem (5.3.36).

Do obliczenia drugiej pochodnej funkcjonału (5.3.35) wystarczy obliczyć pierwszą pochodną z (5.3.36). Postępując tak samo jak w przypadku sformułowania przemieszczeniowego, otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \delta^2 H[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} ((\mathbb{D}\mathbf{w})^T \mathbb{G} \mathbb{D} \Delta \mathbf{w} + (\mathbb{B}\mathbf{w})^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\
 &\quad + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) (\mathbb{B} \Delta \mathbf{w} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \\
 &\quad + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T [\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})] \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \, da \\
 &\quad + \delta^2 V[\mathbf{u}; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}] \\
 &= \iint_{M \setminus \Gamma} ((\mathbb{D}\mathbf{w})^T \mathbb{G} \mathbb{D} \Delta \mathbf{w} + (\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbb{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\
 &\quad + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{C} (\mathbb{B} \Delta \mathbf{w}) \\
 &\quad - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T [\mathbb{C} - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbb{C} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})] \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \, da \\
 &\quad + \delta^2 V[\mathbf{u}; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}]. \tag{5.3.41}
 \end{aligned}$$

Operatory \mathbb{B} i \mathbb{D} oraz macierz \mathbb{G} mają tu, podobnie jak w wariancie naprężeniowym, postać identyczną jak w sformułowaniu przemieszczeniowym. Ponadto, podobnie jak w wariancie naprężeniowym, druga pochodna potencjału obciążeń zewnętrznych dana jest równaniem (5.3.21).

5.3.8. Aproksymacja skończenie elementowa, wariant odkształceniowy

Jeśli interpolacja przemieszczeń \mathbf{u} zapewnia wymaganą w (5.3.38) ciągłość klasy C^0 wzdłuż brzegów międzyelementowych, funkcjonał (5.3.35) można wyrazić w postaci sumy funkcjonałów po elementach

$$H(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{e=1}^{N_e} H^{(e)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}), \tag{5.3.42}$$

ponieważ, podobnie jak w (5.3.22) od \mathbf{s} , tu od $\boldsymbol{\varepsilon}$ wymagamy tylko ciągłości od-cinkowej. Zatem zlinearyzowany problem wariacyjny przyjmuje formę

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left(\delta^2 H^{(e)}[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}] + \delta H^{(e)}[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}] \right) = 0. \tag{5.3.43}$$

Zmienne kinematyczne, pozostające tutaj nadal funkcjami przemieszczeń, są interpolowane w obrębie dowolnego elementu $\Pi_{(e)}$, tak samo jak w wariancie przemieszczeniowym. Wektor uogólnionych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ składa się z sekwencji sześciu składowych wektorów odkształceń membranowych $\boldsymbol{\varepsilon}_\beta$ i sześciu składowych wektorów odkształceń zgięciowych $\boldsymbol{\kappa}_\beta$. W aproksymacji skończenie elementowej wektor niezależnych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ i jego wariacje $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ (lub równoważnie

przyrosty $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$) w obrębie dowolnego elementu są interpolowane analogicznie jak w naprężeniowej wersji elementu mieszanego. W terminach elementowych parametrów odkształceniowych $\boldsymbol{\beta}_{(e)}$, interpolacja przebiega zgodnie z regułą

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi) = \mathbb{P}(\xi) \boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\xi) = \mathbb{P}(\xi) \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}. \quad (5.3.44)$$

Podstawiając zależność (5.3.44)₂ i standardową relację dla przyrostu przemieszczeń $\Delta \mathbf{w}(\xi) = \mathbb{L}(\xi) \Delta \mathbf{q}_{(e)}$ (por. p. 5.2.8) do zlinearyzowanej postaci funkcjonału mieszanego (5.3.41) oraz używając tych samych oznaczeń co w wariancie naprężeniowym, otrzymujemy identyczną z (5.3.25) postać

$$\begin{aligned} \delta^2 H^{(e)} &= \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbb{K}_G^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \right)^T \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} \\ &\quad + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbb{K}_m^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbb{K}_H^{(e)} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \delta^2 V^{(e)}, \end{aligned} \quad (5.3.45)$$

gdzie tym razem macierze $\mathbb{K}_m^{(e)}$ i $\mathbb{K}_H^{(e)}$ są zdefiniowane następująco:

$$\mathbb{K}_m^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbb{P}^T \mathbb{C} \mathbb{B} \mathbb{L} \, da, \quad \mathbb{K}_H^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbb{P}^T [\mathbb{C} - \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbb{C} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})] \mathbb{P} \, da. \quad (5.3.46)$$

W wyniku aproksymacji skończenie elementowej warunku (5.3.38), w podobny sposób otrzymujemy zależność analogiczną do (5.3.27)

$$\delta H^{(e)} = \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{r}_d^{(e)} + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{r}_m^{(e)} + \delta V^{(e)}, \quad (5.3.47)$$

gdzie w tym przypadku

$$\mathbf{r}_d^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} (\mathbb{B} \mathbb{L})^T \mathbf{s} \, da, \quad \mathbf{r}_m^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbb{P}^T \mathbb{C} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}) \, da. \quad (5.3.48)$$

Zgodność równań (5.3.25) i (5.3.45) oraz (5.3.27) i (5.3.47) wskazuje, że dalsze rozważania ujęte zależnościami (5.3.29)–(5.3.34), jak również wszystkie poczynione w ich kontekście uwagi, obowiązują także w wariancie odkształceniowym z tą różnicą, że dotyczą one teraz niezależnego pola uogólnionych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ zamiast pola uogólnionych naprężeń \mathbf{s} .

Porównanie odpowiadających sobie zależności (5.3.26) i (5.3.46) oraz (5.3.28) i (5.3.48) wskazuje, że oba warianty mieszanych elementów skończonych — naprężeniowy i odkształceniowy — mogą być bez specjalnych trudności ujęte w ramach tego samego podprogramu. Podobieństwo algorytmów obu wariantów ma miejsce szczególnie w przypadku analizy powłok liniowo sprężystych. Bowiem w tym przypadku, wobec $\mathbb{C} = \text{const} \Rightarrow \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbb{C} = \mathbb{O}$, z zależności (5.3.46)₂ wypada składnik $\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbb{C} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})$ charakterystyczny tylko dla wariantu odkształceniowego. Wobec podobieństwa obu wariantów omówionych zasad dwupolowych, dalszą szczegółową dyskusję sformułowania mieszanych elementów skończonych ograniczymy tylko do wariantu naprężeniowego.

5.3.9. Mieszane elementy skończone

Kluczowym przy formułowaniu mieszanych elementów skończonych jest właściwy dobór funkcji kształtu, aproksymujących uogólnione naprężenia \mathbf{s} i ich wariacje $\delta\mathbf{s}$ (lub równoważnie przyrosty $\Delta\mathbf{s}$), tj. funkcji wchodzących do macierzy \mathbb{P} we wzorach (5.3.24) lub (5.3.44).

Z literatury dotyczącej elementów mieszanych i hybrydowych⁵⁰ wynika, że składowe dodatkowych zmiennych niezależnych

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{n} \\ \mathfrak{m} \end{Bmatrix}, \quad \mathfrak{n} = \begin{Bmatrix} n^1 \\ n^2 \end{Bmatrix}, \quad \mathfrak{m} = \begin{Bmatrix} m^1 \\ m^2 \end{Bmatrix},$$

$$\mathfrak{n} = \begin{Bmatrix} N^{11} \\ N^{22} \\ N^{12} \\ N^{21} \\ Q^1 \\ Q^2 \end{Bmatrix}, \quad \mathfrak{m} = \begin{Bmatrix} M^{11} \\ M^{22} \\ M^{12} \\ M^{21} \\ M^1 \\ M^2 \end{Bmatrix}, \quad (5.3.49)$$

aproksymuje się przeważnie w sposób niejednolity. Niejednolitość tej interpolacji pochodzi z trzech źródeł.

Po pierwsze, można w różny sposób interpolować zmienne opisujące stan membranowy \mathfrak{n} i zgięciowy \mathfrak{m}

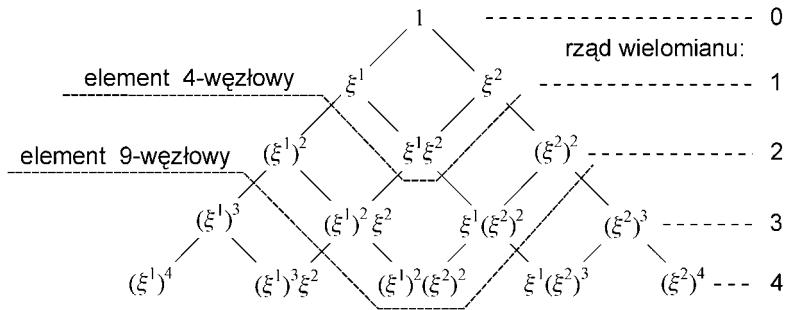
$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{Bmatrix} \mathfrak{n}(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathfrak{m}(\boldsymbol{\xi}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{\mathfrak{n}}(\boldsymbol{\xi}) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{P}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{(e)}^{\mathfrak{n}} \\ \beta_{(e)}^{\mathfrak{m}} \end{Bmatrix} = \mathbb{P}(\boldsymbol{\xi})\beta_{(e)}. \quad (5.3.50)$$

Zróznicowanie to wynika z faktu, że źródło blokady tkwi w części membranowej \mathfrak{n} i powiązane jest z rzędem i sposobem aproksymacji tej części.

Drugie źródło niejednolitości interpolacji dotyczy zasadniczo tylko części membranowej \mathfrak{n} i zależy od interpretacji fizycznej poszczególnych składowych przekrojowych sił wewnętrznych: normalnych (N^{11}, N^{22}), stycznych (N^{12}, N^{21}) i sił poprzecznych od ścinania (Q^1, Q^2). Rząd wielomianów aproksymujących te różne niezależne składowe \mathbf{s} powinien być co najwyżej równy rzędowi wielomianów, interpolujących energetycznie z nimi sprzężone składowe miar odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, czyli zmienne będące funkcjami tylko pola przemieszczeń $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$.

Trzecie źródło niejednolitości interpolacji \mathbf{s} tkwi w wyróżnieniu kierunku (współrzędnej, np. (Q^1, Q^2)) w ramach składników o tej samej interpretacji fizycznej i może dotyczyć zarówno części membranowej jak i zgięciowej. Stopnie wielomianów interpolujących (m, n) względem pierwszej i drugiej współrzędnej

⁵⁰Zobacz np. ATLURI, GALLAGHER i ZIENKIEWICZ [1983] (materiały konferencyjne), PIAN i SUMIHARA [1984], PIAN i WU [1988], SALEEB i inni [1987, 1990], RENGARAJAN, AMINPOUR i KNIGHT [1995] i cytowaną tam literaturę. Wiele cytowań ważnych prac zawiera również artykuł przeglądowy KUMARESAN, RADHAKRISHNAN i GANESAN [1994].



Rys. 5.3.1. Jednomiany uwzględniane w dwuwymiarowych funkcjach aproksymujących miary naprężeń lub odkształceń w elementach mieszanych.

powierzchniowej powinny spełniać zależność $m \leq n$ dla pierwszej składowej i odwrotną $m \geq n$ dla drugiej (w interpolacji jednolitej $m = n$), przy czym wskazane jest zachowanie symetrii analogicznych jednomianów względem odpowiednich współrzędnych. Dopuszcza się tu sprzężenie, przez wspólny współczynnik (parametr) $\beta_{p(e)}$ dla obu składowych, pewnych wyrazów wielomianów interpolujących składniki o tej samej interpretacji fizycznej.

W przypadku stosowania niejednolitej interpolacji wyróżniającej kierunek, pojawia się problem niezmienniczości interpolowanych składowych ze względu na kierunek⁵¹ i powiązaną z tym wrażliwość elementów na dystorsje siatki dyskretyzacyjnej⁵². W ramach aproksymacji standardowych zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych, stosuje się przeważnie interpolację bezpośrednio we współrzędnych naturalnych. Konieczność zachowania spójności tego typu podejścia wymaga posługiwania się składowymi względem układów współrzędnych, zmieniających się z elementu na element.

W przypadku interpolacji jednolitej, w ramach grupy składowych stosowane są z założenia te same jednomiany w funkcji interpolacyjnej pierwszej i drugiej składowej.

Dobór kształtu i rzędu wielomianów interpolacyjnych $\mathbb{P}(\xi)$, a stąd i liczby niezależnych parametrów dyskretnych $\beta_{(e)}$, jest kluczowym problemem decydującym o skuteczności opracowanych elementów skończonych. Charakterystyczny jest tu brak ustalonych reguł. Tylko w przypadku standardowych naprężeniowych

⁵¹Przy schemacie interpolacji jednolitej problem ten nie występuje. Jednak w tym przypadku znacznie zawęża się klasa dopuszczalnych funkcji aproksymacyjnych, a stąd wzrasta możliwość wystąpienia blokady lub postaci pasożytniczych.

⁵²Wskazane jest tu użycie odpowiednika tzw. triku Taylora (zob. TAYLOR, BERESFORD i WILSON [1976]), stosowanego w elementach niedostosowanych i w mieszanych elementach o wzbogaconych polach odkształceń (zob. np. SIMO i RIFAI [1990], SIMO, ARMERO i TAYLOR [1993], EBERLEIN i WRIGGERS [1999]) i polegającego na odpowiedniej transformacji odkształceń. W ramach rozważanej tu nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok, prowadzone są aktualnie prace nad 4-węzłowym elementem skończonym o wzbogaconym polu odkształceń (WITKOWSKI [2004]).

modeli hybrydowych, w zagadnieniach trójwymiarowych (w sensie propozycji PIAN [1978]) określono warunek konieczny (PIAN i CHEN [1983], PIAN i WU [1988]) dostatecznego rzędu wynikowej macierzy sztywności⁵³ w postaci

$$N_{\Delta\beta} \geq (N_{\Delta q} \text{ minus liczba niezależnych ruchów sztywnych}), \quad (5.3.51)$$

gdzie $N_{\Delta\beta}$ jest liczbą niezależnych parametrów naprężeniowych, a $N_{\Delta q}$ sumaryczną liczbą węzłowych przemieszczeniowych stopni swobody, która w (5.3.51) jest pomniejszona o liczbę stopni swobody ruchu sztywnego elementu. Ponieważ w procesie obliczania macierzy sztywności występuje konieczność jawnego odwrócenia macierzy podatności wymiaru $N_{\Delta\beta} \times N_{\Delta\beta}$, celem jest użycie najmniejszej z możliwych liczby parametrów naprężeniowych, jednak takiej, która jeszcze zapobiega powstawaniu mechanizmu form pasożytniczych⁵⁴.

Stosując się do wskazówek zamieszczanych w literaturze, opracowano własne 4- i 9-węzłowe elementy bazujące na obu wariantach sformułowania mieszanego, tj. naprężeniowym i odkształceniowym. W pierwszym przypadku z uogólnionymi siłami \mathbf{s} , w drugim przypadku z uogólnionymi miarami odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$, poza przemieszczeniami \mathbf{u} , jako zmiennymi niezależnymi.

5.3.10. Trójpolowa zasada wariacyjna typu Hu–Washizu

Ponieważ sformułowane wcześniej zasady wariacyjne można otrzymać z ogólniejszej zasady typu Hu–Washizu, celem jest pokazanie sposobu jej konstrukcji. Zasada Hu–Washizu formułowana jest przez funkcjonał, w którym trzy pola (\mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{s}) są traktowane jako niezależne, przy kinematycznej dopuszczalności pola $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_A$.

Funkcjonał trójpolowy $W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s})$ tworzy się z funkcjonału całkowitej energii potencjalnej (5.3.4) przez wprowadzenie więzów w postaci relacji kinematycznych $\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$ z wektorem uogólnionych naprężeń \mathbf{s} jako mnożnikiem Lagrange'a. Stąd powstaje funkcjonał

$$W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}) = \iint_{M \setminus \Gamma} (\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{s}^T(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})) \, da + V(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}_A. \quad (5.3.52)$$

Obliczając wariację funkcjonału (5.3.52), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta W[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}, \delta\mathbf{s}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} ((\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbf{s} + \delta\mathbf{s}^T(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}}\Phi - \mathbf{s})) \, da \\ &\quad + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \end{aligned} \quad (5.3.53)$$

dla każdego $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{U}_A$.

⁵³Klasyfikacją rzędu jest moment pojawienia się postaci pasożytniczych.

⁵⁴Warunek (5.3.51) nie jest wystarczający do eliminacji form pasożytniczych. Z drugiej strony, zbyt duża liczba parametrów naprężeniowych $N_{\Delta\beta}$ prowadzi do blokady.

Stosując standardową argumentację łatwo stwierdzić, że jeśli $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s})$ jest słabym rozwiązaniem mieszanego zagadnienia brzegowego mechaniki powłok, to z warunku stacjonarności

$$\delta W[\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{s}] = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}} \mathcal{U}_A, \quad (5.3.54)$$

wobec dowolności $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ i $\delta \mathbf{s}$, wynikają następujące zależności: równania równowagi, relacje kinematyczne, równania konstytutywne, statyczne warunki ciągłości i statyczne warunki brzegowe. Zależności te są równaniami Eulera–Lagrange’a funkcjonału (5.3.52). Odwrócenie kolejności argumentacji dowodzi słuszności twierdzenia odwrotnego.

Tak jak w poprzednich zasadach, wymaga się tutaj aby $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_A$ było polem kinematycznie dopuszczalnym. Na pola $\boldsymbol{\varepsilon}$ i \mathbf{s} z góry nie nakłada się ograniczeń poza tymi, które potrzebne są do istnienia całki (5.3.53). Sprowadza się to do wymogu, aby pola $\boldsymbol{\varepsilon}$ i \mathbf{s} w (5.3.52) były co najmniej odcinkowo ciągłe.

Posługując się ogólną metodologią wariacyjną, istnieje możliwość konstruowania innych funkcjonałów wariacyjnych i opartych na nich sformułowaniach elementów skończonych. Nie rozpatrywaną tutaj klasę stanowią np. dualne (dopełniające) funkcjonały i zasady wariacyjne. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do prac np. DE VEUBEKE [1972], GUO [1980], VALID [1992a,b, 1995].

5.4. Częściowo mieszane modele elementów skończonych

5.4.1. Uwagi o częściowo mieszanych elementach powłokowych

Podstawą sformułowania mieszanych powłokowych elementów skończonych z podrozdziału 5.3 są dwupolowe zasady wariacyjne z polem przemieszczeń $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$ oraz polami przekrojowych sił i momentów $\mathbf{s} = (\mathbf{N}, \mathbf{M})$ lub polami powłokowych miar odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{E}, \mathbf{K})$ jako zmiennymi niezależnymi. W obrębie elementu skończonego pola te są interpolowane niezależnie w terminach, odpowiednio, uogólnionych przemieszczeń węzłowych elementu $\mathbf{q}_{(e)}$ i parametrów dodatkowych $\boldsymbol{\beta}_{(e)}$.

Te dwupolowe zasady nie wymagają ciągłości dodatkowych pól zmiennych niezależnych \mathbf{s} lub $\boldsymbol{\varepsilon}$ na brzegach elementów. Dlatego określające je, dodatkowe niezależne dyskretne parametry $\boldsymbol{\beta}_{(e)}$ mogą być eliminowane na poziomie elementu. Eliminacja parametrów $\boldsymbol{\beta}_{(e)}$ wymaga każdorazowo odwrócenia macierzy (typu podatności) $\mathbb{K}_H^{(e)}$ wymiaru $N_{\Delta\boldsymbol{\beta}} \times N_{\Delta\boldsymbol{\beta}}$, gdzie $N_{\Delta\boldsymbol{\beta}}$ jest liczbą parametrów w wektorze $\boldsymbol{\beta}_{(e)}$.

Z obliczeniowego punktu widzenia, sensowne jest dążenie do zmniejszenia liczby parametrów $\boldsymbol{\beta}_{(e)}$ rzutuujących na koszt rozwiązania. Można to uzyskać, zakładając niezależność tylko części składowych tworzących \mathbf{s} lub $\boldsymbol{\varepsilon}$. Pociąga to za sobą konieczność modyfikacji zasady typu Hellingera–Reissnera.

W badaniach numerycznych, poza możliwością zmiany rzędu i sposobu interpolacji pól niewiadomych, istotne jest pozostawienie możliwości wyboru składowych, które będą traktowane jako niezależne. W zapisanych jawnie ogólnych wyrażeniach

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \{ N^{11} \ N^{22} \ N^{12} \ N^{21} \ Q^1 \ Q^2 \ M^{11} \ M^{22} \ M^{12} \ M^{21} \ M^1 \ M^2 \}^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \{ \varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{21} \ \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \kappa_{11} \ \kappa_{22} \ \kappa_{12} \ \kappa_{21} \ \kappa_1 \ \kappa_2 \}^T, \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

nie ma żadnego ograniczenia formalnego, które z tych składowych mają być traktowane jako zmienne niezależne. Zatem dokonując rozdziału na parametry niezależne i zależne, koniecznym jest więc odpowiednie przegrupowanie wektorów uogólnionych naprężeń i uogólnionych odkształceń (5.4.1) oraz macierzy konstytutywnej tak, aby zachowane było sprzężenie energetyczne między tymi składowymi⁵⁵. Nie tracąc nic z ogólności sformułowania, dla wygody i jasności opisu przyjmujemy dalej, że linia rozdziału na dodatkowe zmienne niezależne i zależne przebiega między wielkościami związanymi ze stanem membranowym $\mathbf{n} = (\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2)$, $\mathbf{e} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$ i stanem zgięciowym $\mathbf{m} = (\mathbf{m}^1, \mathbf{m}^2)$, $\mathbf{k} = (\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2)$.

5.4.2. Zmodyfikowana dwupolowa naprężeniowa zasada wariacyjna

W ramach rozważanej teorii powłok, przestrzeń uogólnionych naprężeń \mathbf{s} może być przedstawiona jako suma prosta przestrzeni przekrojowych sił \mathbf{n} i przestrzeni przekrojowych momentów \mathbf{m} .

Analogicznie, na zasadzie sprzężenia energetycznego, przestrzeń uogólnionych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ możemy przedstawić jako sumę prostą przestrzeni odkształceń membranowych \mathbf{e} i przestrzeni odkształceń zgięciowych \mathbf{k} . W postaci macierzowej zapisujemy to następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \end{Bmatrix}, & \mathbf{n} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^1 \\ \mathbf{n}^2 \end{Bmatrix}, & \mathbf{m} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{m}^1 \\ \mathbf{m}^2 \end{Bmatrix}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix}, & \mathbf{e} &= \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{Bmatrix}, & \mathbf{k} &= \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Odpowiednio do przyjętego podziału wektorów (5.4.1) na wektory (5.4.2), również równania konstytutywne zapisujemy w rozdzielonej postaci

$$\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{e}, \mathbf{k}) = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \\ \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial_{\mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \\ \partial_{\mathbf{k}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \end{Bmatrix}. \quad (5.4.3)$$

Zakładamy, że pierwsza z zestawionych w (5.4.3) relacji, tj. $\mathbf{n} = \partial_{\mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k})$, może być odwrócona częściowo względem parametrów \mathbf{n} i \mathbf{e} do postaci

$$\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{n}, \mathbf{k}). \quad (5.4.4)$$

⁵⁵Takie podejście przedstawiono w pracy CHRÓŚCIELEWSKI [1996] i ujęto w programach autorskich tej książki.

Na podstawie (5.4.4), stosując transformację Legendre'a, definiujemy mieszaną funkcję energii sprężystej

$$\begin{aligned}\Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) &= \mathbf{n}^T \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) - \Phi(\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{n}, \mathbf{k}), \mathbf{k}) \\ &= \mathbf{N} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{N}, \mathbf{K}) - \Phi(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{N}, \mathbf{K}), \mathbf{K}).\end{aligned}\quad (5.4.5)$$

Pierwsza pochodna (5.4.5),

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{n}^T (\mathbf{e} - \partial_{\mathbf{n}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k})) - \delta \mathbf{k}^T (\partial_{\mathbf{k}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) + \partial_{\mathbf{k}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k})) \\ + \delta \mathbf{e}^T (\mathbf{n} - \partial_{\mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k})) = 0,\end{aligned}\quad (5.4.6)$$

wobec dowolności $\delta \mathbf{n}$ i $\delta \mathbf{k}$, prowadzi do następujących równań konstytutywnych:

$$\mathbf{e} = \partial_{\mathbf{n}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{m} \equiv \partial_{\mathbf{k}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) = -\partial_{\mathbf{k}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}).\quad (5.4.7)$$

Za pomocą (5.4.5) i zawężonej do części membranowej relacji kinematycznej $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u})$, definiujemy nowy funkcjonal z \mathbf{u} i \mathbf{n} jako zmiennymi niezależnymi

$$\begin{aligned}H(\mathbf{u}, \mathbf{n}) &= \iint_{M \setminus \Gamma} \left(\mathbf{n}^T \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \Sigma(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) \right) da + V(\mathbf{u}) \\ &= \iint_{M \setminus \Gamma} \left(\mathbf{N} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) - \Sigma(\mathbf{N}, \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u})) \right) da + V(\mathbf{u}).\end{aligned}\quad (5.4.8)$$

Pierwsza pochodna funkcjonału (5.4.8) dana jest przez

$$\delta H[\mathbf{u}, \mathbf{n}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{n}] = \iint_{M \setminus \Gamma} \left((\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbf{s} + \delta \mathbf{n}^T (\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \partial_{\mathbf{n}} \Sigma) \right) da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}],\quad (5.4.9)$$

gdzie

$$\begin{aligned}(\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbf{s} &= \mathbf{N} \cdot \delta \tilde{\mathbf{E}}[\mathbf{u}; \mathbf{w}] - \partial_{\mathbf{K}} \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{K}) \cdot \delta \tilde{\mathbf{K}}[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \\ &= \mathbf{N} \cdot \delta \tilde{\mathbf{E}}[\mathbf{u}; \mathbf{w}] + \mathbf{M} \cdot \delta \tilde{\mathbf{K}}[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \\ \delta \mathbf{n}^T (\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \partial_{\mathbf{n}} \Sigma) &= \delta \mathbf{N} \cdot (\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) - \partial_{\mathbf{N}} \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{K})).\end{aligned}\quad (5.4.10)$$

W rezultacie otrzymujemy następującą zasadę wariacyjną:

$$\delta H[\mathbf{u}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{n}] = 0,\quad (5.4.11)$$

słuszną dla kinematycznie dopuszczalnych przemieszczeń wirtualnych \mathbf{w} i dowolnego $\delta \mathbf{n}$.

5.4.3. Równania zlinearyzowane, wariant naprężeniowy

Równanie zlinearyzowane zasady (5.4.11) przyjmuje postać

$$\delta^2 H[\mathbf{u}, \mathbf{n}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{n}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \mathbf{n}] + \delta H[\mathbf{u}, \mathbf{n}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{n}] = 0, \quad (5.4.12)$$

gdzie pierwsza pochodna jest dana przez (5.4.9).

Druga pochodna funkcji energii sprężystej (5.4.5) (lub pierwsza (5.4.6)) dostarcza warunku

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{n}^T (\Delta \mathbf{e} - \partial_{\mathbf{nn}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \Delta \mathbf{n} - \partial_{\mathbf{nk}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \Delta \mathbf{k}) \\ + \delta \mathbf{e}^T (\Delta \mathbf{n} - \partial_{\mathbf{ee}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \Delta \mathbf{e} - \partial_{\mathbf{ek}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \Delta \mathbf{k}) \\ - \delta \mathbf{k}^T (\partial_{\mathbf{ke}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \Delta \mathbf{e} + \partial_{\mathbf{kk}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \Delta \mathbf{k}) \\ + \partial_{\mathbf{kn}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \Delta \mathbf{n} + \partial_{\mathbf{kk}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \Delta \mathbf{k} = 0. \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Wobec dowolności wariacji i po wyeliminowaniu $\Delta \mathbf{e}$, z (5.4.13) wynikają relacje między macierzami konstytutywnymi

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{nn}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) &= (\partial_{\mathbf{ee}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}))^{-1}, \\ \partial_{\mathbf{nk}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) &= (\partial_{\mathbf{kn}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}))^T = -(\partial_{\mathbf{ee}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}))^{-1} \partial_{\mathbf{ek}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}), \\ \partial_{\mathbf{kk}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) &= -\partial_{\mathbf{kk}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) - \partial_{\mathbf{ke}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) (\partial_{\mathbf{ee}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}))^{-1} \partial_{\mathbf{ek}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

W postaci rozpisanej macierz konstytutywna przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) &= \begin{bmatrix} \partial_{\mathbf{nn}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) & \partial_{\mathbf{nk}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \\ \partial_{\mathbf{kn}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) & \partial_{\mathbf{kk}} \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{\mathbf{nn}} & \mathbb{H}_{\mathbf{nk}} \\ \mathbb{H}_{\mathbf{kn}} & \mathbb{H}_{\mathbf{kk}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{\mathbf{ee}}^{-1} & -\mathbb{C}_{\mathbf{ee}}^{-1} \mathbb{C}_{\mathbf{ek}} \\ -\mathbb{C}_{\mathbf{ke}} \mathbb{C}_{\mathbf{ee}}^{-1} & -\mathbb{C}_{\mathbf{ke}} \mathbb{C}_{\mathbf{ee}}^{-1} \mathbb{C}_{\mathbf{ek}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

gdzie rozdzielanie macierzy sprężystości

$$\mathbb{C}(\mathbf{e}, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \partial_{\mathbf{ee}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) & \partial_{\mathbf{ek}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \\ \partial_{\mathbf{ke}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) & \partial_{\mathbf{kk}} \Phi(\mathbf{e}, \mathbf{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{\mathbf{ee}} & \mathbb{C}_{\mathbf{ek}} \\ \mathbb{C}_{\mathbf{ke}} & \mathbb{C}_{\mathbf{kk}} \end{bmatrix} \quad (5.4.16)$$

jest konsekwencją rozdzielania (5.4.2). Z powyższych rozważań wynika, że wyznacznik $\det[\partial_{\mathbf{ee}} \Phi(\mathbf{e}(\mathbf{n}, \mathbf{k}), \mathbf{k})] = \det \mathbb{C}_{\mathbf{ee}} \neq 0$ jest warunkiem koniecznym lokalnej odwracalności do postaci (5.4.15) macierzy konstytutywnych wchodzących do \mathbb{C} .

Do obliczenia drugiej pochodnej funkcjonału (5.4.8) wystarczy obliczyć pierwszą pochodną (5.4.9). Postępowanie jest takie samo, jak w przypadku sformułowania przemieszczeniowego i prowadzi do zależności

$$\begin{aligned}
& \delta^2 H[\mathbf{u}, n; \mathbf{w}, \delta n, \Delta \mathbf{w}, \Delta n] \\
&= \iint_{M \setminus \Gamma} \left((\mathbb{D} \mathbf{w})^T \mathbb{G} \mathbb{D} \Delta \mathbf{w} + (\mathbb{B}_e \mathbf{w})^T \Delta n \right. \\
&\quad + (\mathbb{B}_k \mathbf{w})^T (-\partial_{k_n} \Sigma \Delta n - \partial_{k_k} \Sigma \mathbb{B}_k \Delta \mathbf{w}) \\
&\quad \left. + \delta n^T (\mathbb{B}_e \Delta \mathbf{w} - \partial_{n_n} \Sigma \Delta n - \partial_{n_k} \Sigma \mathbb{B}_k \Delta \mathbf{w}) \right) da \\
&\quad + \delta^2 V[\mathbf{u}; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}] \\
&= \iint_{M \setminus \Gamma} \left(\mathbf{w}^T (\mathbb{D}^T \mathbb{G} \mathbb{D} - \mathbb{B}_k^T \mathbb{H}_{kk} \mathbb{B}_k) \Delta \mathbf{w} + \mathbf{w}^T (\mathbb{B}_e^T - \mathbb{B}_k^T \mathbb{H}_{kn}) \Delta n \right. \\
&\quad \left. - \delta n^T \mathbb{H}_{nn} \Delta n + \delta n^T (\mathbb{B}_e - \mathbb{H}_{nk} \mathbb{B}_k) \Delta \mathbf{w} \right) da \\
&\quad + \delta^2 V[\mathbf{u}; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}]. \tag{5.4.17}
\end{aligned}$$

Operatory (macierze) \mathbb{B} , \mathbb{D} i \mathbb{G} mają tu postać identyczną jak w sformułowaniu przemieszczeniowym, zaś \mathbb{B}_e i \mathbb{B}_k są konsekwencją rozdzielania \mathbb{B} zgodnego z zapisem (5.4.2)

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{e} \\ \delta \mathbf{k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_e(\mathbf{u}) \\ \mathbb{B}_k(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \mathbf{w} = \mathbb{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w}. \tag{5.4.18}$$

5.4.4. Aproksymacja skończenie elementowa, wariant naprężeniowy

Zgodnie ze standardową procedurą budowy elementów skończonych i analogicznie do wcześniejszych rozważań, zlinearyzowany problem wariacyjny (5.4.12) przyjmuje formę podlegającą sumowaniu po elementach skończonych

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left(\delta^2 H^{(e)}[\mathbf{u}, n; \mathbf{w}, \delta n, \Delta \mathbf{w}, \Delta n] + \delta H^{(e)}[\mathbf{u}, n; \mathbf{w}, \delta n] \right) = 0. \tag{5.4.19}$$

Uogólniony wektor naprężeń n składa się z sekwencji sześciu składowych wektorów przekrojowych sił n^β . Tak jak w elementach mieszanych, wektor n i jego wariacja δn są interpolowane w obrębie dowolnego elementu $\Pi_{(e)}$ w terminach elementowych parametrów naprężeniowych $\boldsymbol{\beta}_{(e)}$ zgodnie z regułą

$$n(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad \delta n(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}) \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}. \tag{5.4.20}$$

Podstawiając (5.4.20)₂ i standardową relację dla przyrostu przemieszczeń $\Delta \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{L}(\boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{q}_{(e)}$ (por. p. 5.2.8) do zlinearyzowanej postaci funkcjonału (5.4.17), dla pojedynczego elementu otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\delta^2 H^{(e)} &= \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \left(\mathbb{K}_G^{(e)} + \mathbb{K}_{m1}^{(e)} \right) \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \right)^T \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} \\
&\quad + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbb{K}_m^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbb{K}_H^{(e)} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \delta^2 V^{(e)}, \tag{5.4.21}
\end{aligned}$$

gdzie macierze $\mathbb{K}_{m1}^{(e)}$, $\mathbb{K}_m^{(e)}$ i $\mathbb{K}_H^{(e)}$ zdefiniowane są teraz przez

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_{m1}^{(e)} &= - \iint_{\Pi^{(e)}} \mathbb{L}^T \mathbb{B}_k^T \mathbb{H}_{kk} \mathbb{B}_k \mathbb{L} \, da, \\ \mathbb{K}_m^{(e)} &= \iint_{\Pi^{(e)}} \mathbb{P}^T (\mathbb{B}_e - \mathbb{H}_{nk} \mathbb{B}_k) \mathbb{L} \, da, \\ \mathbb{K}_H^{(e)} &= \iint_{\Pi^{(e)}} \mathbb{P}^T \mathbb{H}_{nn} \mathbb{P} \, da.\end{aligned}\tag{5.4.22}$$

W ten sam sposób, w wyniku aproksymacji skończenie elementowej (5.4.9) otrzymujemy

$$\delta H^{(e)} = \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{r}_d^{(e)} + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{r}_m^{(e)} + \delta V^{(e)},\tag{5.4.23}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_d^{(e)} &= \iint_{\Pi^{(e)}} (\mathbb{B}\mathbb{L})^T \mathbf{s} \, da, \\ \mathbf{r}_m^{(e)} &= \iint_{\Pi^{(e)}} \mathbb{P}^T ((\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \partial_n \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{k}(\mathbf{u}))) \, da.\end{aligned}\tag{5.4.24}$$

Uwzględniając pozostające bez zmian w stosunku do poprzednich sformułowań składniki, w tym część od obciążenia zewnętrznego, zlinearyzowane równanie dla pojedynczego elementu przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{q}_{(e)}^T \left((\mathbb{K}_G^{(e)} - \mathbb{K}_L^{(e)} - \mathbb{K}_{m1}^{(e)}) \Delta \mathbf{q}_{(e)} + (\mathbb{K}_m^{(e)})^T \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \mathbf{r}_d^{(e)} - \mathbf{p}^{(e)} \right) \\ + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \mathbb{K}_H^{(e)} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \mathbf{r}_m^{(e)} \right) = 0.\end{aligned}\tag{5.4.25}$$

Wobec pełnej analogii ze sformułowaniem mieszanym, na tej samej drodze dla typowego elementu skończonego otrzymamy klasyczną postać równania zlinearyzowanego

$$\mathbb{K}_T^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}^{(e)},\tag{5.4.26}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_T^{(e)} &= \mathbb{K}_G^{(e)} - \mathbb{K}_L^{(e)} - \mathbb{K}_{m1}^{(e)} + (\mathbb{K}_m^{(e)})^T (\mathbb{K}_H^{(e)})^{-1} \mathbb{K}_m^{(e)}, \\ \mathbf{r}^{(e)} &= \mathbf{r}_d^{(e)} + (\mathbb{K}_m^{(e)})^T (\mathbb{K}_H^{(e)})^{-1} \mathbf{r}_m^{(e)}.\end{aligned}\tag{5.4.27}$$

Tak jak w sformułowaniu mieszanym, tak i tutaj wyprowadzenie zależności elementowych wymaga odwrócenia macierzy podatności $\mathbb{K}_H^{(e)}$. Jednak teraz, przy przyjętym podziale (5.4.2) na zmienne zależne i niezależne, wymiar macierzy $\mathbb{K}_H^{(e)}$ jest dwukrotnie mniejszy niż w sformułowaniu mieszanym. Redukuje to znacznie czas obliczeń zależności elementowych. Podobnie jak w sformułowaniu mieszanym, dodatkowe parametry naprężeniowe $\beta_{(e)}$ są tu również eliminowane na poziomie elementu. Dlatego wynikowe elementy powłokowe przedstawionego sformułowania zmodyfikowanego mają takie same węzłowe stopnie swobody, jak i wcześniej sformułowane elementy przemieszczeniowe i mieszane.

5.4.5. Zmodyfikowana dwupolowa odkształceniowa zasada wariacyjna

Tak jak w omawianych wcześniej zasadach i elementach mieszanych, tak i w przypadku rozważanej powyżej zasady zmodyfikowanej odwracanie macierzy sprężystości $\mathbb{C}_{ee} = \partial_{ee} \Phi(\mathbf{e}(\mathfrak{n}, \mathfrak{k}), \mathfrak{k})$ w (5.4.15) i (5.4.16), przy złym jej uwarunkowaniu, może prowadzić do niestabilności numerycznej. Zatem sensownym jest sformułowanie, nie wymagające tego typu zabiegu, zmodyfikowanej zasady dwupolowej z polami przemieszczeń \mathbf{u} i polem odkształceń membranowych \mathbf{e} (zamiast \mathfrak{n}) jako zmiennymi niezależnymi.

Używając tych samych argumentów co w wariacie naprężeniowym, dekomponujemy przestrzeń uogólnionych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ na sumę prostą przestrzeni odkształceń membranowych \mathbf{e} i zgięciowych \mathfrak{k} . Następnie na zasadzie sprzężenia energetycznego dekomponujemy również przestrzeń uogólnionych naprężeń $\boldsymbol{\varepsilon}$ na sumę prostą przestrzeni przekrojowych sił \mathfrak{n} i momentów \mathfrak{m} . Tego typu dekompozycję ujmuje zapis macierzowy (5.4.2).

Ponieważ chcemy teraz uniknąć odwracania macierzy sprężystości, funkcję energii sprężystej $\Phi = \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathfrak{k}}(\mathbf{u}))$ wyrażamy przez pole \mathbf{e} jako zmienną niezależną. Koncepcja tego sformułowania bazuje na równaniu konstytutywnym $\mathfrak{n} = \partial_{\mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathfrak{k}}(\mathbf{u}))$, za pomocą którego eliminujemy \mathfrak{n} z równań pola i statycznych warunków brzegowych. Następnie interpretując $\partial_{\mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathfrak{k}}(\mathbf{u}))$ jako mnożnik Lagrange'a, wymuszamy spełnienie zawiązków do stanu membranowego relacji kinematycznych, przez wstawienie zależności $\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e} = \mathbf{0}$ do funkcjonału całkowitej energii potencjalnej. Wynikiem tych zabiegów jest nowy funkcjonał z \mathbf{u} i \mathbf{e} jako polami niezależnymi

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{e}) = \iint_{M \setminus \Gamma} \left(\Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathfrak{k}}(\mathbf{u})) + \left(\partial_{\mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathfrak{k}}(\mathbf{u})) \right)^T (\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) \right) da + V(\mathbf{u}). \quad (5.4.28)$$

Tutaj $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_A$ jest polem kinematycznie dopuszczalnym, zaś niezależne pole odkształceń membranowych \mathbf{e} winno być co najmniej odcinkowo ciągłe.

Pierwsza pochodna funkcjonału (5.4.28), po uwzględnieniu relacji wynikających z (5.4.18), prowadzi do

$$\begin{aligned} \delta H[\mathbf{u}, \mathbf{e}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{e}] &= \iint_{M \setminus \Gamma} \left((\mathbb{B}\mathbf{w})^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) \right. \\ &\quad \left. + \delta \mathbf{e}^T \partial_{\mathbf{e}\mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) (\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbb{B}_{\mathbf{k}}\mathbf{w})^T \partial_{\mathbf{k}\mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) (\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) \right) da \\ &\quad + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \\ &= \iint_{M \setminus \Gamma} \left(\mathbf{w}^T \mathbb{B}^T \mathbf{s} + \delta \mathbf{e}^T \mathbb{C}_{\mathbf{e}\mathbf{e}} (\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{w}^T \mathbb{B}_{\mathbf{k}}^T \mathbb{C}_{\mathbf{k}\mathbf{e}} (\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) \right) da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \end{aligned} \quad (5.4.29)$$

gdzie

$$\begin{aligned} (\mathbb{B}\mathbf{w})^T \mathbf{s} &= \mathbf{N} \cdot \delta \tilde{\mathbf{E}}[\mathbf{u}; \mathbf{w}] + \mathbf{M} \cdot \delta \tilde{\mathbf{K}}[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \\ \delta \mathbf{e}^T \mathbb{C}_{\mathbf{e}\mathbf{e}} (\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) &= \delta \mathbf{E} \cdot \partial_{\mathbf{E}\mathbf{E}} \Phi(\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u})) (\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}), \\ \mathbf{w}^T \mathbb{B}_{\mathbf{k}}^T \mathbb{C}_{\mathbf{k}\mathbf{e}} (\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) &= \delta \tilde{\mathbf{K}}[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \cdot \partial_{\mathbf{K}\mathbf{E}} \Phi(\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u})) (\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (5.4.30)$$

Ponieważ \mathbf{u} i \mathbf{e} są teraz polami niezależnymi, warunek stacjonarności funkcjonału (5.4.28)

$$\delta H[\mathbf{u}, \mathbf{e}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{e}] = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{U}, \quad (5.4.31)$$

wobec dowolności $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, wymaga spełnienia równań Eulera–Lagrange’a, którymi są: równania równowagi, statyczne warunki ciągłości, statyczne warunki brzegowe i dwie relacje dodatkowe, które muszą być spełnione jednocześnie

$$\mathbb{C}_{\mathbf{e}\mathbf{e}} (\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad \mathbb{C}_{\mathbf{k}\mathbf{e}} (\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) = \mathbf{0}. \quad (5.4.32)$$

W przypadku, gdy obowiązuje zawężona zależność kinematyczna $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u})$, relacje (5.4.32) są spełnione z założenia, niezależnie od występujących tam funkcji konstytutywnych $\mathbb{C}_{\mathbf{e}\mathbf{e}} = \partial_{\mathbf{e}\mathbf{e}} \Phi$ i $\mathbb{C}_{\mathbf{k}\mathbf{e}} = \partial_{\mathbf{k}\mathbf{e}} \Phi$. Zatem, jeśli zależność $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u})$ jest spełniona i $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_A$ jest słabym rozwiązaniem mieszanego problemu brzegowego mechaniki powłok, wówczas obowiązuje (5.4.31).

5.4.6. Równania zlinearyzowane, wariant odkształceniowy

Analogicznie do rozważanych wcześniej wariantów zasad dwupolowych, równanie zlinearyzowane problemu (5.4.28) ma postać

$$\delta^2 H[\mathbf{u}, \mathbf{e}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{e}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \mathbf{e}] + \delta H[\mathbf{u}, \mathbf{e}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{e}] = 0, \quad (5.4.33)$$

gdzie pierwsza pochodna jest dana przez (5.4.29).

Do obliczenia drugiej pochodnej funkcjonału (5.4.28) wystarczy obliczyć pierwszą pochodną (5.4.29). Postępowanie jest takie samo jak w przypadku poprzednich sformułowań i prowadzi do zależności

$$\begin{aligned}
& \delta^2 H[u, \mathbf{e}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{e}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \mathbf{e}] = \\
& = \iint_{M \setminus \Gamma} \left((\mathbb{D} \mathbf{w})^T \mathbb{G} \mathbb{D} \Delta \mathbf{w} + (\mathbb{B}_{\mathbf{e} \mathbf{w}})^T \partial_{\mathbf{e} \mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) \Delta \mathbf{e} \right. \\
& \quad + (\mathbb{B}_{\mathbf{k} \mathbf{w}})^T \partial_{\mathbf{k} \mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) \Delta \mathbf{e} \\
& \quad + (\mathbb{B}_{\mathbf{e} \mathbf{w}})^T \partial_{\mathbf{e} \mathbf{k}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) \mathbb{B}_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{w} \\
& \quad + (\mathbb{B}_{\mathbf{k} \mathbf{w}})^T \partial_{\mathbf{k} \mathbf{k}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) \mathbb{B}_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{w} \\
& \quad + \delta \mathbf{e}^T \partial_{\mathbf{e} \mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) (\mathbb{B}_{\mathbf{e}} \Delta \mathbf{w} - \Delta \mathbf{e}) \\
& \quad + \delta \mathbf{e}^T [\partial_{\mathbf{e} \mathbf{e} \mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})] \Delta \mathbf{e} \\
& \quad + \delta \mathbf{e}^T [\partial_{\mathbf{e} \mathbf{k} \mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})] \mathbb{B}_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{w} \\
& \quad + (\mathbb{B}_{\mathbf{k} \mathbf{w}})^T [\partial_{\mathbf{k} \mathbf{e} \mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e})] \Delta \mathbf{e} \\
& \quad + (\mathbb{B}_{\mathbf{k} \mathbf{w}})^T [\partial_{\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e})] \mathbb{B}_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{w} \left. \right) da \\
& \quad + \delta^2 V[u; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}]. \tag{5.4.34}
\end{aligned}$$

Wykorzystując opis (5.4.16) i wprowadzając dodatkowe zwarte oznaczenie

$$\boldsymbol{\mathbb{E}}_{ij} = \partial_{i j \mathbf{e}} \Phi(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}), \quad i, j = \mathbf{e}, \mathbf{k}, \tag{5.4.35}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \delta^2 H[u, \mathbf{e}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{e}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \mathbf{e}] = \\
& = \iint_{M \setminus \Gamma} \left(\mathbf{w}^T \mathbb{D}^T \mathbb{G} \mathbb{D} \Delta \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbb{B}_{\mathbf{e}}^T \mathbb{C}_{\mathbf{e} \mathbf{e}} \Delta \mathbf{e} + \mathbf{w}^T \mathbb{B}_{\mathbf{k}}^T \mathbb{C}_{\mathbf{k} \mathbf{e}} \Delta \mathbf{e} \right. \\
& \quad + \mathbf{w}^T \mathbb{B}_{\mathbf{e}}^T \mathbb{C}_{\mathbf{e} \mathbf{k}} \mathbb{B}_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbb{B}_{\mathbf{k}}^T \mathbb{C}_{\mathbf{k} \mathbf{k}} \mathbb{B}_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{w} + \delta \mathbf{e}^T \mathbb{C}_{\mathbf{e} \mathbf{e}} \mathbb{B}_{\mathbf{e}} \Delta \mathbf{w} \\
& \quad - \delta \mathbf{e}^T \mathbb{C}_{\mathbf{e} \mathbf{e}} \Delta \mathbf{e} + \mathbf{w}^T \mathbb{B}_{\mathbf{k}}^T \mathbb{C}_{\mathbf{k} \mathbf{e}} \mathbb{B}_{\mathbf{e}} \Delta \mathbf{w} - \mathbf{w}^T \mathbb{B}_{\mathbf{k}}^T \mathbb{C}_{\mathbf{k} \mathbf{e}} \Delta \mathbf{e} \\
& \quad + \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\mathbb{E}}_{\mathbf{e} \mathbf{e}} \Delta \mathbf{e} + \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\mathbb{E}}_{\mathbf{e} \mathbf{k}} \mathbb{B}_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbb{B}_{\mathbf{k}}^T \boldsymbol{\mathbb{E}}_{\mathbf{k} \mathbf{e}} \Delta \mathbf{e} \\
& \quad \left. + \mathbf{w}^T \mathbb{B}_{\mathbf{k}}^T \boldsymbol{\mathbb{E}}_{\mathbf{k} \mathbf{k}} \mathbb{B}_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{w} \right) da + \delta^2 V[u; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}] \\
& = \iint_{M \setminus \Gamma} \left(\mathbf{w}^T \{ [\mathbb{D}^T \mathbb{G} \mathbb{D} + \mathbb{B}_{\mathbf{e}}^T \mathbb{C}_{\mathbf{e} \mathbf{k}} \mathbb{B}_{\mathbf{k}} + \mathbb{B}_{\mathbf{k}}^T \mathbb{C}_{\mathbf{k} \mathbf{e}} \mathbb{B}_{\mathbf{e}} \right. \\
& \quad + \mathbb{B}_{\mathbf{k}}^T (\mathbb{C}_{\mathbf{k} \mathbf{k}} + \boldsymbol{\mathbb{E}}_{\mathbf{k} \mathbf{k}}) \mathbb{B}_{\mathbf{k}}] \Delta \mathbf{w} + [\mathbb{B}_{\mathbf{e}}^T \mathbb{C}_{\mathbf{e} \mathbf{e}} + \boldsymbol{\mathbb{E}}_{\mathbf{k} \mathbf{e}}] \Delta \mathbf{e} \left. \right\} \\
& \quad + \delta \mathbf{e}^T \{ [\mathbb{C}_{\mathbf{e} \mathbf{e}} \mathbb{B}_{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\mathbb{E}}_{\mathbf{e} \mathbf{k}} \mathbb{B}_{\mathbf{k}}] \Delta \mathbf{w} - [\mathbb{C}_{\mathbf{e} \mathbf{e}} - \boldsymbol{\mathbb{E}}_{\mathbf{e} \mathbf{e}}] \Delta \mathbf{e} \left. \right\} da \\
& \quad + \delta^2 V[u; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}]. \tag{5.4.36}
\end{aligned}$$

Operatory (macierze) \mathbb{B} , \mathbb{D} i \mathbb{G} mają identyczną postać jak w sformułowaniu przemieszczeniowym, zaś rozdzielenie \mathbb{B} na części $\mathbb{B}_{\mathbf{e}}$ i $\mathbb{B}_{\mathbf{k}}$ podano w (5.4.18).

5.4.7. Aproxymacja skończenie elementowa, wariant odkształceniowy

Także w tym przypadku, zgodnie ze standardową procedurą formułowania elementów skończonych, zlinearyzowany problem wariacyjny (5.4.33) przyjmuje formę podlegającą sumowaniu po elementach skończonych

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left(\delta^2 H^{(e)}[\mathbf{u}, \mathbf{e}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{e}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \mathbf{e}] + \delta H^{(e)}[\mathbf{u}, \mathbf{e}; \mathbf{w}, \delta \mathbf{e}] \right) = 0. \quad (5.4.37)$$

Zmienne kinematyczne będące funkcjami przemieszczeń są interpolowane w obrębie dowolnego elementu $\Pi_{(e)}$, tak jak w elemencie przemieszczeniowym. Wektor odkształceń \mathbf{e} składa się teraz z sekwencji sześciu składowych wektorów odkształceń membranowych $\boldsymbol{\varepsilon}_\beta$. Wektor \mathbf{e} i jego wariacja $\delta \mathbf{e}$ interpolowane są w obrębie dowolnego elementu $\Pi_{(e)}$, w terminach elementowych parametrów odkształceniowych $\boldsymbol{\beta}_{(e)}$, zgodnie z regułą

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad \delta \mathbf{e}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}) \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}. \quad (5.4.38)$$

Podstawiając (5.4.38)₂ i standardową relację dla przyrostu przemieszczeń $\Delta \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{L}(\boldsymbol{\xi}) \Delta \mathbf{q}_{(e)}$ do zlinearyzowanej postaci funkcjonału (5.4.36), dla pojedynczego elementu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta^2 H^{(e)} &= \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \left(\mathbb{K}_G^{(e)} + \mathbb{K}_{m1}^{(e)} \right) \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \left(\mathbb{K}_m^{(e)} \right)^T \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} \\ &\quad + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbb{K}_m^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbb{K}_H^{(e)} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \delta^2 V^{(e)}, \end{aligned} \quad (5.4.39)$$

gdzie teraz macierze $\mathbb{K}_{m1}^{(e)}$, $\mathbb{K}_m^{(e)}$ i $\mathbb{K}_H^{(e)}$ zdefiniowane są przez

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{m1}^{(e)} &= \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbb{L}^T \left(\mathbb{B}_e^T \mathbb{C}_{ek} \mathbb{B}_k + \mathbb{B}_k^T \mathbb{C}_{ke} \mathbb{B}_e + \mathbb{B}_k^T \mathbb{C}_{kk} \mathbb{B}_k + \mathbb{B}_k^T \mathbb{C}_{kk} \mathbb{B}_k \right) \mathbb{L} \, da, \\ \mathbb{K}_m^{(e)} &= \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbb{P}^T \left(\mathbb{C}_{ee} \mathbb{B}_e + \mathbb{C}_{ek} \mathbb{B}_k \right) \mathbb{L} \, da, \\ \mathbb{K}_H^{(e)} &= \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbb{P}^T \left(\mathbb{C}_{ee} - \mathbb{C}_{ee} \right) \mathbb{P} \, da. \end{aligned} \quad (5.4.40)$$

W ten sam sposób, w wyniku aproxymacji skończenie elementowej (5.4.38) otrzymujemy analog zależności (5.4.23)

$$\delta H^{(e)} = \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{r}_d^{(e)} + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{r}_m^{(e)} + \delta V^{(e)}, \quad (5.4.41)$$

gdzie w tym przypadku

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_d^{(e)} &= \iint_{\Pi(e)} [(\mathbf{BL})^T \mathbf{s} + (\mathbf{B}_k \mathbf{L})^T \mathbf{C}_{ke}(\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e})] da, \\ \mathbf{r}_m^{(e)} &= \iint_{\Pi(e)} \mathbf{P}^T \mathbf{C}_{ee}(\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}) da. \end{aligned} \quad (5.4.42)$$

Zgodność równań (5.4.21) i (5.4.39) oraz (5.4.23) i (5.4.41) wskazuje, że rozważania ujęte zależnościami (5.4.19)–(5.4.27) oraz wszystkie poczynione w ich kontekście uwagi obowiązują także w rozważanym tutaj przypadku z tą różnicą, że dotyczą one teraz niezależnego pola odkształceń membranowych \mathbf{e} , zamiast pola przekrojowych sił membranowych \mathbf{n} .

Podobieństwo tych zależności wskazuje, że oba warianty częściowo mieszane — naprężeniowy i odkształceniowy — podobnie jak w przypadku mieszanych elementów skończonych, mogą być bez specjalnych kłopotów ujęte w ramach tego samego podprogramu. Podobieństwo algorytmów obu wariantów ma miejsce szczególnie w przypadku ograniczenia się do analizy powłok liniowo sprężystych. Wówczas bowiem, wobec $\mathbf{C} = \text{const} \Rightarrow \partial_{\mathbf{e}} \mathbf{C} = \mathbf{O}$, z zależności (5.4.40) wypadają charakterystyczne tylko dla wariantu odkształceniowego składniki $\mathbf{C}\mathbf{E}_{ij} = \partial_{ij\mathbf{e}} \Phi[\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}]$, $i, j = \mathbf{e}, k$.

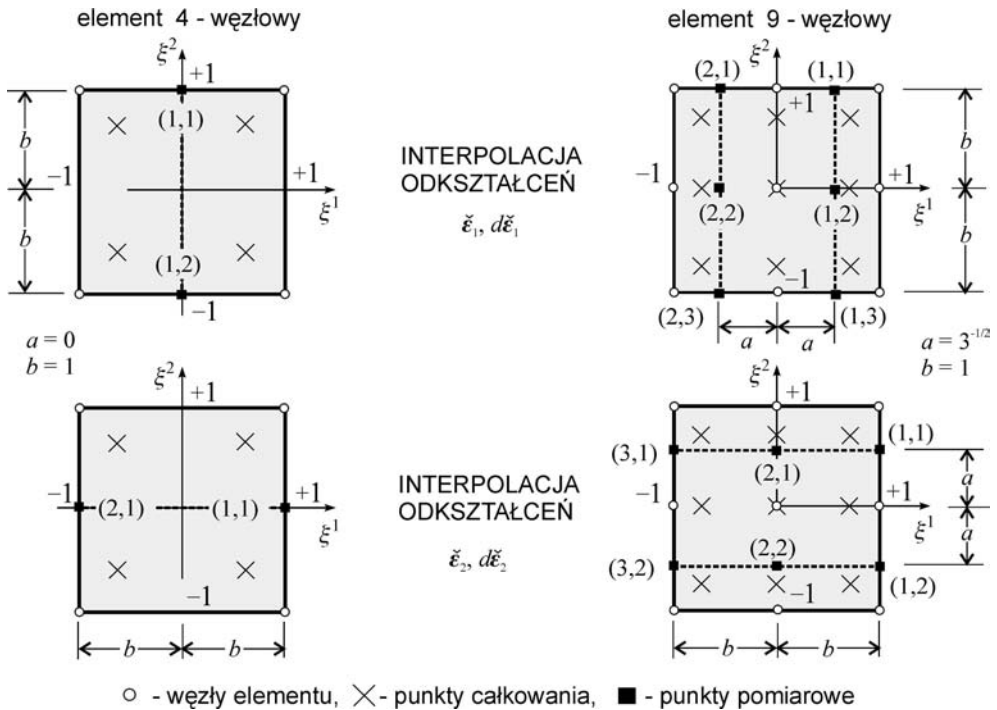
Sformułowanie częściowo mieszanych powłokowych elementów skończonych na podstawie zasady (5.4.11) lub (5.4.31) przebiega dokładnie tak samo, jak sformułowanie elementów mieszanych (zob. p. 3.5.9), lecz z macierzą typu podatności $\mathbf{K}_H^{(e)}$ dwukrotnie niższego rzędu. Redukuje to znacznie czas obliczeń zależności elementowych.

W tej książce rozważamy 4- i 9-węzłowe elementy bazujące na obu wariantach sformułowania częściowo mieszanego, tj. naprężeniowym i odkształceniowym. W pierwszym przypadku z siłami przekrojowymi $\mathbf{n} = (\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2)$, w drugim przypadku z odkształceniami membranowymi $\mathbf{e} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$, poza przemieszczeniami $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$, jako zmiennymi niezależnymi. We wszystkich badanych przez nas zadaniach (zob. rozdz. 6) otrzymano bardzo dobrą zgodność wyników rozwiązań uzyskanych przy pomocy elementów mieszanych i częściowo mieszanych. Elementy częściowo mieszane są mniej rozbudowane i mogą być uważane za bardziej odpowiednie do obliczeń inżynierskich.

5.5. Elementy powłokowe o dwustopniowej interpolacji odkształceń

5.5.1. Uwagi wstępne

Pod nazwą *dwustopniowa interpolacja odkształceń* rozumiemy tu jedną z grupy technik nazywanych w języku angielskim *assumed strain methods*. Techniki te są obecnie uważane za jedne z najlepiej rozwiązujących problem blokady.



Rys. 5.5.1. Lokalizacja punktów pomiarowych w elemencie cztero- i dziewięciowęzłowym.

Podczas gdy w przypadkach jednowymiarowych (np. płaskich i przestrzennych prętów) techniki te mają prostą interpretację, ich rozciągnięcie na zagadnienia dwuwymiarowe (płyty, powłoki) nie jest już ani tak jasne, ani całkowicie rozwiązane, a także nie są one jeszcze formalnie ugruntowane matematycznie⁵⁶.

Technika niestandardowej interpolacji odkształceń, odpowiedzialna za blokadę w elementach powłokowych, rozwinięta w ramach elementów zdegenerowanych i prezentowana w pracach DVORKIN i BATHE [1984] (element 4-węzłowy) oraz HUANG i HINTON [1986a], HUGHES i HINTON [1986a], HUANG [1987a,b] (element 9-węzłowy⁵⁷), stanowiła wzorzec do sformułowania elementów własnych.

Punktem wyjścia do wprowadzenia techniki dwustopniowej interpolacji odkształceń jest klasyczne sformułowanie przemieszczeniowe, wykorzystujące standardową interpolację Lagrange'owską. Jak wiadomo, główna trudność występująca w sformułowaniu przemieszczeniowym wiąże się z efektem blokady, gdy stosowana jest reguła pełnego całkowania (FI) do obliczenia macierzy elementowych niskiego rzędu. Okazuje się, że efekt blokady można istotnie zredukować lub nawet wyeliminować przez niezależną interpolację pola odkształceń.

⁵⁶Zob. uwagi np. w SIMO i HUGHES [1986], SIMO i RIFAI [1990], SIMO i ARMERO [1992].

⁵⁷Zob. także np. LEE i KANOK-NUKULCHAI [1998].

W pracy DVORKIN i BATHE [1984] w pierwotnym sformułowaniu przemieszczeniowym macierzy elementu 4-węzłowego zaproponowano zastosowanie innego, w stosunku do pozostałych, schematu interpolacji dla odpowiedzialnych za blokadę odkształceń poprzecznych od ścinania⁵⁸ $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Interpolacja ta polegała na wprowadzeniu wielkości zastępczych $\{\check{\varepsilon}_1, \check{\varepsilon}_2\}$, które nie są obliczane bezpośrednio z przemieszczeń typu $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}, \mathbf{Q}\}$. Składowe kowariantne tych odkształceń interpolowane są w układzie współrzędnych naturalnych (ξ^1, ξ^2) elementu wzorcowego, pośrednio w sposób niejednolity, na podstawie zbioru wartości odkształceń $\{\varepsilon_\alpha|_{(p_\alpha, q_\alpha)}^{BI} \equiv \varepsilon_\alpha(\mathbf{u}(\xi^1|_{(p_\alpha, q_\alpha)}, \xi^2|_{(p_\alpha, q_\alpha)}))\}$, $\alpha = 1, 2$, $p_1 = 1, 2, \dots, N_L$, $q_1 = 1, 2, \dots, N_H$, $p_2 = 1, 2, \dots, N_H$, $q_2 = 1, 2, \dots, N_L$. Wartości odkształceń tworzące zbiór $\{\varepsilon_\alpha|_{(p_\alpha, q_\alpha)}^{BI}\}$ obliczane są bezpośrednio z przemieszczeń $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ w wybranych, reprezentatywnych dla danej składowej odkształcenia punktach (p_α, q_α) . Punkty (p_α, q_α) nazywamy dalej *punktami pomiarowymi*. Etykieta BI podkreśla, że wielkości te są obliczane *Bezpośrednio z Interpolacji* przemieszczeń $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$. Dyskretne wartości odkształceń typu $\{\varepsilon_\alpha|_{(p_\alpha, q_\alpha)}^{BI}\}$ są następnie eliminowane, wyrażając je w sposób standardowy przez parametry węzłowe $\{u_a = u(\xi_a)\}$, $a = 1, 2, \dots, N$. Dlatego dla tego podejścia proponujemy nazwę *dwustopniowa interpolacja odkształceń*.

Tabela 5.5.1. Usytuowanie punktów pomiarowych, współrzędne naturalne $(\xi^1|_{(p_\alpha, q_\alpha)}, \xi^2|_{(p_\alpha, q_\alpha)})$.

Wektor odkształceń ε_α / usytuowanie		ELEMENTY							
		9-węzłowy, $a = 3^{-1/2}$						4-węzłowy	
ε_1	punkt (p_1, q_1)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(1,1)	(1,2)
	współrzędne (ξ^1, ξ^2)	$(a, 1)$	$(a, 0)$	$(a, -1)$	$(-a, 1)$	$(-a, 0)$	$(-a, -1)$	$(0, 1)$	$(0, -1)$
ε_2	punkt (p_2, q_2)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(3,2)	(1,1)	(2,1)
	współrzędne (ξ^1, ξ^2)	$(1, a)$	$(1, -a)$	$(0, a)$	$(0, -a)$	$(-1, a)$	$(-1, -a)$	$(1, 0)$	$(-1, 0)$

Koncepcja dwustopniowej interpolacji w stosunku do obu typów odkształceń — błonowych⁵⁹ $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}$ i poprzecznych od ścinania $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ — została użyta w elemencie 9-węzłowym przez HUANG [1987b] do pogodzenia konfliktu między blokadą a mechanizmem form zeroenergetycznych (pasożytniczych). Zauważmy, że w konwencjonalnych elementach skończonych poprzeczne odkształcenia od ścinania $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ są często lokalnie niepoprawne, mimo że ich uśrednione wartości z określonego obszaru mają sens. Dlatego, podobnie jak dla elementu 4-węzłowego, niezależnie dla każdej składowej ε_α zaproponowano loka-

⁵⁸Energetycznie związanych z przekrojowymi siłami poprzecznymi $\{Q^1, Q^2\}$.

⁵⁹Odształcenia $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}$ są energetycznie związane z przekrojowymi siłami błonowymi $\{N^{11}, N^{22}, N^{12}\}$. W pracach oryginalnych, w odróżnieniu od rozważanego w książce sześcioparametrowego sformułowania mechaniki powłok, stosowano sformułowanie symetryczne, gdzie na podstawie założeń kinematycznych obowiązuje $\varepsilon_{12} \equiv \varepsilon_{21}$ i $N^{12} \equiv N^{21}$.

lizację $(\xi^1|_{(p_\alpha, q_\alpha)}, \xi^2|_{(p_\alpha, q_\alpha)})$ pewnej liczby $(N_L \times N_H)$ punktów pomiarowych (p_α, q_α) , w których wartości odkształceń ε_α reprezentują uśredniony rozkład w rozważanych obszarach (HUANG [1987a]). Do określenia lokalizacji punktów pomiarowych wykorzystuje się założenie o równości średniej wartości (w sensie całki z obszaru elementu) z aproksymacji MES ze średnią wartością (w sensie całki z tego obszaru) reprezentatywnego rozwiązania ścisłego. Na tej podstawie, odpowiednio do założonego rzędu interpolacji zastępczych pól odkształceń poprzecznych $\{\check{\varepsilon}_1, \check{\varepsilon}_2\}$ [(liniowa \times kwadratowa) $\Rightarrow (N_L \times N_H)$], w pracy HUANG [1987a] podano dwa zestawy po sześć punktów pomiarowych, reprezentujących uśrednione wartości ε_α w cienkim 9-węzłowym⁶⁰ elemencie powłokowym (zob. także HUANG i HINTON [1986a], HUGHES i HINTON [1986a] oraz w kontekście płyt HUANG i HINTON [1984, 1986b]). Wskazano także, że lokalizacja $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ zaproponowana dla powłokowego elementu 4-węzłowego w pracach DVORKIN i BATHE [1984], BATHE i DVORKIN [1985] jest tą, która spełnia warunki przyjęte w HUANG [1987a]. W tym kontekście oba elementy 4- i 9-węzłowy mogą być potraktowane w sposób zunifikowany.

W analizie powłok zakrzywionych pojawia się, jako wynik zakrzywienia elementu, blokada membranowa (zob. np. STOLARSKI i BELYTSCHKO [1982]). Do omińnięcia efektu blokady membranowej, podobnie jak wcześniej dla poprzecznych odkształceń od ścinania, jest stosowana niestandardowa interpolacja odkształceń membranowych $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}$. Dla $\varepsilon_{\alpha 1}, \varepsilon_{\alpha 2}, \alpha = 1, 2$, analogicznie do przypadku odkształceń poprzecznych od ścinania ε_α , wprowadzono (HUANG [1987a,b]) tego samego rzędu interpolację odkształceń zastępczych $\check{\varepsilon}_{\alpha 1}, \check{\varepsilon}_{\alpha 2}$, przyjmując na zasadzie dedukcji takie same usytuowanie $(\xi^1|_{(p_\alpha, q_\alpha)}, \xi^2|_{(p_\alpha, q_\alpha)})$ punktów pomiarowych (p_α, q_α) . Jednak w przypadku $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}$ w ramach standardowej koncepcji elementów zdegenerowanych występuje konieczność zdefiniowania na powierzchni podstawowej powłoki dodatkowego lokalnego układu współrzędnych ortogonalnych (HUANG i HINTON [1986a], HUGHES i HINTON [1986a]). Bowiem dopiero w ortogonalnym układzie współrzędnych możliwe jest, w wyniku jawnego użycia hipotezy kinematycznej, rozdzielenie trójwymiarowych odkształceń normalnych na część błonową $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}$ i powodowaną zginaniem $\{\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}\}$ (AHMAD, IRONS i ZIENKIEWICZ [1970]). Umożliwia to dokonanie interpolacji zastępczych odkształceń membranowych $\check{\varepsilon}_{\alpha 1}, \check{\varepsilon}_{\alpha 2}, \alpha = 1, 2$ na podstawie wartości dyskretnych $\{\varepsilon_{\alpha 1}|_{(p_\alpha, q_\alpha)}^{BI}, \varepsilon_{\alpha 2}|_{(p_\alpha, q_\alpha)}^{BI}\}$ (HUANG [1987a]). Trudności związane z potrzebą wprowadzenia ortogonalnego układu współrzędnych nie występują w sformułowaniach operujących uogólnionymi wielkościami przekrojowymi (por. sformułowanie przyjęte w niniejszej książce), które są tu rozseparowane z założenia.

⁶⁰Przykładowo, do analizy nieliniowych zadań statyki powłok KREJA i SCHMIDT [1995] zastosowali element 9-węzłowy, wykorzystujący rozwiniętą w pracy PARK i STANLEY [1986] technikę dwustopniowej interpolacji odkształceń poprzecznych od ścinania.

Wykorzystując powyższe fakty, w elementach własnych odkształcenia zastępcze $\check{\mathbf{e}} = (\check{\mathbf{e}}_1, \check{\mathbf{e}}_2)$ (razem błonowe i poprzeczne od ścinania $\check{\mathbf{e}}_{\alpha 1}, \check{\mathbf{e}}_{\alpha 2}, \check{\mathbf{e}}_{\alpha}, \alpha = 1, 2$) obliczamy w sposób zunifikowany (jednakowy i łączny), zarówno w elemencie 4-jak i 9-węzłowym.

5.5.2. Koncepcja niestandardowej interpolacji odkształceń

Wychodząc z klasycznego sformułowania przemieszczeniowego, używamy niezależnej interpolacji pól odkształceń $\mathbf{e}(\boldsymbol{\xi})$ odpowiedzialnych za blokadę, wprowadzając w ich miejsce odkształcenia zastępcze $\check{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi})$.

Interpolację pola odkształceń zastępczych wyrażamy wzorem

$$\check{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}) \bar{\mathbf{e}}_{(e)}, \quad (5.5.1)$$

gdzie $\bar{\mathbf{e}}_{(e)}$ jest wektorem swobodnych parametrów odkształceń elementowych, a $\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi})$ jest macierzą interpolacji.

W analizie problemów nieliniowych stosuje się ten sam schemat interpolacji (5.5.1) zarówno do pól przyrostów odkształceń jak i do pól wirtualnych odkształceń

$$\Delta \check{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}) \Delta \bar{\mathbf{e}}_{(e)}, \quad \delta \check{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}) \delta \bar{\mathbf{e}}_{(e)}, \quad (5.5.2)$$

gdzie $\Delta \bar{\mathbf{e}}_{(e)}$ i $\delta \bar{\mathbf{e}}_{(e)}$ są, tak jak wektor $\bar{\mathbf{e}}_{(e)}$ w (5.5.1), wektorami swobodnych parametrów. Wybór swobodnych parametrów $\bar{\mathbf{e}}_{(e)}$, $\Delta \bar{\mathbf{e}}_{(e)}$ i $\delta \bar{\mathbf{e}}_{(e)}$ oraz macierzy interpolacyjnej $\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi})$ decyduje tutaj o skuteczności omawianego podejścia. Niestety, do tej pory brakuje formalnych podstaw matematycznych sposobu określania tych wielkości.

W literaturze przedmiotu swobodne parametry $\bar{\mathbf{e}}_{(e)}$, $\Delta \bar{\mathbf{e}}_{(e)}$ i $\delta \bar{\mathbf{e}}_{(e)}$ są przeważnie określane jako wartości odpowiedniego pola odkształceń $\mathbf{e}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}))$, $\Delta \mathbf{e}(\boldsymbol{\xi})$ i $\delta \mathbf{e}(\boldsymbol{\xi})$, obliczane w wybranych punktach w obrębie elementu na podstawie klasycznego schematu interpolacji. Punkty te nazywane są *punktami pomiarowymi* (ang. *sampling points*), a ich położenie określane jest przez wartości współrzędnych naturalnych $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi^1, \xi^2)$.

Niech

$$\boldsymbol{\xi}_{(p,q)} \equiv (\xi^1|_{(p_\alpha, q_\alpha)}, \xi^2|_{(p_\alpha, q_\alpha)}) \in [-1, +1] \times [-1, +1], \quad (5.5.3)$$

$$p_\alpha = 1, 2, \dots, L_{1\alpha}, \quad q_\alpha = 1, 2, \dots, L_{2\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

oznaczają współrzędne punktów pomiarowych. Wówczas np. wektor $\Delta \bar{\mathbf{e}}_{(e)}$ swobodnych parametrów przyrostów odkształceń elementu z (5.5.2)₁ jest tworzony z odpowiednich wartości przyrostów odkształceń, obliczanych w punktach pomiarowych w typowy dla sformułowania przemieszczeniowego sposób

$$\Delta \bar{\mathbf{e}}_{(p,q)}^{BI} = \Delta \mathbf{e}(\boldsymbol{\xi}_{(p,q)}) = \mathbb{B}_{\mathbf{e}(e)}(\boldsymbol{\xi}_{(p,q)}) \Delta \mathbf{q}_{(e)}. \quad (5.5.4)$$

Ze zbioru wartości (5.5.4) dla wszystkich par (p, q) , po uporządkowaniu składowych $\Delta \vec{\mathbf{e}}|_{(p,q)}^{BI} \Rightarrow \Delta \vec{\mathbf{e}}_{(e)}$ i po odpowiednim przegrupowaniu już dyskretnych wartości macierzy $\mathbb{B}_{\mathbf{e}(e)}(\boldsymbol{\xi}_{(p,q)}) \Rightarrow \vec{\mathbb{B}}_{\mathbf{e}(e)}^{BI} = \text{const}$ w punktach (p, q) , tworzymy poszukiwaną zależność

$$\Delta \vec{\mathbf{e}}_{(e)} = \vec{\mathbb{B}}_{\mathbf{e}(e)}^{BI} \Delta \mathbf{q}_{(e)}. \quad (5.5.5)$$

Podstawienie (5.5.5) do (5.5.2)₁ prowadzi bezpośrednio do zdefiniowania operatora macierzowego, ujmującego dwustopniową interpolację wariacji lub przyrostów odkształceń w postaci

$$\check{\mathbb{B}}_{\mathbf{e}(e)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}) \vec{\mathbb{B}}_{\mathbf{e}(e)}^{BI}. \quad (5.5.6)$$

Wstawiając operator $\check{\mathbb{B}}_{\mathbf{e}(e)}(\boldsymbol{\xi})$ w miejsce $\mathbb{B}_{\mathbf{e}(e)}(\boldsymbol{\xi})$, formułowanie dalszych zależności elementowych przebiega dokładnie w taki sam sposób, jak w ramach klasycznego modelu przemieszczeniowego. Zależności elementowe obliczane są z zastosowaniem reguły pełnego całkowania (FI). Ponieważ parametry odkształceniowe $\Delta \vec{\mathbf{e}}_{(e)}$, $\delta \vec{\mathbf{e}}_{(e)}$, $\vec{\mathbf{e}}_{(e)}$ są wyrażane na poziomie elementu przez odpowiednie przemieszczenia węzłowe, powłokowe elementy skończone o dwustopniowej interpolacji odkształceń mają tę samą liczbę stopni swobody co wyjściowe elementy przemieszczeniowe.

5.5.3. Realizacja techniki dwustopniowej interpolacji odkształceń

W ramach rozważanej 6-parametrowej teorii powłok, miary odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$ składają się z odkształceń membranowych $\mathbf{e}(\boldsymbol{\xi})$ i odkształceń zgięciowych $\mathbf{k}(\boldsymbol{\xi})$. Ponieważ efekt blokady związany jest tylko z odkształceniami membranowymi $\mathbf{e}(\boldsymbol{\xi})$, technika dwustopniowej interpolacji nie jest stosowana do odkształceń zgięciowych.

Interpolację zastępczych pól odkształceń membranowych w postaci wektorów $\check{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\beta}$, $\delta \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\beta}$ przeprowadzamy w konwekcyjnym układzie współrzędnych naturalnych $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi^1, \xi^2)$ związanym z elementem. Usytuowanie punktów pomiarowych (tab. 5.5.1) przyjmujemy zgodnie z pracami DVORKIN i BATHE [1984] w elemencie 4-węzłowym oraz HUANG i HINTON [1986b] w elemencie 9-węzłowym. Stosujemy niejednolitą — wyróżniającą kierunek — interpolację zastępczych pól odkształceń, zależnie od aproksymowanej składowej⁶¹

$$\begin{aligned} \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_1(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{p_1=1}^{N_L} \sum_{q_1=1}^{N_H} L_{p_1}(\xi^1) H_{q_1}(\xi^2) \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1|_{(p_1, q_1)}^{BI}, \\ \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_2(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{p_2=1}^{N_H} \sum_{q_2=1}^{N_L} H_{p_2}(\xi^1) L_{q_2}(\xi^2) \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2|_{(p_2, q_2)}^{BI}, \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

⁶¹Symbol $\vec{}$ nad literą podstawową oznacza wielkość związaną z bazą \mathbf{a}^{α} i współrzędnymi naturalnymi $\boldsymbol{\xi}_{\alpha}$ elementu.

gdzie wektory odkształceń $\vec{\varepsilon}_\alpha$ zestawiane są ze składowych w bazie $\{\mathbf{a}^\alpha, \mathbf{t}^0\}$. Baza $\{\mathbf{a}_\alpha\}$, wzajemna do $\{\mathbf{a}^\alpha\}$, jest styczna do współrzędnych krzywoliniowych na M , generowanych układem $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ w elemencie wzorcowym $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi^1, \xi^1)$ (zob. rys. 5.2.7).

Funkcje interpolacyjne występujące w (5.5.7) dla elementu 9-węzłowego przyjmujemy $[(liniowa \times kwadratowa) \Rightarrow (N_L = 2, N_H = 3)]$ w postaci

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1), & L_1(\xi) &= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\xi\right), \\ H_2(\xi) &= 1 - \xi^2, & & \\ H_3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), & L_2(\xi) &= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\xi\right), \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

a dla elementu 4-węzłowego $[(stała \times liniowa) \Rightarrow (N_L = 1, N_H = 2)]$ w formie

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi), & L_1(\xi) &= 1. \\ H_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi), & & \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Interpolację operatorów, powiązanych z zastępczą wirtualną zmianą miar odkształceń $\delta\check{\varepsilon}_\alpha$, przeprowadzamy w sposób analogiczny do (5.5.7):

$$\begin{aligned} \check{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{p_1=1}^{N_L} \sum_{q_1=1}^{N_H} L_{p_1}(\xi^1) H_{q_1}(\xi^2) \vec{\mathbb{B}}_{\varepsilon_1}|_{(p_1, q_1)}^{BI}, \\ \check{\mathbb{B}}_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{p_2=1}^{N_H} \sum_{q_2=1}^{N_L} H_{p_2}(\xi^1) L_{q_2}(\xi^2) \vec{\mathbb{B}}_{\varepsilon_2}|_{(p_2, q_2)}^{BI}. \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Analogicznie do (5.5.7), w (5.5.10) wartości operatorów dyskretnych $\vec{\mathbb{B}}_{\varepsilon_\alpha}|_{(p_\alpha, q_\alpha)}^{BI}$ obliczamy w bazie $\{\mathbf{a}^\alpha, \mathbf{t}^0\}$. Zastosowana w (5.5.7) kombinacja funkcji interpolacyjnych $L_{p_\alpha}, H_{q_\alpha}$, wyróżniająca jedną ze współrzędnych ξ^α , jest w ogólnym przypadku nieciągła na krawędziach międzyelementowych. Dokładność z jaką odtwarzane są odkształcenia zależy więc od stopnia dyskretyzacji i geometrycznych dystorsji elementów (zob. uwagi w DVORKIN i BATHE [1984] w kontekście elementów 4-węzłowych).

5.5.4. Algorytm dwustopniowej interpolacji odkształceń

Algorytm dwustopniowej interpolacji odkształceń wpleciony jest w koncepcję elementów przemieszczeniowych, przy jak najdalej idącym zachowaniu pierwotnej struktury sformułowania. Algorytm składa się z poniższych kroków:

1. Obliczamy z pól odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}))$ zbiory wartości odkształceń $\{\boldsymbol{\varepsilon}_\beta|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}$ a z pól operatora $\mathbb{B}_{\varepsilon_\beta}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}))$ zbiory wartości operatorów $\{\mathbb{B}_{\varepsilon_\beta}|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}$ w punktach pomiarowych $(\xi^1|_{(p_\beta, q_\beta)}, \xi^2|_{(p_\beta, q_\beta)})$ (według tab. 5.5.1).

2. Transformujemy dyskretne wartości $\{\varepsilon_\beta|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}$ i $\{\mathbb{B}_{\varepsilon_\beta}|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}$ z reprezentacji przestrzennej $\{t_i\}$ do bazy $\{a^\beta, t^0\} \Rightarrow \{\bar{\varepsilon}_\beta|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}$, $\{\bar{\mathbb{B}}_{\varepsilon_\beta}|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}$. Baza $\{a_\beta\}$ wzajemna do $\{a^\beta\}$ jest styczna do współrzędnych krzywoliniowych ξ^β na M (zob. rys. 5.2.7).
3. Interpolujemy pola wielkości zastępczych $\check{\varepsilon}_\beta(\xi)$ i $\check{\mathbb{B}}_{\varepsilon_\beta}(\xi)$ zgodnie z wzorami (5.5.7) i (5.5.10).
4. Retransformujemy pola wielkości zastępczych $\check{\varepsilon}_\beta(\xi)$ i $\check{\mathbb{B}}_{\varepsilon_\beta}(\xi)$ z bazy $\{a^\beta, t^0\}$ do bazy aktualnej w reprezentacji przestrzennej $\{t_i\}$. Następnie wstawiamy je, odpowiednio, w miejsce $\varepsilon(\xi)$ i $\mathbb{B}_{(e)}(\xi)$ w standardowym algorytmie przemieszczeniowym z zastosowaniem pełnego całkowania (FI).

5.6. Inne modele elementów skończonych

5.6.1. Zdegenerowane elementy powłokowe

W tym punkcie przedstawimy podstawy formułowania nieliniowych elementów powłokowych klasy C^0 według koncepcji standardowych elementów zdegenerowanych, podanej m.in. w BATHE i BOLOURCHI [1980] oraz BATHE [1982, 1996].

Do bezpośrednich celów porównawczych opracowano własne przemieszczeniowe Lagrange'owskie elementy zdegenerowane 4-, 9- i 16-węzłowe⁶². Macierze elementów standardowych całkowane są numerycznie z użyciem kwadratury Gaussa przy zastosowaniu całkowania pełnego (FI) lub jednolicie zredukowanego (URI).

W ramach elementów zdegenerowanych zbadano także:

- 1) koncepcję elementu z tzw. jednowymiarowym przecałkowaniem po grubości, będącą najprostszym modelem bez trójwymiarowego całkowania w objętości (zob. dyskusję STANLEY, PARK i HUGHES [1986]);
- 2) algorytm całkowania selektywnego (SRI);
- 3) procedurę γ -stabilizującą formy pasożytnicze w elementach 4- i 9-węzłowych, całkowanych w sposób jednolicie zredukowany (URI) (wg LIU, ONG i URAS [1985]).

Problematyka punktów 2) i 3) pokrywa się z odpowiednimi zagadnieniami omawianymi w ramach 6-parametrowej teorii powłok. Dlatego poniżej, na zasadzie kontrastu, zamieszczamy tylko zarys podstawowych koncepcji zastosowanych przy formułowaniu elementów zdegenerowanych.

⁶²Na drodze prostych modyfikacji funkcji interpolacyjnych (zob. np. BATHE [1996]), wchodzących do macierzy kształtu, tworzy się elementy o pośredniej liczbie węzłów $5 \div 8$, $10 \div 15$ na bazie kwadratu (serendipowskie) oraz elementy o liczbie węzłów $3 \div 14$ na bazie trójkąta.

Punktem wyjścia do opracowania elementów zdegenerowanych jest klasyczne przemieszczeniowe sformułowanie trójwymiarowe geometrycznie nieliniowej teorii sprężystości. Aproxymację skończenie elementową stosujemy do wyrażonego w przesunięciach \mathbf{u} zlinearyzowanego równania pracy wirtualnej, opisującego zachowanie trójwymiarowego ciała liniowo sprężystego.

W przypadku niezależnego od deformacji obciążenia martwego, zlinearyzowane równanie pracy wirtualnej można (por. p. 4.4.2), zapisać w postaci

$$\delta G_i[\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}] = G_e[\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}] - G_i[\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}]. \quad (5.6.1)$$

W (5.6.1), G_i i G_e reprezentują wewnętrzną i zewnętrzną pracę wirtualną, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \vec{\mathbf{x}}$ jest trójwymiarowym polem przesunięć, zaś $\vec{\mathbf{y}}$ i $\vec{\mathbf{x}}$ są odpowiednio aktualnym i początkowym wektorem wodzącym tej samej cząstki materialnej ciała. Pola $\delta \mathbf{u}$ i $\Delta \mathbf{u}$ są kinematycznie dopuszczalnymi wirtualnymi przesunięciami.

Zapisując (5.6.1) w składowych odniesionych do układu współrzędnych kartezjańskich $\{x_i, i = 1, 2, 3\}$ z bazą \mathbf{e}_i , w stacjonarnym opisie Lagrange'a otrzymujemy

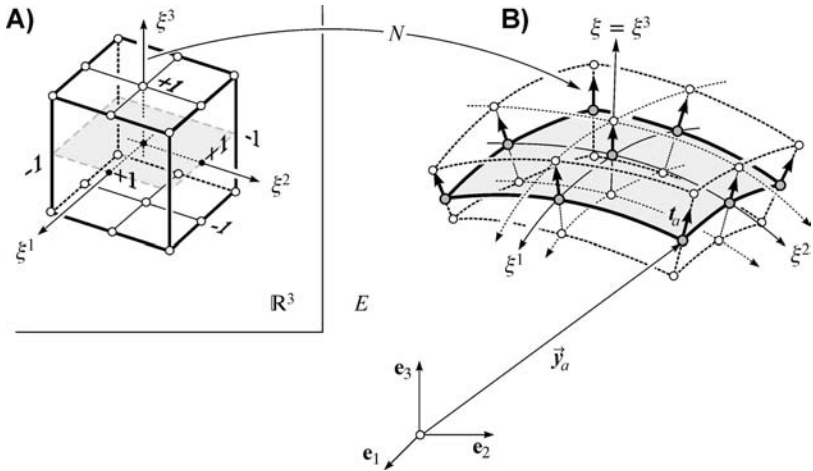
$$\begin{aligned} \delta G_i[\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}] &= \int_B (\delta e_{ij} C_{ijkl} \Delta e_{kl} + S^{ij} \delta(\delta \eta_{ij})) dv, \\ G_i[\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}] &= \int_B \delta e_{ij} S^{ij} dv, \\ G_e[\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}] &= \int_B \delta u_i b^i dv + \int_{\partial B_f} \delta u_i t^i da. \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

Wektory $\mathbf{b} = b^i \mathbf{e}_i$ i $\mathbf{t} = t^i \mathbf{e}_i$ w (5.6.2)₃ są objętościowym i powierzchniowym obciążeniem zewnętrznym ciała, mierzonym, odpowiednio, na jednostkę objętości B i jednostkę powierzchni brzegu ∂B_f konfiguracji nieodkształconej, natomiast $\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ w (5.6.2)_{1,2} jest drugim tensorem naprężeń Pioli–Kirchhoffa.

Składowe liniowej Δe_{ij} i nieliniowej $\Delta \eta_{ij}$ części przyrostu tensora odkształceń Greena–Lagrange'a $\Delta \mathbf{E} = \Delta \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, gdzie $\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij}$, oraz odpowiednie ich wariacje mają postać

$$\begin{aligned} \Delta e_{ij} &= \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,i} u_{k,j}), \\ \Delta \eta_{ij} &= \frac{1}{2} \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}, \\ \delta e_{ij} &= \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} + u_{k,i} \delta u_{k,j} + \delta u_{k,i} u_{k,j}), \\ \delta(\Delta \eta_{ij}) &= (\delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,i} \delta u_{k,j}). \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

W rozważanym tu przypadku liniowego izotropowego materiału sprężystego, tensor konstytutywny $\mathbb{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ jest stały.



Rys. 5.6.1. Element zdegenerowany: **A)** wyjściowy 18-węzłowy element naturalny, **B)** 9-węzłowy powłokowy element zdegenerowany.

Zdegenerowany element powłokowy tworzy się przez redukcję klasycznego, trójwymiarowego izoparametrycznego elementu bryłowego do elementu zgodnego z hipotezami powłokowymi, jednak bez bezpośredniego odwoływania się do teorii powłok (zob. np. KANOK-NUKULCHAI, TAYLOR i HUGHES [1981]). Więzy kinematyczne nakłada się na zdyskretyzowane pola przemieszczeń przez założenie liniowych funkcji kształtu w kierunku grubości, pozostawiając bez zmian funkcje kształtu w kierunkach powierzchniowych (AHMAD, IRONS i ZIENKIEWICZ [1970]). Jako podstawowe założenia w procesie degeneracji, stosuje się zwykle klasyczną hipotezę kinematyczną Timoszenko–Reissnera (zob. dyskusję w p. 5.1.5). W koncepcji degeneracji, w wyniku połączenia więzów T–R z procesem interpolacji, są one realizowane w sposób dyskretny na drodze numerycznej w węzłach i punktach całkowania.

Pierwotna dyskretyzacja izoparametrycznym bryłowym elementem skończonym o liniowej interpolacji po grubości, połączona z kinematyczną częścią hipotezy T–R o prostym włóknie (p. 5.1.5), umożliwia zapisanie aproksymacji aktualnego wektora wodzącego dowolnego punktu $\bar{\mathbf{y}}(\xi^i)$, $i = 1, 2, 3$, z obszaru elementu w postaci

$$\tilde{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\xi}, \xi) = \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \left(\bar{\mathbf{y}}_a + \frac{1}{2} \xi h_a \mathbf{t}_a \right), \quad \|\mathbf{t}_a\| = 1. \quad (5.6.4)$$

Tutaj $(\boldsymbol{\xi}, \xi) \in [-1, +1]^2 \times [-1, +1] \subset \mathbb{R}^3$, gdzie $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi^\alpha, \alpha = 1, 2)$ są naturalnymi współrzędnymi elementu, odpowiadającymi powierzchni odniesienia, $\xi \equiv \xi^3$ jest współrzędną wyróżnioną, związaną z grubością powłoki, zaś $L_a(\boldsymbol{\xi})$ jest funkcją kształtu w węzle a . Pozostałymi wielkościami dyskretnymi we wzorze (5.6.4) w typowym węzle a na powierzchni podstawowej \bar{M} powłoki odkształconej są:

\vec{y}_a — wektor wodzący, \mathbf{t}_a — jednostkowy wektor kierunkowy (direktor), definiujący obracające się proste i nierozciągliwe włókno powłoki, h_a — grubość powłoki mierzona w kierunku \mathbf{t}_a .

W każdym z węzłów elementu $a = 1, 2, \dots, N$ przyjmuje się ortonormalną bazę $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}\}$, związaną z włóknem zależnością⁶³ $\mathbf{t} \equiv \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2$. Ponieważ wektory wodzące $\vec{y}(\xi^i)$ w każdej konfiguracji podczas deformacji wyrażone są przez (5.6.4), aproksymacja przyrostu przemieszczeń $\Delta \tilde{\mathbf{u}}(\xi^i)$, $i = 1, 2, 3$, dowolnego punktu z obszaru elementu ma analogiczną postać

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, \xi) &= \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\xi}) \left(\Delta \mathbf{u}_a + \frac{1}{2} \xi h_a \Delta \mathbf{t}_a \right), \\ \Delta \mathbf{u}_a &= \Delta \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_a, \quad \Delta \mathbf{t}_a = \Delta \mathbf{t}_a - \mathbf{t}_a, \quad \|\Delta \mathbf{t}_a\| = 1, \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

gdzie $(\Delta \mathbf{u}_a, \Delta \mathbf{t}_a)$ są przyrostami uogólnionych przemieszczeń węzłowych przy przejściu od konfiguracji aktualnej (\mathbf{u}, \mathbf{t}) do poszukiwanej $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{t})$. Dla małych zmian, węzłowe wektory $\Delta \mathbf{t}_a$ w (5.6.5)₃ mogą być wyrażone w postaci

$$\Delta \mathbf{t}_a = \Delta \varphi_{2a} \mathbf{t}_{1a} - \Delta \varphi_{1a} \mathbf{t}_{2a}. \quad (5.6.6)$$

Taki element skończony ma więc pięć stopni swobody w każdym węźle: trzy przyrosty translacji $\Delta \mathbf{u}_a = (\Delta u_a, \Delta v_a, \Delta w_a)$ i dwa przyrosty parametrów obrotu $(\Delta \varphi_{1a}, \Delta \varphi_{2a})$. Zaznaczamy, że zależność (5.6.6) jest jednoznacznie określona przez dwa (małe) obroty $(\Delta \varphi_{1a}, \Delta \varphi_{2a})$ tylko w aktualnej bazie lokalnej $\{\mathbf{t}_{1a}, \mathbf{t}_{2a}, \mathbf{t}_a\}$, natomiast $\Delta \mathbf{u}_a$ może być określony jednoznacznie w dowolnej bazie przestrzeni wektorowej E (najwygodniej w bazie globalnej $\{\mathbf{e}_i\}$).

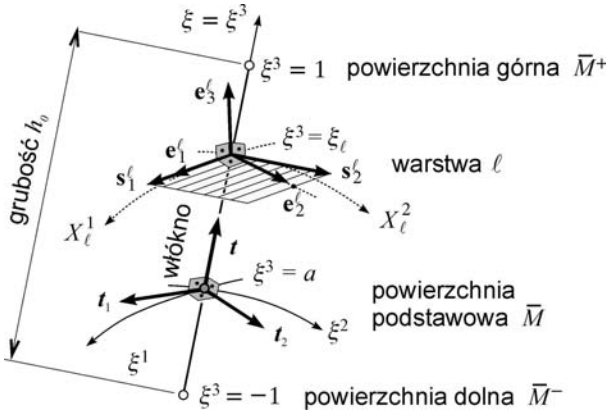
W celu spełnienia drugiej części hipotezy T–R, dotyczącej płaskiego stanu naprężeń w warstwach powłoki (p. 5.1.5), konstruujemy lokalny układ kartezjański tzw. współrzędnych warstwowych $\{X_\ell^i\}$, $i = 1, 2, 3$. Baza jednostkowa $\{\mathbf{e}_\ell^i\}$ definiująca współrzędne $\{X_\ell^i\}$ jest styczna do warstwy ℓ danej równaniem $\mathbf{X}_\ell = \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, \xi_\ell)$, gdzie $\xi_\ell = \xi \equiv \xi^3$ jest ustalone. Używając zależności $\mathbf{e}_\ell^i(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{T}^\ell(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_i$, wiążącej bazę warstwy ℓ z bazą globalną, wykonujemy transformację i retransformację niezbędnych wielkości, wprowadzając warunek $S_\ell^{33} = 0$ zgodny z hipotezą typu T–R. Tutaj \mathbf{T}^ℓ jest tensorem ortogonalnym.

Obliczanie pochodnych pola przemieszczeń w (5.6.4) względem warstwowych współrzędnych kartezjańskich $\{X_\ell^i\}$ wymaga transformacji za pomocą Jacobianu. Dla warstwy ℓ przyjmuje ona postać

$$\left\{ \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_\ell^i} \right\} = \mathbf{J}_\ell^{-1} \left\{ \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi^i} \right\}, \quad \mathbf{J}_\ell = \left[\frac{\partial X_\ell^i}{\partial \xi^j} \right]. \quad (5.6.7)$$

Jacobian \mathbf{J}_ℓ zależy w sposób nieliniowy od wszystkich trzech współrzędnych $\{\xi^i\} \equiv (\boldsymbol{\xi}, \xi)$. Macierze i wektory elementowe otrzymujemy przez podstawienie

⁶³Istnieje tu pewna dowolność wyboru jednego z kierunków $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$.



Rys. 5.6.2. Element zdegenerowany: typowe włókno t i typowa warstwa ℓ powłoki.

do wyrażeń (5.6.2) i (5.6.3) formuł interpolacyjnych (5.6.4) i (5.6.5) z wykorzystaniem (5.6.7). Ich obliczenie wymaga zastosowania potrójnego całkowania w objętości elementu.

Biorąc pod uwagę powyższe rozważania, nasuwają się następujące spostrzeżenia dotyczące formułowania i stosowania elementów zdegenerowanych.

O ile w przypadku przyjęcia bazy powierzchniowej $\{t_1, t_2\}$ istnieje pewna dowolność, to już przyjęcie bazy lokalnej $\{e_1^l, e_2^l\}$ wektorów stycznych do warstwy ℓ nie może być dowolne, lecz powinno wynikać z przyjęcia bazy $\{t_1, t_2\}$. Algorytmy klasyczne definiowania jednego z wektorów pary $\{t_1, t_2\}$ lub $\{e_1^l, e_2^l\}$, podane np. w HUGHES i LIU [1981], HUANG i HINTON [1986a], BATHE [1996], formułowane są przez przyjęcie wyróżnionego kierunku globalnego (np. równoległość do e_2). Sposoby generacji baz wyróżniające kierunek w szczególnych (złożliwych) przypadkach mogą prowadzić do pełnego zafałszowania procesu interpolacji⁶⁴.

Krytykę podejścia klasycznego zamieszczono w pracy VU-QUOC i MORA [1989], gdzie zaproponowano inny sposób określenia bazy $\{t_1, t_2, t\}$ wykorzystujący algebrę kwaternionów. Jednak w pracy VU-QUOC i MORA [1989], operującej czterema parametrami (kwaterniony), zignorowano fakt, że liczba pięć jest minimalną liczbą parametrów (STUELPNAGEL [1964]) potrzebnych do zdefiniowania w sposób jednoznaczny aktualnej bazy $\{t_1, t_2, t\}$. Dla koncepcji z pracy VU-QUOC i MORA [1989] można więc bez trudu podać kontrprzykład prowadzący, podobnie jak w prostych algorytmach klasycznych, do osobliwości⁶⁵.

⁶⁴W wielu przypadkach umiejętny dobór orientacji konstrukcji względem układu globalnego pozwala ominąć ten defekt.

⁶⁵Przykładowo, w opisie geometrii ceownika, usytuowanego wzdłuż globalnej osi X , stosując wzory z dodatku A (str. 172) pracy VU-QUOC i MORA [1989], występuje reorientacja układu.

We własnych elementach zdegenerowanych, podobnie jak w przypadku teorii 6-parametrowej, problem ten rozwiązano definiując bazy $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}\}$ jednoznacznie za pomocą sześciu parametrów, spełniających odpowiednie dla teorii 5-parametrowej więzy.

W przeciwieństwie do teorii 6-parametrowej, stosowanie standardowych elementów zdegenerowanych⁶⁶ ograniczone jest do przypadków, w których w opisie geometrii konstrukcji złożonych udaje się zachować ciągłość współrzędnych między płatami powłoki. Ograniczenie to wynika z faktu, że bez dodatkowych założeń nie jest tu możliwe jednoznaczne opisanie połączeń, zawierających więcej niż dwa płaty, za pomocą tylko dwóch parametrów obrotu typu (5.6.6).

Wykorzystując w (5.6.4) rozdzielność działań, przy założeniu stałej grubości powłoki ($h_a = h = \text{const}$), z przekształcenia (5.6.4) można otrzymać wzór na bezpośrednią interpolację jednostkowego wektora kierunkowego (tzw. *dyrektora*) $\mathbf{t} \in E$, $\|\mathbf{t}\| = 1$ w formie

$$\tilde{\mathbf{t}}(\xi) = \sum_{a=1}^N L_a(\xi) \mathbf{t}_a. \quad (5.6.8)$$

W ogólnym przypadku interpolacja typu (5.6.8) wyprowadza jej wynik $\tilde{\mathbf{t}}(\xi)$ ze zbioru wektorów jednostkowych, bo na ogół $\|\tilde{\mathbf{t}}(\xi)\| \neq 1$ dla $\xi \neq \xi_a$. Najczęściej po interpolacji (5.6.8), w celu spełnienia warunku $\|\tilde{\mathbf{t}}(\xi)\| = 1$, stosuje się dodatkowo normalizację $\tilde{\mathbf{t}}(\xi)/\|\tilde{\mathbf{t}}(\xi)\|$. Nie zmienia to jednak faktu, że bezpośrednia interpolacja składowych pola wektorów jednostkowych $\mathbf{t}(\xi)$, $\xi \in [-1, +1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ w (5.6.8) i (5.6.4) nie jest całkowicie poprawna.

Przy formułowaniu własnych elementów zdegenerowanych, interpolację wykonujemy ściśle, jednocześnie dla całej bazy $\{\mathbf{t}_1(\xi), \mathbf{t}_2(\xi), \mathbf{t}(\xi)\}$, używając algorytmu opisanego w teorii 6-parametrowej. Wykorzystujemy tutaj fakt, że bazy $\{\mathbf{t}_{1a}, \mathbf{t}_{2a}, \mathbf{t}_a\}$, $a = 1, 2, \dots, N$, tworzą macierze ortogonalne, a więc są elementami grupy $SO(3)$.

Należy zauważyć, że podany w książce BATHE [1982] wzór (6.106) ze str. 373

$$\Delta \mathbf{t}_a = \mathbf{t}_a + \int_{\varphi_{1a}, \varphi_{2a}} (-\mathbf{t}_{2a} d\varphi_{1a} + \mathbf{t}_{1a} d\varphi_{2a}), \quad (5.6.9)$$

dotyczący akumulacji obrotów, jest jedynie zapisem symbolicznym i nie należy go interpretować w ramach teorii całki. Mając na uwadze, że w teorii 5-parametrowej modelem kinematycznym obrotowej części deformacji powłoki jest przestrzeń ilorazowa $SO(3)/SO(2)$ homeomorficzna ze sferą jednostkową S^2 , dysponujemy ścisłym wzorem na akumulację $\Delta \mathbf{t}_a$. W takim przypadku nie zachodzi potrzeba stosowania podejścia typu (5.6.9). Ten model kinematyczny jest wynikiem założenia kinematycznej części hipotezy typu T-R o prostym włóknie. W ramach

⁶⁶Dotyczy to także innych elementów skończonych formułowanych na bazie klasycznych 5-parametrowych wariantów teorii powłok.

tego założenia, obrót wokół wektora kierunkowego \mathbf{t}_a (owinięcie) jest nieokreślony i dlatego grupa obrotów $SO(3)$ musi być zastąpiona przez przestrzeń ilorazową $SO(3)/SO(2)$.

We własnych elementach zdegenerowanych aktualizację baz węzłowych $\{\mathbf{t}_{1a}, \mathbf{t}_{2a}, \mathbf{t}_a\}$ wykonujemy zgodnie ze ścisłą procedurą aktualizacji obrotów w $SO(3)$, tak jak w teorii 6-parametrowej, jednak po uwzględnieniu nieokreśloności obrotu wokół wektora kierunkowego \mathbf{t}_a (bez owinięcia, por. np. SIMO, FOX i RIFAI [1990]).

Nawet gdy możliwe jest zapisanie współczynników Jacobianu (5.6.7) w formie prostej zależności od współrzędnej $\xi \equiv \xi^3$, po odwróceniu Jacobianu zależność $\mathbf{J}_\ell^{-1}(\xi^3)$ od ξ^3 jest uwikłana. Nie pozwala to na jawne całkowania po ξ^3 i ominięcie w sformułowaniu standardowym konieczności kosztownego całkowania numerycznego w objętości elementu. Najprostszy model z tzw. przecałkowaniem po grubości (zob. dyskusję np. w STANLEY, PARK i HUGHES [1986]) otrzymuje się pomijając, na podstawie założenia o cienkości powłoki, składniki wyższego rzędu przy parametrze grubości $\xi \equiv \xi^3$ w jawnie odwróconym Jacobianie przestrzennym.

Inne uwagi dotyczące elementów zdegenerowanych zamieszczono w p. 5.1.5.

5.6.2. Niedostosowany prostokątny element płytowo-tarczowy klasy C^1

W tym punkcie omówimy używany do celów porównawczych prosty, niedostosowany, czterowęzłowy, płaski element prostokątny o sześciu stopniach swobody w każdym węźle (BOXe4). Podstawą sformułowania elementu jest nieliniowa teoria płyt cienkich von Kármána. Element ten opracował CHRÓŚCIELEWSKI [1983], wykorzystując i rozwijając koncepcję przedstawioną w artykułach LEE i HARRIS [1979] oraz LEE, HARRIS i HSU [1984].

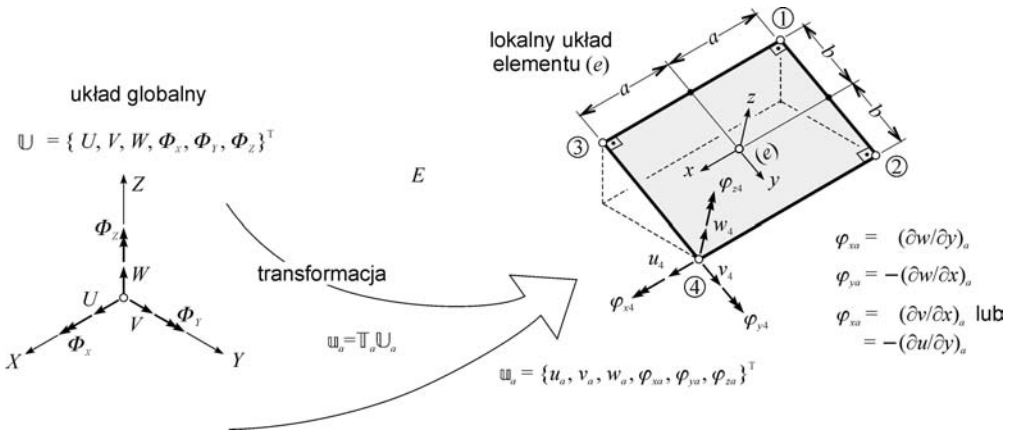
Pierwotnym zamierzeniem opracowania elementu BOXe4 było stworzenie narzędzia do nieliniowej analizy metalowych płyt uźebrowanych jako fragmentów przestrzennych prostokątnych konstrukcji płytowo-tarczowych, pracujących w zakresie umiarkowanych deformacji sprężysto-plastycznych⁶⁷. Dlatego w tym sformułowaniu nie wykorzystano bezpośrednio równań teorii płyt von Kármána, lecz trójwymiarowe zależności mechaniki ośrodków ciągłych (5.6.1) i (5.6.2), na które nałożono więzy właściwe dla teorii płyt von Kármána. Takie podejście umożliwiło analizę również deformacji niesprężystych. Zarys procedury tworzenia elementu jest następujący:

W ramach teorii płyt von Kármána zależności kinematyczne typu (5.6.3), zapisane w lokalnym kartezjańskim układzie współrzędnych $\{x_i\} \equiv \{x, y, z\}$ związanym z przestrzennie zorientowanym płatem powłoki płaskiej (płyty – tarczy), mają postać

⁶⁷W latach 80. element BOXe4 z powodzeniem stosowano do szacowania nadkrytycznej rezerwy nośności dźwigarów stalowych (zob. PIEKARCZYK [2002]).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2, & \kappa_{xx} &= -w_{,xx}, \\ \varepsilon_{yy} &= v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2, & \kappa_{yy} &= -w_{,yy}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}), & \kappa_{xy} &= -w_{,xy}.\end{aligned}\quad (5.6.10)$$

Tutaj współrzędna z wyróżnia kierunek opisujący grubość płyta. Trzy parametry $\{u_i\} \equiv \{u, v, w\}$ są składowymi pola przesunięć powierzchni środkowej płyty zgodnymi z osiami $\{x_i\} \equiv \{x, y, z\}$, odpowiednio u, v w powierzchni, zaś w w kierunku normalnym do płyta.



Rys. 5.6.3. Niedostosowany, 4-węzłowy, płaski element prostokątny o sześciu stopniach swobody w każdym węźle.

Równaniem wyjściowym do budowy elementu jest ogólna zasada wirtualnych przemieszczeń z nałożonymi więzami teorii płyt von Kármána, która w stacjonarnym opisie Lagrange'a przyjmuje postać

$$\int_B \delta e_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} dv - \int_{\partial B_f} \delta u_i t^i da = 0, \quad \alpha, \beta = x, y, \quad i = x, y, z, \quad (5.6.11)$$

gdzie $S^{\alpha\beta}$ są składowymi kartezjańskimi drugiego tensora naprężeń Pioli–Kirchhoffa w płaskim stanie naprężenia, zaś składowe t^i reprezentują wektor powierzchniowy obciążeń zewnętrznych na brzeg ∂B_f ciała B , mierzonych na jednostkę powierzchni brzegu ∂B_f konfiguracji nieodkształconej. Zgodnie z hipotezą Kirchhoffa, niezerowe składowe tensora odkształceń Greena wchodzące do (5.6.11) mają postać

$$e_{xx} = \varepsilon_{xx} + z \kappa_{xx}, \quad e_{yy} = \varepsilon_{yy} + z \kappa_{yy}, \quad e_{xy} = \varepsilon_{xy} + z \kappa_{xy}. \quad (5.6.12)$$

W przypadku materiału liniowo sprężystego i po uwzględnieniu składowych odkształceń (5.6.12), całkowanie w kierunku grubości w funkcjonale (5.6.11) wykonuje się analitycznie. W rozwiązaniu problemu nieliniowego wykorzystuje się standardową procedurę przyrostowo-iteracyjną, obowiązującą w stacjonarnym opisie Lagrange'a.

Struktura teorii, dana zależnościami (5.6.10)–(5.6.12) wskazuje, że ze względu na obecność drugiej pochodnej $w_{,\alpha\beta}$ funkcje aproksymujące pole przesunięć w winny być co najmniej klasy C^1 , podczas gdy dla pól u, v wystarczająca jest ciągłość klasy C^0 . W omawianym czterowęzłowym elemencie prostokątnym warunek ciągłości międzyelementowej dla pochodnych w nie jest jednak spełniony. Przyjmując koncepcję elementów niedostosowanych w ramach aproksymacji niejednolitej, ograniczono się do sześciu stopni swobody w każdym węźle elementu (a), zdefiniowanych jako

$$u_a, \quad v_a, \quad w_a, \quad \varphi_{xa} = (w_{,y})_a, \quad \varphi_{ya} = -(w_{,x})_a; \quad \varphi_{za} = (v_{,x})_a, \\ \text{lub alternatywnie} \quad \varphi_{za} = -(u_{,y})_a, \quad (5.6.13) \\ a = 1, 2, 3, 4.$$

Odpowiednio do (5.6.13), składniki wielomianów interpolacyjnych przyjęto w formie

$$u : 1, x, y, \quad xy, \\ v : 1, x, y, x^2, xy, \quad x^3, x^2y, \quad x^3y, \\ w : 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3, \\ \text{lub alternatywnie} \\ u : 1, x, y, \quad xy, y^2, \quad xy^2, y^3, \quad xy^3, \\ v : 1, x, y, \quad xy. \quad (5.6.14)$$

W przypadku składania struktury przestrzennej z elementów skończonych, np. obróconych względem siebie wzdłuż wspólnej krawędzi równoległej do osi⁶⁸ x , wyróżniająca kierunek postać funkcji kształtu (5.6.14)₂ zapewnia międzyelementową zgodność przesunięć v i w . Własność ta narzuca konieczność specjalnego modelowania układu przez przyjęcie osi x jako kolinearnej w układzie lokalnym i globalnym, zgodnie z kierunkiem wydłużonej części konstrukcji⁶⁹.

Pojawienie się w (5.6.13) szóstego węzłowego stopienia swobody φ_z wynika z podniesienia rzędu interpolacji pola v (lub u), co wyposaża element w dodatkowe cechy. Najistotniejszymi z nich to poprawa własności zginania w płaszczyźnie elementu i zapewnienie nieosobliwości układu równań w przypadkach łączenia

⁶⁸Alternatywnie, postać (5.6.14)₄ na u dla obrotu o kierunku osi y .

⁶⁹Dla części konstrukcji, których wydłużona forma pokrywa się z lokalnym kierunkiem osi y , używa się interpolacji alternatywnej (5.6.14)₃₋₅.

elementów współpłaszczyznowych lub obróconych w stosunku do siebie o mały kąt. Zaznaczmy, że podczas gdy φ_x i φ_y mają interpretację geometryczną małych obrotów względem odpowiednich osi, to interpretacja geometryczna obrotowego stopnia swobody φ_z , wprowadzonego tu na poziomie dyskretyzacji, nie jest oczywista.

Zakres stosowalności tego elementu jest ograniczony również prostokątnym kształtem elementu i zależnościami kinematycznymi (5.6.10), ważnymi tylko w zakresie małej początkowej nieliniowości. Ponieważ omawiane elementy są płaskimi prostokątami klasy C^1 (równania podstawowe zawierają drugie pochodne przemieszczeń), nie są one obciążone ani blokadą rozwiązań ani niestabilnością siatki podziału.

5.6.3. Płaski trójwęzłowy element powłokowy DCT

W tym punkcie omówimy, używany do celów bezpośredniego porównywania rozwiązań, płaski trójwęzłowy element trójkątny o sześciu stopniach swobody w każdym węźle. Mimo wielu znanych wad płaskich elementów powłokowych o małej liczbie stopni swobody, cieszą się one niezmiennie dużą popularnością i są chętnie stosowane w obliczeniach inżynierskich. Wynika to głównie z niskich kosztów obliczeń oraz prostoty sformułowania i interpretacji wyników, towarzyszących niskiemu rzędowi elementu. Zakres stosowalności tych elementów, mimo uproszczeń teorii na bazie których powstały, okazuje się często wystarczający do analizy wielu konstrukcji występujących w praktyce.

Różne warianty omawianego elementu oznaczonego symbolem DCT = (DKT+CST+RT)⁷⁰ są dobrze znane z literatury (zob. np. TALBOT i DHATT [1986, 1987], FAFARD, DHATT i BATOZ [1989]). Prezentowana wersja (zob. CHRÓŚCIELEWSKI, GÓRSKI i IWICKI [1995], CHRÓŚCIELEWSKI, JANCZEWSKI i JASINA [1998]) bazuje (od strony nieliniowości geometrycznej) na koncepcji elementu przedstawionej między innymi w pracach BATHE i HO [1981] oraz BATHE [1982].

Podstawą do opracowania nieliniowego elementu DCT jest sformułowanie trójwymiarowe ciała typu płaska powłoka w uaktualnionym opisie Lagrange'a (UL). Punktem wyjścia jest zasada wirtualnych przemieszczeń, zlinearyzowana w otoczeniu konfiguracji aktualnej. Po nałożeniu więzów typu T-R na kinematykę trójwymiarową otrzymujemy równanie dwuwymiarowe. Aproksymację skończeni wymiarową tego równania przeprowadzamy za pomocą płaskich trójkątnych elementów skończonych.

Zastosowanie elementów płaskich jest możliwe dopiero po wprowadzeniu pewnych uproszczeń w ramach koncepcji współobrotowego układu współrzędnych. Zakładamy małe przyrosty między konfiguracją aktualną i poszukiwaną. Pozwala

⁷⁰Nazewnictwo pochodzi z języka angielskiego: DCT — *Discrete Composed Triangle*; DKT — *Discrete Kirchhoff Triangle*; CST — *Constant Strain Triangle*, RT — *Rotational Triangle*.

to pominąć część związanych z deformacją z płaszczyzny elementu nieliniowych składników tensora odkształceń Greena–Lagrange’a, który w uaktualnionym opisie Lagrange’a jest odniesiony do konfiguracji aktualnej. Konsekwencją tego jest geometryczne rozprężenie stanu membranowego i zgięciowego (zatem sprężenie może wynikać tylko z równań konstytutywnych). Nieliniowość geometryczna z płaszczyzny elementu realizowana jest przez aktualizację związanego z elementem współbrotowego układu współrzędnych.

W rozważaniach ogólnych, w ramach uaktualnionego opisu Lagrange’a, zasadnicza trudność wynika z nietrywialnego procesu transformacji i akumulacji tensora naprężeń Cauchy’ego (poprzedzający) i przyrostu drugiego tensora naprężeń Pioli–Kirchhoffa (następujący), obu odniesionych do konfiguracji aktualnej. Przy założeniu małych deformacji względnych w obszarze elementu i odniesieniu tensorów do współbrotowego układu współrzędnych, proces transformacji i akumulacji naprężeń upraszcza się. Różne tensory naprężeń nie są tu już rozróżniane i mogą być dodawane bezpośrednio. Rozprężenie geometryczne w zakresie sprężystym stanu membranowego i zgięciowego pozwala, podobnie jak w problemie liniowym, na niezależne formułowanie macierzy elementowych tych stanów (element CST i DKT).

Rdzeniem sformułowania elementu DCT jest koncepcja aproksymacji stanu zgięciowego (element DKT). Punktem wyjścia jest tu 6-węzłowy płytowy element trójkątny typu T–R z węzłami w wierzchołkach i środkach boków. W lokalnym kartezjańskim układzie współrzędnych elementu $\{x_i\} \equiv \{x, y, z\}$, przy współrzędnej z przyjętej w kierunku grubości, trzy niezależne zmienne teorii płyt w , θ_x i θ_y interpolujemy w sposób niejednorodny: inny dla ugięcia w (interpolacja Hermite’a klasy C^1)

$$\tilde{w} = \sum_{k=1}^3 (H_k^0 w_k + H_{xk}^1 w_{,yk} - H_{yk}^1 w_{,xk}), \quad (5.6.15)$$

inny dla obrotów θ_x , θ_y (interpolacja Lagrange’a klasy C^0)

$$\tilde{\theta}_x = \sum_{i=1}^6 L_i \theta_{xi}, \quad \tilde{\theta}_y = \sum_{i=1}^6 L_i \theta_{yi}. \quad (5.6.16)$$

W (5.6.16), L_i są funkcjami kształtu 6-węzłowego elementu trójkątnego. Funkcje kształtu H_k^0 , H_{xk}^1 , H_{yk}^1 z interpolacji Hermite’a występujące w (5.6.15) mają tylko znaczenie symboliczne, ponieważ nie są bezpośrednio wykorzystywane do budowy zależności elementowych.

Koncepcja elementu DKT bazuje na sprzęgnięciu niezależnych zmiennych w i θ_x, θ_y przez więzy nałożone w węzłach ($i = 1, 2, \dots, 6$) na odkształcenia poprzeczne od ścinania

$$\gamma_{szi} = w_{,si} - \beta_{si} \equiv 0, \quad (5.6.17)$$

gdzie s jest kierunkiem obliczania pochodnej, zaś β_s kątem nachylenia włókna w płaszczyźnie $s-z$, stąd $\beta_x = -\theta_y$ i $\beta_y = \theta_x$. To podejście w literaturze nazywa się *dykretnymi więzami Kirchhoffa*.

W wyniku wprowadzenia 9 więzów tego typu oraz 3 więzów na obroty normalne w środkach boków elementu, 21 węzłowych parametrów wyjściowych z (5.6.15) i (5.6.16) redukujemy do 9 wierzchołkowych stopni swobody

$$\begin{aligned} \{\theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{x2}, \dots, \theta_{y6}\}^T = \\ = \mathbb{W}_{\theta B} \{w_1, w_{,y1}, -w_{,x1}, w_2, \dots, -w_{,x3}\}^T, \end{aligned} \quad (5.6.18)$$

gdzie $\mathbb{W}_{\theta B}$ jest macierzą więzów dyskretnych o wymiarze 12×9 .

Po sformułowaniu w terminach (5.6.16) klasycznej płytowej macierzy sztywności \mathbb{K}_θ elementu typu T-R o 12 stopniach swobody (pomijając składnik od ścinania poprzecznego, wobec $\gamma_{sz}(x, y) = w_{,s}(x, y) - \beta_s(x, y) \cong 0$), nakładamy więzy dyskretne

$$\mathbb{K}_B = \mathbb{W}_{\theta B}^T \mathbb{K}_\theta \mathbb{W}_{\theta B}, \quad (5.6.19)$$

redukując \mathbb{K}_θ do macierzy \mathbb{K}_B elementu DKT o 9 stopniach swobody $w_k, w_{,yk} \equiv \theta_{xk}, -w_{,xk} \equiv \theta_{yk}$, o węzłach tylko w wierzchołkach trójkąta $k = 1, 2, 3$.

Aproksymacja stanu tarczowego (element CST) bazuje na liniowej interpolacji Lagrange'a klasy C^0

$$\tilde{u} = \sum_{k=1}^3 L_k u_k, \quad \tilde{v} = \sum_{k=1}^3 L_k v_k, \quad (5.6.20)$$

gdzie $L_k, k = 1, 2, 3$, są funkcjami kształtu tożsamymi z naturalnymi współrzędnymi powierzchniowymi trójkąta. Interpolacja (5.6.20) prowadzi do klasycznego elementu tarczowego \mathbb{K}_M o 6 translacyjnych stopniach swobody $u_k, v_k, k = 1, 2, 3$, charakteryzującego się stałymi odkształceniami w obszarze całego elementu CST.

W celu uniknięcia złego uwarunkowania lub osobliwości globalnej macierzy sztywności konstrukcji przestrzennych, pojawiającej się przy łączeniu elementów leżących lub prawie leżących w jednej płaszczyźnie dowolnie zorientowanej w przestrzeni, dodajemy fikcyjną sztywność K_{zk} bezpośrednio do węzłów $k = 1, 2, 3$. Sztywność K_{zk} może być określona np. według reguły $K_{zk} = \alpha \min(\text{diag } \mathbb{K}_B)$, gdzie współczynnik α zwyczajowo przyjmuje się $\alpha = 0.0001$. Sztywności K_{zk} , sprzężone z szóstym obrotowym stopniem swobody θ_{zk} normalnym do płaszczyzny elementu, tworzą element RT o diagonalnej macierzy sztywności obrotowej \mathbb{K}_{RT} z trzema obrotowymi stopniami swobody.

Równania konstytutywne w zakresie liniowo sprężystym, zgodnie z przyjętymi założeniami, są rozprężone i przyjmują postać zamkniętych wzorów, wyrażonych przez sztywności tarczową i płytową.

W ogólnym przypadku wynikowa macierz sztywności elementu DCT przyjmuje następującą postać symboliczną:

$$\mathbb{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_M & \mathbb{K}_{MB} & \mathbb{O} \\ \mathbb{K}_{MB}^T & \mathbb{K}_B & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{K}_{RT} \end{bmatrix}, \quad (5.6.21)$$

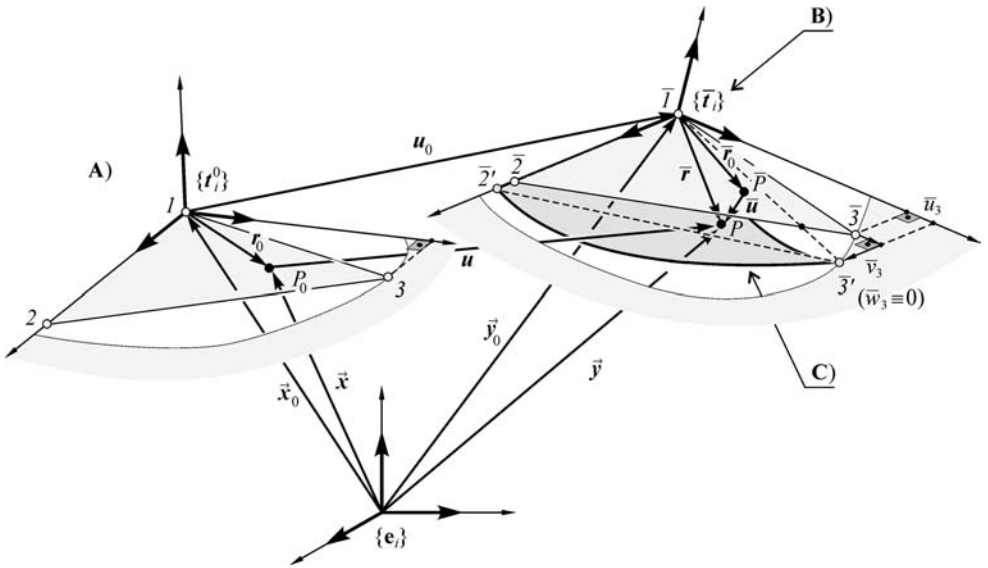
gdzie różna od zera macierz \mathbb{K}_{MB} o wymiarze 6×9 , sprzęgająca stan membranowy ze zgięciowym, pojawia się tylko w przypadku analizy sprężysto-plastycznej⁷¹.

W wymienionych wcześniej pracach powyższe zależności sformułowania liniowego elementów odnośzone są do lokalnego współbrotowego ortogonalnego układu współrzędnych $\{\bar{\mathbf{t}}_i\}$, $i = 1, 2, 3$, w konfiguracji aktualnej elementu. W przypadku elementu trójkątnego, baza $\{\bar{\mathbf{t}}_i\}$ jest jednoznacznie określona przez przesunięcia trzech węzłów narożnych \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 i \mathbf{u}_3 . W przypadku dużych przemieszczeń baza $\{\bar{\mathbf{t}}_i\}$ rotuje wraz z elementem. Wtedy podstawowym źródłem nieliniowości geometrycznej jest transformacja macierzy elementowych (5.6.21) z zależnego od rotacji układu lokalnego $\bar{\mathbf{t}}_i = \bar{\mathbf{t}}_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ do stałego układu globalnego $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, 3$. Ponadto, uwzględnienie zmian powierzchni elementu wprowadza, poprzez definicję odkształceń, dodatkową nieliniowość geometryczną w stanie czysto membranowym.

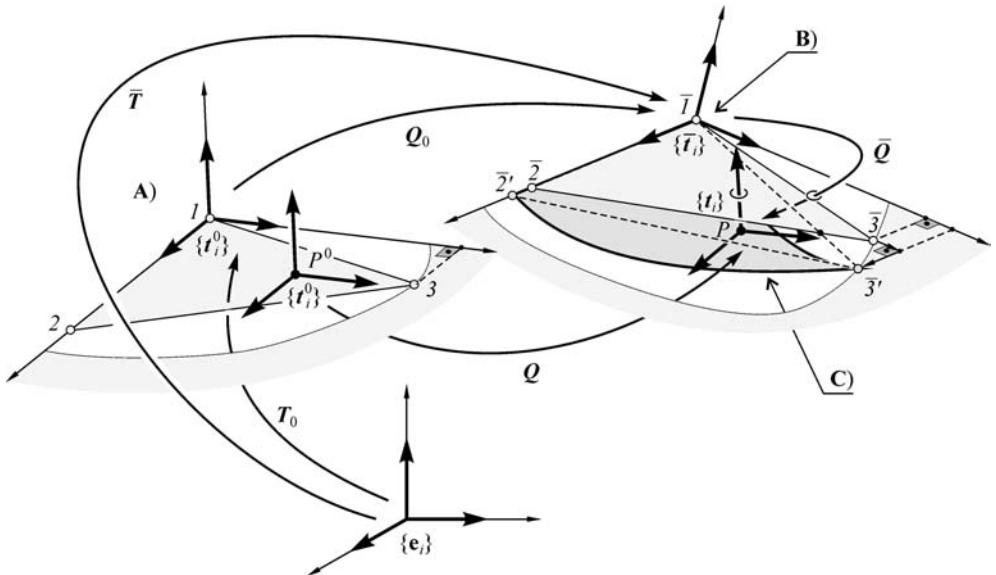
Modyfikację opisanego powyżej podejścia zawarto w pracy JASINA [2003]. Zmodyfikowany element typu DCT = (AT+DKT) jest złożeniem stanu tarczowego, wykorzystującego *niekonwencjonalną interpolację Allmana* (element AT, por. ALLMAN [1984]), nie wymagającą wprowadzenia fikcyjnej sztywności K_{zk} , oraz stanu zgięciowego otrzymanego na bazie omawianych wcześniej dyskretnych więzów Kirchhoffa (DKT). Opis dużych przemieszczeń, w ramach nieliniowego sformułowania korotacyjnego trójwęzłowego płaskiego elementu powłokowego, oparto na formalnym uwzględnieniu skończonych obrotów (por. NOUR-OMID i RANKIN [1991], PACOSTE [1998], ERIKSSON i PACOSTE [2002]).

Podstawą obliczania sił wewnętrznych jest wektor małych względnych przemieszczeń $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{Q}})$ w układzie $\{\bar{\mathbf{t}}_i\}$ korotującym z elementem (rys. 5.6.4 i 5.6.5). Stały dla elementu układ $\{\bar{\mathbf{t}}_i\}$, związany z węzłem (1), podlega dużym przemieszczeniom $\mathbf{u}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{Q}_0)$, tj. przesunięciom $\bar{\mathbf{y}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{u}_0$ (rys. 5.6.4) i obrotom $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{T}_0$ (rys. 5.6.5). Koncepcję przyjętego sformułowania korotacyjnego dla przesunięć $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}_0 - \bar{\mathbf{r}}_0$ przedstawiono na rys. 5.6.4, zaś dla

⁷¹W zakresie sprężysto-plastycznym tensor materiałowy nie pozostaje stały i wymagane jest całkowanie numeryczne przy obliczaniu macierzy elementowych. Przekrojowe relacje konstytutywne i uogólnione siły przekrojowe oblicza się na drodze całkowania warstw po grubości powłoki, w których, zgodnie z uogólnioną hipotezą Kirchhoffa, obowiązuje płaski stan naprężeń. Całkowanie przeprowadza się kwadraturą Gaussa, stosując reguły 3- lub 7-punktowe w płaszczyźnie oraz do 10 punktów po grubości powłoki. Konsekwencją nieliniowych zmian sprężysto-plastycznych współczynników materiałowych po grubości elementu jest pojawienie się macierzy \mathbb{K}_{MB} .



Rys. 5.6.4. Geometria i kinematyka elementu: przesunięcia punktu P z obszaru elementu, **A)** baza i konfiguracja początkowa, **B)** sztywny układ korotujący, **C)** zdeformowana konfiguracja aktualna.



Rys. 5.6.5. Geometria i kinematyka elementu: obroty związane z punktem P z obszaru elementu powłokowego, **A)** baza i konfiguracja początkowa, **B)** sztywny układ korotujący, **C)** odkształcona konfiguracja aktualna.

obrotów $\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{T}} \overline{\mathbf{Q}} \overline{\mathbf{T}}^T$, gdzie $\overline{\mathbf{Q}} \equiv \overline{\mathbf{T}}^T \mathbf{Q} \mathbf{T}_0$, przedstawiono na rys. 5.6.5. W JASINA [2003], poza określeniem kinematyki elementu, wyprowadzono operator projekcji, którego zadaniem jest wydzielenie czystej deformacji poprzez odfiltrowanie z uogólnionych przemieszczeń elementu składników ruchu ciała sztywnego. Podano również konstrukcję macierzy transformacji elementowych.

Zastosowanie kolejnych standardowych kroków metody elementów skończonych prowadzi do typowego w nieliniowych zagadnieniach statyki równania globalnego

$$\mathbb{K}_T \Delta \mathbf{u} = \Delta \lambda \mathbf{p}_{\text{ref}} + \mathbf{z}_j. \quad (5.6.22)$$

Równanie (5.6.22), łącznie z regułą akumulacji uogólnionych przemieszczeń $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} \oplus \Delta \mathbf{u}$, stanowi podstawę przyrostowo-iteracyjnej procedury rozwiązywania wyjściowego problemu nieliniowego.

Badania własne potwierdziły znany z literatury fakt, że w przypadku układów sprężystych, w zachowaniu których dominuje stan zgięciowy, elementy DCT dobrze opisują nieliniowość geometryczną, pod warunkiem stosowania dostatecznie gęstej dyskretyzacji. Z drugiej strony, w przypadku dominacji stanu membranowego w opisie zachowania konstrukcji, elementy te w porównaniu do opisu stanu zgięciowego wykazują stosunkowo słabą zbieżność, szczególnie w opisie zachowania nieliniowego⁷².

⁷²Sytuacja ta pogarsza się jeszcze w zakresie analizy sprężysto-plastycznej.

Przykłady liczbowe

6.1. Równania konstytutywne liniowo sprężystych powłok cienkich

6.1.1. Uwagi wstępne

W tym rozdziale przedstawimy rozwiązania numeryczne szeregu przykładów konstrukcji powłokowych. Analizując te zadania, testujemy i ilustrujemy 6-parametrową mechanikę powłok regularnych i wielopłatowych, koncepcje formułowania odpowiednich elementów skończonych oraz opracowane programy numeryczne.

Rozważamy liniowe i nieliniowe zadania statyki, stateczności i dynamiki powłok sprężystych w zakresie małych odkształceń. Specyfikacja równań konstytutywnych i katalog testowanych elementów skończonych podane są w tym i następnym podrozdziale. Analizowane zadania obejmują zarówno standardowe przykłady testowe, znane z literatury, jak i badania aspektów numerycznych, mających jedynie szczątkowe odzwierciedlenie w literaturze. Przedstawiamy również szereg własnych oryginalnych rozwiązań zadań mechaniki powłok¹.

W przypadku statyki powłok rozwiązania problemów nieliniowych prezentujemy głównie w postaci wybranych krzywych typu ścieżek równowagi. W przypadku dynamiki powłok sytuacja jest znacznie bardziej złożona. Dlatego wyniki przedstawiamy albo w postaci funkcji, obrazujących zmiany w czasie charakterystycznych parametrów układu dynamicznego, albo w postaci trajektorii ruchu wybranych punktów w przestrzeni fizycznej lub podprzestrzeni fazowej.

Za punkt odniesienia, gdy jest to możliwe, przyjmujemy rozwiązania uzyskane przez innych autorów, zwykle odtworzone tutaj z postaci graficznej przedstawianej w dostępnych publikacjach. Niestety, odtworzone w ten sposób wyniki są obarczone błędem odczytu (dokładność „rysunkowa”). Ponadto, wybrane pojedyncze krzywe dostępne w literaturze zawierają często zbyt ubogą informację, nie oddającą całej złożoności analizowanego zadania. Z tych powodów, materiał porównawczy rozszerzamy również o rozwiązania własne, otrzymane za pomocą podobnych własnych lub dostępnych innych sformułowań elementów skończonych. Do większości rozwiązań własnych, poza prezentacją graficzną, dodajemy

¹Zob. np. MAKOWSKI [1981], CHRÓŚCIELEWSKI [1983, 1996], NOLTE, MAKOWSKI i STUMPF [1986], CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i STUMPF [1992, 1994, 1997], CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i PIETRASZKIEWICZ [2000, 2002], LUBOWIECKA i CHRÓŚCIELEWSKI [2002], CHRÓŚCIELEWSKI, LUBOWIECKA i PIETRASZKIEWICZ [2004].

również wyniki liczbowe w postaci tabelarycznej uznawane za reprezentatywne lub charakterystyczne dla analizowanego przykładu.

Efektywność algorytmu całkowania po czasie omówionego w podrozdziale 4.6 ilustrujemy przykładami dynamicznej analizy konstrukcji głównie w ruchu swobodnym bez udziału sił grawitacyjnych. W analizie dynamicznej stosujemy elementy przemieszczeniowe 16- i 9-węzłowe całkowane w sposób pełny (FI). Wyniki otrzymano używając uogólnionego schematu Newmarka (p. 4.6.4) ze stałymi $\beta = 1/4$ i $\gamma = 1/2$.

6.1.2. Równania konstytutywne powłoki liniowo sprężystej

Powłoka liniowo sprężysta jest modelowana przez przyjęcie liniowej zależności między przekrojowymi miarami naprężeń \mathbf{s} a powłokowymi miarami odkształceń² $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Określenie *powłoka sprężysta* wskazuje, że rozpatrywana klasa równań konstytutywnych zależy jedynie od stanu aktualnego powłoki, a nie od historii jej deformacji. Rozwiązania numeryczne ograniczamy do *prostych*³ *powłok sprężystych*. Ponadto przyjmujemy, że początkowa konfiguracja powłoki jest jej nieodkształconym stanem naturalnym.

Równanie konstytutywne powłoki liniowo sprężystej ma postać

$$\mathbf{s} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbb{C} = \text{const.} \quad (6.1.1)$$

Tu \mathbf{s} i $\boldsymbol{\varepsilon}$ są uogólnionymi wektorami miar naprężeń i odkształceń zdefiniowanymi w p. 4.1.5, natomiast \mathbb{C} jest niezależną od deformacji macierzą konstytutywną o wymiarze 12×12 , zawierającą stałe materiałowe i charakterystyki geometryczne powłoki. Pojawienie się w \mathbb{C} charakterystyk geometrycznych powłoki odróżnia dwuwymiarowe powłokowe równania konstytutywne od analogicznych zależności trójwymiarowych.

W ogólnym przypadku \mathbb{C} jest macierzą pełną. Istotne uproszczenia w strukturze macierzy konstytutywnej \mathbb{C} (np. zerowanie się dużej liczby składników) są możliwe przy wykorzystaniu dodatkowych założeń, np. o cienkości powłoki oraz/lub jednorodności i izotropii materiału. Uproszczenia te implikują częściową separację pewnych stanów deformacji, wynikającą z samych zależności fizycznych.

Pojęcie izotropii w dwuwymiarowych równaniach konstytutywnych rozumiane jest tutaj analogicznie do izotropii ciała trójwymiarowego⁴. Równania

²W sensie liniowości fizycznej, bez założenia liniowości geometrycznej.

³Termin *powłoka prosta* wskazuje, że rozpatrywana klasa równań konstytutywnych zależy tylko od uogólnionych miar odkształceń, a nie zależy od ich pochodnych. Zaznaczmy, że powłokowe równania konstytutywne, odpowiadające trójwymiarowym równaniom konstytutywnym materiału prostego, nie muszą pozostać prostymi w sensie powierzchniowym.

⁴Np. trójwymiarowa powłoka warstwowa, po wprowadzeniu odpowiednich równań konstytutywnych, może spełniać powierzchniowy warunek izotropii. Z drugiej strony, w wyniku występowania wielkości geometrycznych w definicji powierzchniowych równań konstytutywnych powłok, mogą one zatracić własność zarówno izotropii jak i jednorodności materiału trójwymiarowego.

konstytutywne cienkiej izotropowej powłoki liniowo sprężystej, zapisane w składowych fizycznych, przyjmujemy w postaci

$$\begin{aligned}
 N^{11} &= C (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), & N^{22} &= C (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\
 N^{12} &= C (1 - \nu) \varepsilon_{12}, & N^{21} &= C (1 - \nu) \varepsilon_{21}, \\
 Q^1 &= \frac{1}{2} \alpha_s C (1 - \nu) \varepsilon_1, & Q^2 &= \frac{1}{2} \alpha_s C (1 - \nu) \varepsilon_2, \\
 M^{11} &= D (\kappa_{11} + \nu \kappa_{22}), & M^{22} &= C (\kappa_{22} + \nu \kappa_{11}), \\
 M^{12} &= D (1 - \nu) \kappa_{12}, & M^{21} &= D (1 - \nu) \kappa_{21}, \\
 M^1 &= \alpha_t D (1 - \nu) \kappa_1, & M^2 &= \alpha_t D (1 - \nu) \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$C = \frac{E h_0}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{E h_0^3}{12(1 - \nu^2)}. \tag{6.1.3}$$

Tutaj h_0 jest grubością powłoki w konfiguracji odniesienia, E – modułem Younga, ν – współczynnikiem Poissona, zaś α_s i α_t są, odpowiednio, współczynnikami ścinania i owinięcia⁵, które są również stałymi konstytutywnymi w sensie przekrojowym.

6.1.3. Dyskusja relacji konstytutywnych

Relacje (6.1.2) są najprostszym przykładem powłokowych równań konstytutywnych w ramach ogólnej teorii powłok, ujmujących zarówno owinięcie jak i momenty owinięcia oraz sprzężone energetycznie zginania owinięcia. Nawiązują one do klasycznej teorii powłok typu Timoszenko–Reissnera, z istotnym proponowanym tutaj rozszerzeniem o równania konstytutywne zawierające współczynnik owinięcia α_t . Tego typu równania konstytutywne, ale bez wyróżnienia współczynnika owinięcia, sugerowano już w literaturze (np. REISSNER [1974, 1982], LIBAI i SIMMONDS [1983], WAN i WEINITSCHE [1988]). Odpowiednie rozwiązania numeryczne przykładów testowych powłok, z uwzględnieniem równań konstytutywnych (6.1.2), nie są jednak przedstawiane w literaturze, poza pracami zespołów badawczych z udziałem autorów⁶.

W równaniach (6.1.2) występują dwa współczynniki konstytutywne: α_s i α_t . Obecność obu współczynników jednocześnie nie jest przypadkowa. W propono-

⁵Za BURZYŃSKI [1949] — przez analogię do mechaniki prętów — do trzeciego, normalnego do powierzchni podstawowej parametru obrotu także dla płyt i powłok proponujemy stosowanie nazwy *owinięcie*. Do wszystkich wielkości związanych z owinięciem proponujemy nazwy: α_t – *współczynnik owinięcia*, κ_α – *zginanie owinięcia*, M^α – *moment owinięcia*.

⁶Np. CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i STUMPF [1992, 1994, 1997], CHRÓŚCIELEWSKI [1996], CHRÓŚCIELEWSKI, MAKOWSKI i PIETRASZKIEWICZ [2000, 2002], LUBOWIECKA [2001], LUBOWIECKA i CHRÓŚCIELEWSKI [2002], SZYMCZAK, CHRÓŚCIELEWSKI i LUBOWIECKA [2003].

wanej 6-parametrowej teorii powłok uogólnione miary naprężeń i odkształceń wprowadzono w diametralnie różny sposób. Miary naprężeń \mathfrak{s} , w postaci przekrojowych sił i momentów, zdefiniowano w sposób ścisły przez całkowanie po grubości powłoki rozkładu naprężeń trójwymiarowych (p. 1.3.4). Natomiast powłokowe miary odkształceń $\mathfrak{\epsilon}$ wprowadzono już na poziomie dwuwymiarowym, jako energetycznie sprzężone pola powierzchniowe występujące w gęstości efektywnej mocy naprężeń powłoki (p. 1.7.6). Dlatego takie powłokowe miary odkształceń nie mają jednoznacznej interpretacji trójwymiarowej. Pewną interpretację trójwymiarową miar odkształceń $\mathfrak{\epsilon}$ można uzyskać np. po przyjęciu dodatkowych trójwymiarowych więzów kinematycznych. Zależnie od wyboru takich więzów wartości liczbowe współczynników α_s i α_t będą również ulegały zmianie.

Współczynnik na ścinanie α_s był przedmiotem wielu analiz i jego sens fizyczny w ramach mechaniki prętów oraz płyt i powłok jest dobrze ugruntowany. Typowe wartości α_s są znane, oscylują one nieznacznie w otoczeniu 1. Dla płyt i powłok zmieniają się one od $\pi^2/12$ do 1 (najczęściej przyjmowana jest wartość $5/6$) w zależności od przyjętego kryterium, por. np. GRIGOLJUK i SELEZOW [1973], JEMIELITA [2001] (oraz np. RYCHTER [1987], JANECKI [1998] w kontekście liniowej teorii belek).

Nowym w literaturze jest konstytutywny współczynnik owinięcia α_t . Wprowadzono go na potrzeby rozwiniętej w tej książce 6-parametrowej teorii powłok. Oszacowania wskazują, że gdy założenia więzów kinematycznych typu T–R są spełnione, to wkład do energii odkształcenia sprężystego członów zawierających zginania owinięcia κ_1 i κ_2 jest na ogół mały. Dlatego, po przyjęciu w (6.1.2)₆ na podstawie analogii wymiarowej mnożnika $D(1 - \nu)$, wartość α_t może wahać się jednostronnie w bardzo szerokim zakresie. Wobec braku dotychczas podstaw teoretycznych do określenia wartości α_t z badań trójwymiarowych, rola współczynnika owinięcia α_t będzie badana numerycznie⁷. Będziemy analizowali wpływ wartości α_t zarówno z punktu widzenia fizyki, tj. jego wkładu do wartości momentów owinięcia M^1 i M^2 , jak i od strony ogólnego uwarunkowania rozwiązania numerycznego, tj. jego wpływu na stabilność aproksymacji skończenie elementowej.

Związki konstytutywne (6.1.2) można rozpatrywać jako uogólnienie klasycznych równań konstytutywnych cienkich izotropowych powłok liniowo sprężystych. W szczególności, po symetryzacji (6.1.2) i założeniu $\alpha_t = 0$ uzyskuje się klasyczne równania konstytutywne teorii powłok typu Timoszenko–Reissnera. Należy więc oczekiwać, że rozwiązania uzyskane z wykorzystaniem równań (6.1.2) będą zgodne z rozwiązaniami, otrzymanymi w ramach teorii klasycznych prezentowanych w literaturze. Uzasadnia to przyjęcie takiej a nie innej ich postaci w (6.1.2).

⁷W pracy EBERLEIN i WRIGGERS [1999] konstytutywny współczynnik owinięcia α_t błędnie zinterpretowano jako parametr kary, a szeroki zakres badań jego wpływu potraktowano jako silną zależność rozwiązania od α_t . Nie zauważono, że w zakresie od 10^{-10} do 100 (12 rzędów zmienności) rozwiązania w przemieszczeniach praktycznie nie różnią się (zob. rys. 6.8.8 i 6.8.9).

6.1.4. Kinetyczne równania konstytutywne

W rozwiązaniach zadań dynamiki powłok przyjmujemy następujące postacie rozprężonych kinetycznych równań konstytutywnych, wiążących wektory pędu i momentu pędu z odpowiednimi wektorami prędkości translacyjnej i kątownej:

$$\mathbf{p} = \mathbf{J}_1 \mathbf{v}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}, \quad (6.1.4)$$

gdzie

$$\mathbf{J}_1 = m_0 \mathbf{1}, \quad \mathbf{J}_2 = I_0 \mathbf{1}, \quad (6.1.5)$$

są izotropowymi tensorami konstytutywnymi (por. LIBAI i SIMMONDS [1998]).

W (6.1.5), m_0 jest gęstością masy a I_0 skalarnym współczynnikiem bezwładności przekroju poprzecznego powłoki, mierzonymi na jednostkę powierzchni podstawowej powłoki w konfiguracji odniesienia. Do celów obliczeniowych współczynniki m_0 i I_0 są określone jako stałe przekrojowe, niezależne od ruchu

$$m_0 = \rho_0 h_0, \quad I_0 = \frac{\rho_0 h_0^3}{12}, \quad (6.1.6)$$

gdzie h_0 jest początkową grubością powłoki, a ρ_0 jest gęstością masy na jednostkę objętości konfiguracji odniesienia powłoki traktowanej jako ciało trójwymiarowe.

6.2. Katalog elementów skończonych, oznaczenia w przykładach

6.2.1. Rodziny sześcioparametrowych elementów skończonych CAM, CAM- γ , ASC, MIX, SEM

Prezentowane w tym rozdziale rozwiązania otrzymano przy użyciu rodziny powłokowych elementów skończonych klasy C^0 , sformułowanych według koncepcji przedstawionych w rozdziale 5. W ramach wszystkich sformułowań opracowano elementy skończone 4- i 9-węzłowe, a w sformułowaniu przemieszczeniowym także element skończony 16-węzłowy⁸.

Podstawowa przemieszczeniowa wersja autorskiego programu CAM ujmuje również elementy z pośrednią liczbą 5–8 i 10–15 węzłów⁹ na bazie kwadratu¹⁰ oraz 3–14 węzłów na bazie trójkąta. Wszystkie wyrażenia funkcji interpolacyjnych elementów CAM¹¹ o liczbie węzłów od 3 do 16 ujęto w jednym podprogramie, operującym sterowaną danymi techniką „dodawania i uzupełniania” funkcji kształtu (zob. np. BATHE [1982, 1996]).

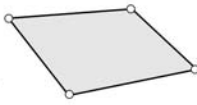
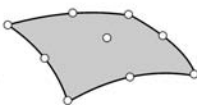
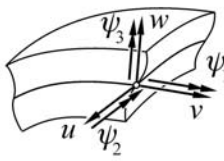
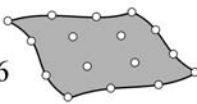
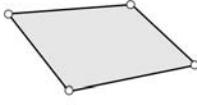
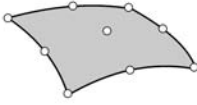
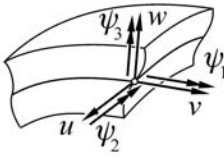
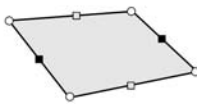
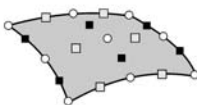
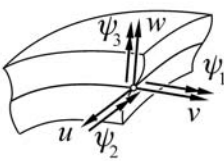
⁸W przypadku elementów przemieszczeniowych, są to elementy typu Lagrange'owskiego. Termin ten pochodzi od sposobu interpolacji przemieszczeń (ZIENKIEWICZ [1972]).

⁹Wobec braku odpowiedników tych elementów w sformułowaniach alternatywnych (CAM- γ , ASC, MIX, SEM), a także ze względu na pewną ich egzotyczność, rozwiązania uzyskane z użyciem tych elementów nie są tutaj prezentowane.

¹⁰Tzw. *elementy serendipowskie* (ZIENKIEWICZ [1972]).

¹¹Także elementów zdegenerowanych SEL (zob. p. 5.6.1).

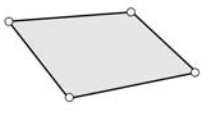
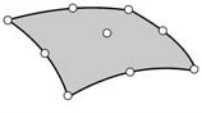
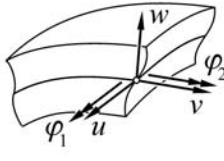
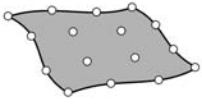
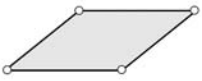
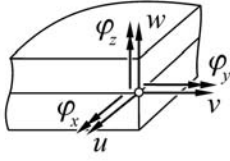
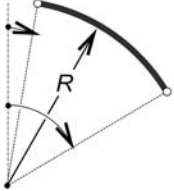
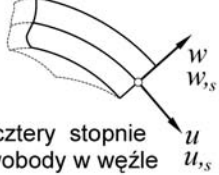
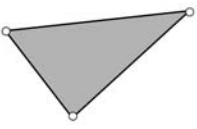
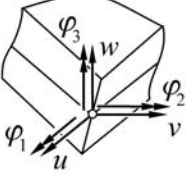
W obliczeniach macierzy elementowych używamy całkowania pełnego (FI) we wszystkich wersjach programu. W sformułowaniu przemieszczeniowym CAM, poza całkowaniem pełnym (FI), używamy także całkowania jednolicie zredukowanego (URI) (zob. p. 5.2.13) lub selektywnie zredukowanego (SRI) (zob. p. 5.2.15).

Oznaczenie elementu, liczba węzłów	Węzłowe stopnie swobody	Sformułowanie, reguła całkowania	
CAMe4 	sześć stopni swobody w węźle	Sformułowanie przemieszczeniowe. Całkowanie: pełne (FI), jednolicie zredukowane (URI), selektywnie zredukowane (SRI).	
CAMe9 		CAMe4- γ i CAMe9- γ ; γ -stabilizacja postaci pasywnych w przypadku całkowania jednolicie zredukowanego (URI).	
CAMe16 			
MIXe4 SEMe4 		sześć stopni swobody w węźle	MIX - sformułowanie mieszane. SEM - sformułowanie (semi) częściowo mieszane.
MIXe9 SEMe9 		m_0, m_1, m_2 - modele interpolacji niezależnych naprężeń/odkształceń.	
ASCe4  ■ - punkty pomiarowe		sześć stopni swobody w węźle	Dwustopniowa interpolacja odkształceń.
ASCe9  ■ - punkty pomiarowe			

Rys. 6.2.1. Katalog stosowanych elementów: część A – sześcioparametrowa teoria powłok.

W elementach CAM- γ całkowanie jednolicie zredukowane (URI) wspomagane jest γ -stabilizacją form pasożytniczych (zob. p. 5.2.16).

Podstawowe własności stosowanych elementów skończonych podano na rys. 6.2.1 i rys. 6.2.2.

Oznaczenie elementu, liczba węzłów	Węzłowe stopnie swobody	Sformułowanie, reguła całkowania
SELe4 	pięć stopni swobody w węźle	Standardowe elementy zdegenerowane, sformułowanie przemieszczeniowe. Całkowanie: pełne (FI), jednolicie zredukowane (URI), selektywnie zredukowane (SRI).
SELe9 		SELe4- γ i SELe9- γ ; γ -stabilizacja postaci pasożytniczych w przypadku całkowania jednolicie zredukowanego (URI).
SELe16 		
BOXe4 	sześć stopni swobody w węźle 	Płaski 4-węzłowy element prostokątny klasy C^1 według teorii płyt cienkich von Kármána. 3x3 punkty całkowania kwadraturą Gaussa.
RINGe2 	cztery stopnie swobody w węźle 	Obrotowo-symetryczny element 2-węzłowy klasy C^1 według teorii skończonych obrotów powłok cienkich. 3 punkty całkowania kwadraturą Gaussa.
CATe3 ALFe3 	sześć stopni swobody w węźle 	Płaski 3-węzłowy element trójkątny typu DCT. Macierz sztywności składa się z: - sztywności tarczowej, - sztywności zgięciowej, - sztywności obrotowej (normalnej). 7 punktów całkowania kwadraturą Gaussa.

Rys. 6.2.2. Katalog stosowanych elementów: część B – inne sformułowania teorii powłok.

6.2.2. Elementy mieszane MIX i częściowo mieszane SEM

Dobór bazy wielomianów interpolacyjnych, występujących w macierzy kształtu \mathbb{P} dla modeli mieszanych i częściowo mieszanych, jest kluczowym problemem decydującym o jakości tych elementów (zob. p. 5.3.9). Zasadniczym celem jest znalezienie takiej bazy wielomianów interpolacyjnych, aby możliwe było utworzenie elementu wolnego (w ogólnym przypadku dyskretyzacji i deformacji) od blokady i form pasożytniczych, przy nieograniczonym rzędzie całkowania numerycznego¹².

Kierując się nadmienioną przesłanką, zbiór poszukiwanych jednomianów, tworzących bazę funkcji aproksymacji jednolitej, można ograniczyć od góry i od dołu. Pod pojęciem ograniczenia „od góry” tego zbioru rozumiemy maksymalny podzbiór jednomianów najniższego rzędu, z których utworzona funkcja aproksymująca na pewno wywoła efekt blokady. Odpowiednio, pod pojęciem ograniczenia „od dołu” rozumiemy minimalny podzbiór jednomianów najwyższego rzędu, z których utworzonej funkcji aproksymującej na pewno towarzyszą jeszcze formy pasożytnicze¹³.

Wprowadzamy nazwy „model 0, 1 lub 2” dla trzech charakterystycznych funkcji aproksymujących niezależne pola naprężeń/odkształceń w kontekście rzędu i formy bazy wielomianów. Zbiorom jednomianów wchodzących do funkcji aproksymacyjnych, zależnie od elementu i modelu, przypisujemy etykietę dolną w postaci $eK - m$, gdzie eK oznacza element K -węzłowy, a m oznacza model funkcji aproksymacyjnej. Rozważamy tylko elementy 4- i 9-węzłowe ($K = 4$ i $K = 9$).

Model 0 i model 2 są przypadkami skrajnymi w interpolacji jednolitej. Charakteryzują je następujące zbiory jednomianów:

w modelu 0

$$\begin{aligned} w_{e4-0} &= \{1, \xi^1, \xi^2, \xi^1\xi^2\}, \\ w_{e9-0} &= \{1, \xi^1, \xi^2, (\xi^1)^2, \xi^1\xi^2, (\xi^2)^2, (\xi^1)^2\xi^2, \xi^1(\xi^2)^2, (\xi^1\xi^2)^2\}, \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

w modelu 2

$$w_{e4-2} = \{1\}, \quad w_{e9-2} = \{1, \xi^1, \xi^2, \xi^1\xi^2\}. \quad (6.2.2)$$

Zauważmy, że z dokładnością do stałych zachodzi tu $w_{e9-2} = w_{e4-0}$ oraz $\partial^2(w_{eK-0})/\partial\xi^1\partial\xi^2 \Rightarrow w_{eK-2}$. Model 0 jest tu najniższym, w którym występuje

¹²Ten warunek jest istotny przy analizie powłok wykonanych z materiałów fizycznie nieliniowych, szczególnie niesprężystych. Wtedy zmienność cech materiału w funkcji uogólnionej deformacji jest często bardziej złożona od samej deformacji (np. lokalne strefy uplastycznienia, utrata stateczności materiału itp., zob. np. WEICHERT [1987]). Dlatego przy ograniczeniu rzędu całkowania od góry, jak ma to miejsce w całkowaniu zredukowanym (URI, SRI, URI + filtracja), może dojść do sprzeczności polegającej na stosowaniu uboższej aproksymacji do bardziej złożonych funkcji materiału przez punkty całkowania i odwrotnie — modelowaniu uboższej deformacji przez bogatsze funkcje kształtu.

¹³Pomocne są tutaj rzędy funkcji i kwadratur, odpowiadające całkowaniu pełnemu i zredukowanemu.

efekt blokady, zaś model 2 najwyższym na pewno obciążonym formami pasożytniczymi. Zatem różnica odpowiednich zbiorów (6.2.1) i (6.2.2) tworzy racjonalną kolekcję składników, które bierzemy pod uwagę w poszukiwaniu modeli pośrednich¹⁴. Oba modele 0 i 2 elementów skończonych, wobec stosowania interpolacji jednolitej nie wyróżniającej kierunku, nie są wrażliwe na nieregularności siatki dyskretyzacyjnej.

Model 1, preferowany w obliczeniach przedstawionych w tym rozdziale, operuje interpolacją niejednolitą:

$$w_{e4-1} = \begin{cases} w_{e4-1}^I = \{1, \xi^2\}, \\ w_{e4-1}^{II} = \{1, \xi^1\}, \end{cases} \quad (6.2.3)$$

$$w_{e9-1} = \begin{cases} w_{e9-1}^I = \{1, \xi^1, \xi^2, \xi^1\xi^2, (\xi^2)^2, \xi^1(\xi^2)^2\}, \\ w_{e9-1}^{II} = \{1, \xi^1, \xi^2, \xi^1\xi^2, (\xi^1)^2, (\xi^1)^2\xi^2\}. \end{cases}$$

W wyrażeniach (6.2.3) wprowadzono etykietę górną $\alpha = I, II$, aby wyróżnić kierunek poszczególnych składowych interpolacji niejednolitej¹⁵. Model (6.2.3) interpolacji niejednolitej najczęściej pojawia się w literaturze dotyczącej formułowania elementów dwupolowych. Dlatego można go uznać za klasyczny¹⁶. Ponieważ interpolacja (6.2.3) jest niejednolita i wyróżniająca kierunek, w przypadku bezpośredniego¹⁷ jej użycia w macierzy \mathbb{P} elementu skończonego (zob. (5.3.50)) będzie ona powodować jego wrażliwość na nieregularności siatki dyskretyzacyjnej.

6.2.3. Elementy wspomagające SEL, BOX, RING

Bibliotekę autorskiego programu SEL tworzy rodzina elementów powłokowych klasy C^0 o zmiennej liczbie węzłów, oparta na standardowej koncepcji degeneracji (zob. p. 5.6.1). Elementy te mają po pięć stopni swobody w każdym węźle.

W programie BOX używamy 4-węzłowego, niedostosowanego, płaskiego elementu prostokątnego klasy C^1 według teorii płyt von Kármána (zob. p. 5.6.2). Ten element, w wyniku wzbogacenia funkcji interpolacyjnych stanu tarczowego, ma po sześć stopni swobody w każdym węźle. Umożliwia to analizę konstrukcji złożonych z płyt prostokątnych.

¹⁴Podobny sposób poszukiwania funkcji aproksymujących użyto np. w KEMP, CHO i LEE [1998].

¹⁵Tak utworzone w_{eK-1}^α są już zbiorami dwumianów (w odróżnieniu od modelu 0 i 2).

¹⁶Por. np. YAMADA i KIKUCHI [1991], RENGARAJAN, AMINPOUR i KNIGHT [1995], SANSOUR i BOCKO [1998].

¹⁷Aby uniknąć wrażliwość na nieregularności siatki dyskretyzacyjnej, wskazane jest tu zastosowanie odpowiednika tzw. triku Taylora (zob. TAYLOR, BERESFORD i WILSON [1976]). Trik ten stosowany jest w elementach niedostosowanych i w elementach mieszanych o wzbogaconych polach odkształceń (zob. np. SIMO i RIFAI [1990]). Polega on na odpowiedniej transformacji pochodnych przemieszczeń lub odkształceń z użyciem macierzy Jacobiego, obliczanej tylko w punkcie centralnym.

Program RING (CHRÓŚCIELEWSKI i BRANICKI [1989]) wykorzystuje obrotowo-symetryczny element dwuwęzłowy klasy C^1 (MAKOWSKI [1981], NOLTE [1983]) według teorii umiarkowanych, dużych lub skończonych obrotów¹⁸.

6.2.4. Oznaczenia wyników obliczeń

W celu ujednoczenia prezentacji wyników obliczeń numerycznych, w podanych dalej przykładach wprowadzamy następującą symbolikę:

- eN – element N -węzłowy,
- $K \times LeN$ – siatka podziału w liczbie K na L elementów N -węzłowych,
- FI, URI, SRI – typ całkowania macierzy elementowych (pełny oraz jednolicie i selektywnie zredukowany),
- fil. γ – stabilizacja form pasożytniczych przy URI ze współczynnikiem filtracji γ ,
- u, v, w – przesunięcia w kierunku osi współrzędnych globalnych x, y, z .

Oznaczenia stosowanej wersji elementów i wykorzystywanego sformułowania:

- CAM – podstawowa wersja przemieszczeniowa ($e3$ – $e16$; FI, SRI; URI, fil. γ),
- ASC – elementy mieszane o dwustopniowej interpolacji ($e4, e9$; FI),
- MIX – elementy mieszane (przemieszczenia/naprężenia) ($e4, e9$; FI),
- MIXe – elementy mieszane (przemieszczenia/odkształcenia) ($e4, e9$; FI),
- SEM – elementy częściowo mieszane (przemieszczenia/siły N) ($e4, e9$; FI),
- SEMm1, SEMm2 – elementy częściowo mieszane (model 1, 2 interpolacji sił N).

Ponadto:

- SEL – standardowe elementy zdegenerowane ($e3$ – $e16$; FI, SRI; URI, fil. γ),
- CAT – płaski trójkątny element typu DCT, zginanie – dyskretne więzy Kirchhoffa, stan tarczowy – stałe odkształcenia, sztywność normalna – fikcyjna,
- ALF – płaski trójkątny element typu DCT, zginanie – dyskretne więzy Kirchhoffa, stan tarczowy – niekonwencjonalna interpolacja Allmana,
- BOX – niedostosowane płaskie elementy prostokątne (C^1 ; $e4$; 3×3),
- RING – obrotowo-symetryczny element jednowymiarowy (C^1 ; $e2$; 3).

W rozwiązaniach, dla uproszczenia, przyjęto współczynnik ścinania $\alpha_s = 1$ (zob. p. 6.1.5).

6.2.5. Oznaczenia obciążeń

Etykietą „ref” oznaczamy obciążenie odniesienia, np. typu skupionego (siła P_{ref} , moment M_{ref}) lub typu rozłożonego (powierzchniowe q_{ref} , założone wzdłuż

¹⁸Zob. np. PIETRASZKIEWICZ [1977, 1984], MAKOWSKI [1981], PIETRASZKIEWICZ i SZWABOWICZ [1981], SCHMIDT [1982], NOLTE [1983], NOLTE, MAKOWSKI i STUMPF [1986], CHRÓŚCIELEWSKI i SCHMIDT [1986a].

krzywej: siły p_{ref} , momenty m_{ref}). Obciążenie aktualne (pseudo wieloparametrowe) obliczamy zgodnie z definicją obciążenia przedziałami jednoparametrowego według zasady $p = \lambda p_{\text{ref}} + p_{\text{old}}$ (podrozdział 4.5). Tutaj λ i p_{ref} są, odpowiednio, aktualnym mnożnikiem i aktualnym wektorem obciążeń odniesienia, zaś p_{old} ujmuje sumaryczną historię wszystkich obciążeń, które zmieniały swój charakter z przedziału na przedział.

Zaburzenia układów idealnych wprowadzane w badaniu zagadnień stateczności nazywamy *imperfekcjami* i oznaczamy etykietą „impf”. W przypadku obciążenia podstawowego w postaci siły skupionej P_{ref} , imperfekcję (obciążeniową) przyjmujemy przeważnie w formie ortogonalnej do obciążenia podstawowego λP_{ref} siły rzędu $P_{\text{impf}} = 0,001 \times \lambda P_{\text{ref}}$.

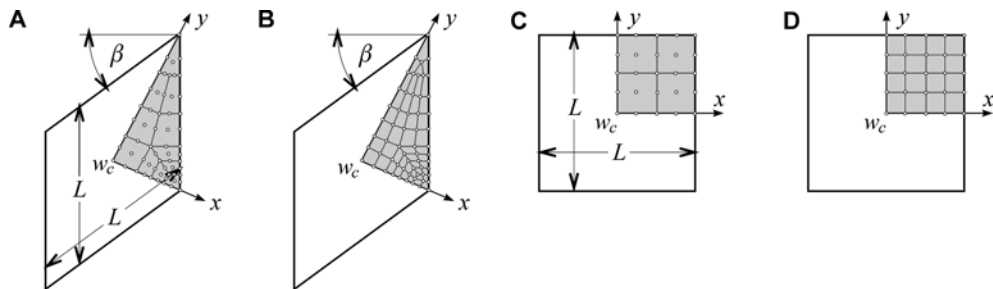
6.3. Klasyczne przykłady testowe

6.3.1. Uwagi wstępne

Analiza numeryczna płyt i małowyniosłych powłok należy do standardowych testów oceny poprawności sformułowania MES. O popularności tych testów decyduje fakt, że są one nielicznymi zadaniami, dla których często istnieją niekwestionowane rozwiązania analityczne. W tym podrozdziale przedstawiamy wybrane wyniki kilku tego typu przykładów.

6.3.2. Płyty utwierdzone o różnym kącie ukosowania

Zadanie zaczerpnięto z pracy PICA, WOOD i HINTON [1980]. W przykładzie badamy wpływ nieregularności siatki podziału na rozwiązania. Rozważamy różne kąty ukosowania β (rys. 6.3.1 A,B), pierwotnie kwadratowej (rys. 6.3.1 C,D), utwierdzonej na obwodzie płyty pod równomiernym obciążeniem typu martwego.

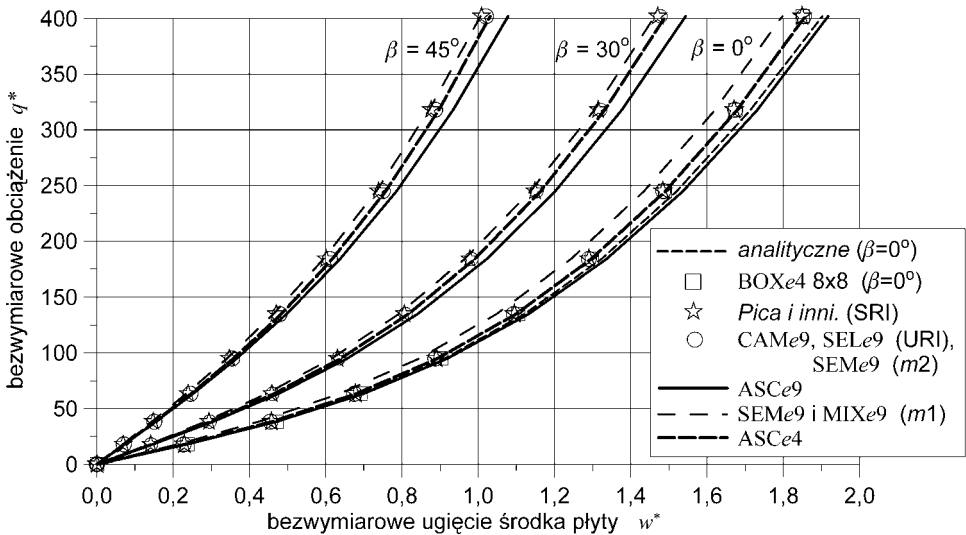


Rys. 6.3.1. Płyta utwierdzone o różnym kącie ukosowania: dyskretyzacja.

Sposób dyskretyzacji pokazano na rys. 6.3.1 ($L = 300$ in, $h = 3$ in, $E = 3 \times 10^7$ lb/in, $\nu = 0,316$, $\beta = \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ\}$). W rozwiązaniach wykorzystano podwójną symetrię, dyskretyzując 1/4 płyty w sposób nieregularny jedenastoma

elementami 9-węzłowymi (rys. 6.3.1 A) lub czterdziestoma czterema elementami 4-węzłowymi (rys. 6.3.1 B). W wariancie odpowiadającym płycie kwadratowej stosowano również siatki regularne (rys. 6.3.1 C,D).

Rysunek 6.3.2 i tabela 6.3.1 zawierają porównanie wyników własnych z rezultatami pracy¹⁹ PICA, WOOD i HINTON [1980]. Wyniki zestawiono dla bezwymiarowego obciążenia $q^* = \frac{qL^4}{Eh_0^4}$ i odpowiadającego mu bezwymiarowego ugięcia środka płyty $w^* = \frac{w_c}{h_0}$. Wykresy z rozwiązań własnych otrzymane za pomocą elementów CAM(URI)-SEL(URI)-SEM*m*2 oraz MIX-SEM*m*1 zgrupowano, gdyż są one nierozróżnialne w skali deformacji na rys. 6.3.2. Dodatkowo, oprócz rozwiązań własnych z siatek regularnych ($\beta = 0^\circ$), zamieszczono rozwiązanie Lévy'ego²⁰. Rozwiązania elementami przemieszczeniowymi CAME9, SELe9(URI) i semimieszanymi SEMe4*m*2 oraz elementami o dwustopniowej interpolacji ASCe4 pozostają w bardzo dobrej zgodności z wynikami pracy źródłowej.



Rys. 6.3.2. Płyta utwierdzona o różnym kącie ukosowania: rozwiązania dla nieregularnych ($\beta = \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ\}$) i regularnych ($\beta = 0^\circ$) siatek podziału.

W przypadku sformułowania mieszanego MIX*m*1 i semimieszanego SEM*m*1 rozwiązania wykazują lekkie przesztwygnięcie. Sformułowanie o dwustopniowej interpolacji ASCe9 uległo wyraźnemu „zmiękczeniu”. Porównanie rozwiązań wariantu $\beta = 0^\circ$, w siatce regularnej i nieregularnej, wykazuje małą wrażliwość

¹⁹W pracy PICA, WOOD i HINTON [1980] stosuje się sformułowany na bazie teorii płyt typu Timoszenko–Reissnera 8/9-węzłowy element typu heteros całkowany selektywnie (SRI).

²⁰LÉVY [1942] rozwiązał równania von Kármána szeregami Fouriera przy błędzie < 2%. Wyniki tej pracy przytaczamy na podstawie pracy PICA, WOOD i HINTON [1980].

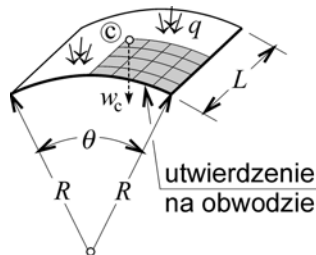
elementów 9-węzłowych na dystorsje siatki podziału²¹. Z drugiej strony, w przypadku siatek nieregularnych w rozwiązaniach CAM i SEL przy pełnym całkowaniu (FI) obserwowano wyraźniejszą skłonność do przesztywnienia.

Tabela 6.3.1. Utwierdzona płyta ukośna: bezwymiarowe ugięcie środka płyty w^* , CAM 11e9 (URI), $\alpha_t = 1$.

Bezwymiarowe obciążenie q^*		17,79	38,30	63,40	95,00	134,9	184,0	245,0	318,0	402,0
Odniesienie	Kąt β	Bezwymiarowe ugięcie środka płyty w^*								
CAMe9	0°	0,2275	0,4547	0,6750	0,8873	1,093	1,290	1,485	1,674	1,854
PICA, WOOD i HINTON [1980]		0,2291	0,4576	0,6781	0,8900	1,095	1,291	1,484	1,671	1,849
CAMe9	30°	0,1419	0,2954	0,4603	0,6333	0,8090	0,9817	1,153	1,320	1,478
PICA, WOOD i HINTON [1980]		0,1412	0,2940	0,4585	0,6309	0,8061	0,9779	1,149	1,314	1,471
CAMe9	45°	0,0708	0,1509	0,2451	0,3550	0,4793	0,6110	0,7493	0,8870	1,020
PICA, WOOD i HINTON [1980]		0,0690	0,1473	0,2394	0,3476	0,4703	0,6013	0,7388	0,8762	1,008

6.3.3. Utwierdzony panel walcowy obciążony ciśnieniem

Małowyniosły panel walcowy (rys. 6.3.3, $R = 2540$ mm, $L = 254$ mm, $h_0 = 3,175$ mm, $E = 3,10275$ kN/mm², $\nu = 0,3$, $\theta = 0,1$ rad) utwierdzony na obwodzie i obciążony ciśnieniem typu martwego, jest często stosowanym testem sformułowań MES. W analizie wykorzystano podwójną symetrię, dyskretyzując 1/4 powłoki w siatce regularnej. Porównanie rozwiązań własnych z wybranymi z literatury pokazuje rys. 6.3.4. Reprezentatywne wyniki liczbowe zawiera również tab. 6.3.2.



Rys. 6.3.3. Utwierdzony panel walcowy: schemat zadania.

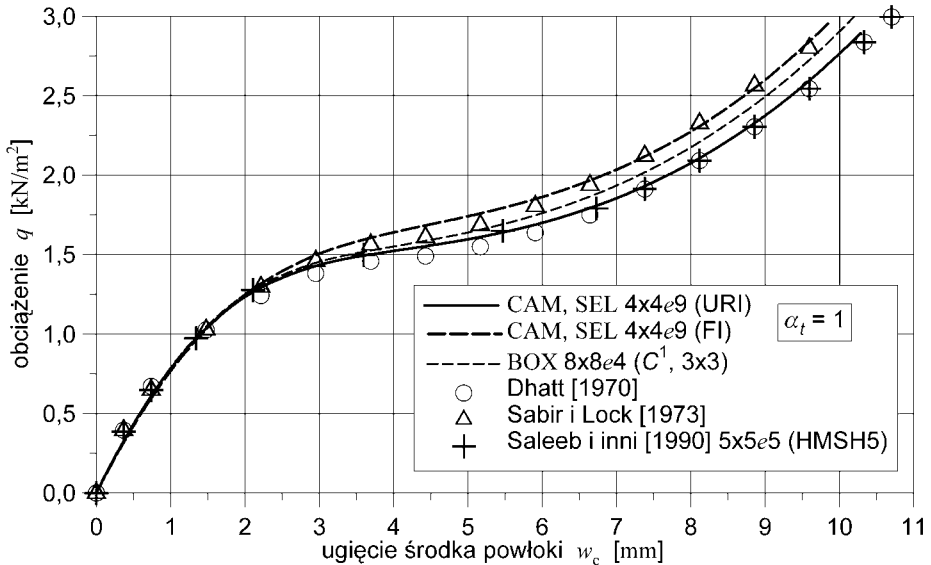
Różnice pomiędzy rozwiązaniami CAM i SEL (elementy zdegenerowane) są niezauważalne w skali deformacji rys. 6.3.4. Rozwiązania przemieszczeniowe CAM

²¹Po wykluczeniu rozwiązań obarczonych pozostałością blokady przy pełnym całkowaniu (FI).

i SEL elementem 9-węzłowym, całkowanym w sposób jednolicie zredukowany (URI), pozostają w dobrej zgodności z wynikami prac SALEEB i inni [1990] oraz DHATT [1970]. W stosunku do rezultatów pracy SABIR i LOCK [1973] występują wyraźne różnice. Również w dobrej zgodności jest rozwiązanie BOX płaskim niedostosowanym elementem 4-węzłowym klasy C^1 . Zastosowanie całkowania pełnego (FI) do elementów 9-węzłowych CAM i SEL powoduje wyraźne przeszczywienie dopiero w zaawansowanym stadium nieliniowej deformacji.

Tabela 6.3.2. Utwierdzony panel walcowy: krzywa ciśnienie (q) – ugięcie (w_c), $4 \times 4e9$ (URI).

CAM	q	kN/m ²	0,500	1,000	1,250	1,441	1,600	1,864	2,392	2,892
	w_c	mm	0,585	1,397	2,050	3,050	5,050	7,050	9,050	10,28
SEL	q	kN/m ²	0,500	1,000	1,250	1,440	1,599	1,864	2,394	2,894
	w_c	mm	0,585	1,398	2,053	3,053	5,053	7,053	9,053	10,27

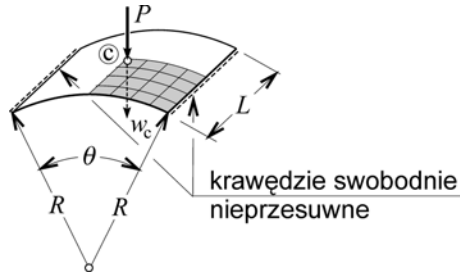


Rys. 6.3.4. Utwierdzony panel walcowy: porównanie rozwiązań.

6.3.4. Panel walcowy swobodnie podparty obciążony siłą

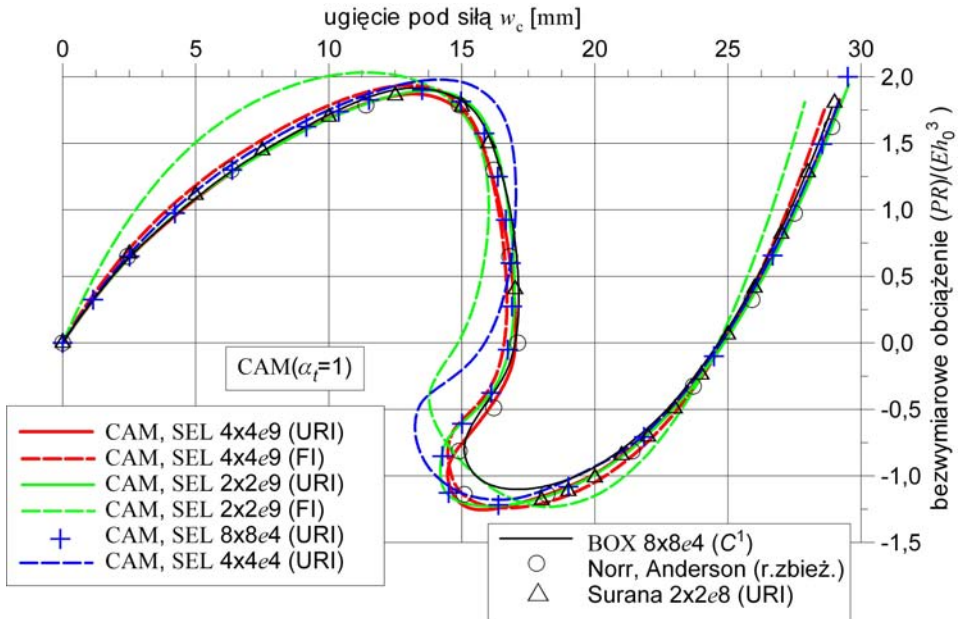
Małowyniosła powłoka walcowa z rys. 6.3.5 ($R = 2540$ mm, $L = 254$ mm, $\theta = 0,1$ rad, $h_0 = 3,175$ mm, $E = 3,10275$ kN/mm², $\nu = 0,3$) jest popularnym testem sformułowania MES i efektywności algorytmów śledzenia ścieżek równowagi.

Na prostych brzegach powłoka jest nieprzesuwnie swobodnie podparta, brzegi zakrzywione są swobodne. Powłoka jest obciążona centralnie siłą skupioną. Wobec podwójnej symetrii rozpatrzono tylko 1/4 konstrukcji. Dyskretyzację oparto na dwóch regularnych siatkach węzłów 5×5 i 9×9 .



Rys. 6.3.5. Swobodnie podparty panel walcowy obciążony siłą: schemat zadania.

Na rys. 6.3.6 porównano rozwiązania własne uzyskane 4- i 9-węzłowymi elementami z wynikami prac NOOR i ANDERSEN [1982] oraz SURANA [1983]. Reprezentatywne wyniki liczbowe podano również w tab. 6.3.3.



Rys. 6.3.6. Swobodnie podparty panel walcowy obciążony siłą: porównanie rozwiązań.

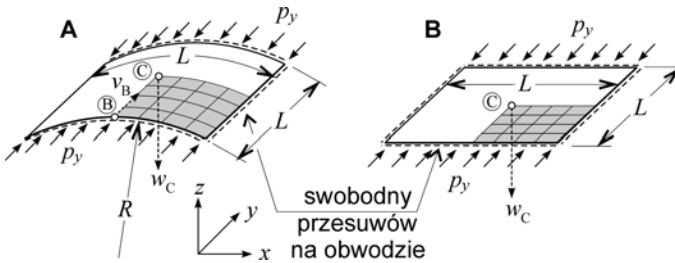
Tabela 6.3.3. Wolnopodparty panel walcowy obciążony siłą P : ugięcia w_c , CAM 4x4e9 (URI), $\alpha_t = 1$.

PR/Eh_0^3	0,650	1,300	1,725	1,869	1,745	1,485	0,8354	0,1854	-0,1396
w_c [mm]	2,55	6,48	10,39	13,66	14,97	15,77	16,65	17,02	16,91
PR/Eh_0^3	-0,6459	-0,8734	-1,140	-1,234	-0,9580	-0,4740	0,2099	1,009	1,870
w_c [mm]	15,53	14,64	14,47	16,20	20,25	23,05	25,50	27,54	29,28

Wyraźne różnice między wynikami obserwuje się przy podziale 2×2 elementy, w przypadku elementów 9-węzłowych tylko z całkowaniem pełnym (FI), zaś dla elementów 4-węzłowych już przy całkowaniu jednolicie zredukowanym (URI). Pozostałe wyniki (w tym BOX) pozostają w zadawalającej zgodności między sobą.

6.3.5. Panel walcowy i płyta kwadratowa ściskane jednokierunkowo

Zakrzywiona do powłoki walcowej (rys. 6.3.7 A), jednokierunkowo obustronnie ściskana, przesuwnie swobodnie podparta na całym obwodzie płyta kwadratowa (rys. 6.3.7 B) jest przykładem demonstrującym jakościową zmianę rozwiązań. Zakrzywienie zmienia typ punktu bifurkacji — z symetrycznego statecznego (płyta) na niesymetryczny (powłoka walcowa) — czyniąc układ wrażliwym na imperfekcje. Bogatą analizę tego zadania w kontekście wybranych parametrów zawiera m.in. praca²² RADWAŃSKA [1990].



Rys. 6.3.7. Jednokierunkowo ściskany panel walcowy i płyta kwadratowa: schemat zadania.

Schemat statyczny zadania pokazano na rys. 6.3.7. Przyjęto następujące dane liczbowe: $L = 1000$ mm, $h_0 = 10$ mm, $R = \infty$ i $R = 8330$ mm, $E = 3400$ N/mm², $\nu = 0,2$, $p_{y,ref} = 10$ N/mm. Wobec podwójnej symetrii układu, dyskretyzowano w sposób regularny tylko 1/4 konstrukcji. Na rys. 6.3.8 zestawiono wybrane wyniki własne i dostępne z prac HARTE i ECKSTEIN [1986], STEIN, LAMMERING i WAGNER [1989] oraz RADWAŃSKA [1990]. Reprezentatywne wyniki liczbowe podano w tab. 6.3.4.

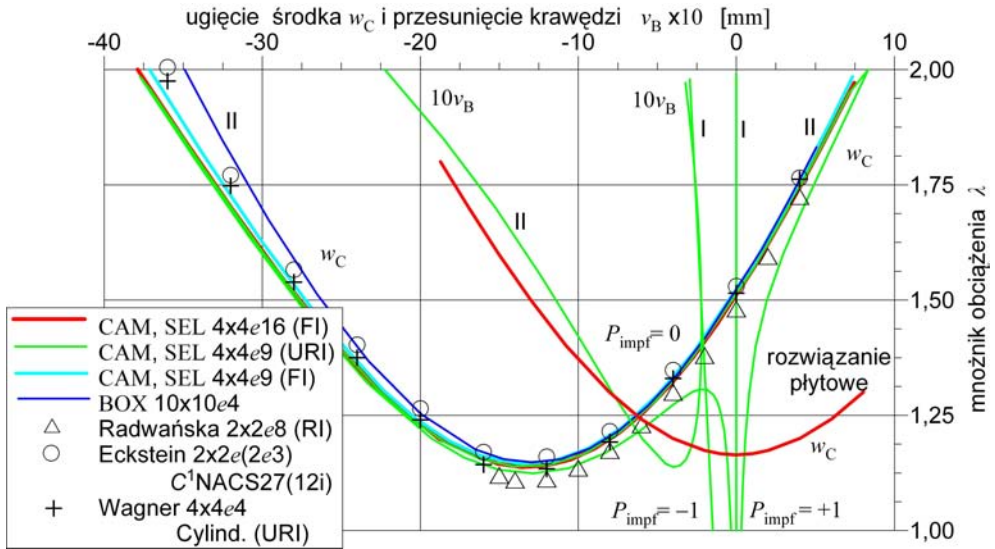
Tabela 6.3.4. Jednokierunkowo ściskany panel walcowy: przesunięcia w_C , v_B [mm], CAM 4×4e16 (FI), $\alpha_t = 1$.

λ	2,0	1,702	1,417	1,199	1,138	1,213	1,450	1,568	1,765	1,971
w_C	-37,88	-32,00	-25,69	-18,79	-13,59	-7,393	-1,192	1,065	4,332	7,448
v_B	2,224	1,528	0,9915	0,5944	0,3988	0,2623	0,2200	0,2270	0,2608	0,3221

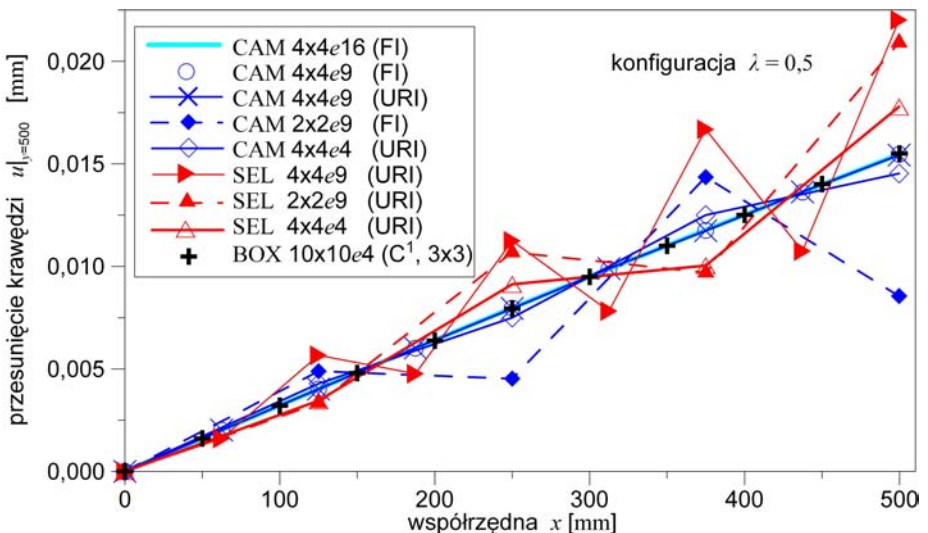
²²Analizę stochastyczną w zakresie sprężysto–plastycznym tego typu powłoki, z użyciem elementów BOXe4, zawiera praca BIELEWICZ i inni [1994].

Rozwiązania otrzymano w zamkniętym cyklu obciążania p_y w trzech fazach: obciążenie, cofanie się po ścieżce II, odciążenie. Jako siłę zaburzającą przyjmowano następujące wartości $P_{\text{impf}} = \{-1, 0, +1\}$ [N].

We wszystkich rozwiązaniach własnych krytyczny mnożnik obciążenia był w przedziale $\lambda_{\text{kr}} \in [1,511, 1,525] \Leftrightarrow [\text{CAM } 4 \times 4e9 \text{ (URI)}, \text{SEL } 4 \times 4e9 \text{ (FI)}]$.



Rys. 6.3.8. Jednokierunkowo ściskany panel walcowy i płyta: porównanie rozwiązań.



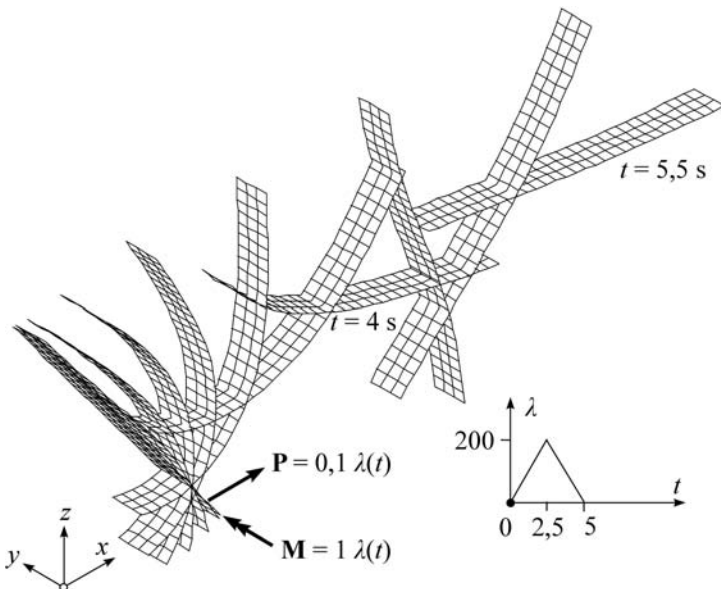
Rys. 6.3.9. Jednokierunkowo ściskany panel walcowy: formy pasyżytne (URI).

Przedział oszacowano metodą interpolacji liniowej, ponieważ uzyskanie zerowych (numerycznie) ugięć w sterowaniu przemieszczeniowym (ścieżka II) okazało się niemożliwe. Przy dochodzeniu do deformacji odpowiadającej położeniu bifurkacji następowało (niezależnie od techniki sterowania) samorzutne zejście rozwiązania ze ścieżki pobifurkacyjnej (II) na ścieżkę pierwotną (I).

W przypadku płyty otrzymano wynik $\lambda_{kr} = 1,164$, CAM $4 \times 4e16$ (FI), natomiast odpowiednia wartość λ_{kr} rozwiązania analitycznego dla płyty cienkiej według TIMOSHENKO i GERE [1963] wynosi $\lambda_{kr} = \frac{\pi^2 E h_0^3}{3 p_y (1 - \nu^2) L^2} = 1,165$. Dokładniejsza analiza deformacji wykazała, że również w tym przykładzie występują zeroenergetyczne formy pasożytnicze przy stosowaniu całkowania zredukowanego (RI). Obecność tych form pokazano na rys. 6.3.9. Występujący na rys. 6.3.9 zanik postaci pasożytniczej w rozwiązaniu CAM $4 \times 4e9$ (URI), pozornie mogący świadczyć o poprawności rozwiązania, jest tylko silną redukcją wartości jej wahań.

6.3.6. Pręt sprężysty w locie swobodnym bez udziału sił grawitacji

Zadanie to było analizowane w wielu pracach poświęconych dynamice prętów, formułowane zarówno jako zagadnienie płaskie (np. SIMO i VU-QUOC [1986], IURA i ATLURI [1988], HSIAO, LIN i LIN [1999], IURA i IWAKUMA [1992]) jak i przestrzenne (np. SIMO i VU-QUOC [1988]), a także jako zagadnienie przestrzenne powłokowe (np. SIMO, FOX i RIFAI [1990]). W tym przykładzie

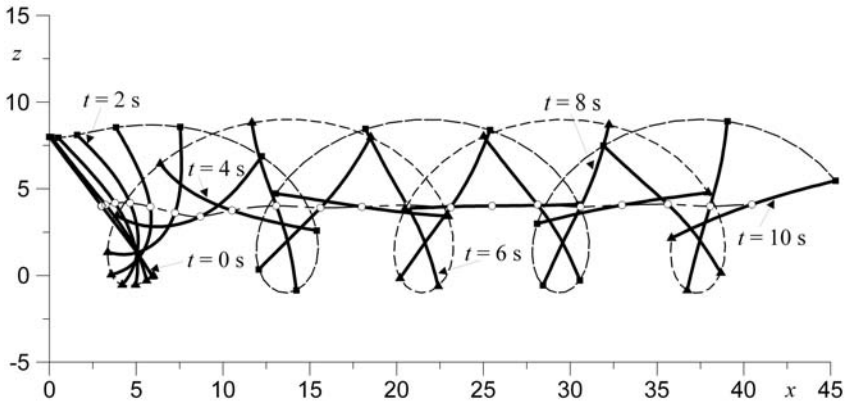


Rys. 6.3.10. Pręt sprężysty w locie swobodnym: dane, historia obciążenia, początkowe konfiguracje lotu.

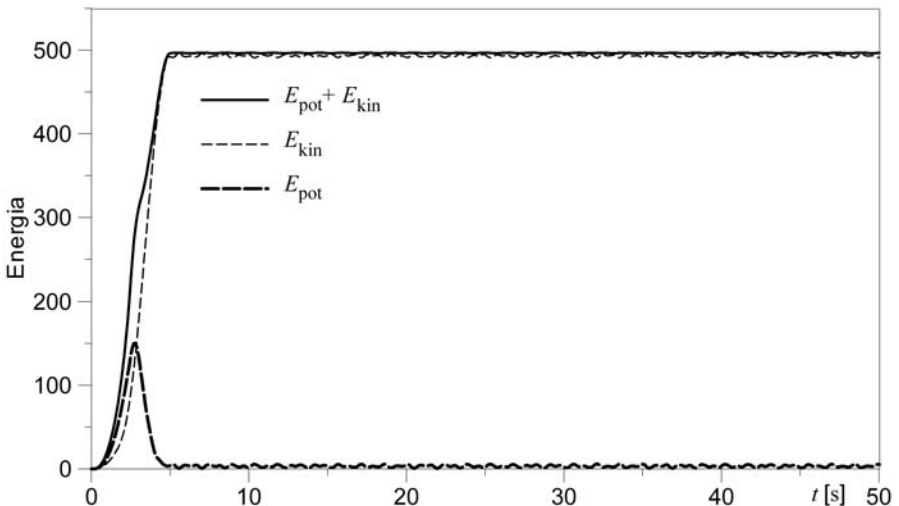
pochylony w płaszczyźnie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ pręt jest obciążony na dolnym końcu ustalonymi w przestrzeni siłą P i momentem M , których składowe i historię działania w czasie przedstawiono na rys. 6.3.10.

W rozwiązaniu, dyskretyzowanym w siatce 1×10 elementami powłokowymi CAME16 całkowanymi w sposób pełny (FI), przyjęto następujące dane liczbowe: $L = 10$, $L_x = 6$, $L_y = 8$, $b = h_0 = 1$, $Eh_0 = 10^4$, $Eh_0^3/12 = 500$, $\nu = 0$, $m_0 = 1$, $I_0 = 10$, w tym krok całkowania po czasie $\Delta t = 0,1$ s.

Kilka kolejnych konfiguracji pręta z pierwszych 10 s, obrazujących jego deformację w płaszczyźnie lotu, przedstawiono na rys. 6.3.11, którego odpowiednikiem w widoku przestrzennym jest rys. 6.3.10. Na rys. 6.3.12 przedstawiono wykres



Rys. 6.3.11. Pręt sprężysty w locie swobodnym: deformacja w czasie.



Rys. 6.3.12. Pręt sprężysty w locie swobodnym: energia.

zmian energii układu w czasie. Rysunek wskazuje wzrost energii w okresie odpowiadającym działaniu obciążenia. Po zaniku obciążenia widoczne są małe oscylacje energii kinetycznej i energii potencjalnej w trakcie swobodnego lotu pręta, jednak ich suma jest równa dostarczonej do układu pracy obciążenia zewnętrznego i pozostaje stała. Otrzymany opis zachowania dynamicznego układu pozostaje w dobrej zgodności z wynikami innych prac dotyczących tego zadania.

6.3.7. Uwagi

We wszystkich zadaniach równowagi (statyki) rozważanych w tym podrozdziale deformacje pozostają w zakresie umiarkowanej nieliniowości. Przykłady te nie mogą być zatem traktowane jako realne testy nieliniowej teorii powłok. Ten wniosek potwierdza również dobra zbieżność w tym zakresie deformacji płaskich elementów BOXe4, sformułowanych na podstawie teorii płyt von Kármána (p. 5.6.2). W przypadku stosowania całkowania zredukowanego (RI) nie są również wyraźnie obserwowalne (w skali deformacji i geometrii) formy pasożytnicze. Dlatego tych zadań nie można uważać za właściwe testy oceny sformułowania ogólnych powłokowych elementów skończonych.

Badania zbieżności rozwiązań metody elementów skończonych doprowadziły do sformułowania trzech ogólnych kryteriów, dotyczących doboru funkcji kształtu (zob. np. ZIENKIEWICZ [1972], GOMULIŃSKI i WITKOWSKI [1993], KLEIBER [1989]):

- a) kryterium ciągłości przemieszczeń²³,
- b) kryterium ruchu sztywnego²⁴,
- c) kryterium stałego odkształcenia²⁵.

Kryterium a) nazywane jest również *warunkiem zgodności*, zaś kryteria b) i c) *warunkami zupełności* modelu MES.

Elementy spełniające wszystkie wymienione kryteria nazywamy *elementami dostosowanymi*. Odpowiednio, jeśli któreś z tych kryteriów nie jest spełnione, elementy takie noszą nazwę *elementów niedostosowanych*. Okazuje się, że klasyczny przemieszczeniowy element dostosowany (zgodny i zupełny) ma własność monotonicznej zbieżności do rozwiązania ścisłego ze wzrostem liczby stopni swobody. W wielu przypadkach (szczególnie dotyczy to skomplikowanych płytowych i powłokowych elementów skończonych klasy C^1), przy formułowaniu elementów wygodnie jest zrezygnować z pełnej zgodności modelu. Wówczas jednak otrzy-

²³ *Kryterium ciągłości przemieszczeń*: funkcje kształtu powinny zapewniać ciągłość przemieszczeń i ich pochodnych włącznie do rzędu o jeden niższego, niż rząd maksymalnych pochodnych w zależnościach geometrycznych sformułowania.

²⁴ *Kryterium ruchu sztywnego*: przy ruchu sztywnym węzłów, wewnątrz elementu skończonego (ciała) nie mogą powstać odkształcenia i naprężenia.

²⁵ *Kryterium stałego odkształcenia*: funkcje kształtu muszą zapewniać realizację stanu stałego odkształcenia wewnątrz elementu skończonego.

mujemy elementy niedostosowane, przy użyciu których zbieżność rozwiązań ze wzrostem liczby stopni swobody może zachodzić zarówno od góry jak i od dołu oraz nie musi mieć charakteru monotonicznego.

Ważnym krokiem w ocenie jakości niedostosowanych elementów skończonych (KLEIBER [1989]), traktowanym nawet jako warunek konieczny zbieżności elementów niezgodnych, było opracowanie tzw. *patch testu*²⁶. Wyniki p. 6.3.2 w pewnym sensie odpowiadają zadaniom traktowanym jako *patch test*²⁷. Przedstawiają one bowiem pewne fragmentaryczne badania wpływu silnej nieregularności siatki podziału na rozwiązania. Mimo uznania przez nas wagi *patch testu*, w niniejszej książce nie poświęcamy mu specjalnej uwagi. *Patch test* nie dotyczy bowiem samej mechaniki powłok i ogólnego sformułowania na jej podstawie elementów skończonych. Jest on związany z badaniem własności elementów niedostosowanych, a konkretnie ich specjalnych modeli.

Na podstawie doświadczeń własnych i analizy literatury można stwierdzić, że trudności ze spełnieniem *patch testu* pojawiają się w elementach niskiego rzędu, używających niestandardowej aproksymacji niejednolitej. Szczególnie dotyczy to elementów 4-węzłowych typu CAME4- γ , ASCe4, MIXe4m1, SEMe4m1, alternatywnych do sformułowania przemieszczeniowego. Test wpływu nieregularności siatki na rozwiązania stosunkowo dobrze przechodzi element ASCe4. W przypadku elementów częściowo mieszanych (semimieszanych) SEMe4 i mieszanych MIXe4 dla modelu 0 i modelu 2 (zob. p. 6.2.2), zamiast trudności ze spełnieniem tego testu pojawia się albo blokada (zakleszczanie) rozwiązań lub występowanie postaci pasożytniczych. O elementach 9-węzłowych można stwierdzić, że spełniają one stosunkowo dobrze (w porównaniu z 4-węzłowymi) ten typ testu. Przykładowo, porównanie w p. 6.3.1 wyników obliczeń, uzyskanych przy użyciu modelu 1 sformułowania częściowo mieszanego SEMe9 (także mieszanego MIXe9), z innymi wynikami wskazuje na pozostałość w modelu 1²⁸ pewnego nieznacznego przeszywnienia i/lub wrażliwości na nieregularność siatki podziału. Zjawiska tego nie obserwujemy w przypadku modelu 2²⁹.

²⁶Patch test przeprowadza się w następujący sposób: a) na regularnej dziedzinie, obszarze (np. płaski prostokąt, bryłowy równoległoscian, prostokątny wycinek walca, symetryczny czworokąt sfery) tworzy się zbiór elementów z co najmniej jednym, najczęściej nie centralnie położonym, węzłem wewnętrznym; b) węzłom zewnętrznym nadaje się przemieszczenia lub przykłada do nich siły, które prowadzić powinny do stałego stanu odkształcenia w całym układzie; c) jeśli w każdym z elementów powstaje taki sam stan odkształcenia to przyjmujemy, że dany element spełnia *patch test*. Krytyczne uwagi dotyczące *patch testu*, od formalnej matematycznej strony, można odnaleźć w pracy STUMMEL [1980].

²⁷Problem *patch testu* pojawił się w kontekście warunku zupełności modelu MES dla niezgodnych elementów hybrydowych, mieszanych i innych sformułowań alternatywnych w stosunku do sformułowania przemieszczeniowego. Warunek spełnienia *patch testu* nie dotyczy klasycznych izoparametrycznych elementów przemieszczeniowych, które są elementami dostosowanymi i spełniają go z założenia.

²⁸Model SEMm1 opiera się na niejednolitej interpolacji sił N (p. 6.2.2).

²⁹W modelu SEMm2 wykorzystuje się niskiego rzędu jednolitą interpolację sił N (p. 6.2.2).

W elementach mieszanych MIX stwierdzono, że użycie nawet najbogatszego modelu 0 aproksymacji momentów \mathbf{M} nie miało wpływu na zjawisko blokady, w przeciwieństwie do modelu aproksymacji sił \mathbf{N} , wykazującego bardzo silny wpływ na blokadę. Wobec „praktycznie” braku różnic w rozwiązaniach elementami SEM i MIX (przy zgodnej interpolacji sił \mathbf{N} i stosowaniu w elemencie MIX modelu 0 dla momentów \mathbf{M}), zaniechaliśmy dalszych badań nad elementami MIX. W dalszych rozważaniach uwagę skupiamy na bardziej ekonomicznych elementach SEM, preferując model 1 o interpolacji niejednolitej (p. 6.2.2) w regularnych siatkach podziału.

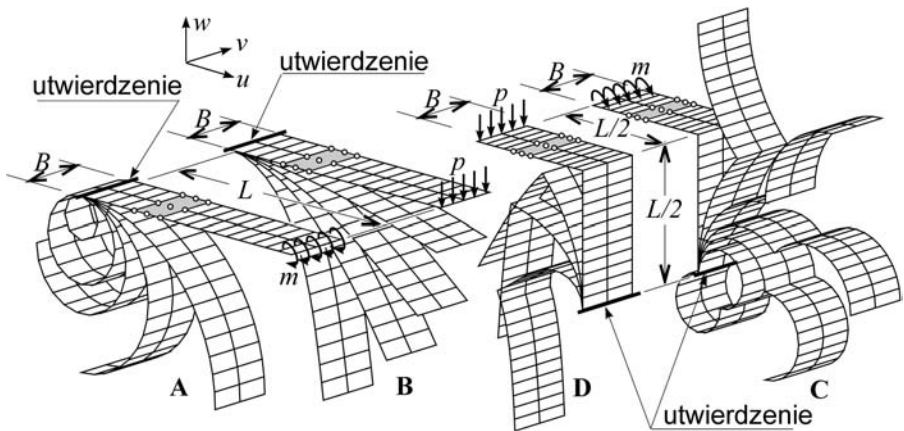
6.4. Skończone przemieszczenia konstrukcji typu belek

6.4.1. Uwagi wstępne

W podrozdziałach 6.4 i 6.5 analizujemy nieliniowe deformacje układów pseudoprętowych. W takich układach występują duże translacje i rotacje o silnej interakcji sztywności membranowej z sztywnością zgięciową i skrętną. Rozważane zadania w większości mają również rozwiązania w ramach nieliniowej teorii belek (prętów).

6.4.2. Wsporniki proste i załamany, obciążone momentem lub siłą

Wspornik obciążony na końcu momentem lub siłą należy do najczęściej badanych zadań o silnej nieliniowości geometrycznej. Na rys. 6.4.1 zamieszczono cztery warianty zadania i odpowiadające im postacie deformacji.



Rys. 6.4.1. Prosty i załamany wspornik płytowy: warianty zadania, postać deformacji.

We wszystkich wariantach zadania do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe: $L = 12$ m, $B = 3$ m, $h_0 = 0,03$ m, $E = 30 \times 10^6$ kN/m², $\nu = 0$. Wobec

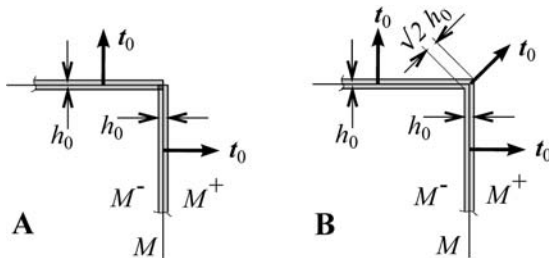
braku udziału kierunku poprzecznego, zadania dyskretyzujemy jednym rzędem elementów 9-węzłowych, całkowanych w sposób jednolicie zredukowany (URI).

W ramach elementarnej teorii belek, definiując czyste zginanie w płaszczyźnie $x-y$ ($m_y \neq 0$, $m_y(s) = \text{const}$, $n_x(s) = q_z(s) = 0$) z założeniem, że sztywność $EJ_y(s) = \text{const}$ i $s = x$ w konfiguracji początkowej (rys. 6.4.1 A), otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_x(s)} &= \frac{d\varphi}{ds} = \frac{m_y(s)}{EJ_y(s)} = \text{const}, \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{1}{\rho_x} \frac{dz}{d\varphi} = \sin \varphi, \\ \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{\rho_x} \frac{dx}{d\varphi} = \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(s) = \frac{m_y}{EJ_y} = \frac{1}{\rho_x} s, \\ z(s) = \rho_x [1 - \cos \varphi(s)], \\ x(s) = \rho_x \sin \varphi(s). \end{cases} \quad (6.4.1)$$

W przypadku czystego zginania układu przedstawionego na rys. 6.4.1 A i C, dobrą miarą poprawności rozwiązań numerycznych jest utrzymanie kołowej formy deformacji oraz dokładność cyklicznego trafiania końca zawijanego wspornika w linię utwierdzenia. Na przykład, w rozwiązaniu elementami CAM (rys. 6.4.1 A), po trzykrotnym zawinięciu ($\psi = 6\pi$) bezwzględny błąd „trafienie w podporę” pozostawał poza czwartym znaczącym miejscem.

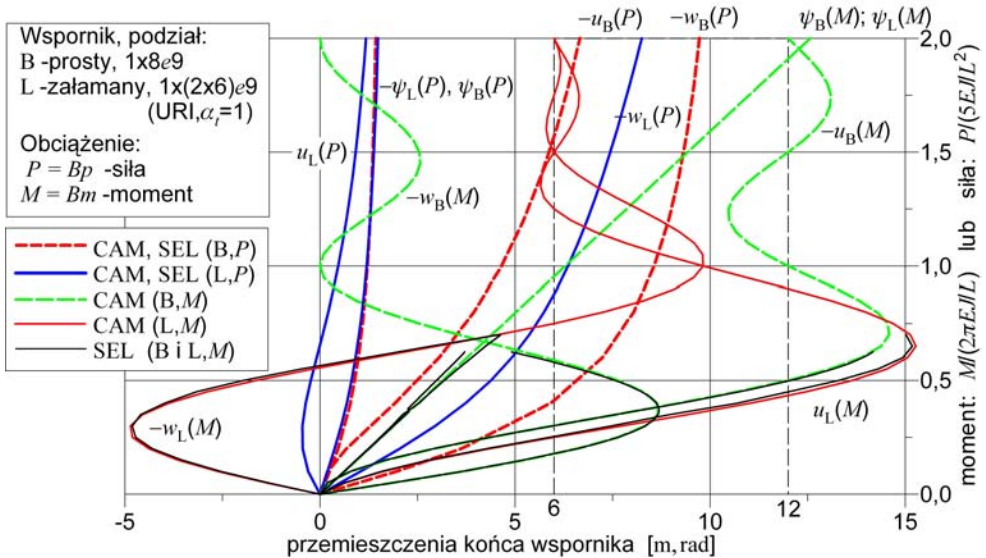
Wariant wspornika załamanego, obciążonego momentem (rys. 6.4.1 C), w pracy SIMO [1993] przyjęto jako test zaproponowanego tam sformułowania teorii powłok, prowadzącego do elementów o tzw. 5/6 stopniach swobody w węzle. Rozwiązania dla powłok złożonych z połączenia tylko dwóch płatów (tj. załamania powłoki, rys. 6.4.2) i spełniających warunki ciągłości można otrzymać również w ramach 5-parametrowej teorii powłok z директором zdefiniowanym w sposób podany np. w pracach BATHE i BOLOURCHI [1980] i BATHE [1982, 1996], zob. rys. 6.4.2 B. Sposób ten wykorzystano przy modelowaniu załamań powłok własnymi elementami zdegenerowanymi SEL o pięciu parametrach w każdym węzle.



Rys. 6.4.2. Modelowanie załamania powłoki, definicje wektorów kierunkowych i grubości.

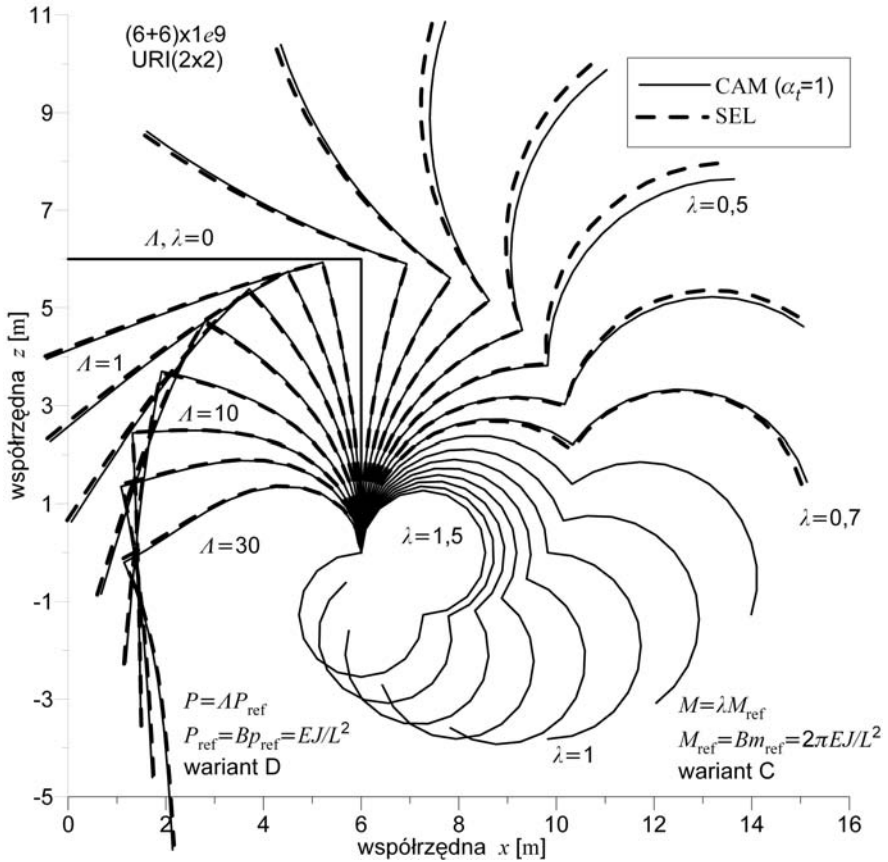
W elementach własnych o sześciu stopniach swobody w węzle (CAM, MIX, SEM, ASC) możemy wykorzystać oba pokazane na rys. 6.4.2 sposoby modelowania połączenia dwóch płatów powłoki. Wybrane rozwiązania wariantów zadania

z rys. 6.4.1 pokazano na rys. 6.4.3 i 6.4.4. Wobec szczytkowych różnic wyników CAM w stosunku do rozwiązań analitycznych (6.4.1) według teorii belek, tych ostatnich nie zamieszczamy na wykresach.



Rys. 6.4.3. Prosty i załamany wspornik płytowy: krzywe deformacji.

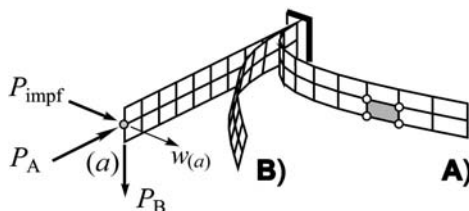
W rozwiązaniach czystego zginania (wariant A i C z rys. 6.4.1), pojawiają się różnice (zob. rys. 6.4.3 — krzywe przemieszczeń opisane jako funkcje M , oraz rys. 6.4.4 C) na niekorzyść standardowego sformułowania elementu zdegenerowanego SEL. Okazało się, że w miarę rozwoju deformacji czystego zginania w rozwiązaniach SEL narastają trudności w utrzymaniu reżimu zbieżności procesu iteracyjnego. Ostatecznie, przy tych samych parametrach sterujących jak w obliczeniach CAM, dla obrotu rzędu $\psi \approx 5$ rad nastąpiło załamanie się rozwiązań SEL. Zjawisko to nie wystąpiło dla zadań obciążonych siłą, por. wariant B i D z rys. 6.4.1 (zob. rys. 6.4.3 – krzywe przemieszczeń opisane jako funkcje P oraz rys. 6.4.4 D). Stąd wynika, że różnice rozwiązań SEL w stosunku do rozwiązań CAM i analitycznych oraz trudności ze zbieżnością, występujące w czystym zginaniu belki załamanej, są raczej wynikiem implementacji MES niż użytego sposobu modelowania połączenia płytów. To wskazuje, że konstrukcje o połączeniach dwugąłęziowych raczej nie mogą być traktowane jako przykłady rzeczywiście testujące wpływ szóstego parametru teorii powłok. Ponadto, wobec ograniczenia deformacji do zagadnienia płaskiego, zarówno ten przykład jak i inne popularne przykłady płaskie, takie jak łuki, rama Lee'go, rama Misesa itp., pozwalają tylko na częściową weryfikację poprawności nieliniowego sformułowania teorii powłok i jego implementacji MES.



Rys. 6.4.4. Załamany wspornik płytowy: zakres deformacji.

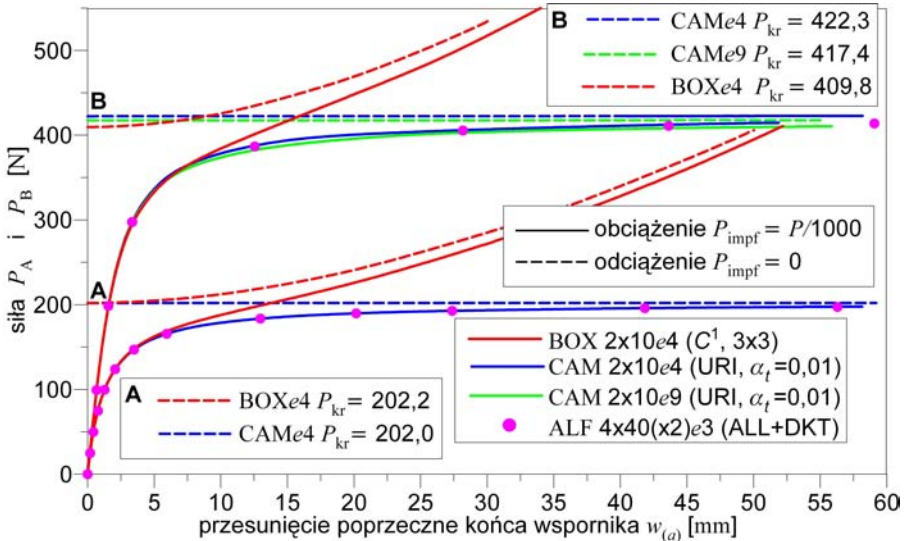
6.4.3. Stateczność wspornika płytowego obciążonego wzdłużnie i poprzecznie

Rozważono dwa warianty obciążenia — siłą wzdłużną A) i siłą poprzeczną B) — długiego wąskiego wspornika płytowego (rys. 6.4.5). W obliczeniach za pracę TALBOT i DHATT [1986] przyjęto następujące dane liczbowe: $L = 1600$ mm,



Rys. 6.4.5. Wspornik płytowy: schemat zadania.

$b = 100$ mm, $h_0 = 5$ mm, $E = 2 \times 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$, $P_{\text{impf}} = P/1000$. Schemat zadania i formy deformacji przedstawiono na rys. 6.4.5. Przyjęto dyskretyzację w siatce 10×2 elementami 4- i 9-węzłowymi całkowanymi w sposób jednolicie zredukowany (URI). Początek ścieżek deformacji i uzyskane wartości sił krytycznych zamieszczono na rys. 6.4.6.



Rys. 6.4.6. Wspornik płytowy: początek krzywych deformacji i siły krytyczne.

Obciążenia krytyczne, otrzymane analitycznie na podstawie teorii belek wg TIMOSHENKO i GERE [1963], dla przypadku obciążenia A) (Eulerowskie) wynosi $P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2} = 200,8$ N, zaś w przypadku obciążenia B) (skrętno-giętne) ma wartość $P_{\text{kr}} = 4,013 \frac{\sqrt{EJGJ_s}}{L^2} = 405,1$ N. W wariacie obciążenia B) w fazie przedwyboczeniowej dominuje udział sztywności tarczowej (jak w dwuwymiarowym zagadnieniu płaskim). Wskutek wyboczenia pojawia się silne sprężenie sztywności membranowej ze zgięciową i skrętną. Rysunek 6.4.6 wskazuje na ograniczony zakres stosowalności elementów sformułowanych na bazie teorii płyt von Kármána (dużych ugięć, umiarkowanych obrotów), używanych w programie BOX (p. 5.6.2). Dodatkowo na rys. 6.4.6 zamieszczono wyniki (JASINA [2003]) uzyskane programem ALF (p. 5.6.3), które pozostają w bardzo dobrej zgodności z rozwiązaniami CAM.

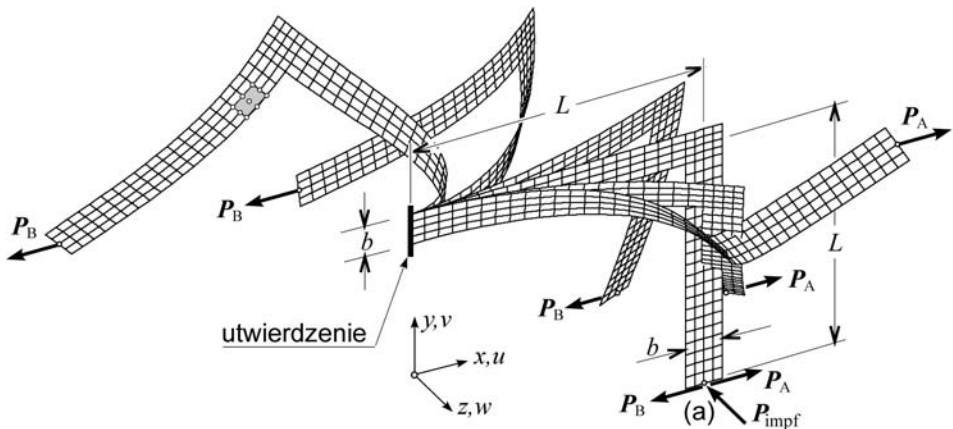
Przykład ten analizowano w pracach TALBOT i DHATT [1986, 1987] za pomocą trzech płaskich elementów trójkątnych³⁰ (DCT, DQT, DLT). W tych pracach

³⁰Elementy te są superpozycją elementu płytowego o dyskretnych więzach Kirchhoffa (DKT) z trzema odmianami elementu tarczowego w ramach aproksymacyjnego sformułowania

w wariacie obciążenia B) element DCT (= CST + DCT), najslabiej opisujący stan tarczowy, okazał się zawodny. Pozostałe elementy dały następujące wartości sił krytycznych: A) – 203,5 N, B) – 425,8 N. Zaskakuje przytoczona w pracy TALBOT i DHATT [1986] duża liczba (nawet kilkaset) kroków przyrostowych³¹ wymaganych do osiągnięcia rozwiązań pokrytycznych. Tak duża liczba kroków sugeruje albo niewłaściwy sposób ujęcia nieliniowości geometrycznej, albo kłopoty z zachowaniem zbieżności procesu iteracyjnego i/lub użycie niewłaściwej techniki sterowania procesem rozwiązania nieliniowego. Bowiern problemów tych nie obserwowano w rozwiązaniach CAT i ALF (p. 5.6.3), które wykorzystują zbliżone koncepcje formułowania elementów skończonych.

6.4.4. Wspornik płytowy załamany w planie obciążony siłą

Prostokątną ramę wspornikową w kształcie litery L przedstawioną na rys. 6.4.7, wariant obciążenia A (siła P_A zwrócona od podpory), badano w pracy ARGYRIS i inni [1978]. W tej pracy podano wartość (liniowej) siły krytycznej otrzymaną z rozwiązania elementami prętowym. Wartość obciążenia krytycznego, otrzymana z dyskretyzacji płaskimi elementami powłokowymi TRUMP, zamieszczono w pracy ARGYRIS i inni [1979].



Rys. 6.4.7. Wspornik L: obciążenia P_A i P_B , schemat zadania, skala deformacji.

Zadanie to badano, m.in. w pracy SIMO i VU-QUOC [1986] w ramach teorii prętów oraz w GRUTTMANN [1988], GRUTTMANN, STEIN i WRIGGERS [1989], SIMO, FOX i RIFAI [1990], WRIGGERS i GRUTTMANN [1993] w ramach teorii

uaktualnionego opisu Lagrange'a (AULF). Koncepcja elementu DCT jest analogiczna do sformułowania przedstawionego w p. 5.6.3.

³¹Rozwiązania CAM, w pełnym zakresie obciążenia z pracy TALBOT i DHATT [1986] (ze względu na skalę deformacji nie mieszczące się na rys. 6.4.4), uzyskiwano bez trudności w kilku (wariant A) lub kilkunastu (wariant B) krokach przyrostowych.

powłok. Porównanie wyników rozwiązań własnych dla obciążenia krytycznego z wynikami cytowanych prac zawierają tab. 6.4.1 i 6.4.2 oraz rys. 6.4.8 i 6.4.9.

Tabela 6.4.1. Wspornik L: siły krytyczne P_{kr} [N], warianty obciążenia A i B, rozwiązania z literatury.

Odniesienie	Wariant	Teoria	Dyskretyzacja, wynik	P_{kr}
ARGYRIS i inni [1979]	A	prętów	20e2, liniowy	1,088
		powłok	86e3 TRUMP, liniowy	1,1453
SIMO i VU-QUOC [1986]	A	prętów	20e2, nieliniowy	1,090
SIMO, FOX i RIFAI [1990]	A	powłok	zbieżne: e4 SemMix, liniowy	1,128
	B		liniowy (odczyt z rys.)	0,742
WRIGGERS i GRUTTMANN [1988]	A	powłok	17e9 URI, nieliniowy	1,113
			99e9 URI, nieliniowy	1,123

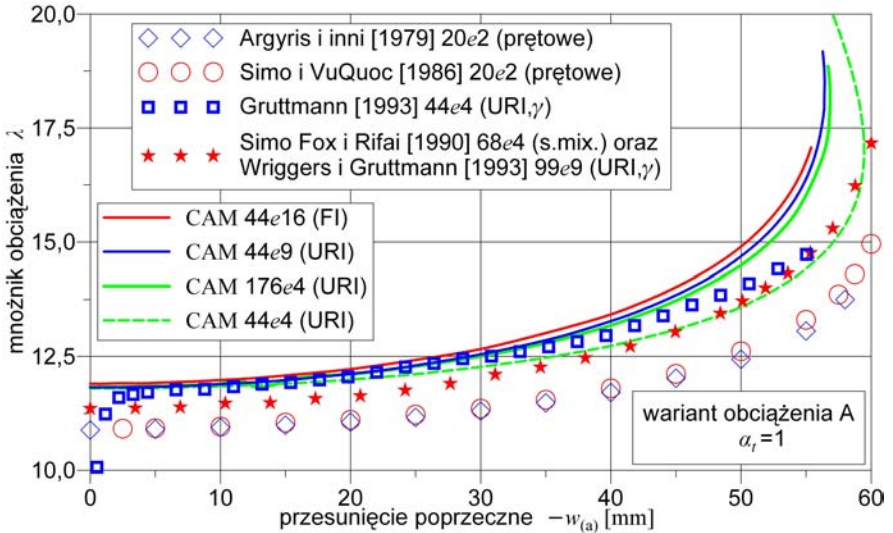
Tabela 6.4.2. Wspornik L: siły krytyczne P_{kr} [N], warianty obciążenia A i B, rozwiązania własne nieliniowe.

sformułowanie	podział:	44e4	176e4	44e9	99e9	44e16
własne	wariant	siła krytyczna P_{kr} [N]				
CAM (URI) przemieszczeniowe	A	1,180	1,183	1,182	1,182	
	B	0,7025	0,7024	0,7018	0,7018	
CAM (FI) przemieszczeniowe	A			1,212	1,199	1,190
	B			0,7091	0,7057	0,7035
ASC 2-stop. interpolacja	A	1,207	1,193	1,188		
	B	0,7096	0,7048	0,7032		
SEM model 1 semimieszane	A	1,988	1,952	1,194		
	B	0,9095	0,8977	0,7043		
SEM model 2 semimieszane	A	1,197	1,190	1,194		
	B	0,7084	0,7046	0,7044		
SEL (URI) zdegenerowane	A	1,164	1,181	1,179	1,181	
	B	0,6977	0,7018	0,7009	0,7015	
SEL (FI) zdegenerowane	A			1,212	1,199	1,190
	B			0,7091	0,7057	0,7035
BOX (3×3) C^1 teoria von Kármána	A	1,209				
	B	0,7140				

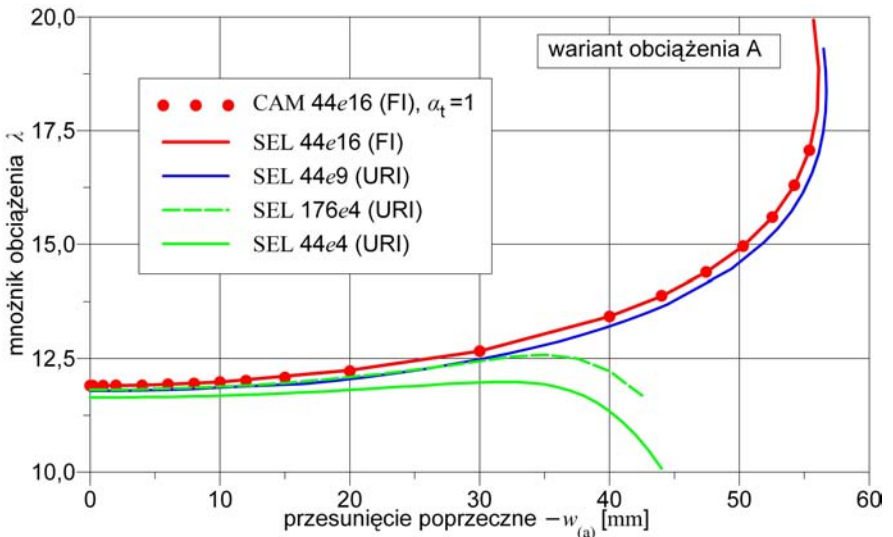
Przykładowe formy pasożytnicze obrotów z krawędzi końca belki w rozwiązaniach SELe4 pokazano na rys. 6.4.10. Zjawisko to nie występuje na taką skalę w rozwiązaniu uzyskanym przy użyciu zdegenerowanych elementów 9-węzłowych SELe9 (rys. 6.4.9), a także w rozwiązaniach (URI) używających elementów

CAMe9 i CAMe4 (!). Podkreślamy jednak, że we wszystkich przypadkach, gdy stosowano całkowanie jednolicie zredukowane (URI), wystąpiły co najmniej szczytkowe formy pasyżnicze.

W rozwiązaniach własnych za pracą ARGYRIS i inni [1978] przyjęto następujące dane liczbowe: $L = 240$ mm, $b = 30$ mm, $h_0 = 0,6$ mm, $E = 71240$ N/mm²,

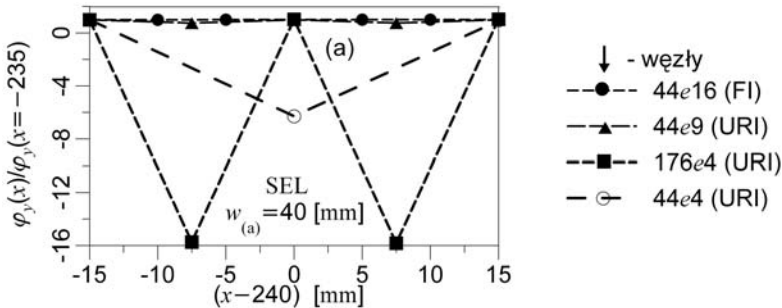


Rys. 6.4.8. Wspornik L: rozwiązania z literatury i własne CAM, początkowe krzywe deformacji, obciążenie A.



Rys. 6.4.9. Wspornik L: rozwiązania własne SEL i CAM, początkowe krzywe deformacji, obciążenie A.

$\nu = 0,31$, $P_{\text{ref}} = 0,1 \text{ N}$, $P_{\text{impf}} = P/100$, $P = \lambda P_{\text{ref}}$, gdzie λ jest parametrem obciążenia. Rozważane warianty dyskretyzacji, schematy całkowania i odpowiadające obciążenia krytyczne P_{kr} ujmują tab. 6.4.2. Krytyczne siły P_{kr} uzyskane w rozwiązaniach nieliniowych obliczono po usunięciu obciążenia perturbacyjnego P_{impf} , a następnie cofnięciu się na wtórnej ścieżce równowagi (od $w_{(a)}$ rzędu 10 mm do poziomu rzędu 10^{-4} mm wszystkich przemieszczeń z płaszczyzny belki). W przypadku elementów SEM i ASC siłę P_{kr} obliczono na podstawie ekstrapolacji, bowiem w bliskości punktu bifurkacji ($w_{(a)}$ rzędu 10^{-2} mm) następowało samorzutne zejście rozwiązań na ścieżkę pierwotną (SEM – pod, a ASC – ponad punkt rozgałęzienia).

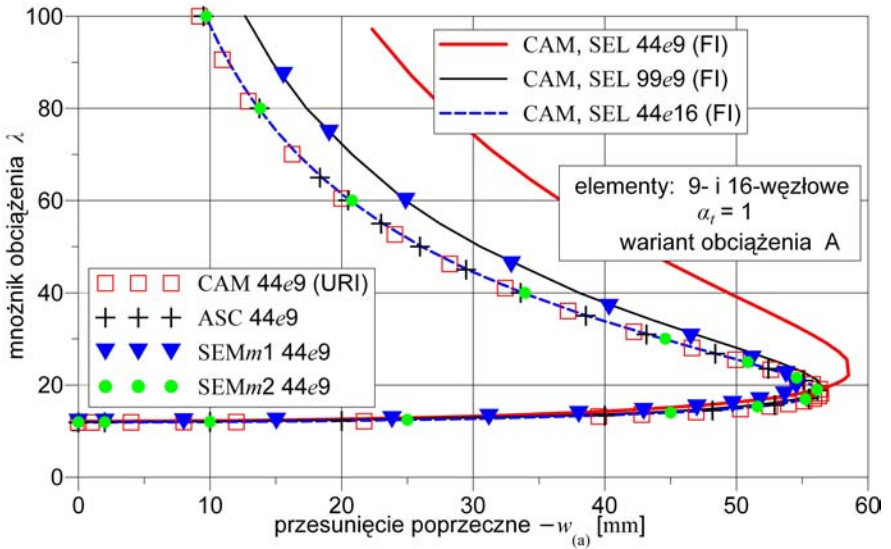


Rys. 6.4.10. Wspornik L: formy pasożytnicze w rozwiązaniach SEL.

W rozwiązaniach pokrytycznych, uzyskanych 4-węzłowym elementem zdegenerowanym SELe4 całkowanym w sposób jednolicie zredukowany (URI), powyżej poziomu translacji $w_{(a)}$ rzędu 30 mm obserwujemy w przemieszczeniach rotacyjnych gwałtowne narastanie form pasożytniczych. Zapewne jest to główną przyczyną załamania się tych rozwiązań (rys. 6.4.9).

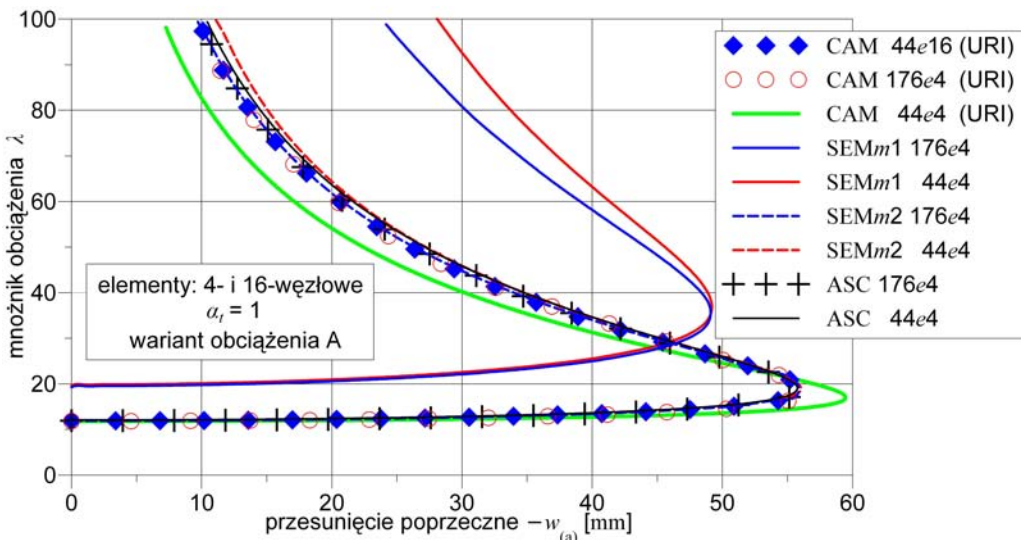
Zauważone różnice rozwiązań pokrytycznych, uzyskanych w ramach teorii belki i powłok, współgrają z wartościami liniowego obciążenia krytycznego podanymi w ARGYRIS i inni [1979] (tab. 6.4.1). Istotne jest to, że rozwiązania CAM i SEL (element zdegenerowany, pięć parametrów) w dyskretyzacjach 44e16, 44e9 i 99e9 przy pełnym całkowaniu (FI) wykazują całkowitą zgodność w całym zakresie rozważanej deformacji (rys. 6.4.11).

W rozwiązaniu CAM i SEL 44e9, całkowanym w sposób jednolicie zredukowany (URI), pojawia się nieznaczna różnica (zob. rys. 6.4.8 i 6.4.9), którą można tłumaczyć większą skłonnością elementów zdegenerowanych SEL do kumulowania form pasożytniczych. Potwierdza to fakt, że 4-węzłowy element SELe4 (w przeciwieństwie do CAME4), całkowany w sposób jednolicie zredukowany, prowadzi do rozbieżności rozwiązań w zaawansowanym stadium deformacji (rys. 6.4.9). Różnice występujące pomiędzy powłokowymi rozwiązaniami własnymi a przytoczonymi z prac GRUTTMANN [1988], SIMO, FOX i RIFAI [1990] oraz WRIGGERS i GRUTTMANN [1993] są znaczne.



Rys. 6.4.11. Wspornik L: rozwiązania własne, element 9-węzłowy, obciążenie A.

Rozważając przyczyny tak znacznych różnic trzeba wziąć pod uwagę następujące fakty. Rozwiązania w GRUTTMANN [1988] oraz SIMO, FOX i RIFAI [1990] otrzymano za pomocą elementów 4-węzłowych. Wyniki własne, uzyskane przy użyciu elementów 4-węzłowych CAME4 (URI) (rys. 6.4.12), zaczynają w zaawansowanym stadium deformacji wykazywać wrażliwość na gęstość siatki podziału.



Rys. 6.4.12. Wspornik L: rozwiązania własne, element 4-węzłowy, obciążenie A.

GRUTTMANN [1988] otrzymał rozwiązanie $44e4$ przy jednopunktowym całkowaniu jednolicie zredukowanym (URI) z γ -stabilizacją. Można uznać (wyłączając fazę dochodzenia do ścieżki wtórnej), że rozwiązanie to pozostaje w dobrej zgodności z analogicznymi rozwiązaniami CAME4 i SELE4 w zakresie $|w_{(a)}| < 30$ mm, to jest do momentu kumulacji form pasożytniczych w rozwiązaniach SELE4. Zatem przyczyna zauważonych różnic może tkwić w niezupełnym odfiltrowaniu w pracy GRUTTMANN [1988] postaci pasożytniczych.

Tabela 6.4.3. Wspornik L: translacje końca, warianty obciążenia A i B, CAM 44e16 (FI), $\alpha_t = 1$.

$P_{\text{ref}}^A = 0,1$ N	A [mm]			$P_{\text{ref}}^B = -0,1$ N	B [mm]		
λ	u	v	$-w$	λ	$-u$	v	$-w$
11,90	0,0857	0,2219	0,0	7,035	-0,051	0,1312	0,0
11,98	0,8052	1,136	10,00	7,039	0,0245	0,3381	10,00
12,22	3,057	3,984	20,00	7,139	1,850	5,366	50,00
12,66	7,179	9,141	30,00	7,572	9,654	26,86	110,0
13,42	14,03	17,56	40,00	8,539	26,20	72,10	170,0
14,96	27,05	32,99	50,28	10,07	48,43	131,1	210,0
16,30	37,25	44,56	54,24	11,71	67,63	179,9	225,9
18,24	50,40	58,81	56,12	13,82	86,78	225,9	230,6
21,12	66,72	75,41	54,95	16,75	106,5	270,5	226,6
24,99	84,06	91,74	50,70	20,81	126,0	312,1	215,6
30,41	102,3	107,5	43,92	30,28	153,6	368,0	190,8
40,00	124,2	124,9	33,73	40,00	170,3	401,3	171,4
60,00	149,7	143,6	20,64	60,00	190,4	443,0	145,5
80,00	163,7	153,7	13,70	80,00	202,4	470,8	129,3
100,0	172,6	160,4	9,665	100,0	210,5	492,3	118,1

Pewnego potwierdzenia tego przypuszczenia można się dopatrzeć w rozwiązaniu $99e9$ (URI) z późniejszej pracy WRIGGERS i GRUTTMANN [1993]. Podana tam krzywa pokrywa się z rozwiązaniem SIMO, FOX i RIFAI [1990] i nie ma fazy słabszego wznoszenia ($|w_{(a)}| < 30$ mm), jak w przypadku rozwiązania elementami 4-węzłowymi w GRUTTMANN [1988]. Zaskakujące jest jednak zdecydowane „obniżenie” się rozwiązania, jako skutek zmiany elementu z 4- na 9-węzłowy. Jest to bardziej znacząca rozbieżność, którą w przypadku SIMO, FOX i RIFAI [1990] powodować może, oprócz dyskretyzacji, także inny sposób formułowania i implementacji 4-węzłowego elementu mieszanego.

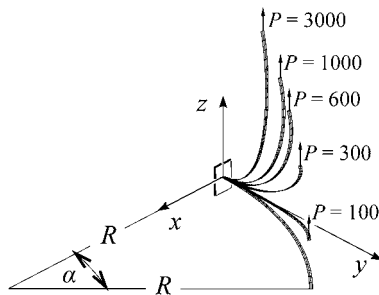
Na rysunkach 6.4.11 i 6.4.12 zestawiliśmy rozwiązania własne dla wariantu obciążenia A. W przypadku elementu 9-węzłowego (rys. 6.4.8) całkowanego w sposób pełny (FI), w zaawansowanym stadium deformacji (zakrzywienie) ujawnia się efekt blokady, który w pewnym stopniu redukuje zagęszczenie siatki podziału.

W przypadku elementów częściowo mieszanych SEMm1 o bogatych funkcjach aproksymacji sił, szczególnie 4-węzłowego, widoczne jest pojawienie się blokady.

W pracy SIMO, FOX i RIFAI [1990] dostrzeżono, że ta rama ma dwie różne siły krytyczne, zależne od zwrotu przyłożenia siły. Ponieważ problem ten wydaje się interesujący, w tab. 6.4.3 zamieszczamy reprezentatywne wyniki liczbowe rozwiązania pokrytycznego CAM 44e16 (FI) w szerokim zakresie deformacji.

6.4.5. Wspornik zakrzywiony obciążony siłą

Zadanie z rys. 6.4.13 — opisany kątem 45° łuk wspornikowy zakrzywiony w planie — jest standardowym testem sformułowań teorii prętów ($R = 100$, $\alpha = 45^\circ$, $A = b \times h = 1 \times 1 = 1$, $E = 10^7$, $\nu = 0$).



Rys. 6.4.13. Utwierdzony łuk kołowy 45° : schemat zadania, skala deformacji.

Przykład badano MES w ramach różnych teorii prętów między innymi w pracach BATHE i BOLOURCHI [1979], SIMO i VU-QUOC [1986], CARDONA i GÉRADIN [1988], CRISFIELD [1990] oraz CRIVELLI i FELIPPA [1993]. Dostępne z literatury wyniki liczbowe zestawiono w tab. 6.4.4.

Tabela 6.4.4. Utwierdzony łuk kołowy 45° : rozwiązania prętowe z literatury.

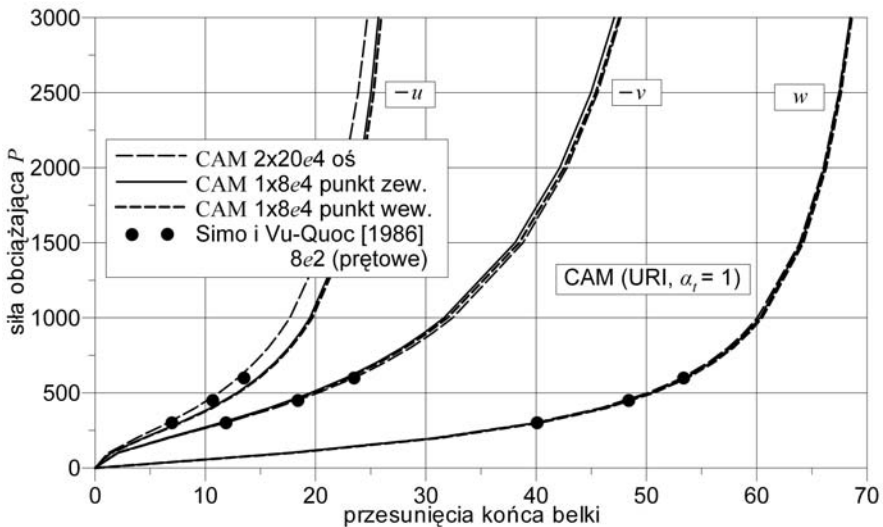
Siła P :	300			450			600		
	$-u$	$-v$	w	$-u$	$-v$	w	$-u$	$-v$	w
Przesunięcia końca:									
BATHE i BOLOURCHI [1979]	6,8	11,5	39,5	—	—	—	13,4	23,5	53,4
SIMO i VO-QUOC [1986]	6,96	11,87	40,08	10,68	18,39	48,39	13,50	23,48	53,37
CARDONA i GÉRADIN [1988]	7,15	12,07	40,35	10,91	18,60	48,59	13,74	23,67	53,50
CRISFIELD [1990]	7,13	12,18	40,53	10,86	18,79	48,79	13,68	23,87	53,71
CRIVELLI i FELIPPA [1993]	6,99	11,85	40,08	10,71	17,36	48,39	13,55	23,45	53,37

W rozwiązaniach z literatury stosowano przeważnie podział na osiem 2-węzłowych elementów prętowych. BATHE i BOLOURCHI [1979] uwzględnili także dyskretyzację szesnastoma izoparametrycznymi 16-węzłowymi elementami bryłowymi.

Własne wyniki rozwiązań, uzyskane przy użyciu elementów CAM, zamieszczamy w tab. 6.4.5 oraz na rys. 6.4.14, uzupełniając je wynikiem SIMO i VU-QUOC [1986] otrzymanym w na podstawie teorii powłok. Rozwiązania powłokowe dobrze korespondują z rozwiązaniami prętowymi. Ponadto, nie zaobserwowano istotnego wpływu zagęszczenia siatki podziału na uzyskane rozwiązania.

Tabela 6.4.5. Utwierdzony łuk kołowy 45° : przesunięcia końca, CAM $2 \times 20e4$ (URI), $\alpha_t = 1$, rozwiązanie własne.

P :	100	200	300	450	600	1000	2000	3000
$-u$:	1,172	3,783	6,593	10,20	12,97	17,67	22,65	24,69
$-v$:	2,085	6,743	11,79	18,34	23,45	32,42	42,79	47,67
w :	17,46	30,77	39,79	48,18	53,22	60,05	66,04	68,47



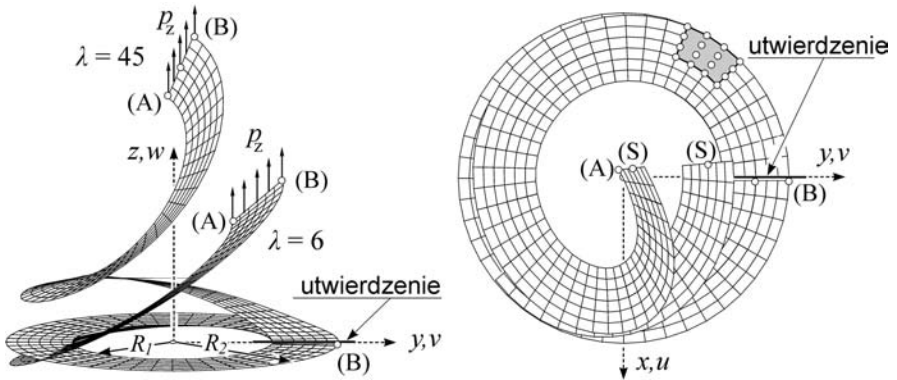
Rys. 6.4.14. Utwierdzony łuk kołowy 45° : ścieżki równowagi.

6.4.6. Pierścień utwierdzony obciążony liniowo

Zadanie z rys. 6.4.15, w postaci przeciętego pełnego pierścienia utwierdzonego z jednej strony i obciążonego liniowo z drugiej, zaproponowano w pracach BAŞAR i DING [1990, 1992] jako test teorii powłok w zakresie skończonych obrotów.

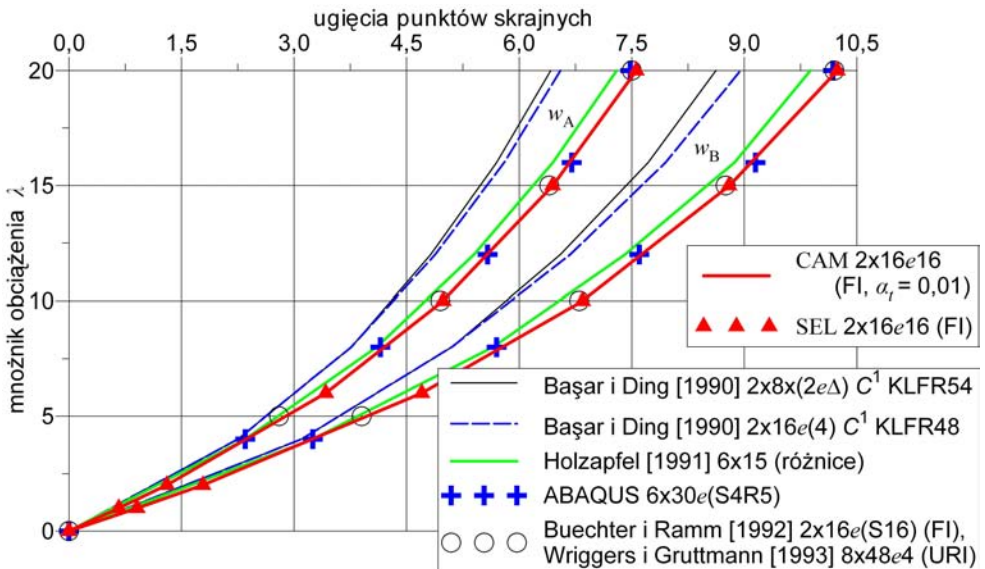
Do obliczeń własnych za pracą BAŞAR i DING [1990] przyjęto następujące dane liczbowe: $R_1 = 6$ m, $R_2 = 10$ m, $h_0 = 0,03$ m, $E = 2,1 \times 10^7$ kN/mm², $\nu = 0$, $p_{\text{ref}} = 0,1$ kN/mb, $p = \lambda p_{\text{ref}}$.

Rozwiązania z pracy BAŞAR i DING [1992], przytoczone na rys. 6.4.16, uzyskano w ramach teorii powłok typu Kirchhoffa–Love’a stosując trójboczne (KLFR54) i czworoboczne (KLFR54) krzywiznowe elementy powłokowe klasy C^1 .



Rys. 6.4.15. Utwierdzony pierścień kołowy: schemat zadania, skala deformacji.

Zadanie to badali także: HOLZAPFEL [1991] metodą różnic skończonych (w ramach zaproponowanej przez BAŞAR [1987] modyfikacji teorii powłok Kirchhoffa–Love’a), BÜCHTER i RAMM [1992] 16-węzłowymi elementami zdegenerowanymi oraz WRIGGERS i GRUTTMANN [1993] 4-węzłowymi elementami powłokowymi (bazującymi na teorii typu Timoszenko–Reissnera z naprężeniami Biota). Porównanie rozwiązań własnych (CAM, SEL $2 \times 16e16$ FI) z wynikami cytowanych prac zawiera rys. 6.4.16, na którym także za pracą HOLZAPFEL [1991] podano rozwiązanie systemem ABAQUS (HIBBITT, KARLSSON i SORENSEN [1987]).



Rys. 6.4.16. Utwierdzony pierścień kołowy: porównanie rozwiązań.

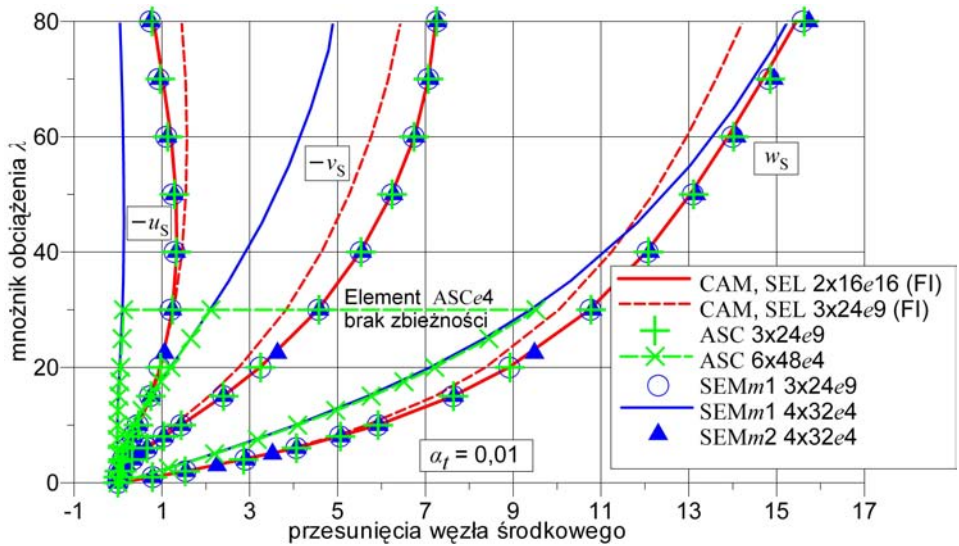
Istotne rozbieżności występują między wynikami otrzymanymi przez BAŞAR i DING [1992], HOLZAPFEL [1991] na podstawie teorii powłok Kirchhoffa–Love’a, a wynikami BÜCHTER i RAMM [1992], ABAQUS i własnymi otrzymanymi elementami CAM i SEL. Źródło tak znacznych różnic może tkwić nie tylko w sformułowaniu samej teorii powłok typu Kirchhoffa–Love’a (jak to się często sugeruje w literaturze), ale również w sposobie komputerowej implementacji odpowiednich elementów klasy C^1 i dyskretyzacji.

Rozwiązania własne zamieściliśmy w tab. 6.4.6 i na rys. 6.4.17. Wobec zgodności wyników CAM i SEL z elementami 9- i 16-węzłowymi przy pełnym całkowaniu (FI), rozwiązaniom tym przyporządkowano na rys. 6.4.17 wspólne oznaczenia (por. rys. 6.4.16). Elementy 9-węzłowe całkowane w sposób pełny (FI) w sformułowaniu przemieszczeniowym (CAM, SEL) wykazują wzrost tendencji do blokady w miarę rozwoju deformacji. Wyniki uzyskane elementami 9-węzłowymi, w ramach sformułowania o dwustopniowej interpolacji ASC i semimieszanego SEMm1, są w dobrej zgodności z przyjętym za odniesienie rozwiązaniem elementem 16-węzłowym CAM (FI).

Tabela 6.4.6. Utwierdzony pierścień kołowy: przesunięcia końca, CAM $2 \times 16e16$ (FI), $\alpha_t = 0,01$.

Węzeł λ	(A) – wewnętrzny			(S) – środkowy			(B) – zewnętrzny		
	$-u$	$-v$	w	$-u$	$-v$	w	$-u$	$-v$	w
1	0,0095	0,0281	0,9118	0,0082	0,0243	0,7889	0,0070	0,0205	0,6659
2	0,0365	0,1082	1,787	0,0317	0,0936	1,546	0,0269	0,0789	1,304
6	0,2552	0,7689	4,704	0,2213	0,6633	4,063	0,1873	0,5577	3,423
10	0,5376	1,663	6,845	0,4656	1,432	5,916	0,3935	1,202	4,986
15	0,8639	2,784	8,805	0,7484	2,397	7,628	0,6330	2,009	6,451
20	1,119	3,755	10,24	0,9713	3,233	8,903	0,8233	2,711	7,564
30	1,423	5,288	12,27	1,240	4,556	10,74	1,056	3,824	9,202
40	1,533	6,401	13,68	1,341	5,520	12,03	1,149	4,639	10,38
60	1,380	7,820	15,66	1,212	6,749	13,89	1,045	5,678	12,13
80	0,9317	8,411	17,27	0,8150	7,242	15,45	0,6982	6,073	13,64

Rozwiązania otrzymane za pomocą elementów 4-węzłowych sformułowań ASC i SEMm1 okazały się zdecydowanie przesytnione. W rozwiązaniach ASCe4 w miarę rozwoju deformacji narastają trudności z utrzymaniem standardowej tolerancji błędów w kontroli procesu iteracyjnego. Tendencja ta utrzymywała się nawet po 100-krotnej, w stosunku do innych modeli, redukcji parametru obciążenia λ , co potraktowaliśmy już jako rozbieżność procesu numerycznego. Zjawisko to nie ujawniło się w innych przypadkach. Zmiana w 4-węzłowym elemencie częściowo mieszanym SEMe4 sposobu interpolacji sił przekrojowych N z modelu



Rys. 6.4.17. Utwierdzony pierścień kołowy: zestawienie rozwiązań własnych, przesunięcia węzła środkowego (S) na końcu wspornika.

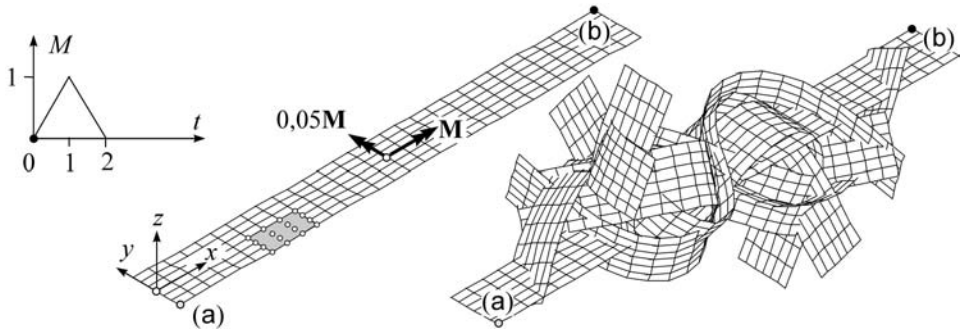
SEMm1 na model SEMm2 powoduje odblokowanie rozwiązania, jednak kosztem pojawienia się (nieznacznych w tym zadaniu) form pasożytniczych.

Naszych rozwiązań CAM i SEL, otrzymanych z zastosowaniem całkowania jednolicie zredukowanego (URI), tutaj nie przedstawiamy. Jedynie stwierdzamy, że są one nieznacznie „zmiękczone” w stosunku do wyniku CAM i SEL $2 \times 16e16$ (FI). W rozwiązaniach tych (URI), szczególnie elementem 4-węzłowym, w miarę rozwoju deformacji obserwowano narastanie form pasożytniczych, wyraźnie widocznych na przebiegu parametrów obrotów.

6.4.7. Wirowanie taśmy obciążonej centralnie momentem

Redukując 100-krotnie grubość belki, analizowanej w przykładzie p. 6.3.5, badamy dynamikę swobodnie wirującej bardzo cienkiej taśmy. Na taśmę w punkcie centralnym działa zmienny w czasie moment o głównej składowej $M_x(t)$, skierowanej wzdłuż osi taśmy i małej składowej poprzecznej do osi $M_y(t) = 0,05M_x(t)$, spełniającej rolę zaburzenia ruchu obrotowego względem osi x (rys. 6.4.18).

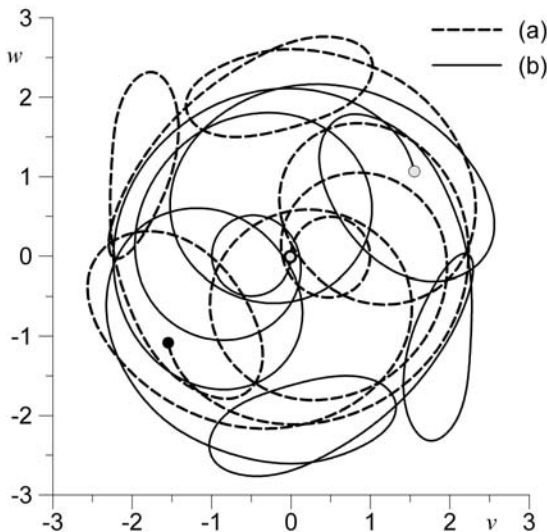
Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe: $L = L_x = 10$, $b = 1$, $h_0 = 0,01$, $E = 10^4$, $\nu = 0,25$, $\rho_0 = 1$. Taśma przestrzennie dyskretyzowana jest przy pomocy siatki 2×10 , 16-węzłowych elementów CAM całkowanych w sposób pełny (FI). W obliczeniach przyjęto krok całkowania po czasie $\Delta t = 0,005$ s. Zadanie ilustruje początkową fazę utraty stabilności dynamicznej ruchu obrotowego taśmy wokół osi x , względem której, policzony jak dla ciała sztywnego, moment bezwładności taśmy ma najmniejszą wartość.



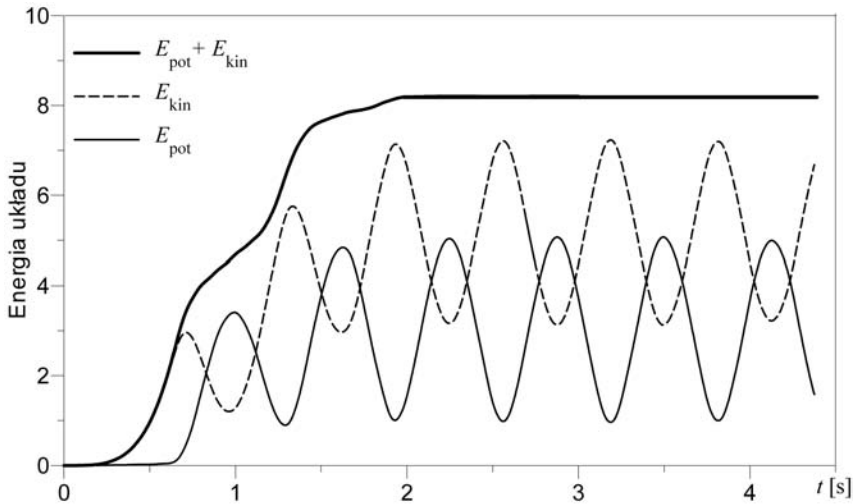
Rys. 6.4.18. Wirująca swobodnie taśma: schemat zadania, postacie deformacji z kolejnych chwil.

Na rys. 6.4.18 zamieszczono kilka kolejnych postaci deformacji w ruchu swobodnym po zaniku obciążenia. Odpowiednie trajektorie rzutowane na płaszczyznę $y-z$ dwóch punktów (a) i (b) z przeciwległych końców taśmy zamieszczono na rys. 6.4.19. Na rys. 6.4.20 przedstawiono wykres zmian energii układu w czasie. Obrazuje on wzrost energii w okresie odpowiadającym działaniu obciążenia. Po zaniku obciążenia widoczne są duże oscylacje energii kinetycznej i energii potencjalnej w trakcie swobodnego wirowania taśmy, jednak ich suma jest równa dostarczonej do układu pracy obciążenia zewnętrznego i pozostaje stała.

Przykład ten obrazuje przestrzenny ruch układu, złożony z dużych sprężystych względnych deformacji taśmy nałożonych na wielokrotne jej obroty jako ciała sztywnego. W tym zadaniu geometryczny punkt centralny swobodnego



Rys. 6.4.19. Wirująca swobodnie taśma: trajektorie punktów (a) i (b).



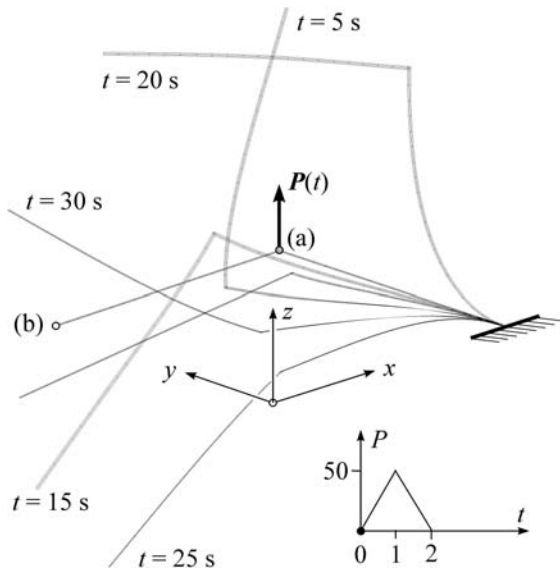
Rys. 6.4.20. Wirująca swobodnie taśma: energia układu.

układu, będący jednocześnie środkiem masy, do którego przyłożone jest tylko obciążenie momentem, powinien cały czas pozostawać w tym samym miejscu w przestrzeni. Spełnienie tego warunku można traktować jak jeden z testów poprawności sformułowania algorytmu obliczeniowego. W prezentowanej analizie warunek ten był spełniony.

6.4.8. Prostokątna ramka wspornikowa obciążona dynamicznie siłą prostopadłą do planu

Problem ten, odpowiadający rozważanemu w p. 6.4.3 zadaniu stateczności, analizowano w różnych wariantach w wielu pracach poświęconych dynamice prętów, m.in. w SIMO i VU-QUOC [1986], IURA i ATLURI [1988], CRISFIELD, GALVANETTO i JELENIC [1997], IBRAHIMBEGOVIĆ i AL MIKADAD [1998], BOTTASSO i BORRI [1998], JELENIC i CRISFIELD [1998], [1999], BAUCHAU i BOTTASSO [1999] oraz HSIAO, LIN i LIN [1999]. W rozważanym wariantcie zadania prostokątna ramka wspornikowa jest obciążona w narożu (a) zależną od czasu siłą skupioną działającą prostopadłe do planu belki, jak to pokazuje rys. 6.4.21.

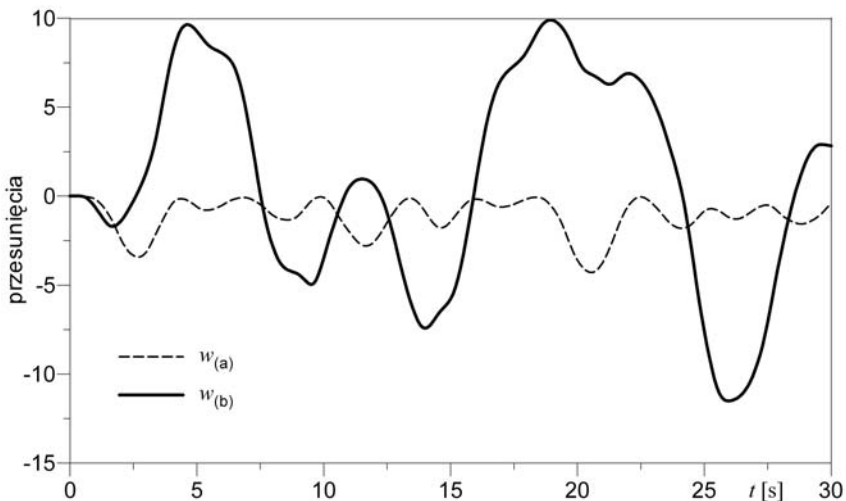
W rozważanym przypadku modelowania elementami powłokowymi przyjęto następujące dane liczbowe: $L_x = L_y = 10$, $b = h_0 = (12/10^3)^{1/2}$, $E = 10^9/12$, $\nu = 0$, $\rho_0 = 10^3/12$, aby możliwie blisko spełnić charakterystyki przekrojowe modelu prętowego, które w wyżej cytowanych pracach wynosiły $EA = 10^6$, $\rho_0 A = 1$, $EJ = 10^3$. Jednak, obliczone na bazie modelu powłokowego, wartości odpowiedników prętowej sztywności na skręcanie i momentu bezwładności na skręcanie są różne od odpowiednich wartości przyjmowanych w obliczeniach modelem prętowym. Dlatego prezentowane tu wyniki, wobec istotnego udziału charakterystyk



Rys. 6.4.21. Prostokątna ramka wspornikowa: schemat zadania, postaci deformacji.

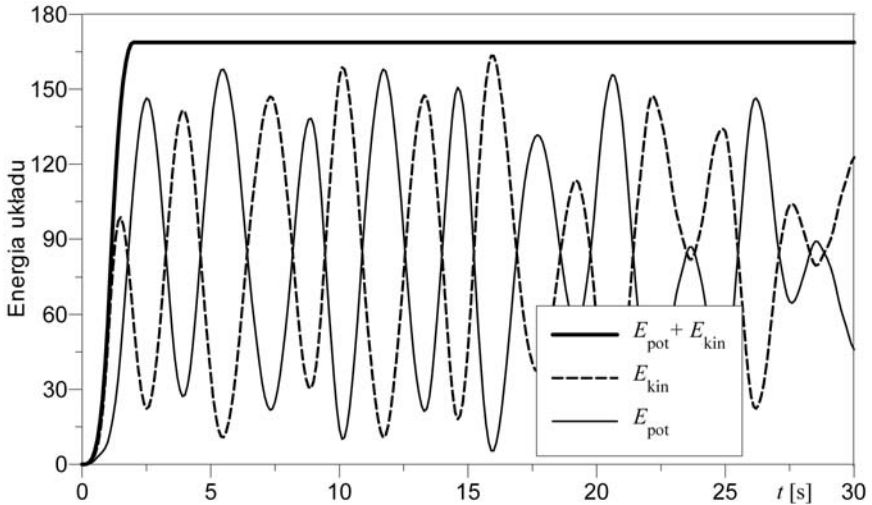
skrętnych w opisie zachowania układu, nie są w sensie ilościowym porównywalne z rozwiązaniami prętowymi.

Oba ramiona i narożnik ramki dyskretyzowane są w siatce $2 \times (2 \times 10) + 4 = 44$ elementami 9-węzłowymi CAM całkowanymi w sposób pełny (FI). W fazie badań po zaniku działania obciążenia, ramka drga swobodnie z dużymi wartościami wychylenia, będącymi skutkiem deformacji giętno-skrętnej układu (zob. rys. 6.4.21).



Rys. 6.4.22. Prostokątna ramka wspornikowa: przesunięcia punktów (a) i (b) z płaszczyzny układu.

Historię zmian w czasie przesunięć punktu narożnego (a) i końca belki (b) w kierunku poprzecznym do początkowej płaszczyzny układu pokazano na rys. 6.4.22. Mimo że w tej fazie analizy zmiany energii potencjalnej i kinetycznej wykazują duże oscylacje, rys. 6.4.23, to ich suma pozostaje stała w czasie.



Rys. 6.4.23. Prostokątna ramka wspornikowa: energia układu.

6.4.9. Uwagi

Wszystkie zadania analizowane w podrozdziale 6.4 charakteryzuje brak krzywizny początkowej. Zatem, mimo obecności rzeczywiście dużych przemieszczeń, nie są one pełnymi testami poprawności sformułowania teorii powłok. Z drugiej strony, duży zakres zmian wartości i kierunków wektora obrotu upoważnia do traktowania tych zadań jako dobrych testów sprawdzających poprawność sformułowania części algorytmu opisującej obrotu układu.

Ze względu na specyfikę deformacji (izometria), istotny jest test czystego zginania (p. 6.4.1 A, C). Wskazuje on na potrzebę uwzględnienia w standardowym sformułowaniu elementu zdegenerowanego (SEL) pominiętych tak jak w pracy BATHE [1982] składników, oznaczanych w literaturze przez \mathbb{K}_{σ_2} i \mathbb{K}_{σ_3} , części geometrycznej macierzy sztywności (zob. dyskusję np. w SURANA [1983] dla powłok czy w KREJA i CYWIŃSKI [1991] w odniesieniu do płaskich zagadnień jednowymiarowych). Jest to jednak zadanie płaskie (podobnie jak belki, łuki, rama Lee'go, rama Misesa itp.) dostarczające istotnej, ale tylko częściowej weryfikacji ogólnych powłokowych sformułowań MES.

Przykłady o silnej interakcji sztywności membranowej ze zgięciową są znane jako ostry egzamin poprawności sformułowań płaskich elementów powłokowych niskiego rzędu (YANG, SAIGAL i LIAW [1990]). Podobnie jak w podrozdziale 6.3,

ze względu na „dobre” warunki brzegowe, w przypadku stosowania całkowania zredukowanego (RI) nie są dostatecznie wyraźnie obserwowalne (w skali deformacji i geometrii) postacię pasożytnicze. Dlatego nie można uważać tych zadań za pełne testy oceny skuteczności samych elementów skończonych.

Utwierdzony pierścień kołowy (p. 6.4.6) charakteryzuje specyficzna deformacja, przejawiająca się narastaniem „spaczenia” elementów wraz ze wzrostem obciążenia. Okazało się, że w zaawansowanym zakresie deformacji rozwiązanie ASCe4 z podziałem 6×48 w ramach sformułowania o dwustopniowej interpolacji odkształceń jest rozbieżne. Zjawisko to nie miało miejsca w początkowym zakresie deformacji, gdzie proces zbieżności przebiegał typowo. Wynik ten wskazuje, że sformułowanie ASC o dwustopniowej interpolacji odkształceń może nie odzwierciedlać w sposób właściwy deformacji charakteryzującej się silnym spaczeniem elementu.

6.5. Układy pseudoprętowe, szósty parametr teorii

6.5.1. Uwagi wstępne

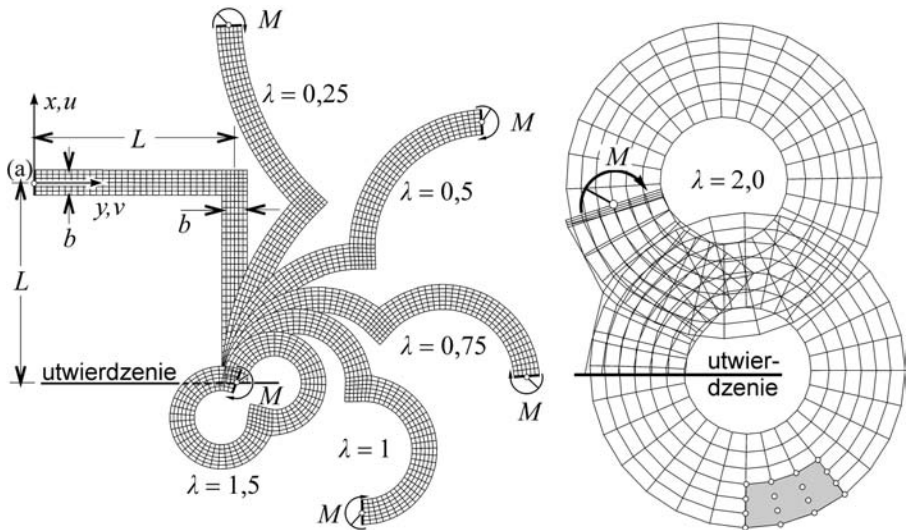
Przykłady zebrane w tym podrozdziale przypominają układy prętowe i modelują deformacje w zakresie skończonych translacji i obrotów.

W ramach rozwiniętej 6-parametrowej teorii powłok, jednym z głównych zadań jest sformułowanie odpowiednich równań konstytutywnych dla momentów owinięcia m^β powiązanych z szóstym (obrotowym) parametrem teorii. Zbadanie wpływu tych równań konstytutywnych na rozwiązania umożliwia wprowadzony wcześniej konstytutywny współczynnik owinięcia α_t . Poza typowym zakresem analizy, przez zmianę wartości α_t badamy tu również zależność rozwiązań od wartości parametru owinięcia. Szeroki zakres rozważanej zmienności $10^{-10} \leq \alpha_t \leq 10^{+10}$ umożliwia analizę zachowania się rozwiązań również dla wartości skrajnych przy $\alpha_t \rightarrow 0$ lub $\alpha_t \rightarrow \infty$. Podczas badań wpływu współczynnika owinięcia α_t , eliminację efektów ubocznych (wpływ blokady, form pasożytniczych i typu modelu) uzyskujemy stosując głównie 16-węzłowy element przemieszczeniowy CAM z pełnym całkowaniem (FI).

6.5.2. Wspornik tarczowy o kształcie litery L obciążony w planie momentem skupionym

W przykładzie badamy wpływ ekstremalnych wartości współczynnika owinięcia α_t . Rozważamy prostokątną, jednostronnie utwierdzoną, płaską ramę z p. 6.4.4 obciążoną w punkcie (a) momentem skupionym M (rys. 6.5.1).

Ponieważ moment M jest energetycznie sprzężony z szóstym stopniem swobody (owinięciem), zadanie to w sposób naturalny wykracza poza zakres stosowalności 5-parametrowej teorii powłok. Do obliczeń przyjęto dane z p. 6.4.3:



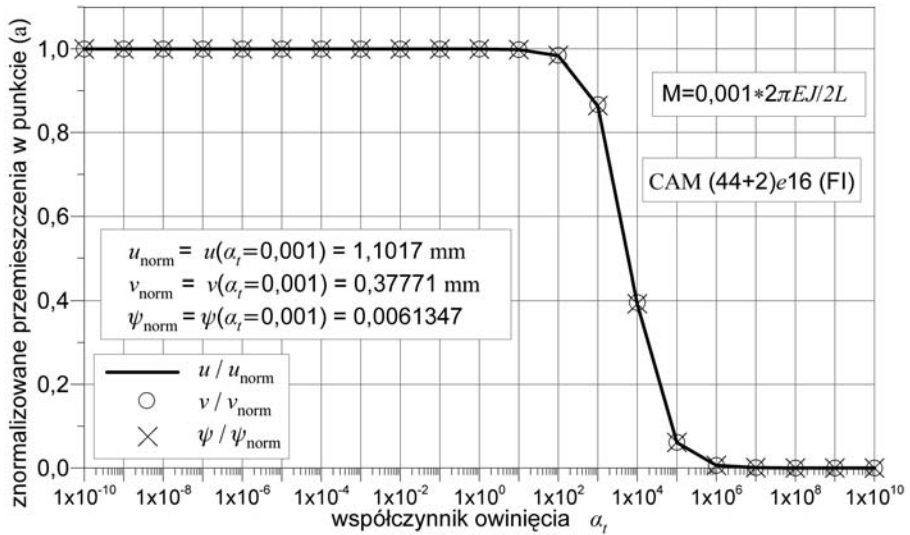
Rys. 6.5.1. Wspornik tarczowy L obciążony momentem: schemat zadania, postacie deformacji.

$L = 240$ mm, $b = 30$ mm, $h_0 = 0,6$ mm, $E = 71240$ N/mm², $\nu = 0,31$. Na podstawie rozwiązania (6.4.1) ustalono właściwą dla czystego zginania wartość momentu odniesienia $M_{\text{ref}} = \frac{2\pi EJ}{2L}$ ($= 1258914,7$ Nmm), $M = \lambda M_{\text{ref}}$. Aby uniknąć efektu lokalnego zawinięcia materiału wokół punktu (a) w wyniku działania skupionego momentu³² M , podczas dyskretyzacji w miejscu 10% szerokości ostatniego rzędu elementów wprowadzono warstwę elementów o zwiększonym module sprężystości równym $10^6 \times E$.

Rysunek 6.5.2, na przykładzie unormowanych uogólnionych przemieszczeń punktu (a), pokazuje wpływ współczynnika owinięcia α_t na rozwiązania liniowe. Jako wielkości normujące przyjęto wartości odpowiednich przemieszczeń otrzymane przy $\alpha_t = 0,001$. Na wykresie z rys. 6.5.2 wydzielić można trzy fazy zależności rozwiązania od wartości współczynnika owinięcia: a) fazę ustabilizowanego rozwiązania, od numerycznego zera do $\alpha_t < 0,1$, pozbawioną wpływu wartości współczynnika α_t na rozwiązanie, b) fazę przejściową pomiędzy wartościami $0,1 < \alpha_t < 10^7$ oraz c) ponownie fazę ustabilizowanego rozwiązania dla $\alpha_t > 10^7$, charakteryzującą się praktycznie zanikiem deformacji.

Na rys. 6.5.1 pokazano sekwencję konfiguracji dla wzrastającego parametru obciążenia z rozwiązania CAM (44+2)e16 (FI) przy $\alpha_t = 0,001$. Ścieżki deformacji zamieszczono na rys. 6.5.3. Nieciągłości krzywych $\psi \times 10$ z rys. 6.5.3, reprezentujących przeskalowany obrót $\times 10$ w punkcie (a), są wynikiem ułomności

³²Problem ten wystąpił np. w teście czystego zginania w pracach IBRAHIMBEGOVIĆ [1993], IBRAHIMBEGOVIĆ i FREY [1995].



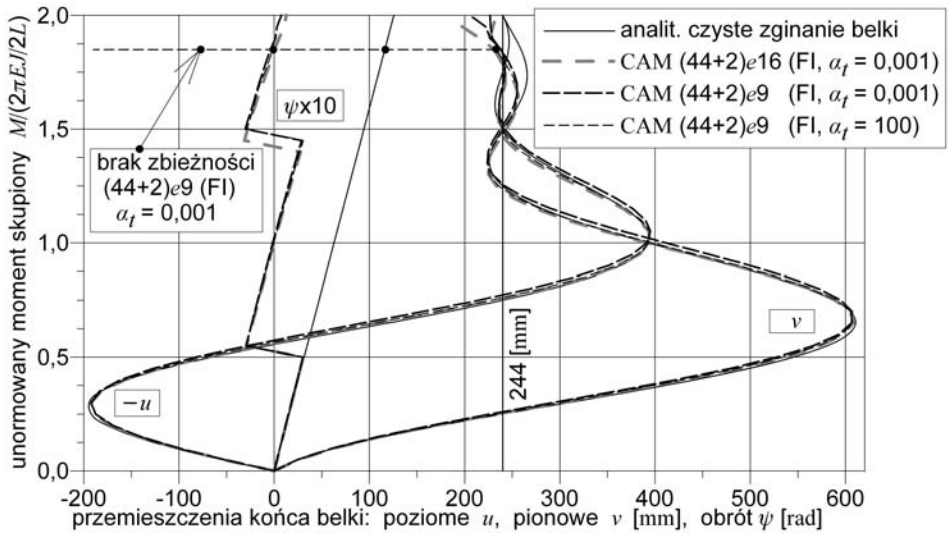
Rys. 6.5.2. Wspornik tarczowy L obciążony momentem: wpływ współczynnika owinięcia, zakres liniowy.

przeliczenia (tylko na potrzeby rysunku – trzy parametry) z globalnej parametryzacji obrotów tensora \mathbf{T} . Występowanie tego typu „przeskoków” potwierdza potrzebę stosowania interpolacji z przesunięciem (podrozdział 4.3).

Rozwiązanie zadania jest szczególnym przypadkiem problemu typu czyste zgięcie belki. Dlatego (tak jak w p. 6.4.1) informacją o poprawności rozwiązania jest utrzymanie walcowej formy deformacji oraz dokładność trafiania końca zawiązanego wspornika w punkt utwierdzenia. Efekty te obrazują rys. 6.5.1 i 6.5.3. Na rys. 6.5.3 zamieszczono także wyniki z dyskretyzacji elementem CAM $(44+2)e9$ (FI) dla dwóch wartości parametru owinięcia $\alpha_t = 0,001$ i $\alpha_t = 100$. Znikome różnice wyników rozwiązań nieliniowych dla obu wartości parametru α_t różniących się o pięć rzędów wskazują, podobnie jak i wyniki rozwiązań liniowych, na niewielki wpływ momentów owinięcia m^β na rozwiązania.

Badane przez nas rozwiązania dla $\alpha_t = 0,01$, otrzymane elementami CAM z zastosowaniem całkowania zredukowanego (URI) oraz przy użyciu elementów sformułowań alternatywnych, okazały się rozbieżne już w początkowej fazie deformacji ($\lambda \approx 0,2$). Wyjątek stanowi tu rozwiązanie przy użyciu elementów SEM $m0$, które uzyskano w całym rozważanym zakresie λ .

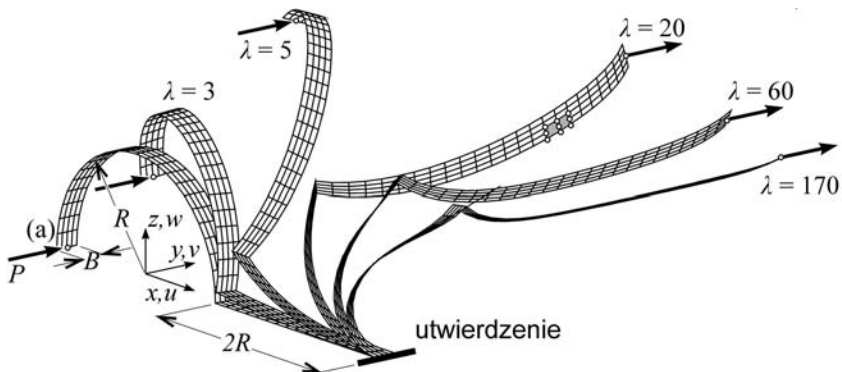
Dodatkowy negatywny wpływ na uwarunkowanie zadania, poza silną zmiennością α_t , może mieć wprowadzenie w obszarze obciążenia momentem skupionym jednego rzędu elementów o powiększonej o sześć rzędów wartości modułu sprężystości $10^6 \times E$. W rozwiązaniach CAM z użyciem całkowania zredukowanego wystąpiły silne formy pasożytnicze na parametrze obrotu, wskazujące na skłonność charakterystyk owinięcia do kumulacji form pasożytniczych.



Rys. 6.5.3. Wspornik tarczowy L obciążony momentem: wpływ współczynnika owinięcia, zakres nieliniowy.

6.5.3. Wspornik o kształcie znaku zapytania obciążony na końcu siłą poprzeczną do planu

Zadanie z rys. 6.5.4 (połączenie płyty i powłoki cylindrycznej w formie znaku zapytania), jako test połączeń konstrukcji, zasugerował C. BALCH (zob. SIMO [1993]).



Rys. 6.5.4. Wspornik o kształcie „?” obciążony siłą: schemat zadania, postaci deformacji.

Dane przyjęto zgodnie z pracą SIMO [1993]: $R = 5$, $B = 1$, $h_0 = 0,01$, $E = 3 \times 10^7$, $\nu = 0,3$ oraz $P_{\text{ref}} = 10^{-3}$, $P = \lambda P_{\text{ref}}$. W dyskretyzacji przyjmujemy w części płytowej i cylindrycznej tę samą liczbę elementów. Prezentujemy wyniki dla wartości przemieszczeń punktu (a) w miejscu przyłożenia siły.

W tabelach 6.5.1 i 6.5.2 zestawiono rozwiązania liniowe, obrazujące zbieżność przy zmianie siatki podziału dla różnych sformułowań, elementów i typów całkowania.

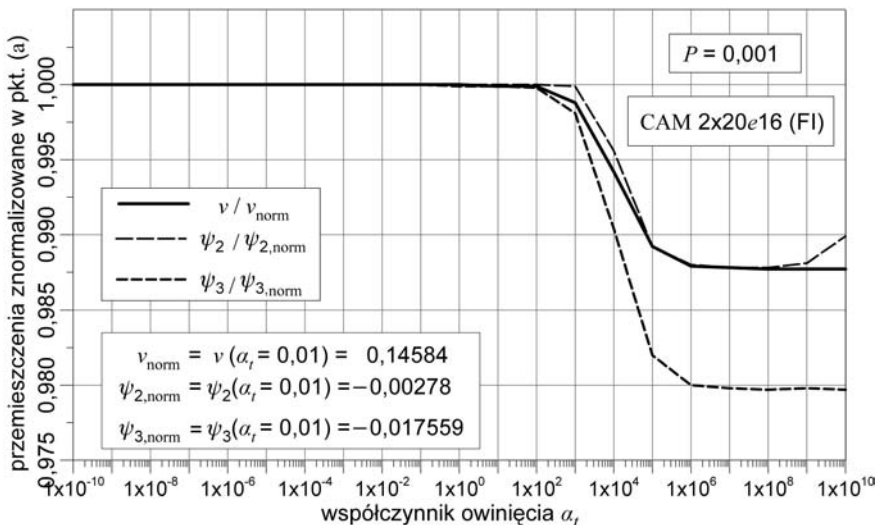
Rysunek 6.5.5 na przykładzie unormowanych przemieszczeń pokazuje wpływ wartości współczynnika owinięcia α_t w zakresie liniowym. Podobnie jak w po-

Tabela 6.5.1. Wspornik o kształcie „?”: zbieżności podziału, ugięcie v_a pod siłą $P_y = 0,001$.

Siatka węzłów	SIMO [1993]	CAM		SEL		SEMm1		ASC	
	e4	e4 URI	e9 URI	e4 URI	e9 URI	e4	e9	e4	e9
3 × 9	0,1486	0,1325	0,1478*	0,1147	0,1362*	0,1239	0,1418*	0,1280	0,1451*
5 × 17	0,1497	0,1454	0,1499	0,1351	0,1436	0,1425	0,1482	0,1437	0,1486
5 × 25	0,1499	0,1480	0,1500	0,1407	0,1443	0,1465	0,1492	0,1471	0,1494
7 × 49	0,1500	0,1497	0,1501*	0,1459	0,1465*	0,1491	0,1499*	0,1493	0,1499*
$\alpha_t = 0,01$, (.)* – obciążenie węzła wewnętrznego na boku elementu									

Tabela 6.5.2. Wspornik o kształcie „?”: zbieżności podziału, ugięcie v_a pod siłą $P_y = 0,001$.

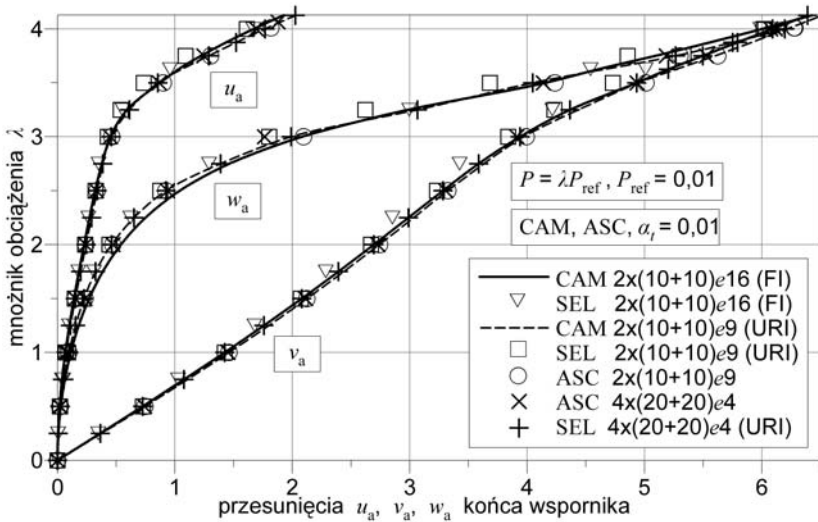
Siatka elementów	CAME16, $\alpha_t = 0,01$		SELe16	
	URI	FI	URI	FI
2 × (8+8)	0,1501	0,1399	0,1456	0,1268
2 × (10+10)	0,1501	0,1458	0,1467	0,1388
4 × (20+20)		0,1475		
2 × (8+12)	0,1501	0,1477	0,1472	0,1431
4 × (16+24)		0,1499		



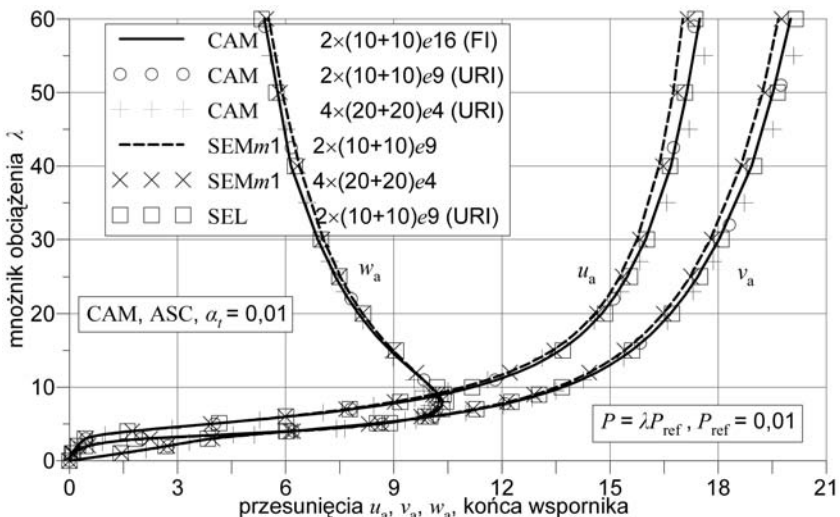
Rys. 6.5.5. Wspornik o kształcie „?” obciążony siłą: wpływ współczynnika owinięcia, zakres liniowy.

przednim przykładzie, wydzielić tu można trzy zakresy tej zależności. Zakres nie wykazujący wpływu α_t na rozwiązanie od $\alpha_t = 10^{-10}$ do $\alpha_t \approx 0,1$, zakres o widocznym wpływie α_t na wyniki od $\alpha_t > 0,1$ do $\alpha_t \approx 10^7$ i zakres powyżej wartości $\alpha_t = 10^7$, w którym deformacja stabilizuje się.

Ścieżki równowagi, odpowiadające pokazanej na rys. 6.5.4 sekwencji konfiguracji, zamieszczono na rys. 6.5.6 i 6.5.7. Przedstawiają one rozwiązania dla różnych elementów, typów całkowania i sformułowań przy dwóch siatkach po-



Rys. 6.5.6. Wspornik o kształcie „?” obciążony siłą: początek krzywych deformacji.



Rys. 6.5.7. Wspornik o kształcie „?” obciążony siłą: krzywe deformacji.

działu: $4 \times (20+20)$ dla elementów 4-węzłowych oraz $2 \times (10+10)$ dla elementów 9- i 16-węzłowych. W rozwiązaniach ASC o dwustopniowej interpolacji e_4 i e_9 z rys. 6.5.6 (tak jak w poprzednich przykładach), w miarę rozwoju deformacji następowało (w stosunku do innych sformułowań) pogarszanie się zbieżności procesu iteracyjnego.

W ramach rozwiązań nieliniowych w pracy SIMO [1993] ograniczono się do zamieszczenia tylko konfiguracji z początkowego stadium deformacji (w zakresie odpowiadającym rys. 6.5.6). Niestety, brak opublikowanych wyników liczbowych rozwiązania uniemożliwia odpowiednie porównania. Rozwiązania własne w zaawansowanym zakresie deformacji podajemy na rys. 6.5.7. Tabela 6.5.3 zawiera reprezentatywne wyniki liczbowe, gdzie również podano wartości zaczerpnięte z prac BAŞAR, ITSKOV i ECKSTEIN [2000] oraz MENZEL [1996] w których, podobnie jak w pracy SIMO [1993], zadanie analizowano tylko w początkowym zakresie deformacji.

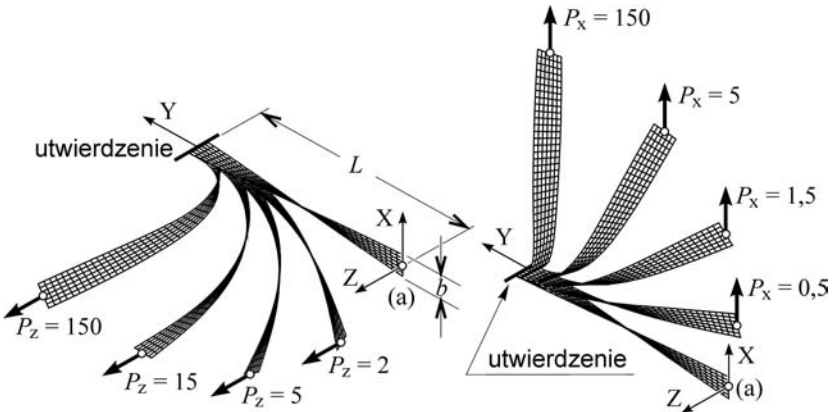
Tabela 6.5.3. Wspornik o kształcie „?”: przemieszczenia punktu (a).

P	CAM $2 \times (10+10)e_{16}$ (FI, $\alpha_t = 0,01$)						BAŞAR i inni [2000] 6E-R 2×24			MENZEL [1996] MIX6S 2×24		
	u	v	w	ψ_2	$-\psi_1$	$-\psi_3$	u	v	w	u	v	w
0,01	0,0669	1,424	0,1128	-1,563	-0,0256	0,1701	0,1177	1,4412	0,1641	0,0959	1,4368	0,1625
0,02	0,2266	2,694	0,5398	-1,530	-0,0359	0,3106	0,3161	2,6864	0,6258	0,2926	2,6731	0,6207
0,025	0,3206	3,283	1,041	-1,485	-0,0233	0,3611	0,4234	3,2583	1,1607	0,3979	3,2388	1,1520
0,03	0,4507	3,940	2,082	-1,384	0,0228	0,3884						
0,0325	0,5920	4,365	2,985	-1,292	0,0690	0,3900						
0,035	0,8722	4,933	4,154	-1,165	0,1356	0,3848						
0,04	1,671	6,090	6,003	-0,9444	0,2463	0,3905						
0,05	3,912	8,332	8,595	-0,5551	0,4389	0,4132						
0,06	6,078	10,06	9,800	-0,2758	0,5793	0,4387						
0,08	9,253	12,31	10,34	0,0825	0,7697	0,4775						
0,1	11,18	13,68	10,05	0,2993	0,8934	0,5039						
0,15	13,61	15,60	8,905	0,6121	1,081	0,5389						
0,2	14,77	16,68	8,021	0,8020	1,197	0,5488						
0,3	15,99	18,02	6,891	1,060	1,350	0,5304						
0,4	16,69	18,93	6,149	1,242	1,463	0,4893						
0,5	17,13	19,52	5,777	1,363	1,530	0,4548						
0,6	17,49	20,01	5,405	1,475	1,599	0,4049						

W rozwiązaniach stosujących technikę całkowania zredukowanego (URI) nie zaobserwowaliśmy istotnych form pasożytniczych. Dobra zgodność wyników SEL (teoria 5-parametrowa) z pozostałymi (rys. 6.5.6) potwierdza, że konstrukcje dwugąłęziowe rozpatrzonego tu typu nie mogą być traktowane jako przykłady rzeczywiście w pełni testujące nieliniową teorię 6-parametrową.

6.5.4. Skręcona o 90° belka wspornikowa obciążona siłą

Wspornik z rys. 6.5.8 zaproponowano w pracy MACNEAL i HARDER [1985] jako test elementów skończonych — belkowych, powłokowych i bryłowych. Ze względu na wstępne skręcenie belki typowe dla śmigieł, łopatek turbin itp., jest to ważny test stosowności elementów skończonych. W badaniach własnych uwzględniamy trzy warianty grubości powłoki: $h_0 = 0,32, 0,032, 0,0032$; $L = 12$, $b = 1,1$, kąt skręcenia równy 90° , $E = 29 \times 10^6$, $\nu = 0,22$.



Rys. 6.5.8. Skręcony o 90° wspornik ($h_0 = 0,032$) obciążony siłą: poziomą P_z , pionową P_x .

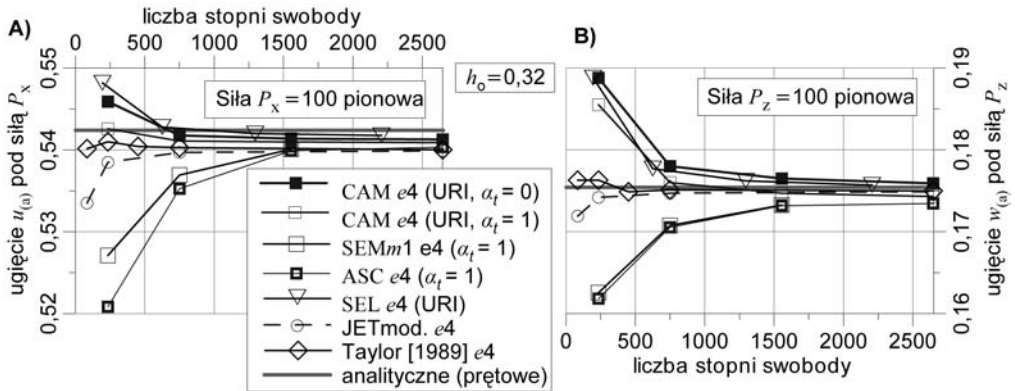
Pierwotnie w pracy MACNEAL i HARDER [1985] zaproponowano wariant z $h_0 = 0,32$. Badania liniowe tego przykładu z $h_0 = 0,32$ podjęto w wielu pracach. Liniową analizę zbieżności podziału typu h dla elementów 4-węzłowych przedstawia rys. 6.5.9, na którym dla porównania zamieszczono wyniki z pracy JAAMEI, FREY i JETTEUR [1989] oraz TAYLOR [1988]. Powiązane z rys. 6.5.9 siatki podziału na elementy zawiera tab. 6.5.4. Wszystkie wyniki są przesunięciami punktu (a) w miejscu przyłożenia siły. Rozwiązania dostępne z literatury oraz własne uzyskane elementami 9-węzłowymi dla $h_0 = 0,32$ zestawiono w tab. 6.5.5.

Tabela 6.5.4. Skręcony o 90° wspornik: siatki podziału, elementy 4-węzłowe.

Siatka elementów	Siatka węzłów	Liczba elementów	Liczba stopni swobody		
			CAM	SEL	JET
1×6	2×7	6	–	–	84
2×12	3×13	24	234	195	234
4×24	5×25	96	750	625	750
6×36	7×37	216	1554	1295	1554
8×48	9×49	384	2646	2205	2646

Tabela 6.5.5. Skręcony o 90° wspornik obciążony siłą: rozwiązania liniowe ($h_0 = 0,32$).

Kierunek siły – przesunięcie:		$P_x - u_{(a)}$		$P_z - w_{(a)}$	
Odniesienie, sformułowanie	Siatka węzłów:	3×13	5×25	3×13	5×25
	Typ elementu				
MACNEAL i HARDER [1985] elementy powłokowe	QUAD2(2C) QUAD4 SRI QUAD8 SRI	100,4 0,993		228,9 0,985	
			0,998		0,998
MACNEAL i HARDER [1985] elementy bryłowe	HEXA(8) SRI HEXA20 FI HEXA20R URI	0,983		0,977	
			0,991 0,993		0,995 0,999
SALEEB, CHANG i GRAF [1987] mieszany element zdegenerowany	HMSH5 $3 \times 3 \times 2$	1,001		0,997	
BELYTSCHKO i inni [1989] zdegenerowane elementy powłokowe	e4 URI e9 URI e4 SRI e9 SRI e9 FI	1,009 1,002 0,995 0,986 0,979	1,001 1,000 0,998 0,998 0,997	1,076 0,998 0,924 0,992 0,980	1,014 1,000 0,976 0,999 0,997
BELYTSCHKO i inni [1989] przekrojowe elementy zdegenerowane	e4 URI e9 URI e9 γ - ψ	1,004 1,002 0,997	0,999 0,999 0,998	1,070 0,998 0,996	1,012 0,999 0,998
BELYTSCHKO i inni [1989] przekrojowe elementy zdegenerowane	e4 URI e9 URI	1,436 1,413	1,411 1,406	1,377 1,358	1,361 1,359
NAGANARAYANA i PRATHAP [1989] płaskie elementy powłokowe	Q4-0 Q4-1	109,2 0,971			
JETTEUR i FREY [1986], element powłokowy JET wg teorii Marguerre	e4 URI	1,059	1,234	1,128	1,519
JAAMEI, FREY i JETTEUR [1989] zmodyfikowany element JET (DKT)	e4 URI	0,993	0,995	0,993	0,996
FREY [1990], element JET2/a	e4 URI	0,826	0,948	0,820	0,946
WHITE i ABEL [1989] element semiloof	QUAD 2×2 QUAD 3×3	1,235 1,233		1,136 1,359	
własne, CAM ($\alpha_t = 1$)	e9 URI e9 FI	0,997 0,973	0,997 0,994	0,990 0,970	0,990 0,988
własne, SEMm1 ($\alpha_t = 1$)	e9	0,995	0,997	0,989	0,990
własne, ASC ($\alpha_t = 1$)	e9	0,999	0,998	1,005	0,996
własne, SEL elementy zdegenerowane	e9 URI e9 FI	1,001 0,977	0,999 0,996	0,998 0,978	0,998 0,995
teoria belek	(siła $P = 1,0$)	$0,5424 \times 10^{-2}$		$0,1754 \times 10^{-2}$	



Rys. 6.5.9. Skręcony o 90° wspornik ($h_0 = 0,32$): zbieżności podziału, elementy 4-węzłowe.

W pracy BELYTSCHKO, WONG i STOLARSKI [1989] zaproponowano stukrotne pocienienie tej belki w celu pobudzenia efektu blokady membranowej. Rezultaty badań rozwiązań liniowych dla $h_0 = 0,0032$ oraz wyniki badań własnych zamieszczamy w tab. 6.5.6. W rozwiązaniach własnych, w celu odniesienia się do istniejących w literaturze wyników, zachowujemy odpowiednią dyskretyzację i sposób całkowania.

Tabela 6.5.6. Skręcony o 90° wspornik obciążony siłą: rozwiązania liniowe ($h_0 = 0,0032$).

Odniesienie, sformułowanie	Kierunek siły – przesunięcie:	$P_x - u_{(a)}$		$P_z - w_{(a)}$	
	Siatka węzłów: Typ elementu	3×13	5×25	3×13	5×25
BELYTSCHKO i inni [1989] zdegenerowane elementy powłokowe	e4 URI	1,013	1,002	0,990	0,998
	e9 URI	1,013	1,005	1,002	1,002
	e4 SRI	0,983	0,993	0,978	0,994
	e9 SRI	0,017	0,094	0,029	0,097
	e9 FI	0,007	0,091	0,007	0,090
BELYTSCHKO i inni [1989] przekrojowe elementy zdegenerowane	e4 URI	1,007	1,000	0,984	0,996
	e9 URI	1,012	1,004	1,001	1,002
	e9 γ - ψ	0,903	0,995	0,958	1,001
BELYTSCHKO i inni [1989] przekrojowe elementy zdegenerowane	e4 URI	1,393	1,368	1,704	1,703
	e9 URI	1,392	1,375	1,719	1,713
własne, CAM ($\alpha_t = 1$)	e9 URI	1,008	1,004	1,002	1,001
	e9 FI	0,006	0,084	0,007	0,089
własne, SEMm1 ($\alpha_t = 1$)	e9	1,001	0,998	1,002	0,999
własne, ASC ($\alpha_t = 1$)	e9	1,004	0,998	1,003	0,999
własne, SEL	e9 URI	1,012	1,004	1,002	1,002
	e9 FI	0,007	0,091	0,007	0,090
teoria belek	(siła $P = 1,0$)	$0,5256 \times 10^{-2}$		$0,1294 \times 10^{-2}$	

Porównanie dostępnych z literatury wyników dla dyskretyzacji 24. elementami z rozwiązaniami własnymi pokazuje podobne własności elementów CAM i SEL oraz SEM i ASC. Szczególnie ma to miejsce dla belki $h_0 = 0,32$, gdzie nie występują uboczne efekty blokady. W przypadku belki $h_0 = 0,0032$, stosowanie całkowania pełnego (FI) w modelach przemieszczeniowych daje kilkusetkrotne przeszywnienie.

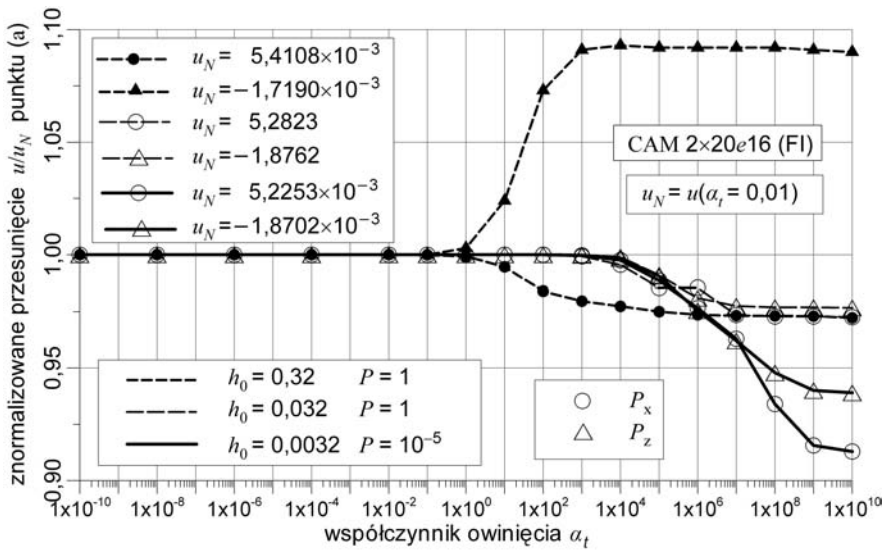
Zaskakująco wiele z dostępnych w literaturze elementów powłokowych nie spełnia tego testu. Przykładowo, dotyczy to rodziny elementów QUAD2 (MACNEAL i HARDER [1985]). Podobnie (wg WHITE i ABEL [1989]) nie spełnia tego testu sformułowany w pracy IRONS [1976] element typu semiloof, preferowany w tym okresie jako jeden z najbardziej skutecznych elementów powłokowych (np. MARTINS i OLIVEIRA [1988]). Przekrojowy element zdegenerowany, oryginalnie prezentowany w pracy LIU i inni [1986], gdzie zamieszczono pozytywne wyniki z innych testów, w tym przypadku daje ponad 70% błąd rozwiązania (wg BELYTSCHKO, WONG i STOLARSKI [1989]).

Ze względu na ujęcie szóstego stopnia swobody, interesujące są elementy 4-węzłowe: JET – zaproponowany przez JETTEUR i FREY [1986], bazujący na teorii małowyniosłych powłok Marguerre’a, oraz JETmod (zmodyfikowany JET) z pracy JAAMEI, FREY i JETTEUR [1989], opracowany na podstawie dyskretnej teorii Kirchhoffa (DKT)³³. W pierwotnym sformułowaniu JETTEUR i FREY [1986] element JET nie spełnia tego testu, prowadząc przy zagęszczaniu podziału do rozbieżności, por. JAAMEI, FREY i JETTEUR [1989] (tab. 6.5.5). Na rys. 6.5.9, w zestawieniu z wynikami własnymi uzyskanymi elementami 4-węzłowymi CAM i SEL (URI) oraz SEM i ASC, wskazujemy na zbieżność naszych rozwiązań z elementem JETmod (o zmodyfikowanym w stosunku do JET powiązaniu szóstego stopnia).

W rozwiązaniach CAME4 (rys. 6.5.9) rozważamy dwie wartości współczynnika owinięcia: $\alpha_t = 0$ i $\alpha_t = 1$. Dla obu tych wartości w rozwiązaniu CAME4 i rozwiązaniu SELe4 występuje podobny typ zbieżności, charakterystyczny dla całkowania zredukowanego (RI), w przeciwieństwie do rozwiązań SEMe4 i ASCe4, gdzie pojawia się zbieżność typowa dla całkowania pełnego (FI).

Kontynuację analizy liniowej zawiera rys. 6.5.10. Przedstawia on unormowane (przez wartości rozwiązań uzyskanych dla $\alpha_t = 0,01$) przesunięcie u punktu (a) w funkcji współczynnika owinięcia α_t dla trzech grubości belki $h_0 = \{0,32, 0,032, 0,0032\}$. Wyniki uzyskano 16-węzłowym elementem CAM przy całkowaniu pełnym (FI) w siatce 2×12 elementów. W granicach zmienności $10^{-10} \leq \alpha_t \leq 10^{+10}$ występują ponownie trzy zakresy wpływu współczynnika α_t . Dopiero powyżej wartości $\alpha_t = 0,1$ uwidacznia się wpływ α_t , najsilniej w przypadku belki najgrubszej $h_0 = 0,32$. Jednak porównanie wyników dla pozostałych dwóch przypadków grubości pokazuje, że wpływ α_t dla belki o średniej

³³Sformułowanie szóstego stopnia swobody w elementach JET ma źródło w klasycznej koncepcji uzupełnienia elementów tarczowych o obrotowy stopień swobody (na drodze „dyskretyzacyjnej”, zob. np. ALLMAN [1984], czy „wariacyjnej”, np. HUGHES i BREZZI [1989]).



Rys. 6.5.10. Skręcony o 90° wspornik obciążony siłą: wpływ współczynnika owinięcia, zakres liniowy.

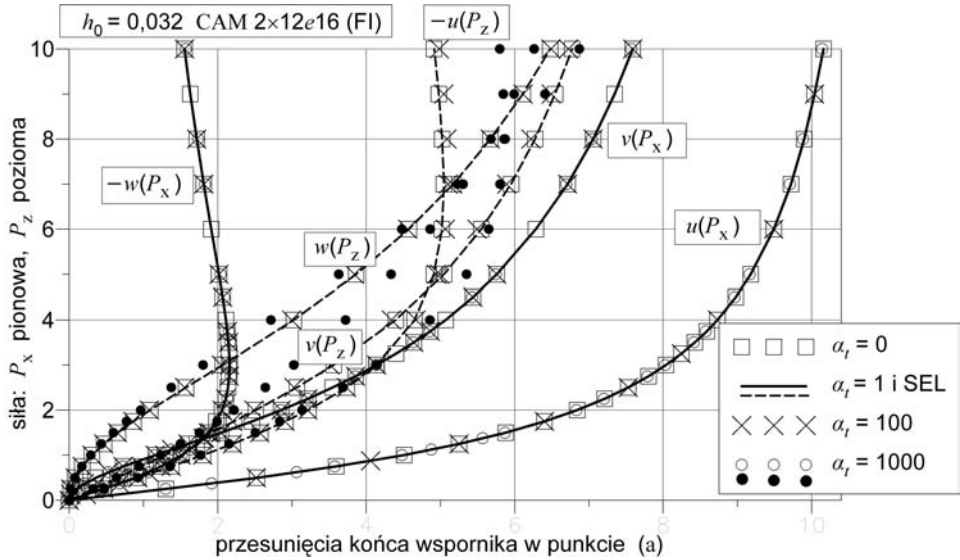
grubości $h_0 = 0,032$ jest mniejszy niż dla belki najcieńszej $h_0 = 0,0032$. Trudno o racjonalne wytłumaczenie tego faktu. W zakresie $\alpha_t < 0,1$ translacje uzyskane elementami CAM są w pełni zgodne z uzyskanymi elementami SEL (cztery miejsc znaczące).

Podobną analizę wpływu współczynnika owinięcia α_t w zakresie nieliniowym wykonaliśmy dla belki o średniej grubości $h_0 = 0,032$. Rozwiązania dla czterech wartości współczynnika owinięcia $\alpha_t = \{0, 1, 100, 1000\}$ z dyskretyzacji $2 \times 12e16$ przy pełnym całkowaniu (FI) pokazuje rys. 6.5.11. W obu przypadkach, liniowym i nieliniowym, występuje podobna charakterystyka zależności rozwiązań od wartości współczynnika owinięcia α_t . Interesującą jest całkowita zgodność wyników CAMe16 przy $\alpha_t = 0$ i $\alpha_t = 1$ z rozwiązaniem SELe16. Dla wartości współczynnika $\alpha_t = 100$ i $\alpha_t = 1000$ istotne różnice pojawiają się wraz z narastaniem deformacji typu skrętnego.

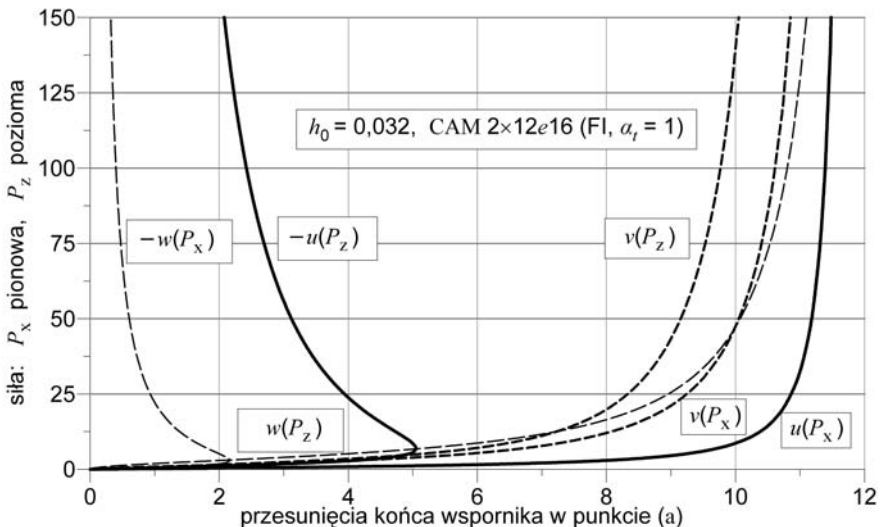
Rozwiązania z rys. 6.5.11 dotyczą ograniczonego zakresu deformacji nieliniowej. Pełny zakres deformacji ilustruje rys. 6.5.12, a reprezentatywne wartości liczbowe zestawiono również w tab. 6.5.7. W całym pokazanym zakresie deformacji występuje praktycznie całkowita zgodność wyników CAMe16 (FI) i SELe16 (FI) (z tego względu tych ostatnich nie podajemy).

Porównanie wyników rozwiązań nieliniowych w ramach sformułowania przemieszczeniowego CAM (URI), o dwustopniowej interpolacji odkształceń ASC i częściowo mieszanego SEMm1 zawiera rys. 6.5.13. Porównuje się wartości przemieszczeń punktu (a), poprzecznych w stosunku do kierunku siły obciążającej, uzyskane z rozwiązań o tej samej liczbie stopni swobody (750). Przemieszczenia

poprzeczne wykazują skłonność do najsilniejszych wzajemnych dysproporcji. Na rys. 6.5.13 zamieszczono, nawiązujący do wcześniejszych rozważań, wynik rozwiązania CAM $2 \times 12e16$ (FI). W rozwiązaniach ASC wraz z rozwojem deformacji narastały trudności z osiągnięciem zbieżności. Proces iteracyjny nabierał charakteru oscylacji, nie mogąc osiągnąć założonego progu dokładności.



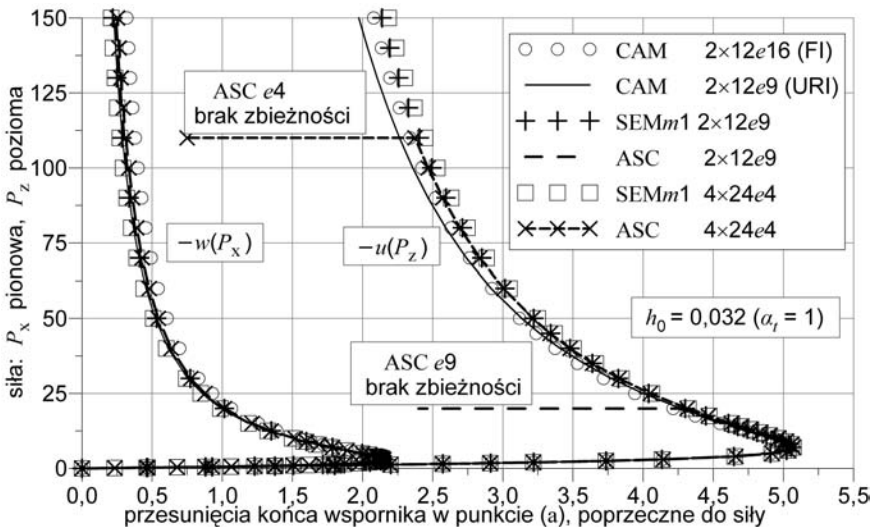
Rys. 6.5.11. Skrócony o 90° wspornik ($h_0 = 0,032$) obciążony siłą: krzywe deformacji, faza początkowa, wpływ współczynnika owinięcia.



Rys. 6.5.12. Skrócony o 90° wspornik ($h_0 = 0,032$) obciążony siłą: krzywe deformacji.

Tabela 6.5.7. Skręcony o 90° wspornik $h_0 = 0,032$: przesunięcia punktu (a) końca wspornika, CAM $2 \times 12e16$ (FI), $\alpha_t = 1$.

Siła P	P_x (pionowa)			P_z (pozioma)		
	u	v	$-w$	$-u$	$-v$	w
0,5	2,544	0,3602	0,8938	0,9285	0,0790	0,6497
1	4,511	1,166	1,518	1,801	0,3064	1,293
2	6,842	2,855	2,059	3,220	1,091	2,514
3	8,038	4,141	2,159	4,137	2,070	3,563
5	9,179	5,759	2,018	4,911	3,865	5,047
7	9,722	6,713	1,813	5,047	5,174	5,951
10	10,16	7,591	1,554	4,916	6,480	6,774
15	10,53	8,421	1,257	4,547	7,743	7,545
20	10,73	8,912	1,065	4,214	8,475	8,008
30	10,96	9,487	0,8320	3,718	9,300	8,567
50	11,18	10,05	0,6061	3,119	10,07	9,149
70	11,29	10,35	0,4939	2,763	10,46	9,470
100	11,39	10,61	0,4008	2,422	10,80	9,765
150	11,48	10,85	0,3205	2,079	11,10	10,05

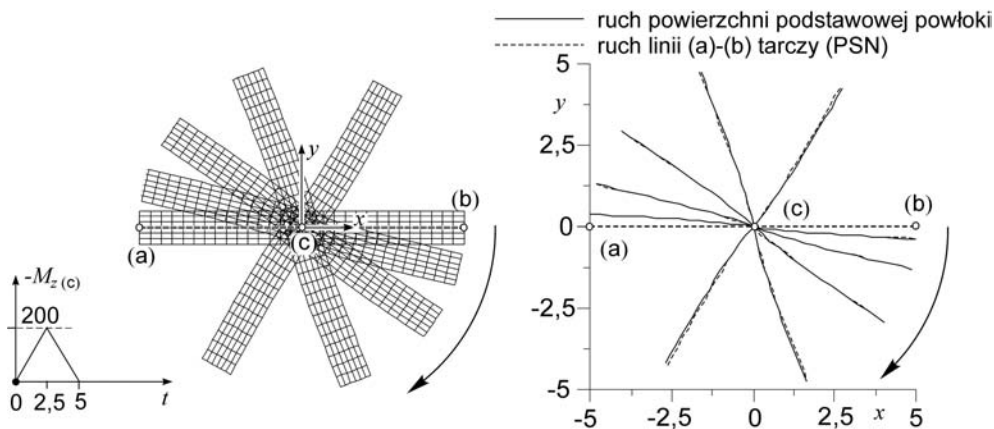


Rys. 6.5.13. Skręcony o 90° wspornik ($h_0 = 0,032$) obciążony siłą: porównanie elementów.

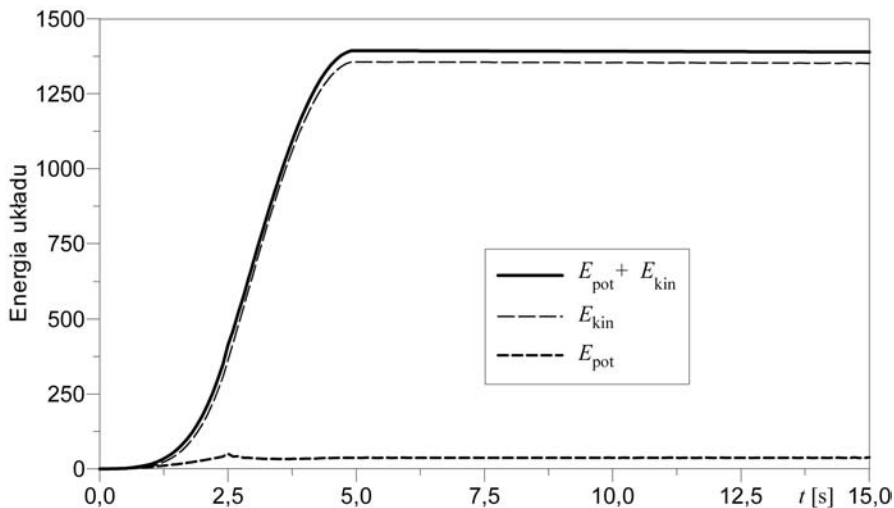
Rozwiązania zarówno liniowe jak i nieliniowe, otrzymane przy całkowaniu jednolicie zredukowanym (URI), zawierają formy pasożytnicze o różnym stopniu intensywności. Obserwowano również większą skłonność obrotowych stopni swobody do kumulowania form pasożytniczych.

6.5.5. Wirująca swobodnie tarcza obciążona momentem skupionym

Wpływ szóstego stopnia swobody (owinięcia) na dynamikę powłok badaliśmy, rozważając ruch obrotowy swobodnej tarczy (belki) pod działaniem normalnego do powierzchni podstawowej momentu skupionego przyłożonego w punkcie centralnym (c), rys. 6.5.14. Porównano dwa rozwiązania tej samej bisymetrycznej belki w płaskim ruchu obrotowym uzyskane przez odpowiednią zmianę kierunku działania wektora momentu obciążającego. Dlatego pierwsze z rozwiązań z rys. 6.5.14 opisane jest deformacją tarczy sprężystej w płaskim stanie naprężeń, zaś drugie po obróceniu układu modelem powłoki.



Rys. 6.5.14. Wirująca swobodnie tarcza: porównanie rozwiązań membranowego i powłokowego.



Rys. 6.5.15. Wirująca swobodnie tarcza: energia układu.

W obliczeniach przyjęto następujące dane liczbowe: $L = L_x = 10$, $b = h_0 = 1$, $E = 10^4$, $\nu = 0$, $\rho_0 = 1$ i $\alpha_t = 0,01$. Układ zdyskretyzowano przyjmując podział na 2×10 , 16-węzłowych elementów CAM całkowanych w sposób pełny (FI). Dynamiczne równania ruchu całkowano z krokiem $\Delta t = 0,1$ s.

W tym zadaniu działający w punkcie (c) moment jest czystym momentem owinięcia. To zadanie nie może więc być analizowane na podstawie modeli powłok, w których nie występuje energetycznie z nim sprzężony obrotowy stopień swobody, odpowiadający owinięciu. W rozważanym zakresie kilkunastu obrotów belki nie zaobserwowano istotnych różnic między rozwiązaniem membranowym i powłokowym. Rysunek 6.5.15 przedstawia wykres zmian energii układu w czasie.

6.5.6. Uwagi

Wartości konstytutywnego współczynnika owinięcia α_t , podobnie jak i równania konstytutywne w których on występuje, powinny w ogólnym przypadku ujmować również cechy geometryczne powłoki typu grubość w potędze lub krzywizna. Przyjęcie, w podanej wyżej analizie, tak szerokiego przedziału zmienności współczynnika owinięcia α_t gwarantuje właściwą interpretację charakteru jego wpływu na rozwiązania.

Badania zadań liniowych wykazały istnienie w przedziale $10^{-10} \leq \alpha_t \leq 10^{+10}$ trzech wyraźnych zakresów wpływu współczynnika owinięcia α_t na rozwiązania. Obecność podobnych trzech zakresów wpływu również w zadaniach nieliniowych, z kilku dobranymi różniącymi się co do rzędu wartościami α_t , wydają się potwierdzać wnioski z rozwiązań zadań liniowych.

Najistotniejszy, z obliczeniowego punktu widzenia, zakres wartości α_t niewykazujący wpływu na rozwiązania i charakteryzujący się ustabilizowaną deformacją, ma bardzo szeroki zasięg od zera (numerycznego) do wartości rzędu $\alpha_t \approx 0,1$, a nawet do wartości rzędu $\alpha_t \approx 1$. Pozostałe dwa zakresy, ze względu na wyraźny efekt wpływu α_t na rozwiązania, mają charakter poznawczy, mniej znaczący dla obliczeń inżynierskich. Zakres przejściowy, o narastającym wpływie α_t , jest obserwowany w przedziale $0,1 < \alpha_t < 10^{+7}$. Warto jednak zauważyć, że znaczący wpływ na rozwiązania występuje dopiero powyżej wartości rzędu $\alpha_t \approx 10$. Trzeci zakres wpływu ustabilizowanej deformacji określić można nierównością $\alpha_t > 10^{+7}$.

W dwóch ostatnich zakresach zmienności α_t widoczny jest ilościowo inny charakter oddziaływania wartości współczynnika owinięcia α_t na zachowanie się układu, zależnie od charakterystyki sztywnościowej konstrukcji (powłoki) jako całości. W przypadku dominującego wpływu sztywności membranowej (tarczowej), wzrost α_t powyżej 10^{+3} prowadzi praktycznie do zaniku deformacji. W przypadku dominacji sztywności zgięciowej (płytkowej), przy wartości α_t powyżej 10^{+3} następuje stabilizacja przemieszczeń na nieznacznie niższym poziomie w stosunku do rozwiązań z zakresu pierwszego.

Zbliżone badania rozwiązań liniowych, związane z szóstym stopniem swobody, zawiera praca KANOK-NUKULCHAI [1979] poświęcona 4-węzłowemu elementowi,

opracowanemu w ramach koncepcji degeneracji. Należy jednak podkreślić zupełnie inny sens badanego tam współczynnika k_T , który jest parametrem kary, w przeciwieństwie do α_t , pełniącego tutaj rolę współczynnika konstytutywnego. Parametr k_T pojawia się na poziomie energii odkształcenia sprężystego, w ramach koncepcji włączenia do elementu trzeciego obrotowego stopnia swobody za pośrednictwem funkcji kary.

Wyniki badań parametru kary k_T z przedziału $10^{-9} \leq k_T \leq 10^{+5}$ pokazują, że zwiększaniu wartości k_T towarzyszy „ściąganie” rozwiązań do wartości „oczekiwanych”, odwrotnie niż to ma miejsce w przypadku zwiększania wartości współczynnika owinięcia α_t . Taki wynik dla k_T jest typowy dla metody funkcji kary. Jednak nadmierne zwiększanie parametrów kary może prowadzić do niestabilności całego algorytmu. JETTEUR i FREY [1986] zauważyli, że w przypadku skreconych belek (p. 6.5.3) rozwiązania są szczególnie wrażliwe na wartość współczynnika sztywności, powiązanego z szóstym stopniem swobody. Stwierdzono, że niewłaściwe jego uwzględnienie może prowadzić do dużych błędów.

Nasze badania numeryczne pokazują specyficzny wpływ wartości współczynnika owinięcia α_t na rozwiązania. Ale nawet dla tak prostych relacji konstytutywnych (podrozdział 6.1) nie pojawiały się żadne trudności numeryczne. Kontrastuje to ze znanymi problemami występującymi przy wprowadzaniu szóstego stopnia swobody w koncepcjach podobnych do zastosowanej w elemencie JET (FREY [1990]). Mimo pojawiających się w literaturze wielu różnych sformułowań dotyczących szóstego stopnia swobody, brak jest nadal podobnego typu badań w zakresie nieliniowym. Porównanie w zakresie rozwiązań nieliniowych wyników uzyskanych własnymi elementami skończonymi, przedstawionymi w tej książce, z innymi elementami powłokowymi byłoby bardzo interesujące.

Rozważane w tym podrozdziale konstrukcje dwupłatowe, ze względu na możliwość ich analizy również przy użyciu elementów skończonych opartych na teoriach 5-parametrowych (SEL, p. 5.6.1), nie mogą jednak być traktowane jako przykłady testujące w pełnym zakresie sformułowania 6-parametrowe.

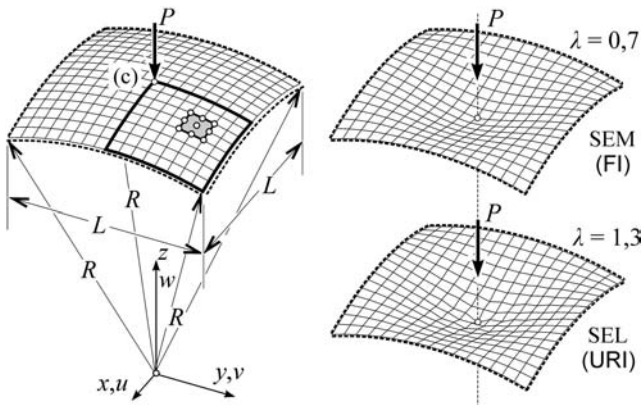
6.6. Układy o dużej sztywności przestrzennej

6.6.1. Uwagi wstępne

Zebrane w tym podrozdziale przykłady zakrzywionych w dwóch kierunkach powłok (z wyjątkiem ostatniego) dotyczą nieliniowego zachowania się czasz kuli-stych o warunkach brzegowych sprzyjających powstawaniu dużej sztywności przestrzennej. W tych zadaniach występują skończone translacje i obroty. Zadane obciążenia skupione, w warunkach dużej sztywności powłoki jako całej struktury, wywołują w swoim otoczeniu znaczne deformacje lokalne. W ostatnim zadaniu utwierdzonej powłoki, złożonej z sztywnego połączenia walca i stożka, badane są drgania własne tak złożonej konstrukcji jako układu liniowego.

6.6.2. Czasza o rzucie kwadratu swobodnie nieprzesuwnie podparta, obciążona siłą skupioną

Pokazany na rys. 6.6.1 wycinek czaszy kulistej, rozpięty w sposób swobodnie nieprzesuwnie podparty na krawędziach o rzucie kwadratu i obciążony centralnie siłą skupioną, należy do najpopularniejszych nieliniowych zadań powłok zakrzywionych w obu kierunkach. W obliczeniach znanych z literatury najczęściej przyjmowane są następujące dane liczbowe: $R = 2,54$ m, $\frac{1}{2}L = 0,7849$ m, $h_0 = 0,09945$ m, $E = 68950$ kN/m², $\nu = 0,3$ i obciążenie odniesienia $P_{\text{ref}} = 1000$ N. Przykład ten ma cztery płaszczyzny symetrii, jednak w obliczeniach najczęściej wykorzystuje się tylko symetrię podwójną, dyskretyzując w sposób regularny 1/4 konstrukcji.



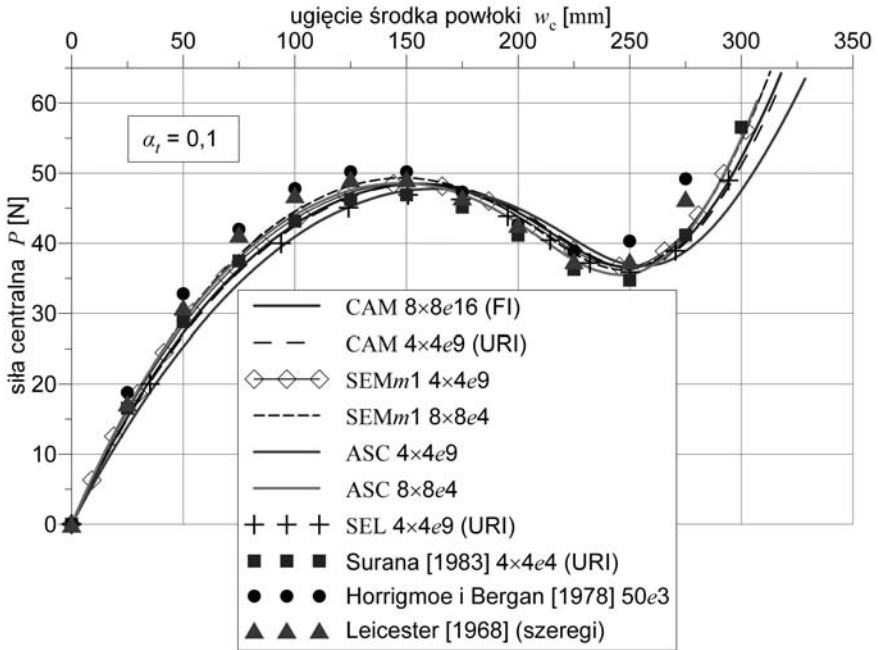
Rys. 6.6.1. Czasza o rzucie kwadratu: A) schemat, B) postać deformacji, C) forma paszożytnicza.

Na rys. 6.6.2 porównano własne rozwiązania nieliniowe z trzema rozwiązaniami wybranymi z literatury: LEICESTER [1968] – rozwiązanie uzyskane przy użyciu rozwinięć w szeregi podwójne, HERRIGMOE i BERGAN [1978] – rozwiązanie otrzymane przy użyciu (korotującego) płaskiego elementu trójkątnego w uaktualnionym opisie Lagrange'a, oraz SURANA [1983] – rozwiązanie otrzymane elementami zdegenerowanymi (URI). W tab. 6.6.1 zamieszczono reprezentatywne wyniki liczbowe rozwiązania własnego elementami CAM $8 \times 8e16$ przy pełnym całkowaniu (FI).

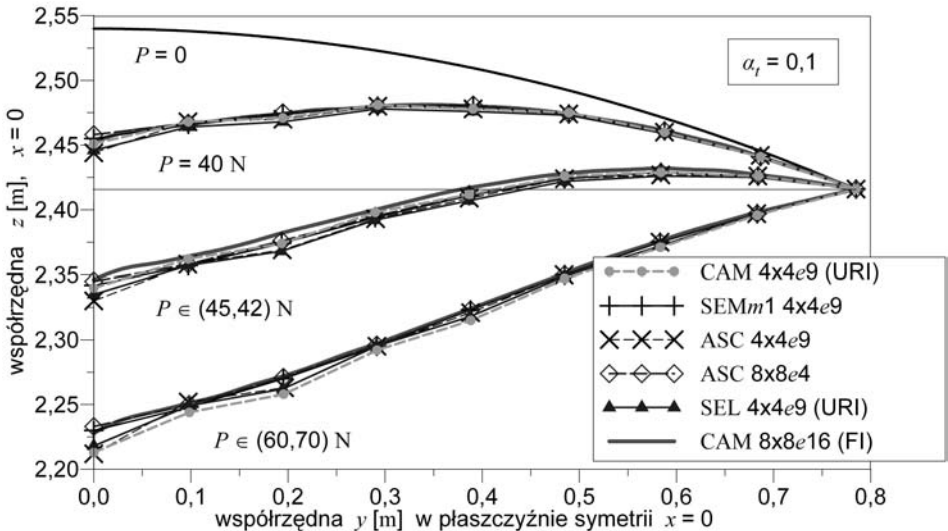
Tabela 6.6.1. Czasza o rzucie kwadratu: ugięcie środka, CAM $8 \times 8e16$ (FI), $\alpha_t = 0,01$.

P [N]	10	20	30	40	46,165	48,435	48,363
w_c [mm]	15,646	34,001	56,734	88,240	120,43	149,93	163,19
P [N]	45,337	40,162	36,609	37,235	40,703	48,032	60,218
w_c [mm]	194,46	221,35	246,88	260,54	275,67	292,84	312,39

Rysunek 6.6.2 można by opatrzeć najczęściej pojawiającym się w takim kontekście komentarzem: „wyniki pozostają w dobrej zgodności”, i tłumaczyć źródło „drobnych” różnic jako „efekt własnej propozycji” teorii lub własnych elementów skończonych. Jednak analiza odkształconej geometrii, podana np. na rys. 6.6.3,



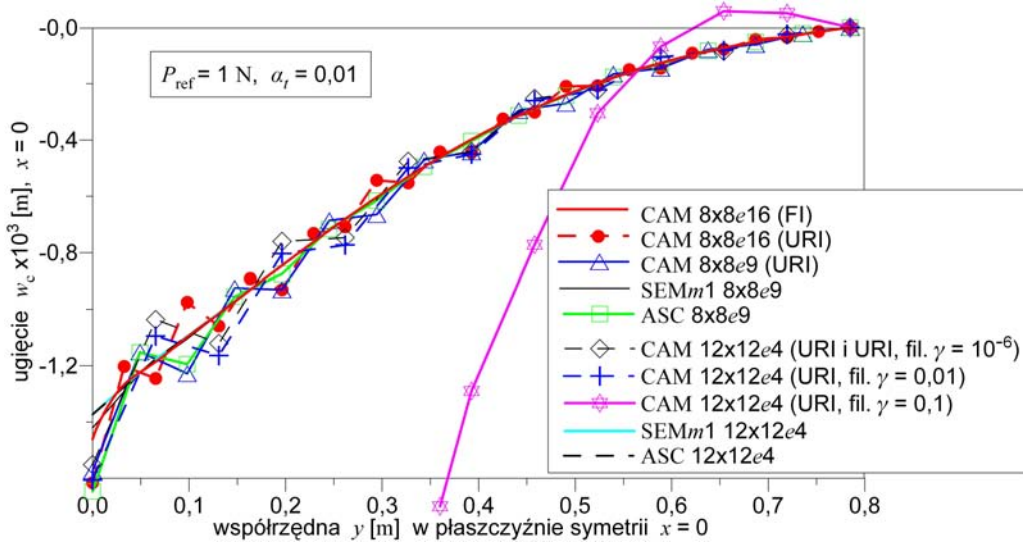
Rys. 6.6.2. Czasza o rzucie kwadratu: porównanie wyników analizy nieliniowej.



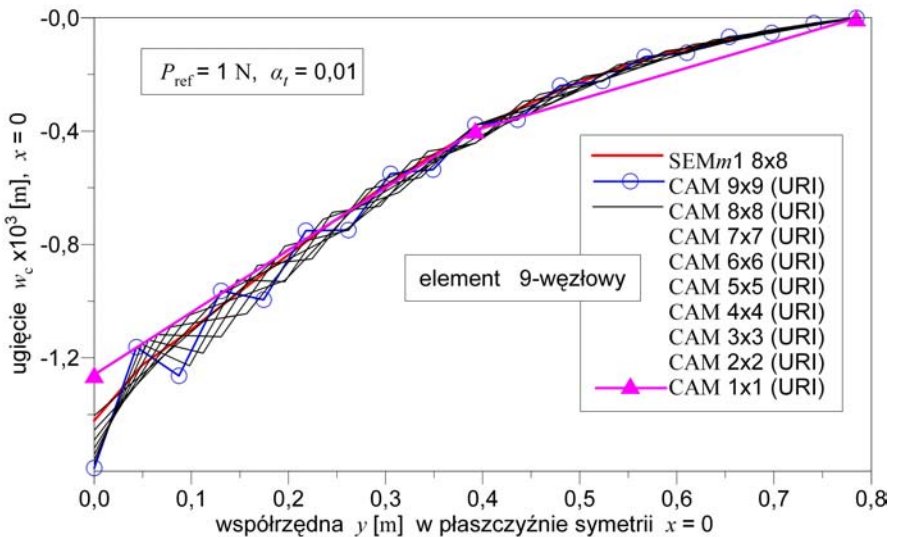
Rys. 6.6.3. Czasza o rzucie kwadratu: geometria krawędzi w płaszczyźnie symetrii.

ujawnia obecność form pasożytniczych w rozwiązaniach stosujących całkowanie zredukowane (URI) i w modelu ASCe9 o dwustopniowej interpolacji odkształceń.

Analiza tych wyników wskazuje, że w tym przykładzie występuje mechanizm generowania takich form pasożytniczych, które — o ile powstaną — stanowią źródło istotnych różnic ugięcia w_c punktu centralnego powłoki. Zaistniałe zjawisko

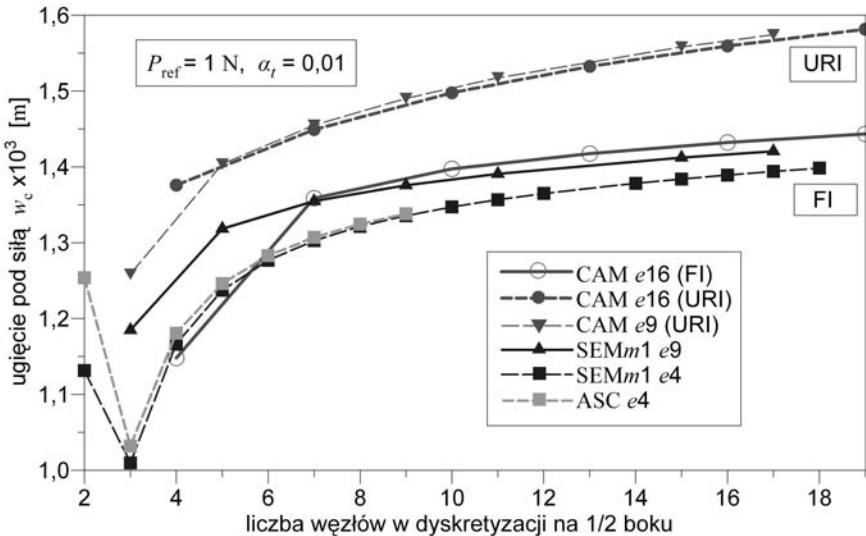


Rys. 6.6.4. Czasza o rzucie kwadratu: wpływ postaci pasożytniczych, rozwiązania liniowe.



Rys. 6.6.5. Czasza o rzucie kwadratu: zbieżność podziału, element 9-węzłowy (URI), wpływ postaci pasożytniczych, rozwiązania liniowe.

występuje także w zakresie liniowym. Uwidacznia to rys. 6.6.4, przedstawiający krzywą ugięcia powłoki w płaszczyźnie symetrii, otrzymaną przy użyciu różnych elementów. Powstałe formy pasożytnicze, zgodne w węzle przyłożenia siły z deformacją lokalną, wpływają na znaczące pogłębienie się ugięcia punktu centralnego powłoki.



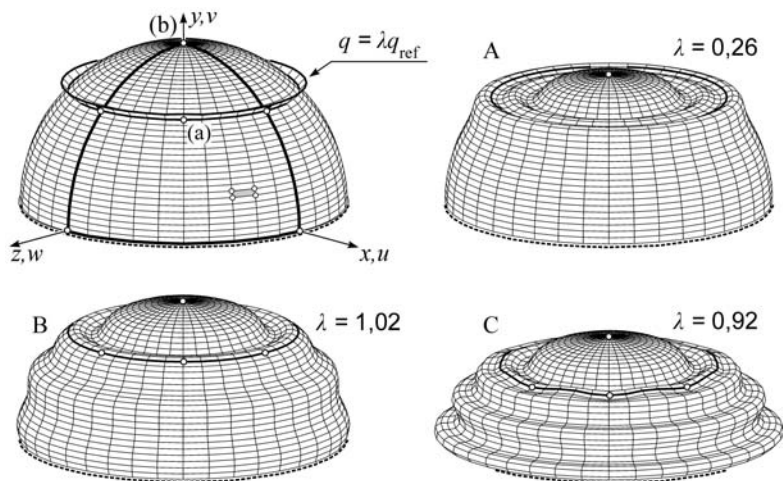
Rys. 6.6.6. Czasza o rzucie kwadratu: zbieżność podziału, rozwiązania liniowe.

Zjawisko powstawania różnic w wynikach obliczeń demonstruje rys. 6.6.5 na przykładzie elementu 9-węzłowego z całkowaniem zredukowanym (URI). Zagęszczenie podziału powoduje względny wzrost amplitudy postaci pasożytniczej nakładającej się na deformację. Przedstawione na rys. 6.6.6 wyniki analizy zbieżności podziału wskazują na istotny udział efektów lokalnych w badanym procesie deformacji. Rysunek 6.6.6 pokazuje także, że w zależności od przyjętego typu całkowania — zredukowane (URI) lub pełne (FI) — otrzymuje się zbieżność rozwiązań do *różnych* wartości.

6.6.3. Półsfera podparta przegubowo nieprzesuwnie obciążona radialnie

Powłoka kulista z rys. 6.6.7 o parametrach $R = 100$ m, $h_0 = 1$ m, $E = 10^4$ N/m², $\nu = 1/3$, $q_{ref} = 100$ N/mb posłużyła w pracach NOLTE [1983] oraz NOLTE, MAKOWSKI i STUMPF [1986] jako osiowo-symetryczny przykład do badania różnych wariantów nieliniowej teorii izotropowych powłok liniowo-sprężystych³⁴ typu Kirchhoffa-Love'a.

³⁴Wyniki z zakresu sprężysto-plastycznego zawierają prace NOLTE i CHRÓSCIELEWSKI [1986, 1987].



Rys. 6.6.7. Półsfera podparta przegubowo nieprzesuwnie: schemat zadania, postacie deformacji.

Rozwiązania elementami CAMe4 (URI) z dwóch dyskretyzacji porównano na rys. 6.6.8 z obliczeniami NOLTE [1983]. W obliczeniach częściowo wykorzystano symetrię (osiową) układu, dyskretyzując 1/4 powłoki. Mimo użycia całkowania jednolicie zredukowanego (URI), w tym przykładzie nie ujawniają się postacie pasożytnicze. W sąsiedztwie skupionego obciążenia radialnego zadanie wymaga dyskretyzacji dostatecznie gęstej, zdolnej do odtworzenia efektów lokalnych o stosunkowo krótkiej fali deformacyjnej. Znaczenie i wpływ podziału pozwala ocenić podwojenie zagęszczenia siatki podziału. Zagęszczenie dyskretyzacji daje początkowo ilościowe, a następnie (w miarę rozwoju deformacji), jakościowe zmiany bliższe rozwiązaniu NOLTE [1983].

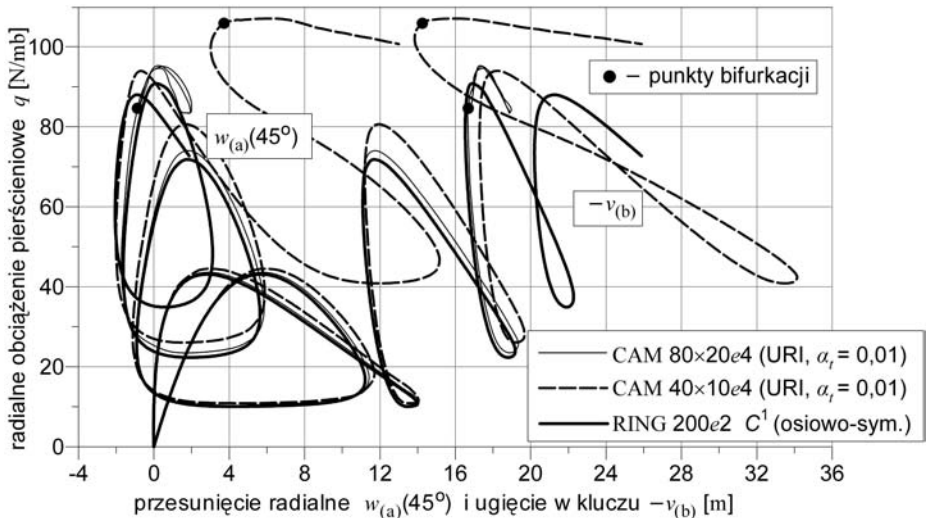
Ujawniona utrata obrotowo-symetrycznej postaci rozwiązań z rys. 6.6.7 C nie była celem zamierzonym. Efekt lokalnej utraty stateczności jest wynikiem istnienia niekontrolowanych zaburzeń w obrotowej symetrii typu danych, form pasożytniczych itp. Przypadkowość wychwycenia nieobrotowo-symetrycznej utraty stateczności potwierdza ograniczony zakres przydatności nieliniowych rozwiązań zadań obrotowo-symetrycznych.

To zadanie potraktowano w pracach DING [1989], BAŞAR i DING [1990] oraz BOUT [1993] jako sprawdzian sformułowań własnych³⁵. Wyniki odniesiono do początkowego zakresu rozwiązania z NOLTE, MAKOWSKI i STUMPF [1986], dochodząc w obu przypadkach do konkluzji o dobrej zgodności tych wyników. Aby uniknąć niepoprawnego odczytania wyników z wykresu, co występuje w pracach DING [1989] i BAŞAR i DING [1990], zamieszczamy tabelaryzację rozwiązania

³⁵W obu przypadkach dyskretyzowano sekcję szerokości 2° jednym rzędem elementów trójkątnych, używając odpowiednio 45 elementów typu KLFR27 w pracy DING [1989], zaś 139 elementów o stałych odkształceniach w pracy BOUT [1993].

Tabela 6.6.2. Półsfera podparta przegubowo nieprzesuwnie: rozwiązanie osiowo-symetryczne RING 200e2 C^1 .

q	$w_{(a)}(45^\circ)$	$-v_{(b)}$	q	$w_{(a)}(45^\circ)$	$-v_{(b)}$	q	$w_{(a)}(45^\circ)$	$-v_{(b)}$
19,180	1,3600	0,10430	14,042	-0,15224	12,555	90,776	0,03664	16,849
32,351	2,7058	0,56755	20,146	-0,81585	12,111	89,611	0,66905	17,345
38,950	3,7797	1,1881	35,904	-0,76105	11,498	80,094	1,6912	18,517
42,376	4,8535	2,0275	50,441	-0,25393	11,186	62,354	2,7478	20,297
43,102	5,8073	2,9481	64,944	0,57693	11,109	47,338	3,1170	21,673
42,228	6,6429	3,8820	71,763	1,6630	11,599	39,714	2,7431	22,214
39,326	7,7366	5,2768	69,601	2,6703	12,548	36,853	2,1598	22,269
34,008	8,9876	7,1217	60,075	3,9647	14,260	34,926	0,73600	21,954
26,480	10,282	9,4239	37,284	5,5631	17,604	35,615	-0,34252	21,574
20,363	11,030	11,277	28,395	5,4566	18,804	40,459	-1,4554	21,033
17,372	11,211	12,206	23,512	4,0996	19,176	60,604	-2,0495	20,325
14,471	11,083	13,113	22,327	2,0516	18,831	80,039	-1,6963	20,263
11,895	10,170	13,852	24,564	-0,29615	18,159	87,161	-1,2097	20,762
10,814	8,8070	14,015	36,474	-1,5407	17,369	87,989	-0,92117	21,190
10,057	3,8968	13,434	57,897	-1,4747	16,769	85,605	-0,15216	22,485
11,120	1,1937	12,955	77,534	-0,93311	16,534	79,529	0,84308	24,187



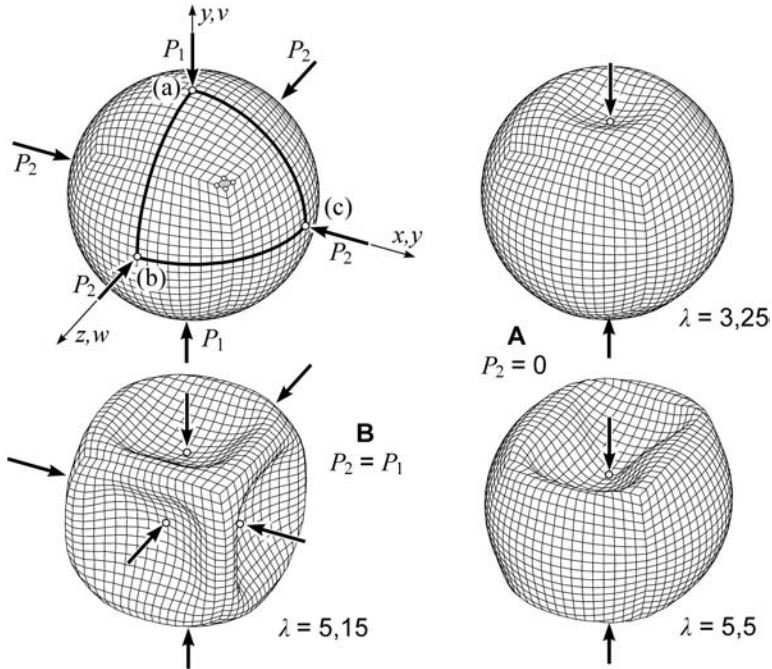
Rys. 6.6.8. Półsfera podparta przegubowo nieprzesuwnie: porównanie krzywych deformacji.

(tab. 6.6.2) oddającą jego charakter w zakresie deformacji z rys. 6.6.8. Podane wyniki są reobliczeniami prezentowanymi w NOLTE [1983], NOLTE, MAKOWSKI i STUMPF [1986] oraz NOLTE i CHRÓŚCIELEWSKI [1986] programem RING³⁶.

³⁶Program RING wykorzystuje bibliotekę podprogramów MINIMOD (CHRÓŚCIELEWSKI i BRANICKI [1989]). Stosuje osiowo-symetryczny element 2-węzłowy klasy C^1 pierwotnie sformułowany w MAKOWSKI [1981] i rozwinięty w NOLTE [1983] do zakresu skończonych obrotów (zob. PIETRASZKIEWICZ [1977], NOLTE, MAKOWSKI i STUMPF [1986]).

6.6.4. Sfera swobodna obciążona samozrównoważonym układem sił skupionych

Analizę deformacji swobodnej sfery z rys. 6.6.9 przeprowadzamy dla wariantów obciążenia układem dwóch A) i sześciu B) sił samozrównoważonych³⁷.

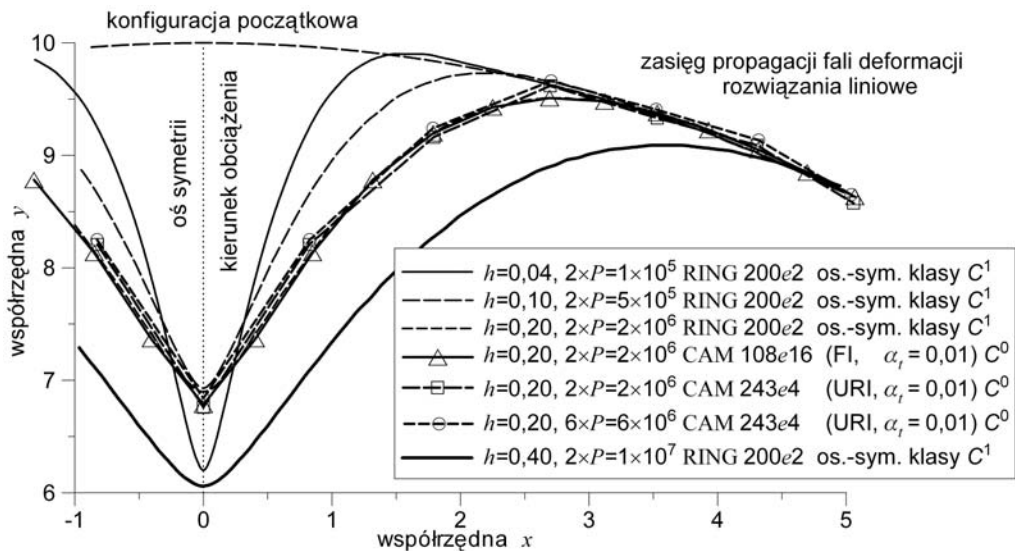


Rys. 6.6.9. Sfera obciążona dwiema/sześcioma siłami: schemat zadania, postaci deformacji.

Wzorując się na MACNEAL i HARDER [1985], w analizie przyjęto $R = 10$, $E = 6,825 \times 10^7$, $\nu = 0,3$. Wykorzystując symetrię układu, rozważamy $1/8$ sfery stosując dyskretyzację 243. elementami CAME4 (URI) i 108. elementami CAME16 (FI). Dodatkowo w wariacie A) zastosowano jednowymiarową dyskretyzację osiowo-symetryczną 200. elementami RINGe2. Wyniki są przemieszczeniami punktów (a), (b), (c), oraz deformacją konturu z płaszczyzn symetrii. Rezultaty liniowych badań wpływu grubości h_0 na zasięg propagacji fali deformacji zamieszczono na rys. 6.6.10.

W analizie nieliniowej przyjęto $h_0 = 0,2$, $P_{\text{ref}} = 10^5$. Fala deformacji przy grubości $h_0 = 0,2$, w stosunku do rozwiązań o $h_0 < 0,2$, obejmuje większy obszar z otoczenia siły, redukując częściowo efekt lokalny. Reprezentatywne wyniki liczbowe nieliniowego rozwiązania osiowo-symetrycznego RING 200e2 zamieszczono w tab. 6.6.3.

³⁷Częściową analizę zadania przedstawiono w pracy WALUKIEWICZ i CHRÓŚCIELEWSKI [1995].



Rys. 6.6.10. Sfera obciążona dwiema siłami: zasięg deformacji, rozwiązania liniowe.

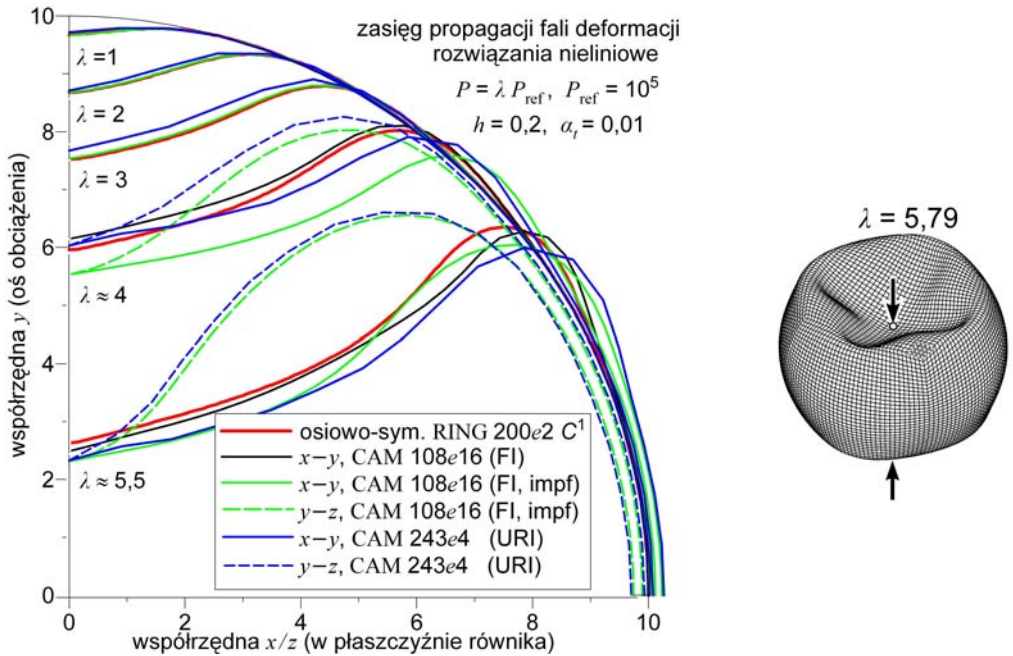
Tabela 6.6.3. Sfera obciążona dwiema siłami: ugięcie $-v_{(a)}$, RING 200e2 C^1 osiowo-symetryczne, $P_{\text{ref}} = 10^5$.

λ	0,5	0,75	1	1,25	1,75	2,25	2,75
$-v_{(a)}$	0,09844	0,17953	0,32524	0,56881	1,0701	1,5820	2,1576
λ	3,25	3,5	3,75	4	4,5	5	5,5
$-v_{(a)}$	2,8253	3,2001	3,6050	4,0417	5,0142	6,1223	7,3667

W analizie elementami powierzchniowymi poszukujemy efektu utraty naturalnych (dla rozpatrywanych układów) symetrii rozwiązań (rozgałęzień) jako skutku niezamierzonych zaburzeń³⁸. W obu przypadkach obciążenia A i B kontrolowane zaburzenie (imperfekcję) w postaci czterech samozrównoważonych sił $P_{\text{impf}} = \pm \lambda P_{\text{ref}}/1000$ przykładamy na równiku w punktach (b)–(b) i (c)–(c) (rys. 6.6.9).

Wyniki rozwiązań nieliniowych przedstawiamy na rys. 6.6.11÷6.6.14. Reprezentatywne wyniki liczbowe rozwiązania 108 CAME16 (FI) bez sił zaburzących podano w tab. 6.6.4. W geometrii rozwiązań 243 CAME4 (URI), rys. 6.6.5 i 6.6.6, można dostrzec nieznaczne postacie pasożytnicze (bardziej wyraźne są one na obrotach). Zapewne formy pasożytnicze są tu główną przyczyną „samo-

³⁸Pod terminem „niezamierzone zaburzenia” rozumiemy np. zaburzenie wynikające z braku osiowej symetrii w przyjętej siatce dyskretyzacyjnej, błąd numeryczny typu zaokrąglenia danych, itp. W programach BOX, CAM, MIX, SEM, ASC, SEL przyjęto klasyczną dziesięcioznakową reprezentację danych (w tym liczb zmiennoprzecinkowych).

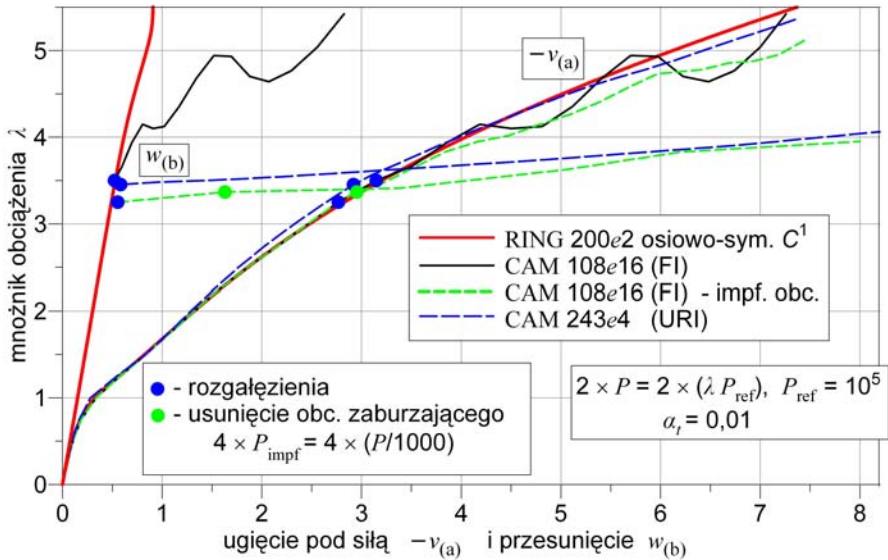


Rys. 6.6.11. Sfera obciążona dwiema siłami: zasięg deformacji, deformacja w płaszczyznach $x-y$ i $y-z$.

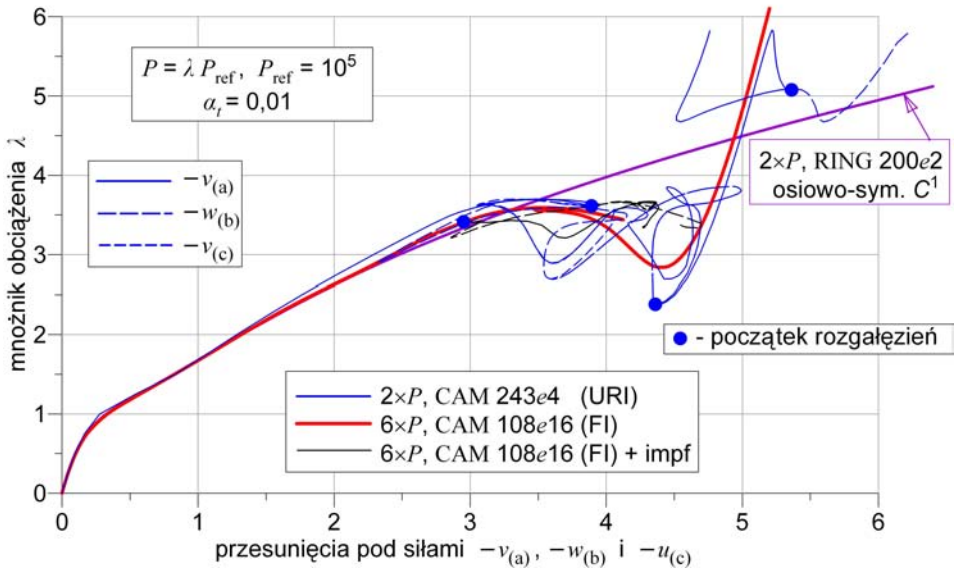
rzutnej” utraty osiowej symetrii rozwiązań uzyskanych 243. elementami CAME4 (URI), por. rys. 6.6.7, 6.6.9 A i 6.6.13. Uzyskanie analogicznej postaci utraty symetrii rozwiązań 108. elementami CAME16 (FI) wolnymi od form zeroenergetycznych, stało się możliwe dopiero przez wprowadzenie imperfekcji w obciążeniu. Drugi przypadek (rys. 6.6.14) niesymetrycznej postaci rozwiązania 108. elementami CAME16 (FI), dla wariantu osiowo-symetrycznego przy obciążeniu A, otrzymano „samorzutnie” bez imperfekcji obciążeniowej. Zapewne o kształcie deformacji z rys. 6.6.11 zdecydował tu sposób dyskretyzacji (siatka nie spełnia warunku osiowej symetrii).

Tabela 6.6.4. Sfera obciążona sześcioma siłami: ugięcia $-v_{(a)} = -w_{(b)} = -u_{(c)}$, CAM 108e16 (FI), $\alpha_t = 0,01, P_{\text{ref}} = 10^5$.

λ	0,5	0,75	1	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25
ugięcie	0,10062	0,18457	0,33450	0,57219	1,0746	1,5676	2,1456	2,7209
λ	3,5	3,5908	3,5241	3,4397	3,5238	3,5893	3,5739	3,5430
ugięcie	3,1172	3,5238	3,9051	4,1235	3,9117	3,5915	3,4684	3,6591
λ	3,4800	3,3161	2,9268	2,8476	2,8496	3,1797	4,5178	6,9755
ugięcie	3,8470	4,0260	4,2788	4,3633	4,4509	4,6396	4,9481	5,3316

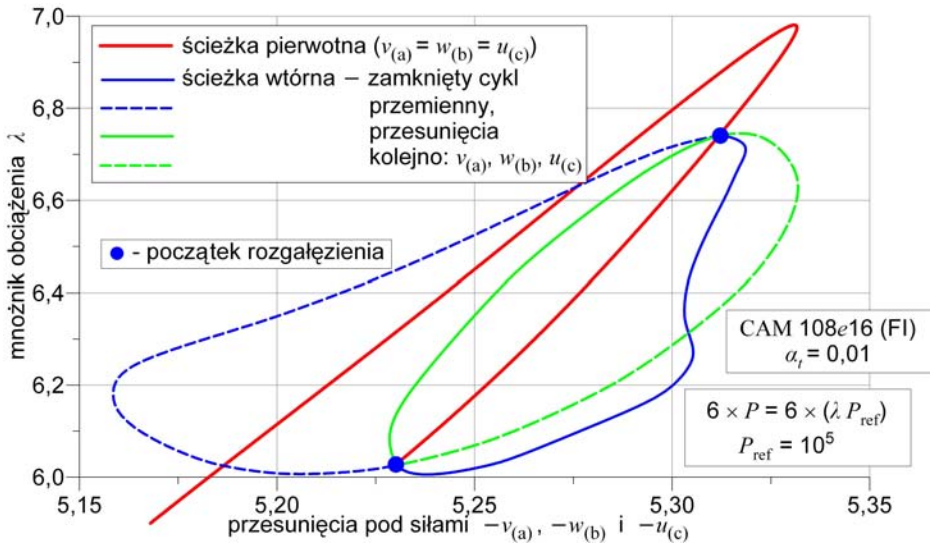


Rys. 6.6.12. Sfera obciążona dwiema siłami: rozgałęzienie rozwiązań.



Rys. 6.6.13. Sfera obciążona sześcioma siłami: krzywe deformacji.

W przypadku obciążenia B śledzenie kształtu deformacji jest utrudnione. Kontrola przemieszczeń w punktach (a), (b), (c) w rozwiązaniu 108 CAME16 (FI), przy założonej symetrii obciążenia, ujawniła utratę symetrii rozwiązania w bardzo zaawansowanym stanie deformacji, rys. 6.6.14 (kontynuacja rys. 6.6.13). Po roz-



Rys. 6.6.14. Sfera obciążona sześcioma siłami: kontynuacja rozwiązania z rys. 6.6.13.

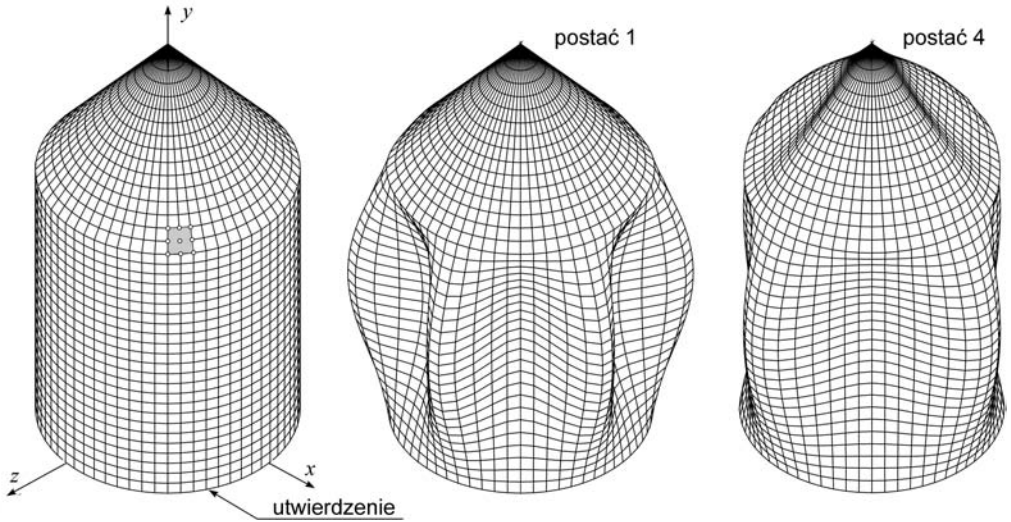
gałęzieniu się ścieżek przemieszczenia punktów (a), (b), (c) utworzyły zamknięty cykl przemienny (zapętlenie), uniemożliwiając kontynuowanie rozwiązania.

Analogiczne zjawisko „zapętlenia” w zamkniętym cyklu wystąpiło także w rozwiązaniu 108 CAME16 (FI) ze wstępnym zaburzeniem obciążenia. Na rys. 6.6.13 zamieszczono tylko początkowy fragment bardzo skomplikowanej ścieżki tego rozwiązania. Wobec jej złożoności, nie można wykluczyć (mimo zabezpieczeń, zob. podrozdział 5.7), że w trakcie rozwiązań metodą kontynuacyjną (sterowanie parametrem obciążenia-przemieszczenia i łuku) nastąpiły niekontrolowane przeskoki na blisko leżące ścieżki o mało różniących się konfiguracjach.

6.6.5. Powłoka złożona z segmentów walca i stożka, drgania własne

W pracy LASHKARI i WEINGARTEN [1973] przedstawiono studium charakterystyk modalnych obrotowej powłoki segmentowej (rys. 6.6.15), otrzymanych doświadczalnie za pomocą holografii interferometrycznej i numerycznie metodą elementów skończonych.

Badano powłokę złożoną z dwóch połączonych ze sobą segmentów: walca o średnicy $R_{\text{walec}} = 10 \frac{3}{16}$ in i wysokości $H_{\text{walec}} = 12$ in oraz stożka o wysokości $H_{\text{stożek}} = 6 \frac{5}{16}$ in. Model doświadczalny wykonano z aluminium (symbol 6061-0) o grubości blachy $h_0 = 0,032$ in i stałych materiałowych $E = 10^7$ psi, $\nu = 0,3$ oraz ciężarze objętościowym $\mu = 0,1$ lb/in³ (masie $\rho = \mu/g = 2,589 \times 10^{-4}$ lbs²/in⁴). Część walcową zamocowano sztywno w płycie z masywnej blachy aluminiowej o grubości 3/4 in. Wyniki badań doświadczalnych pierwszych 10 zestawów częstości i postaci drgań własnych, z 26 wyników przedstawionych w LASHKARI i WEINGARTEN [1973], przytoczono w tab. 6.6.5.



Rys. 6.6.15. Powłoka segmentowa stożek–walec: schemat zadania i postaci drgań własnych.

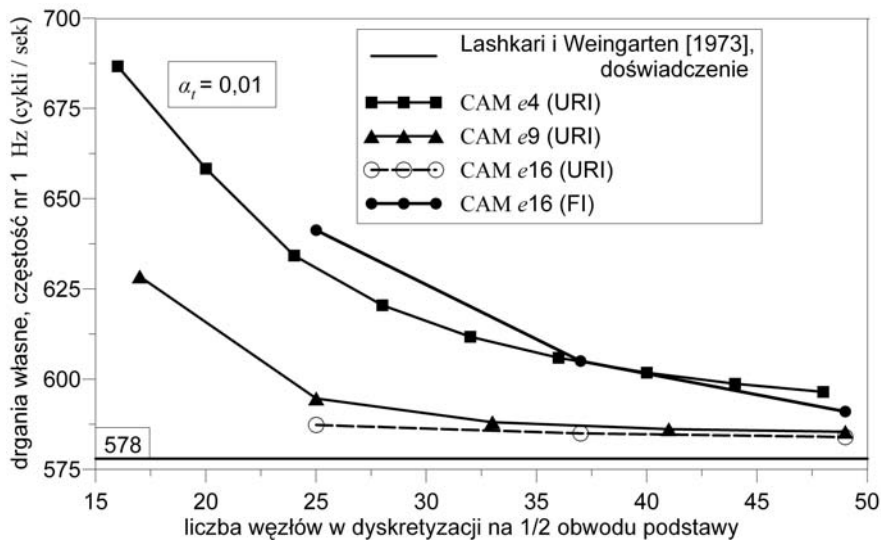
Tabela 6.6.5. Powłoka segmentowa stożek–walec: wyniki doświadczalne wg LASHKARI i WEINGARTEN [1973].

Segment		Postacie drgań własnych, liczba fal deformacji w segmentach									
walec	m	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
	n	6	5	7	4	3	9	7	9	6	10
stożek	m	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
	n	0	0	0	4	3	0	0	3	6	4
Częstości drgań własnych, Hz (cykli/s)											
		578	600	650	738	920	962	1094	1160	1210	1320

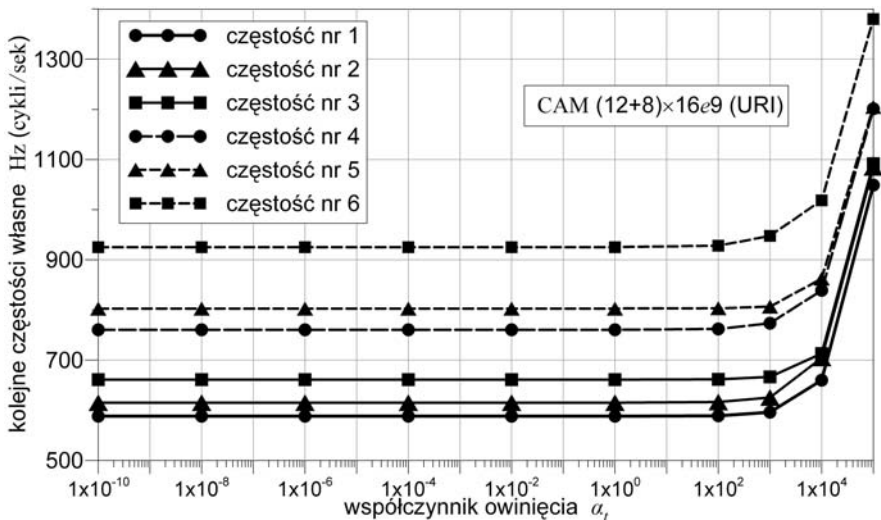
m – kierunek południkowy, n – kierunek obwodowy.

W rozwiązaniach własnych analizę ograniczamy do 1/2 symetrycznej części powłoki stosując zasadę podziału na elementy $(3n + 2n) \times 4n$, gdzie kolejne symbole oznaczają liczby elementów siatki podziału w następujących kierunkach: *(wysokość walca + wysokość stożka) × połowa obwodu*. Na rys. 6.6.16 zamieszczamy typową siatkę dyskretyzacyjną i dwie wybrane postaci drgań własnych. Rysunek 6.6.16 przedstawia analizę zbieżności pierwszej częstości drgań własnych, odniesioną do wyniku doświadczalnego (LASHKARI i WEINGARTEN [1973]), uzyskaną przy zagęszczaniu siatki podziału na elementy. Do dalszej analizy wybrano dyskretyzację na 9-węzłowe elementy CAM całkowane w sposób jednocielesie zredukowany (URI) w siatce $(12 + 8) \times 16$.

Przedstawiona na rys. 6.6.17 analiza wpływu współczynnika owinięcia α_t na pierwsze częstości drgań własnych wskazuje, że wcześniejsze wnioski z zakresu statyki powłok pozostają nadal ważne. Wyraźnie występuje tu obszar zmienno-



Rys. 6.6.16. Powłoka segmentowa stożek-walec: zbieżność podziału dla pierwszej częstości drgań własnych.

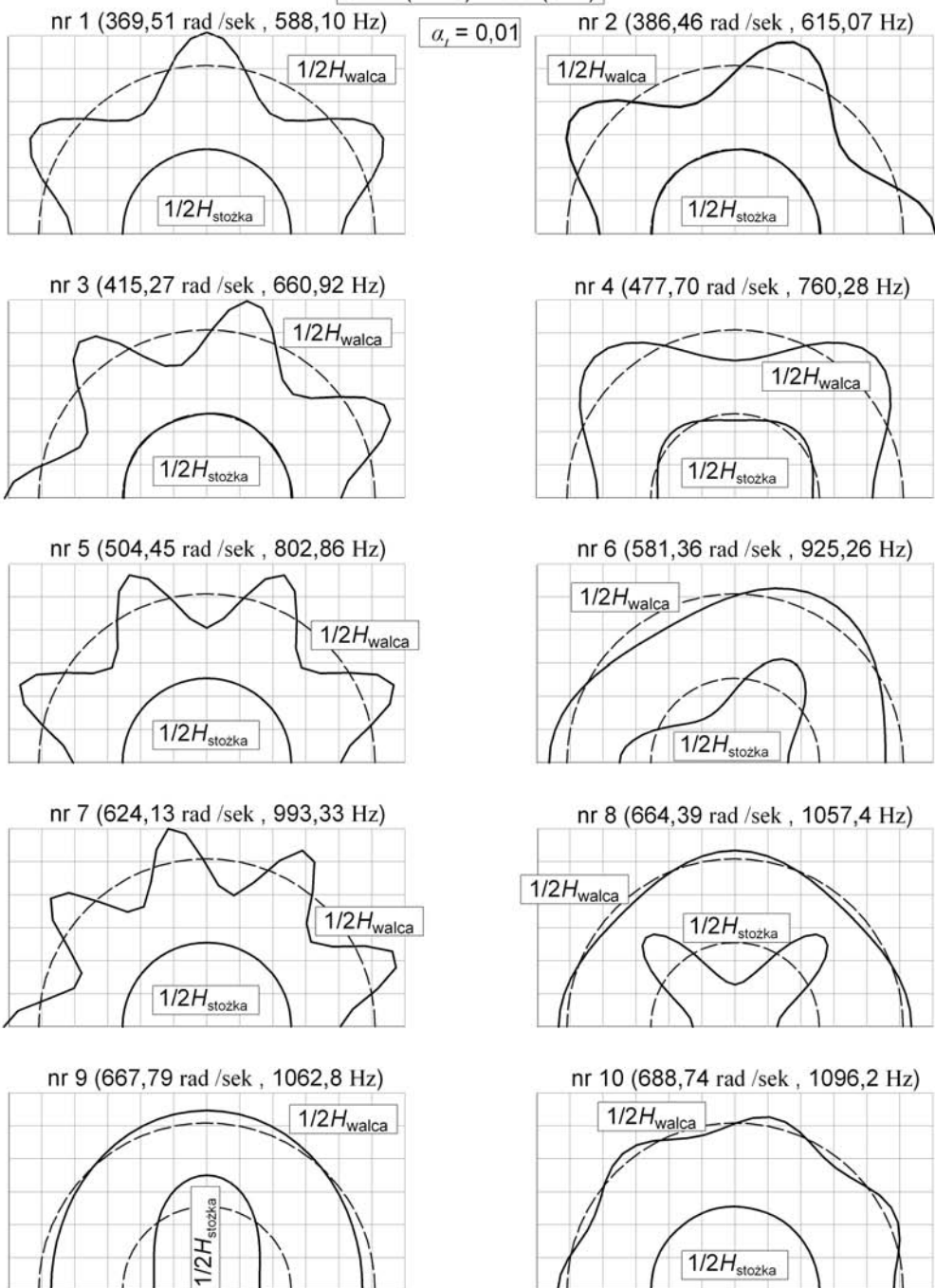


Rys. 6.6.17. Powłoka segmentowa stożek-walec: wpływ współczynnika owinięcia na częstości drgań własnych.

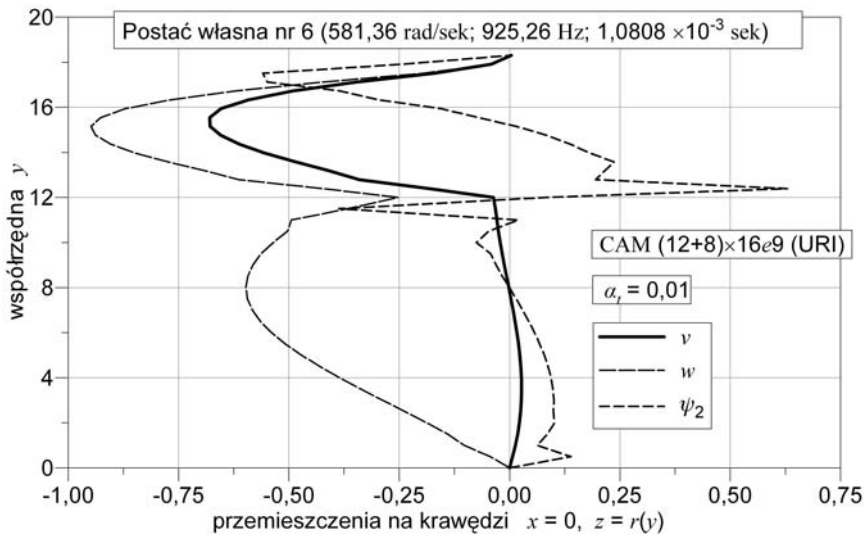
ści α_t , od zera numerycznego do wartości rzędu 0,1, a nawet 1, w którym nie widać istotnego wpływu wartości współczynnika owinięcia na częstości drgań własnych.

Na rys. 6.6.18 przedstawiamy pierwsze dziesięć charakterystyk modalnych układu, zaś na rys. 6.6.19 podajemy przykładową postać deformacji wzdłuż two-

CAM (12+8)×16e9 (URI)



Rys. 6.6.18. Powłoka segmentowa stożek-walec: częstotliwości i postacie drgań własnych.



Rys. 6.6.19. Powłoka segmentowa stożek-walec: przykładowe postacie deformacji wzdłuż tworzącej.

rzęcej obu segmentów powłoki. Skojarzenie odpowiednich rozwiązań numerycznych (rys. 6.6.18) z wynikami badań doświadczalnych (tab. 6.6.5) wskazuje na ich dobrą zgodność. Badania własne potwierdzają wniosek z pracy LASHKARI i WEINGARTEN [1973], że geometrycznie różne części powłoki segmentowej mogą drgać niezależnie od siebie.

6.6.6. Uwagi

Także w zadaniach o „dobrych” warunkach brzegowych, w przypadku stosowania odmian całkowania zredukowanego (RI) czy sformułowań alternatywnych nie do końca usuwających postaci pasożytnicze, nawet śladowa obecność tych postaci może prowadzić do przekłamania wyników³⁹. Ponadto, formy pasożytnicze, tak jak i niezamierzone zaburzenia (zob. przypis 38 w tym podrozdziale), mogą powodować niepożądane rozwiązania typu niekontrolowanej utraty stateczności⁴⁰. Z drugiej strony, występująca dla osiowo-symetrycznych zadań tendencja do niekontrolowanej utraty warunku osiowości rozwiązań potwierdza ograniczoną przydatność rozwiązań obrotowo-symetrycznych w praktyce inżynierskiej.

³⁹Najsilniejsze „pogłębienie” ugięcia w p. 6.6.1, przez nałożenie się postaci pasożytniczej, rys. 6.6.3, wystąpiło w modelu ASCe9 o dwustopniowej interpolacji odkształceń. Może to tłumaczyć efekt „zmiękczenia” rozwiązania ASCe9, rys. 6.6.3.

⁴⁰Uwaga ta nabiera znaczenia w kontekście np. przedstawionych wyników i przekonań autorów pracy LIU i inni [1986] zawartych w końcowym fragmencie na str. 292 oraz użytego tam sformułowania 4-wzłowego przekrojowego elementu skończonego z γ -stabilizacją.

Okazało się, że również w analizie drgań własnych, tak jak w statyce, najistotniejszy z obliczeniowego punktu widzenia zakres nie wykazujący wpływu wartości α_t na rozwiązania, charakteryzujący się ustabilizowaną deformacją, ma bardzo szeroki zasięg od zera do wartości rzędu 0,1, a nawet do rzędu jedności.

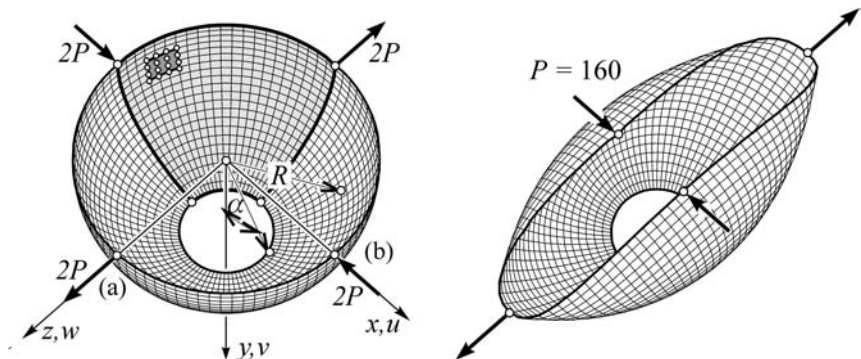
6.7. Powłoki o dużej wiotkości, blokada i postaci pasożytnicze

6.7.1. Uwagi wstępne

Ze względu na małą grubość i geometrię układu oraz brak warunków podparcia brzegu, umożliwiające dużą swobodę deformacji, przykłady regularnych powłok dwukrzywiznowych zebrane w podrozdziale 6.7 charakteryzuje w zakresie liniowym duża wiotkość konstrukcyjna. W trakcie analizy tego typu zadań w zakresie dużych przesunięć i obrotów występują silne charakterystyczne deformacje, odpowiadające w dużych obszarach układu prawie sztywnemu przemieszczaniu się znacznych fragmentów powłoki. Przy stosowaniu całkowania pełnego (FI), taka sytuacja ujawnia tendencję do blokady rozwiązań, zaś w przypadku użycia całkowania zredukowanego (RI) sprzyja ona powstawaniu form pasożytniczych. Z tego powodu, a także ze względu na typowo powłokowy charakter przykładów, zawarte w tym podrozdziale zadania uważane są za wymagający test sformułowań powłokowych elementów skończonych stosowanych do obliczeń powłok regularnych.

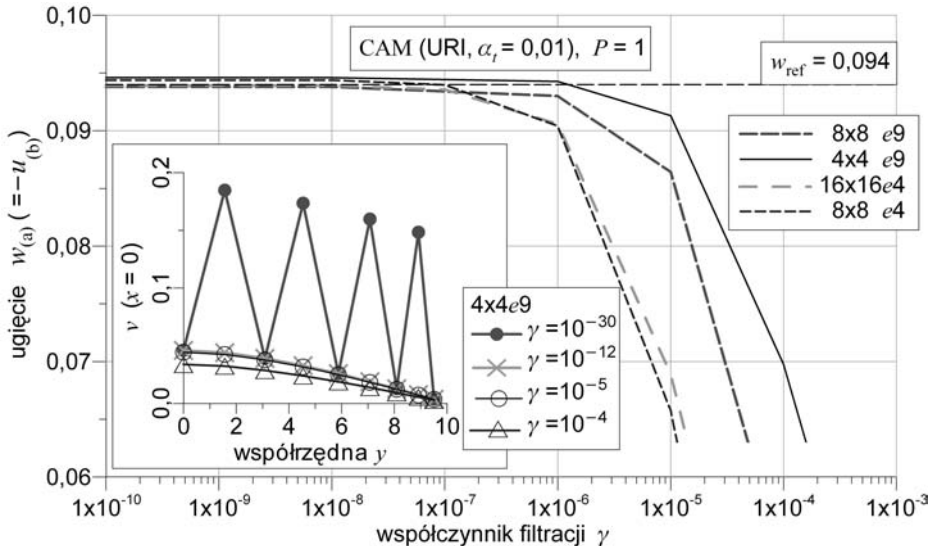
6.7.2. Półsfery z otworem obciążona siłami samorzównoważonymi

Zadanie z rys. 6.7.1 ($R = 10$, $h_0 = 0,04$, $\alpha = 18^\circ$, $E = 6,825 \times 10^7$, $\nu = 0,3$, $P_{\text{ref}} = 10$) zaproponowali MACNEAL i HARDER [1985] jako test sformułowania elementów powłokowych. Zadanie w zakresie liniowym charakteryzuje się dominacją stanu zgięciowego.



Rys. 6.7.1. Półsfery z otworem: schemat zadania, postać deformacji.

Ten przykład analizowało wielu autorów, zarówno w zakresie liniowym jak i nieliniowym. W rozwiązaniach własnych stosujemy podziały regularne, dyskretyzując po uwzględnieniu symetrii 1/4 konstrukcji. W zakresie liniowym badano wpływ współczynnika filtracji γ (rys. 6.7.2), wpływ współczynnika owinięcia α_t (rys. 6.7.3) oraz zbieżność podziału (rys. 6.7.4).

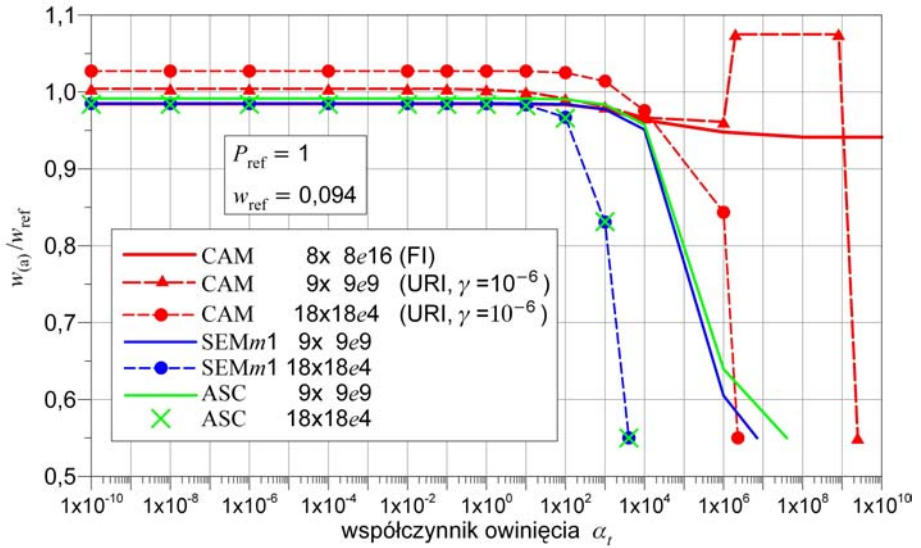


Rys. 6.7.2. Półsfery z otworem: efekt γ -stabilizacji przy (URI), rozwiązania liniowe.

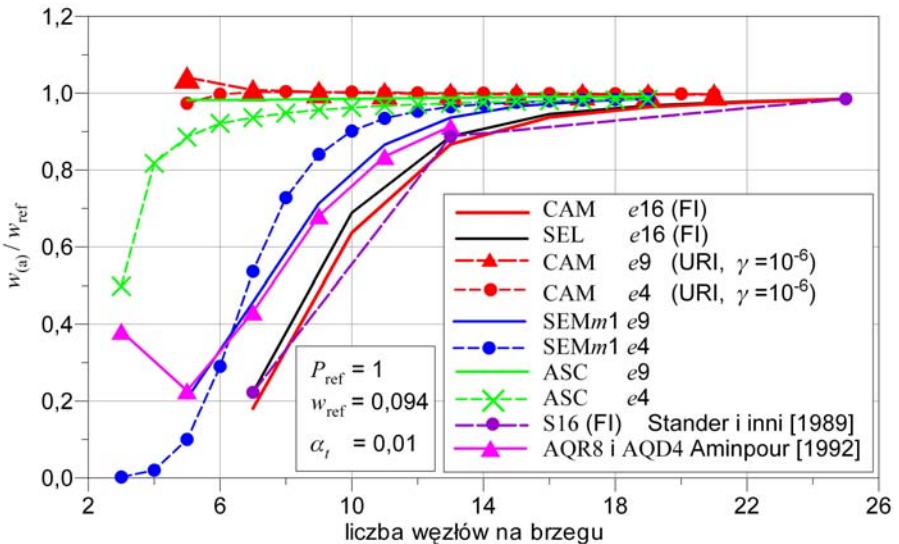
Efekt działania procedury γ -stabilizującej formy pasożytnicze w elementach 4- i 9-węzłowych CAM- γ (URI) pokazuje rys. 6.7.2. Przedstawia on zmianę ugięcia $w_{(a)}$ ($= -u_{(b)}$) pod siłą w funkcji współczynnika filtracji γ dla czterech dyskretyzacji. Wyraźny efekt stabilizujący występuje dla wartości $\gamma > 10^{-6}$. Jednak działanie γ -stabilizacji (rys. 6.7.2) jest tylko częściowe, ponieważ oscylacje rozwiązania występują nadal, ulegając tylko silnej redukcji do wartości rzędu mało widocznych w skali deformacji, a tym bardziej w skali geometrii konstrukcji.

Wyniki badań wpływu konstytutywnego współczynnika owinięcia α_t na unormowane ugięcie $w_{(a)}/w_{ref}$ ($= -u_{(b)}/w_{ref}$), gdzie $w_{ref} = 0,094$, zamieszczamy na rys. 6.7.3. Wynik tych badań jest typowy i podobny do rezultatów poprzednich analiz.

Niezależnie od stosowanych elementów, dla wartości współczynnika $\alpha_t < 1$ nie obserwuje się jego wpływu na ugięcie $w_{(a)}$. Przy dużych wartościach α_t przemieszczenie $w_{(a)}$ przyjmuje różne wartości graniczne dla różnych elementów. W gorzej uwarunkowanych modelach elementów skończonych różnice te są zapewne wynikiem pogorszenia się ogólnego uwarunkowania zadania, spowodowanego wzrostem współczynnika do wartości $\alpha_t > 10^3$. Potwierdza to stabilizacja



Rys. 6.7.3. Półsfera z otworem: wpływ współczynnika owinięcia α_t , rozwiązania liniowe.



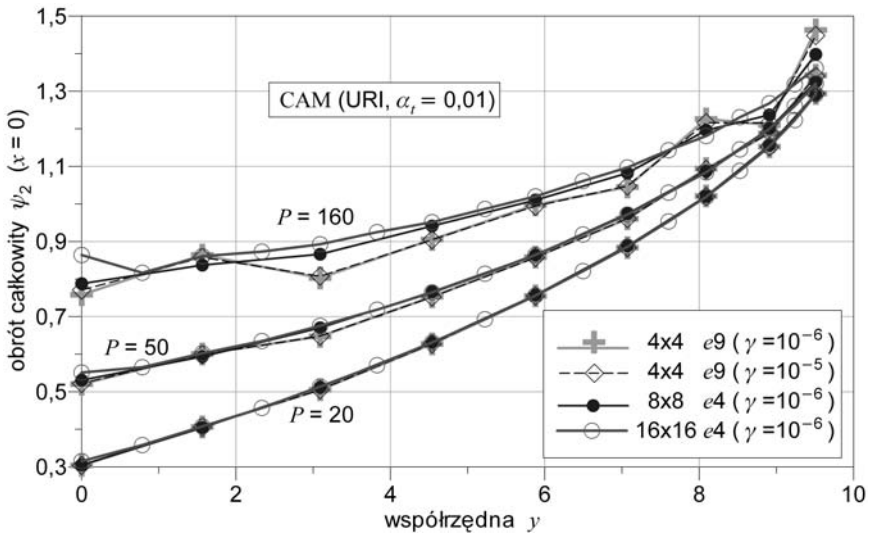
Rys. 6.7.4. Półsfera z otworem: zbieżności podziału, rozwiązania liniowe.

$w_{(a)}$ nieznacznie poniżej wartości odniesienia ($\alpha_t > 10^{+3}$), w przypadku najlepiej uwarunkowanego sformułowania przemieszczeniowego CAMe16 z całkowaniem pełnym (FI).

Liniową analizę zbieżności podziału, na przykładzie ugięcia $w_{(a)}/w_{ref}$, przedstawia rys. 6.7.4. Z bardzo bogatej bibliografii przykładu ograniczymy się do

przytoczenia wyników pracy⁴¹ STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] oraz pracy⁴² AMINPOUR [1992]. W przypadku elementów 16-węzłowych CAM i SEL całkowanych w sposób pełny (FI) otrzymaliśmy całkowitą zgodność wyników⁴³. Zbieżność elementów 16-węzłowych (FI) jest jednak znacznie wolniejsza niż elementów 4- i 9-węzłowych, całkowanych w sposób zredukowany (URI) z użyciem procedury γ -stabilizującej, lub innych sformułowań alternatywnych.

Wyniki rozwiązań nieliniowych przedstawiono na rys. 6.7.5÷6.7.10, a reprezentatywne dane liczbowe zawiera tab. 6.7.1. Wyniki badań γ -stabilizacji form pasożytniczych w zakresie nieliniowym podano na rys. 6.7.5. Przedstawia on zmianę obrotu w płaszczyźnie symetrii $x = 0$. Widoczne jest pogarszanie się skuteczności działania procedury γ -stabilizacyjnej wraz ze wzrostem deformacji.



Rys. 6.7.5. Półsfery z otworem: efekt γ -stabilizacji (URI), rozwiązania nieliniowe.

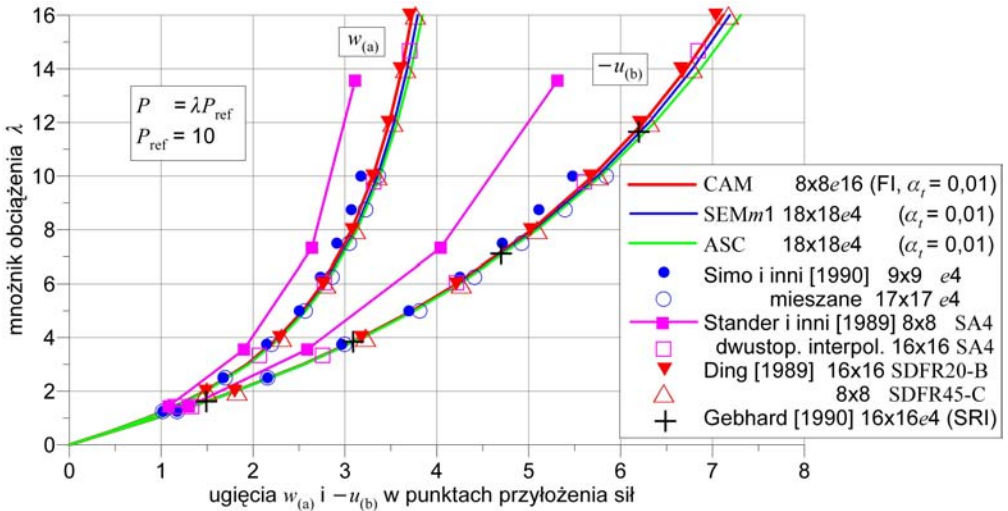
Na rys. 6.7.6 porównujemy reprezentatywne wyniki własne z rezultatami prac SIMO, FOX i RIFAI [1990], STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989], DING [1989] oraz GEBHARDT [1990]. Rysunek 6.7.7 jest zestawieniem rozwiązań własnych w zakresie $P > 70$ (w celu uwydatnienia różnic) opartych na tej samej siatce węzłów $19 \times 19 = 361$. Tendencję do generowania form pasożytniczych w sformułowaniach alternatywnych, na przykładzie zmiany obrotu⁴⁴ w płaszczyźnie symetrii $x = 0$, obrazuje rys. 6.7.8 (por. rys. 6.7.5). Dodatkowo na rys. 6.7.7

⁴¹Rozwiązania elementem S16 (FI), który jest standardowym 16-węzłowym elementem zdegenerowanym według RAMM [1977], zgodnym z elementem własnym SELe16 (p. 5.6.1).

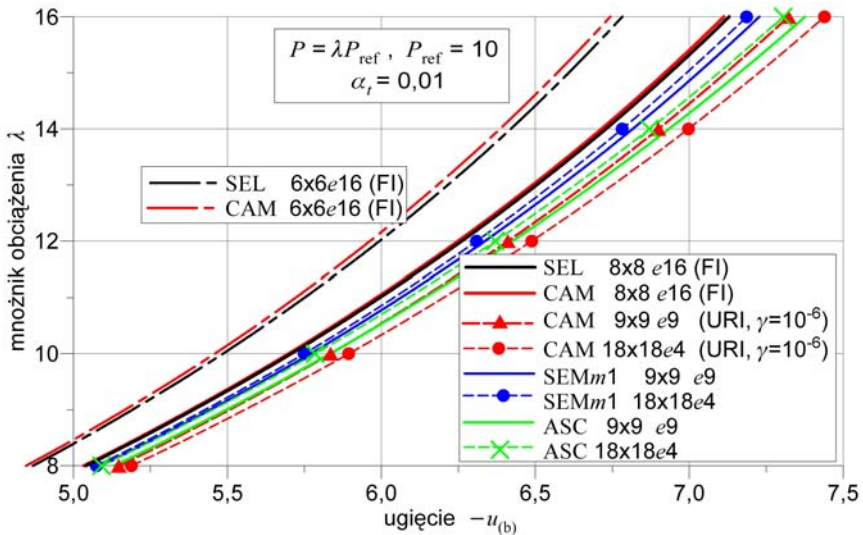
⁴²Rozwiązania 4-węzłowymi elementami hybrydowymi o sześciu stopniach swobody w węzle.

⁴³Element SELe16 daje identyczny wynik jak S16 z STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989].

⁴⁴Postacie pasożytnicze na translacjach (pokazywane w literaturze) w skali geometrii powłoki są tu praktycznie niezauważalne. Dotyczy to także rys. 6.7.5.

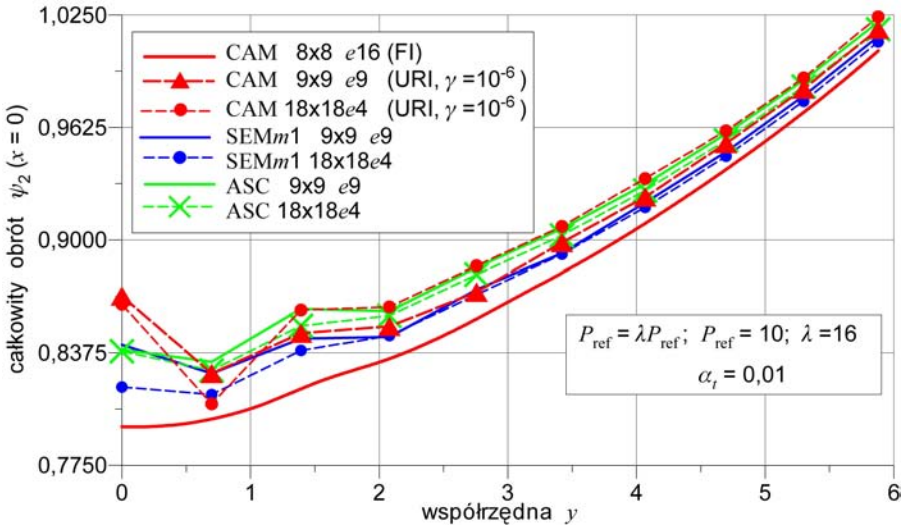


Rys. 6.7.6. Pólsfera z otworem: porównanie rozwiązań nieliniowych.

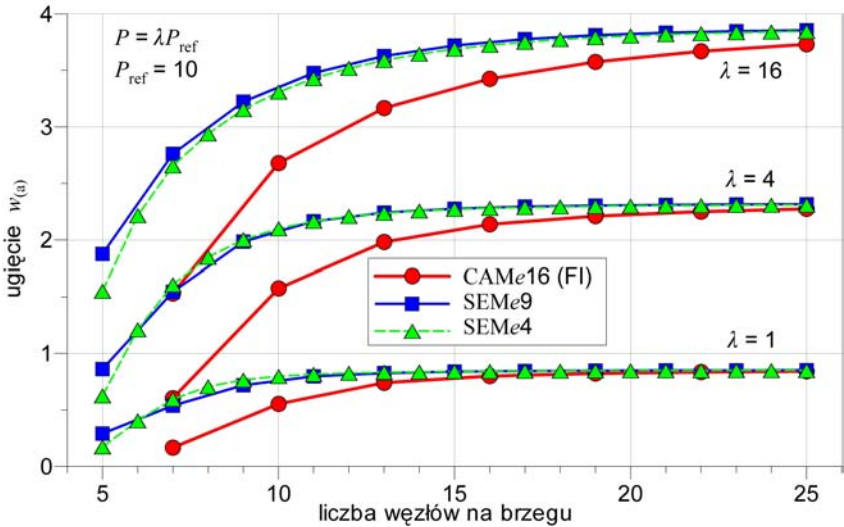


Rys. 6.7.7. Pólsfera z otworem: własne rozwiązania nieliniowe na siatce 19×19 węzłów.

i 6.7.8, jako odniesienie, podajemy rozwiązania SEL e 16 (FI) i/lub CAM e 16 (FI) w siatce 25×25 węzłów. Istnienie i narastanie z deformacją form pasożytniczych oraz pozostałość tendencji do blokady stanowią zapewne główne źródło ukazanych na rys. 6.7.7 różnic. Częściowym potwierdzeniem tego wniosku jest przedstawiona na rys. 6.7.9 i rys. 6.7.10 zróżnicowana zbieżność podziału w zakresie nieliniowym.

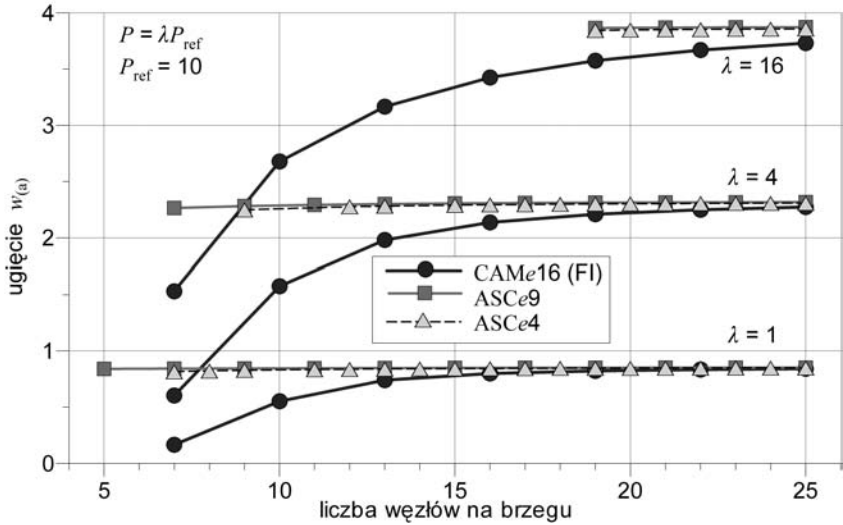


Rys. 6.7.8. Pólsfera z otworem: geometria form pasożytniczych, rozwiązania nieliniowe.



Rys. 6.7.9. Pólsfera z otworem: zbieżność podziału, rozwiązania nieliniowe.

Porównanie rozwiązań z trzech ustalonych poziomów obciążenia $\lambda = \{1, 4, 16\}$, rys. 6.7.9 i 6.7.10, pokazuje problem pogarszania się zbieżności podziału różnych modeli elementów skończonych wraz ze wzrostem nieliniowej deformacji. Problem ten można interpretować jako niemożliwość odtworzenia przez siatkę dyskretyzacyjną fali deformacji skracającej się przy wzroście obciążenia. Brakujące do



Rys. 6.7.10. Półsfera z otworem: zbieżność podziału, rozwiązania nieliniowe.

Tabela 6.7.1. Półsfera z otworem: przemieszczenia punktów (a) i (b), $\alpha_t = 1$.

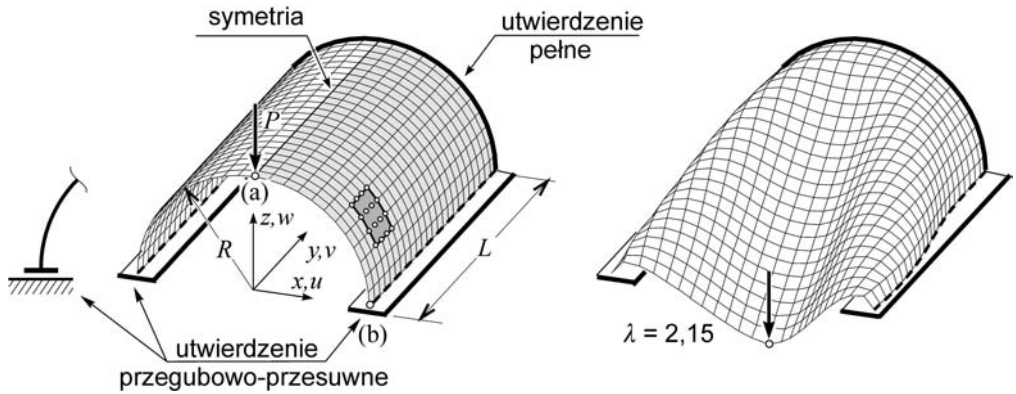
Dyskretyzacja	P	10	20	30	50	80	120	160
CAM $8 \times 8e16$	$w_{(a)}$	0,8421	1,474	1,932	2,540	3,074	3,482	3,731
	$(\psi_2)_{(a)}$	0,1734	0,3041	0,3995	0,5286	0,6453	0,7377	0,7964
FI	$-u_{(b)}$	0,9393	1,802	2,544	3,731	5,033	6,249	7,112
SEL $8 \times 8e16$	$w_{(a)}$	0,8430	1,475	1,934	2,543	3,078	3,487	3,738
	$(\varphi_1)_{(a)}$	0,1736	0,3044	0,4000	0,5292	0,6461	0,7384	0,7966
FI	$-u_{(b)}$	0,9403	1,804	2,546	3,735	5,040	6,261	7,129
SEMm1 $9 \times 9e9$	$w_{(a)}$	0,8485	1,489	1,955	2,576	3,126	3,551	3,812
	$(\psi_2)_{(a)}$	0,1783	0,3143	0,4143	0,5507	0,6764	0,7778	0,8420
	$-u_{(b)}$	0,9424	1,812	2,561	3,764	5,089	6,336	7,227
CAM $18 \times 18e4$	$w_{(a)}$	0,8550	1,499	1,969	2,596	3,157	3,597	3,874
	$(\psi_2)_{(a)}$	0,1795	0,3163	0,4173	0,5559	0,6857	0,7937	0,8645
URI, $\gamma = 10^{-6}$	$-u_{(b)}$	0,9545	1,838	2,600	3,827	5,188	6,488	7,439

kompletu na rys. 6.7.9 i 6.7.10 rozwiązania ASCe4 i ASCe9 o „zgrubnych” siatkach podziału okazały się rozbieżne. W analizowanym zakresie deformacji tego typu problemy nie wystąpiły w rozwiązaniach CAMe16 (FI) i SEM.

6.7.3. Utwierdzona powłoka walcowa obciążona siłą

W pracy STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] zaproponowano przykład w formie przepołowionego cylindra obciążonego siłą skupioną, podany na

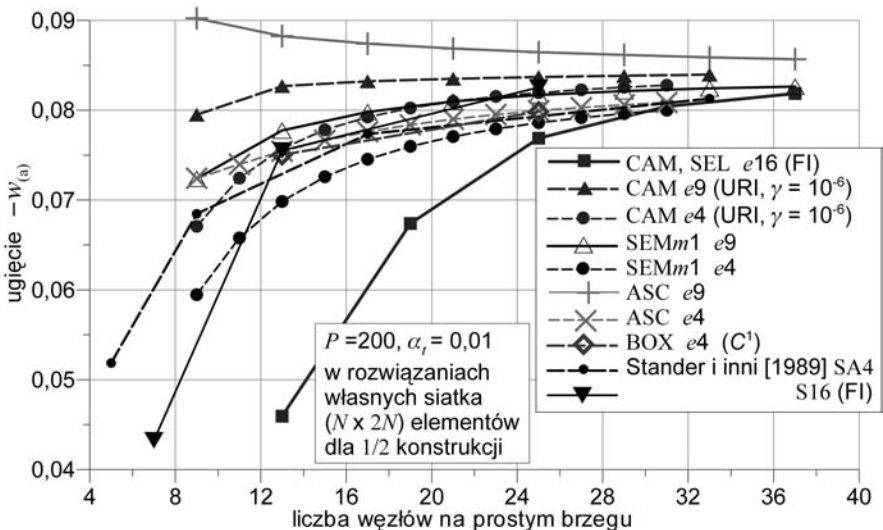
rys. 6.7.11 ($L = 3,04$, $R = 1,01$, $h_0 = 0,03$, $E = 2,065 \times 10^7$, $\nu = 0,3$, $P_{\text{ref}} = 1000$). Warunki brzegowe wzdłuż przepołowienia odpowiadają symetrii, jedna strona czołowa jest utwierdzona, druga swobodna.



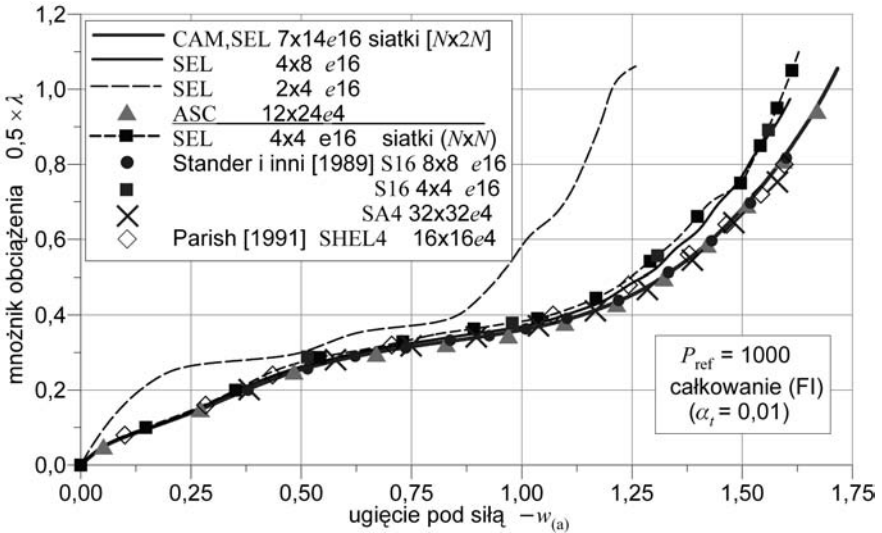
Rys. 6.7.11. Utwierdzona powłoka walcowa: schemat zadania, postać deformacji.

Pierwotne zainteresowanie przykładem wzbudziła zamieszczona w pracy STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] zaskakująco dobra zbieżność elementu S16 (FI), zarówno w przypadku liniowym (zob. rys. 6.7.12) jak i nieliniowym (zob. rys. 6.7.13).

Elementy 16-węzłowe S16, SELe16 i CAMe16 przy pełnym całkowaniu (FI) w przypadku zgrubnych siatek podziału winny przesztyniać rozwiązanie.



Rys. 6.7.12. Utwierdzona powłoka walcowa: zbieżności podziału, rozwiązania liniowe.



Rys. 6.7.13. Utwierdzona powłoka walcowa: porównawcze rozwiązania nieliniowe.

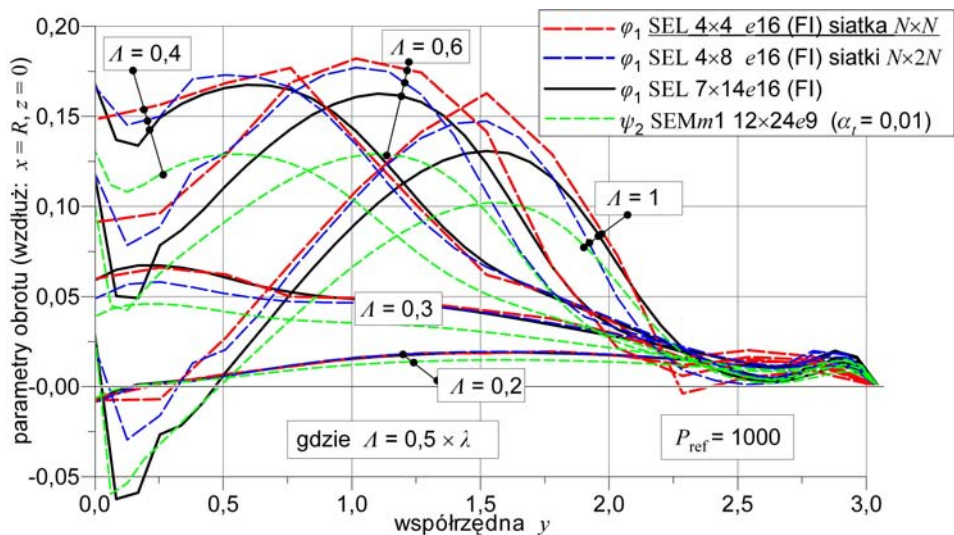
W pracy STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] nie obserwuje się jednak istotnych efektów blokady, nawet przy dyskretyzacji S16 (FI) 4×4 dla całej konstrukcji. Analiza obciążenia, podziału i symetrii układu oraz wyników obliczeń wskazuje, że źródłem tak dobrej zbieżności jest pomyłka liczbowa w prezentacji wyników (rys. 6.7.12 i 6.7.13). Potwierdzenie tego wniosku można odnaleźć także w pracy PARISCH [1991].

Przykład jest interesujący ze względu na sposób kształtowania się fali deformacji, szczególnie wzdłuż krawędzi utwierdzenia przegubowo-przesuwnej (rys. 6.7.14 i 6.7.15).

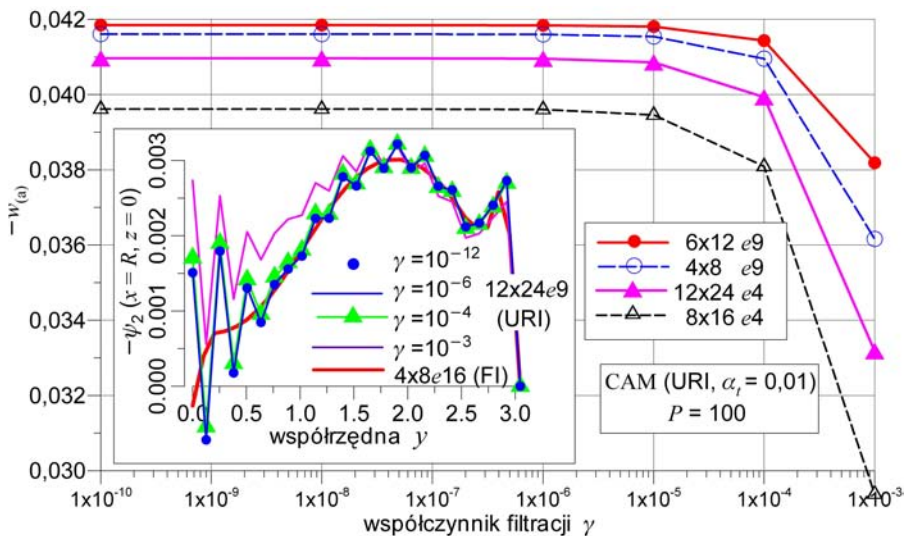
W rozwiązaniach własnych uwzględniamy symetrię, dyskretyzując $1/2$ konstrukcji w siatce $N \times 2N$ elementów odpowiadającej w przybliżeniu równości boków rozwiniętej konstrukcji⁴⁵. W zakresie liniowym badano zbieżność podziału (rys. 6.7.12) oraz działanie procedury γ -stabilizującej postaci pasożytnicze (rys. 6.7.15) przy całkowaniu zredukowanym (URI). Liniową analizę zbieżności podziału różnych elementów przedstawiono na rys. 6.7.12, gdzie także zamieszczono dyskutowane rozwiązania z pracy STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] uzyskane elementami S16 oraz SA4⁴⁶. Porównanie rozwiązań elementami 16-węzłowymi całkowanymi w sposób pełny (FI), tj. S16 według STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] w siatce $N \times N$ i SEL e 16 (CAM e 16)

⁴⁵Podwojona liczba elementów na boku prostym w stosunku do dyskretyzacji z prac STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] oraz PARISCH [1991].

⁴⁶Element SA4 jest 4-węzłowym, biliniowym, dwuparametrycznym, zdegenerowanym elementem powłokowym, wykorzystującym koncepcję dwustopniowej interpolacji odkształceń według DVORKIN i BATHE [1984]. Pewnym odpowiednikiem SA4 jest element własny ASC e 4.



Rys. 6.7.14. Utwardzona powłoka walcowa: obrót wzdłuż brzegu, rozwiązania nieliniowe.

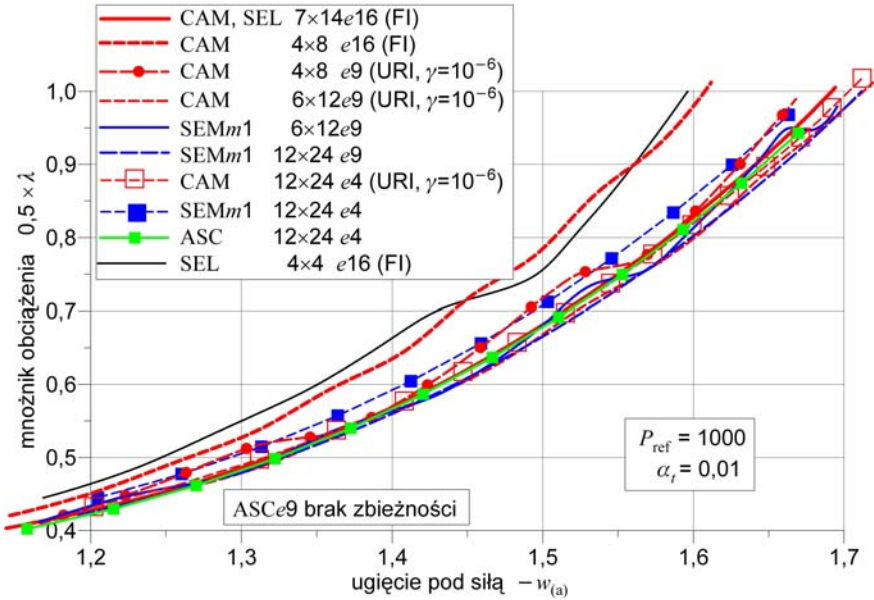


Rys. 6.7.15. Utwardzona powłoka walcowa: γ -stabilizacja, rozwiązania liniowe.

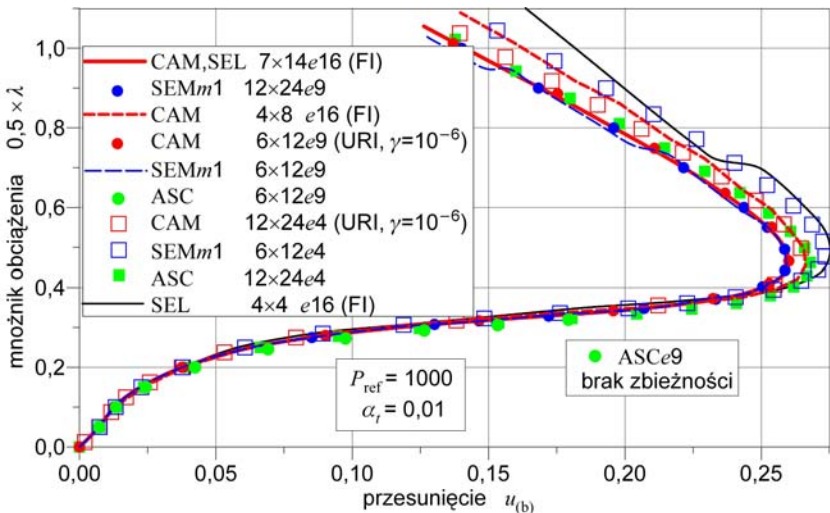
w siatce $N \times 2N$ wskazuje, że na redukcję blokady bardziej istotny wpływ ma zagęszczenie podziału w kierunku obwodowym (zakrzywionym) niż w kierunku tworzącej.

Zbieżność elementów 16-węzłowych (FI) jest znacznie wolniejsza (rys. 6.7.12), niż elementów 4- i 9-węzłowych sformułowań alternatywnych oraz przemiesz-

zeniowych całkowanych w sposób zredukowany (URI) z γ -stabilizacją. Jednak szybko zbieżne rozwiązania elementami CAMe9 i CAMe4 (URI) z γ -stabilizacją oraz ASCe9 (zbiegające się od góry) obciążone są formami pasożytniczymi, ujawniającymi się wyraźnie na obrotach. Na rys. 6.7.15 zamieszczono wyniki użycia do elementu 4- i 9-węzłowego CAM (URI) procedury γ -stabilizującej postaci



Rys. 6.7.16. Utwardzona powłoka walcowa: porównanie nieliniowych rozwiązań własnych.



Rys. 6.7.17. Utwardzona powłoka walcowa: porównanie nieliniowych rozwiązań własnych.

pasożytnicze. Przedstawia on zależność ugięcia $w_{(a)}$ pod siłą w funkcji γ z dwóch siatek podziału. Wpływ współczynnika filtracji γ na ugięcia $w_{(a)}$ uwidacznia się dla $\gamma > 10^{-6}$.

Porównanie wyników rozwiązań nieliniowych z prac STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] oraz PARISCH [1991] z ich odpowiednikami w ramach rozwiązań własnych zawiera rys. 6.7.13. Wyniki własnych rozwiązań nieliniowych dla różnych sformułowań elementów skończonych podajemy na rys. 6.7.14÷6.7.17. Przedstawiają one ugięcie $w_{(a)}$ pod siłą oraz przesunięcie poziome $u_{(b)}$ końca brzegu powłoki na krawędzi podparcia w funkcji parametru obciążenia λ .

Podziały ($1/4$ obwodu \times długość) dotyczą połowy symetrycznej części konstrukcji. Reprezentatywne dane liczbowe rozwiązań własnych zamieszczamy w tab. 6.7.2. Ponadto, przy domniemanej na podstawie pracy STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] dyskretyzacji SEL $2 \times 4e16$ (FI), rys. 6.7.13 zawiera rozwiązanie pokazujące efekt blokady oraz rozwiązania CAM i SEL $7 \times 14e16$ (FI) nawiązujące do pozostałych wyników.

Tabela 6.7.2. Utwierdzona powłoka walcowa: przemieszczenia punktów (a) i (b), CAM $7 \times 14e16$ (FI), $P_{\text{ref}} = -1000$, $\alpha_t = 0,01$.

$0,5 \times \lambda$	$v_{(a)}$	$-w_{(a)}$	$(\psi_2)_{(a)}$	$u_{(b)}$	$v_{(a)}$	$(\psi_2)_{(b)}$
0,05	-0,00146	0,05385	0,14638	0,00704	0,001241	0,00113
0,1	0,00791	0,15913	0,40331	0,01280	0,002749	0,00532
0,15	0,03104	0,27405	0,59905	0,02231	0,004759	0,00863
0,2	0,05730	0,37462	0,70623	0,03777	0,007238	0,00669
0,25	0,08989	0,48701	0,76132	0,06306	0,010664	-0,00524
0,279857	0,12059	0,58337	0,78585	0,09000	0,014050	-0,02453
0,315988	0,18099	0,75012	0,82590	0,14492	0,021337	-0,06888
0,366159	0,29970	1,0249	0,89008	0,22928	0,033548	-0,12616
0,403167	0,35812	1,1440	0,92245	0,25154	0,035869	-0,13243
0,455108	0,41196	1,2530	0,95213	0,25998	0,035105	-0,12634
0,55511	0,47571	1,3863	0,98835	0,25159	0,029985	-0,10500
0,70511	0,53020	1,5180	1,0194	0,22033	0,020856	-0,07199
0,85511	0,56280	1,6155	1,0382	0,18146	0,012438	-0,04229
1,00511	0,58471	1,6941	1,0517	0,13994	0,005352	-0,01596

Porównanie rozwiązań S16 i SA4 z pracy STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] z odpowiednikami własnymi SEL $e16$ i ASC $e4$ wykazuje daleko posuniętą zgodność, podczas gdy (jak podano w PARISCH [1991]) rozwiązanie⁴⁷ SHEL4 jest do poziomu obciążenia rzędu 0,5 wyraźnie przeszywnione.

⁴⁷Opisany w pracy PARISCH [1991] element SHEL4 jest 4-węzłowym, biliniowym, izoparametrycznym (przekrojowym) elementem powłokowym zbudowanym wg koncepcji degene-

Poszukując wyjaśnienia przyczyn rozbieżności rozwiązań SA4 i SHEL4 (rys. 6.7.13), PARISCH [1991] dochodzi do dziwnego, bo nie potwierdzonego badaniami, wniosku, że różnice te mogą być związane z istnieniem punktu bifurkacji w przedziale $[0,4, 0,5]$ i stowarzyszonej z nim ścieżki wtórnej.

Na rysunkach 6.7.13, 6.7.16 i 6.7.17 zaobserwowano, w ramach rozwiązań własnych, lokalne przegięcia krzywych dla zgrubnych dyskretyzacji elementami wyższego rzędu 9- i 16-węzłowymi⁴⁸. Przeginięcie się krzywych zaczyna się wcześniej i jest tym silniejsze, im bardziej zgrubna jest siatka podziału, a zanika przy gęstszej dyskretyzacji (por. CRISFIELD i PENG [1996]). Porównanie rozwiązań SELe16 (FI) w siatkach 4×4 i 4×8 (rys. 6.7.13, odpowiednio SEL-CAM na rys. 6.7.16 i 6.7.17) wskazuje na istotny wpływ zagęszczenia dyskretyzacji w kierunku tworzącej (bok prosty). Pewnego wytłumaczenia mechanizmu powstawania przegięć ścieżki rozwiązania można doszukać się analizując propagację deformacji na rys. 6.7.14 (por. deformację boku, rys. 6.7.11). Zaznaczmy, że zamieszczone na rys. 6.7.14 rozwiązania SELe16 (FI) i SEMm1 e9 są wolne od postaci pasożytniczych.

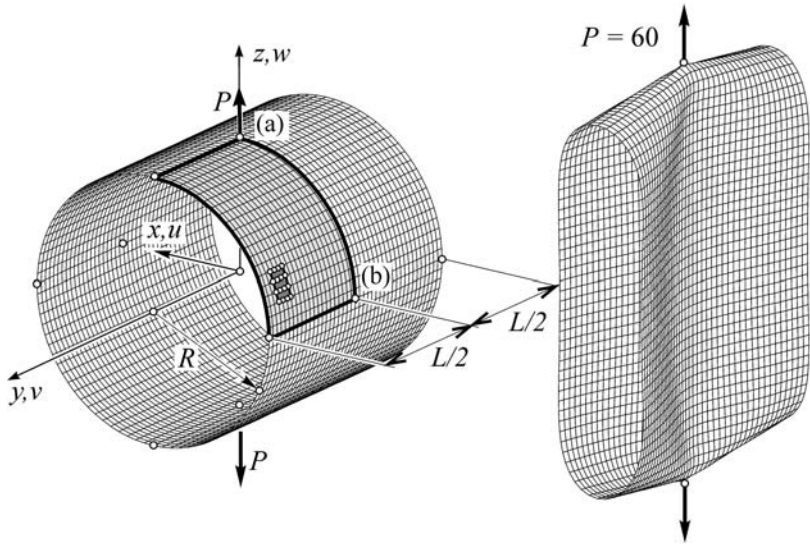
6.7.4. Swobodna powłoka cylindryczna obciążona parą sił samozrównoważonych

Swobodna cienka powłoka cylindryczna z rys. 6.7.18, obciążona w środku parą samozrównoważonych sił rozciągających ($R = 4,953$, $L = 10,35$, $h_0 = 0,094$, $E = 10,5 \times 10^6$, $\nu = 0,3125$, $P_{\text{ref}} = 1$), jest popularnym testem efektywności sformułowań elementów powłokowych. W rozwiązaniach wykorzystuje się potrójną symetrię, dyskretyzując jedynie 1/8 konstrukcji.

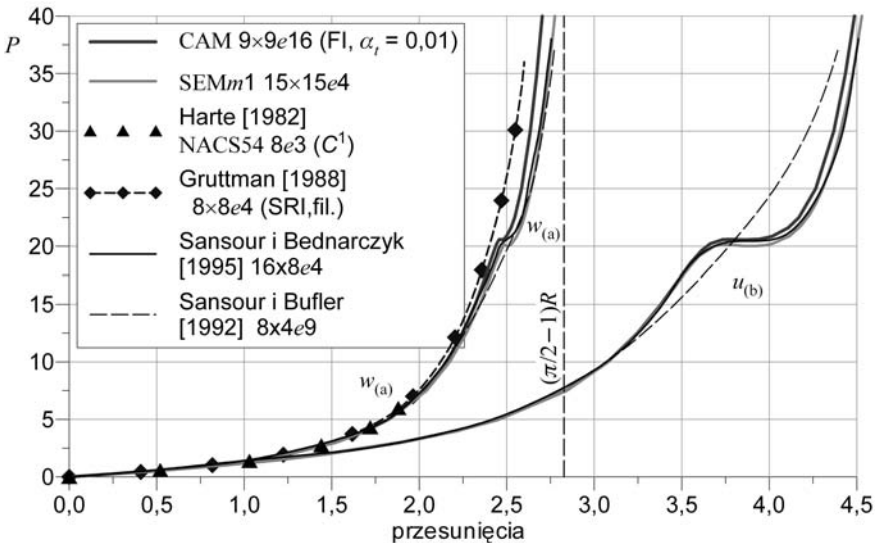
W początkowym stadium deformacji geometria, sposób obciążenia i warunki brzegowe sprzyjają powstawaniu dużych, prawie sztywnych ruchów znacznych fragmentów cylindra (zob. rys. 6.7.20 i 6.7.22). W tej fazie deformacji dominuje zgięciowa praca powłoki. Zaawansowany stan deformacji nieliniowej charakteryzuje wzmocnienie, pojawiające się w wyniku coraz silniejszego udziału stanu membranowego w pracy powłoki. W fazie przejściowej pojawia się przegięcie krzywej rozwiązania (odciążenie, zjawisko przeskoku) (rys. 6.7.19, także rys. 6.7.21 i 6.7.23), któremu towarzyszy zapadanie się boków ze zmianą znaku ich krzywizny (rys. 6.7.18 i 6.7.20).

racji. W opisie kinematyki użyto ogólnej macierzy obrotu z osobliwością na kierunku normalnym do powierzchni środkowej. Osobliwość obrotów eliminuje się albo przez transformację do lokalnego układu węzła z dwoma obrotowymi stopniami swobody, albo przez dodanie sztucznej sztywności obrotowej. Do eliminacji efektu blokady przez ścinanie wykorzystano koncepcję dwustopniowej interpolacji odkształceń postaciowych wg DVORKIN i BATHE [1984].

⁴⁸Mała liczba punktów rozwiązania S16 nie pozwala rozstrzygnąć o występowaniu „przegięć” w STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989]. Nie prowadziliśmy własnych badań zgrubnych dyskretyzacji elementami 4-węzłowymi, nie ma ich również w pracach STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] i PARISCH [1991] traktujących o elementach 4-węzłowych.

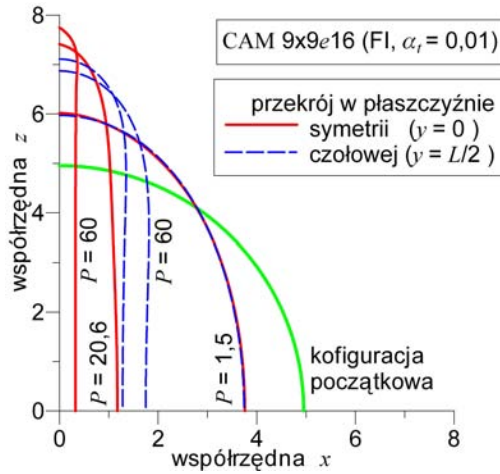


Rys. 6.7.18. Swobodna powłoka cylindryczna: schemat zadania, postać deformacji.

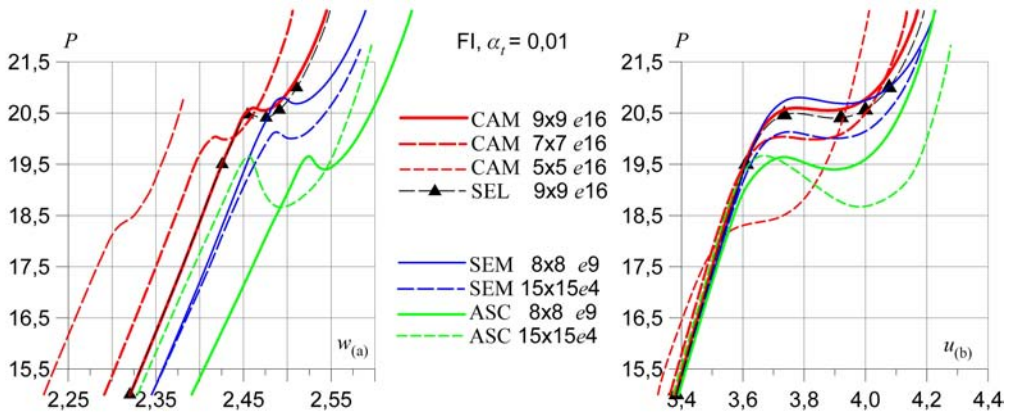


Rys. 6.7.19. Swobodna powłoka cylindryczna: porównanie rozwiązań nieliniowych.

Z obliczeniowego punktu widzenia kształt i sposób deformacji czynią zadanie podatnym na blokadę przy stosowaniu całkowania pełnego (FI) oraz umożliwiając również wyzwolenie się form pasożytniczych przy całkowaniu zredukowanym (RI), prowadząc nawet do osobliwości układu. Te cechy układu, oraz istnienie



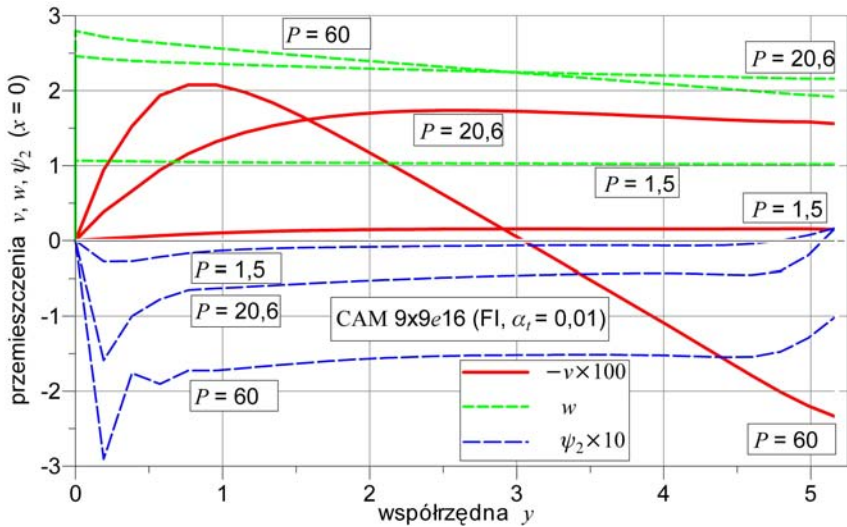
Rys. 6.7.20. Swobodna powłoka cylindryczna: deformacja przekroju, różne fazy obciążenia.



Rys. 6.7.21. Swobodna powłoka cylindryczna: zjawisko przeskoku.

analitycznego liniowego rozwiązania przybliżonego (TIMOSHENKO i WOINOWSKY-KRIEGER [1959]), zdecydowały zapewne o popularności tego zadania jako testu efektywności elementów skończonych. Wyniki badań (szczególnie liniowych) można znaleźć w bardzo wielu pracach. Tutaj analizujemy to zadanie w zakresie nieliniowym.

Na rys. 6.7.19 porównano dwa rozwiązania własne CAM $9 \times 9 e16$ (FI) i SEMm1 $15 \times 15 e4$ z czterema wynikami z literatury. Krzywe przedstawiają ugięcie $w_{(a)}$ w miejscu przyłożenia siły oraz przesunięcie poziome $u_{(b)}$ w środku boku cylindra w funkcji obciążenia P . Reprezentatywne dane liczbowe rozwiązań własnych zestawiono również w tab. 6.7.3.



Rys. 6.7.22. Swobodna powłoka cylindryczna: przemieszczenia tworzącej w płaszczyźnie sił.

Naniesione na rys. 6.7.19 wyniki z pracy⁴⁹ HARTE [1982] są jednym z pierwszych rozwiązań nieliniowych tego zadania. Zakres analizy objął pierwszą (giętną) fazę deformacji, podczas której ugięcie $w_{(a)}$ pod siłą osiąga 17-krotną grubość powłoki⁵⁰. Kolejne rozwiązania przedstawione na rys. 6.7.19 pochodzą z pracy⁵¹ GRUTTMANN [1988] (GRUTTMANN, STEIN i WRIGGERS [1989]) oraz z prac⁵² SANSOUR i BUFLER [1992], SANSOUR i BEDNARCZYK [1995]. W obu ostatnich

⁴⁹Sformułowanie użyte w HARTE [1982] bazuje na teorii typu K–L w zakresie umiarkowanych obrotów, prowadzącej do elementów skończonych klasy C^1 . Dyskutowany wynik uzyskano dwukrzywiznowym trójbocznym elementem trzywęzłowym NACS54 o osiemnastu węzłowych stopniach swobody. Trzy niezależne parametry teorii (translacje) aproksymuje się w krzywoliniowej bazie lokalnej w sposób jednolity wielomianami piątego stopnia wg COWPER, LINDBERG i OLSON [1970]. Macierze elementowe całkuje się numerycznie z wykorzystaniem reguły 21-punktowej.

⁵⁰W pracy CHRÓŚCIELEWSKI i NOLTE [1985] zamieszczono wyniki otrzymane elementem zgodnym z NACS54 według HARTE [1982] (HARTE i ECKSTEIN [1986]), zrealizowanym jednak na komputerze wektorowym. W analizowanym zakresie, zachowując tę samą dyskretyzację (8 elementów, 114 stopni swobody), otrzymano identyczne z HARTE [1982] wyniki liczbowe (siła: ugięcie pod siłą) $\{(P:w_{(a)})\} = \{(0,6:0,52), (1,4:1,03), (2,75:1,44), (4,33:1,72), (6,0:1,88)\}$.

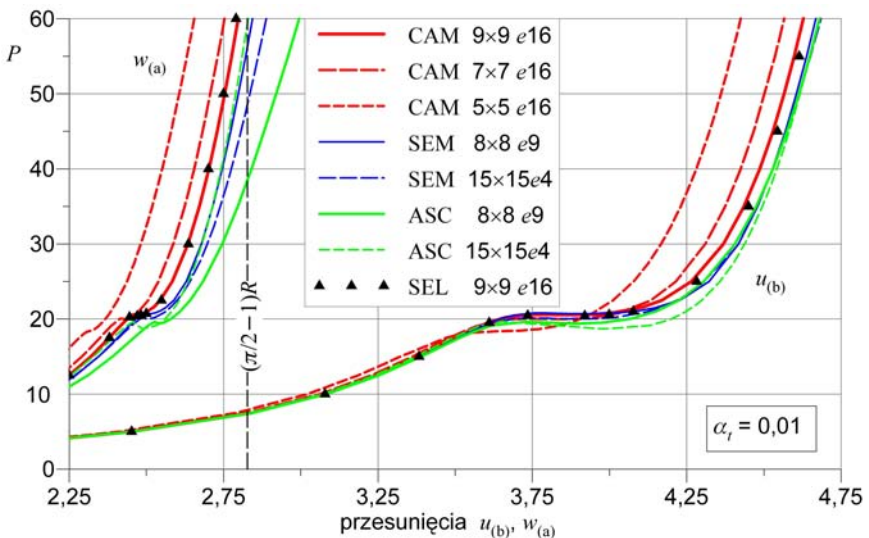
⁵¹GRUTTMANN [1988] opracował 4-węzłowy powłokowy element przemieszczeniowy typu Timoszenko–Reissnera całkowany selektywnie (SRI) z γ -stabilizacją.

⁵²W tych pracach opisano 4- i 9-węzłowe elementy hybrydowe, sformułowane na bazie mieszanych zasad wariacyjnych. Elementy te mają po sześć węzłowych stopni swobody. Źródłem obrotowych stopni swobody w SANSOUR i BUFLER [1992] jest wyprowadzenie tensora obrotu z rozkładu polarnego gradientu deformacji, zaś w SANSOUR i BEDNARCZYK [1995] jest to teoria Cosserat. W tych pracach (jak i innych tych autorów) brakuje jednak przykładów, przy rozwiązaniu których byłyby koniecznością użycia szóstego stopnia swobody.

pracach występują jakościowe różnice w fazie przejściowej rozwiązania. Znikanie przegięcia ścieżki rozwiązania następuje albo w wyniku zagęszczenia podziału, albo jest tłumaczone zmianą teorii (SANSOUR i BUFLER [1992] tłumaczą to „wymuszeniem symetrii tensora rozciągnięcia”). W tym kontekście, komentując rys. 6.7.19 — np. za stwierdzeniem użytym w pracy SANSOUR i BUFLER [1992] — można uznać, że wszystkie wyniki w pierwszym zakresie deformacji pozostają w „dobrej zgodności”, a „pewne” rozbieżności pojawiają się dopiero w zaawansowanym zakresie rozwiązania.

Na rys. 6.7.19 i 6.7.21 podajemy (w powiększeniu) przebieg rozwiązań własnych w zaawansowanym zakresie deformacji oraz w miejscu przegięcia ścieżek równowagi. Rozwiązania, układające się jako trzy pierwsze krzywe od lewej na rys. 6.7.21, przedstawiają zbieżność podziału elementu CAME16 z pełnym całkowaniem (FI). Wyraźnie widoczne jest kształtowanie się przegięcia krzywej rozwiązania wraz z zagęszczaniem podziału CAME16.

Rozwiązanie 5-parametrowym elementem zdegenerowanym 9×9 SEL e 16 (FI) w tym zadaniu pokrywa się praktycznie z odpowiednikiem 6-parametrowym 9×9 CAME16 (FI), nie wykazując jakościowych zmian między teorią o symetrycznych (SEL) i niesymetrycznych (CAM) miarach odkształceń. W najbardziej odbiegającym od pozostałych rozwiązaniu 8×8 ASC e 9 z rys. 6.7.23, w zaawansowanym zakresie wzrostu obciążenia wystąpiły wyraźne formy pasożytnicze na obrotach (słabo widoczne w translacjach). Skłonność do wyzwalania się postaci pasożytniczych w zaawansowanym zakresie rozwiązania może być efektem silnej zmienności kąta obrotu, występującej wzdłuż tworzącej w pobliżu punktu przyłożenia siły (por. wolne od form pasożytniczych rozwiązanie 9×9 CAME16 (FI), rys. 6.7.22, $P = 60$).



Rys. 6.7.23. Swobodna powłoka cylindryczna: zestawienie rozwiązań własnych.

Tabela 6.7.3. Swobodna powłoka cylindryczna: przesunięcia punktów (a) i (b), (FI), $\alpha_t = 0,01$.

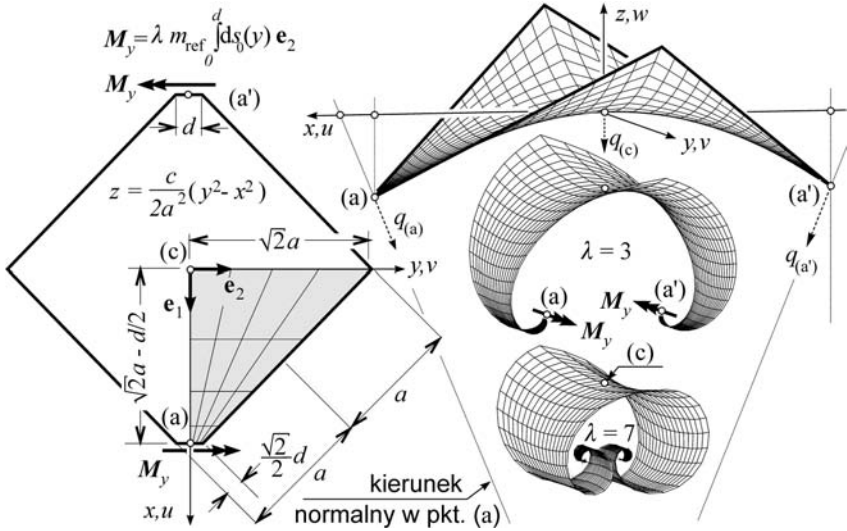
CAM $9 \times 9e16$			SEMm1 $8 \times 8e9$		
P	$w_{(a)}$	$u_{(b)}$	P	$w_{(a)}$	$u_{(b)}$
1	0,81772	0,86419	1	0,81935	0,86475
3	1,5209	1,8988	3	1,5271	1,9011
5	1,8261	2,4517	5	1,8366	2,4560
10	2,1585	3,0775	10	2,1774	3,0857
15	2,3203	3,3807	15	2,3451	3,3908
20,2112	2,4434	3,6634	20,0569	2,4671	3,6476
20,5636	2,4562	3,7330	20,7839	2,4908	3,7545
20,5995	2,4610	3,7754	20,8009	2,4954	3,7965
20,5557	2,4701	3,8612	20,7138	2,5037	3,8802
20,6050	2,4823	3,9420	20,6951	2,5150	3,9596
20,8485	2,4978	4,0156	20,8291	2,5295	4,0321
22,5	2,5449	4,1698	22,5	2,5892	4,2278
25	2,5839	4,2654	25	2,6292	4,3226
30	2,6345	4,3688	30	2,6781	4,4178
40	2,7024	4,4867	40	2,7451	4,5283
50	2,7537	4,5657	50	2,7978	4,6057
60	2,7971	4,6277	60	2,8435	4,6684

6.7.5. Swobodna powłoka paraboloidalno-hyperboliczna zginana parą momentów

Przykład z rys. 6.7.24 jest zmodyfikowaną wersją zadania zaproponowanego w pracy DING [1989] (również BAŞAR i DING [1990]). Powłoka jest paraboloidą hiperboliczną o równaniu $z = c(y^2 - x^2)/2a^2$, $x \in [-(\sqrt{2}a - \frac{d}{2}), (\sqrt{2}a - \frac{d}{2})]$, $y \in [-\sqrt{2}a, \sqrt{2}a]$, rozpiętą na rzucie kwadratu o boku $2a$ i wyniosłości c względem punktu siodłowego. Na obu dolnych końcach, obciętych na szerokości d , zadano samorównoważące się stronami, liniowo rozłożone wzdłuż d obciążenie związającym powłokę momentem o intensywności λm_{ref} o kierunku osi y . Dane liczbowe przyjęto wg DING [1989]: $a = 10$, $c = 5$, $\sqrt{2}d = 1,25$, $h_0 = 0,2$, $E = 10^4$, $\nu = 0$, $m_{\text{ref}} = 5$.

W pracy DING [1989] na krawędzi obcięcia rogu założono swobodnie przesuwne podparcie, umożliwiające ślizganie się powłoki w klinie wzdłuż normalnej (rys. 6.7.24). Z kolei w BAŞAR i DING [1990] podano, że powłoka podparta jest tylko w dwóch punktach (a) i (a'). To zadanie badali również STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989], nakładając zerowe warunki brzegowe na przemieszczenia membranowe normalne do brzegu wzdłuż obcięcia⁵³ (co odpowiada opisowi

⁵³W przypadku sformułowań odnoszących translacje bezpośrednio do układu globalnego (zwyczajowo elementy klasy C^0 , jak np. w STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989]), realizacja omawianych warunków brzegowych wymaga albo transformacji zależności elementowych do lokalnych węzłowych układów współrzędnych (tzw. *układów skośnych*), pokrywających się z kie-



Rys. 6.7.24. Swobodna paraboloida hiperboliczna: schemat zadania, postać deformacji.

z DING [1989]). W przypadku podparcia w pojedynczych punktach (a) i (a') (jak sugeruje tekst BAŞAR i DING [1990]), reakcja jest równa zero i zadanie jest równoważne powłoce swobodnej. W warunkach podparcia wzdłuż całej krawędzi (STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] oraz DING [1989]) występuje samorzównoważony lokalny rozkład reakcji. Można oczekiwać, że rozwiązanie zadania będzie bliskie (z wyłączeniem strefy podporowej) rozwiązaniu powłoki swobodnej.

W badaniach własnych rozważamy powłokę swobodną, unikając nieodmówień związanych z realizacją warunków brzegowych. Wykorzystujemy podwójną symetrię, dyskretyzując tylko 1/4 konstrukcji. Podział na elementy konstruujemy na płaszczyźnie $z = 0$. Węzły na liniach równoległych do osi y rozmieszczamy w równych odstępach. W kierunku drugim (związanym z x) odstęp między węzłami przyjmujemy jako odwrotnie proporcjonalny do numeru jego pozycji liczonej od osi y . Zaczynając od brzegu ($i = 1$), odstęp obliczamy według reguły $\Delta x_i = i \Delta L_x$; gdzie $\Delta L_x = L_x / (\sum_{j=1}^{N-1} j)$, ΔL_x jest długością do podziału, a N – przyjętą liczbą węzłów w kierunku x .

Badania własne koncentrujemy na zakresie nieliniowym zadania. Jednak dla kompletności w tab. 6.7.4 zamieszczamy również wyniki rozwiązań liniowych, głównie z dyskretyzacji branych pod uwagę w analizie nieliniowej. Należy zauwa-

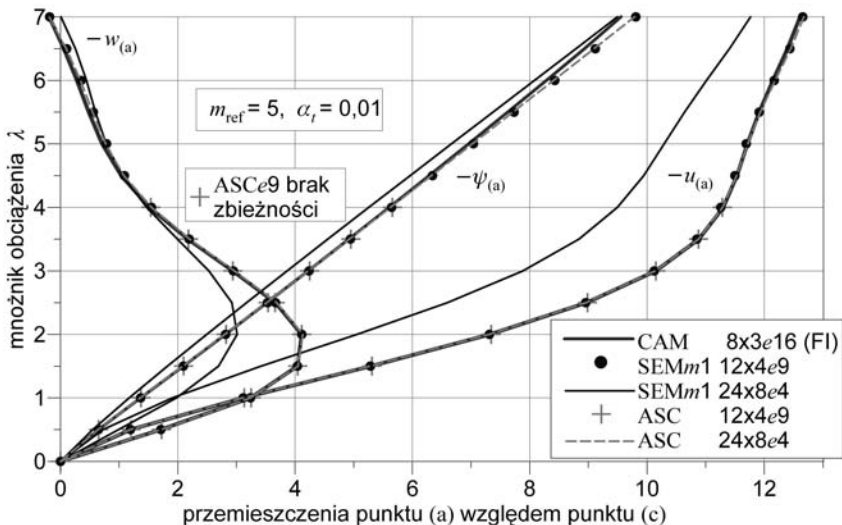
runkiem nakładanych warunków brzegowych, albo użycia tzw. *elementów kierunkowych*. Należy jednak pamiętać, że elementy kierunkowe charakteryzuje duża sztywność („blokująca” kierunek), która może pogarszać uwarunkowanie układu, prowadząc nawet do osobliwości. W sformułowaniach operujących bezpośrednio lokalnym układem współrzędnych powierzchniowych (zwyczajowo elementy klasy C^1 , jak np. u HARTE [1982]) tego typu warunki brzegowe są naturalne i ich realizacja numeryczna nie stwarza trudności.

żyć, że rozwiązanie 24×8 SEM $m1e4$ jest znacznie przesztywnione w stosunku do pozostałych.

Tabela 6.7.4. Swobodna paraboloida hiperboliczna: rozwiązania liniowe, przemieszczenia punktów (a) i (c), $m_{ref} = 5$.

Sformułowanie	Dyskretyzacja	$-u_{(a)}$	$-w_{(a)}$	$q_{(a)}$	$q_{(c)}$	„Obrót”
CAM (FI)	$4 \times 2e16$	1,5466	2,9978	2,2578	2,9308	1,1447
	$8 \times 3e16$	1,5805	3,0804	2,3073	2,9950	1,1581
	$12 \times 4e16$	1,5827	3,0854	2,3105	2,9992	1,1588
SEM $m1$	$12 \times 4e9$	1,5778	3,0757	2,3033	2,9899	1,1571
	$24 \times 8e4$	1,0508	1,8685	1,5340	1,9912	1,0193
ASC	$12 \times 4e9$	1,5934	3,1036	2,3261	3,0195	1,1655
	$24 \times 8e4$	1,5735	3,0742	2,2970	2,9817	1,1498
SEL (FI)	$4 \times 2e16$	1,5478	2,9991	2,2595	2,9330	1,1521
	$8 \times 3e16$	1,5833	3,0849	2,3114	3,0003	1,1670
S16 (FI)	$8 \times 3e16$	wg pracy STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989],			2,771	1,167
	$16 \times 6e16$				2,80	1,17
SA4	$24 \times 8e4$	(powłoka na brzegu w klinie wzdłuż normalnej)			2,696	1,145
	$46 \times 16e4$				2,795	1,166

Analizę nieliniową wykonano na tej samej siatce węzłów 25×9 (elementami 4- i 9-węzłowymi) lub w zbliżonej siatce 25×10 węzłów (elementami 16-węzłowymi). Porównanie różnych sformułowań własnych przedstawiamy na rys. 6.7.25. W tab. 6.7.5 zestawiono reprezentatywne dane liczbowe rozwiązania CAM $8 \times 3e16$ (FI) oraz dostępne wyniki liczbowe z prac STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] i DING [1989].



Rys. 6.7.25. Swobodna paraboloida hiperboliczna: krzywe deformacji.

Tabela 6.7.5. Paraboloidea hiperboliczna: rozwiązania nieliniowe, przemieszczenia punktów (a) i (c), $m_{ref} = 5$.

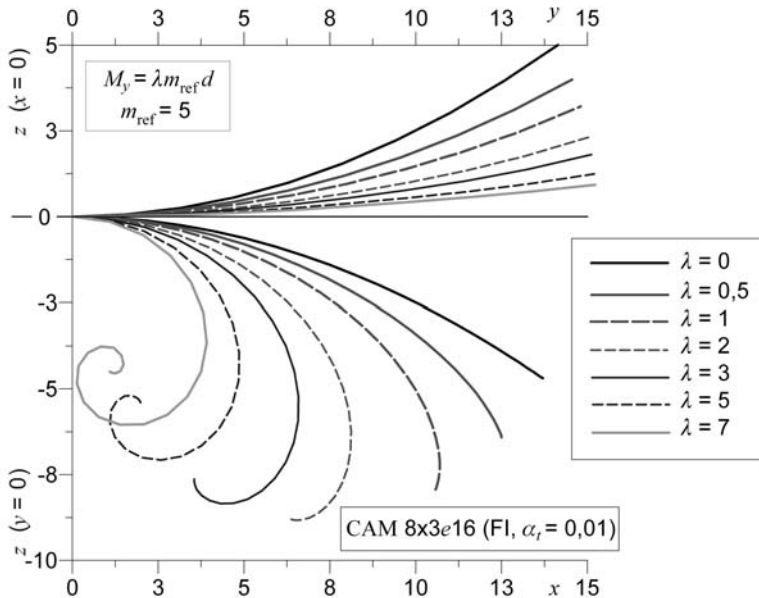
λ	CAM* $8 \times 3e16$ (FI, $\alpha_t = 0,01$)					SA4** $12 \times 4e4$			$q(c)$
	$-u_{(a)}$	$-w_{(a)}$	$-\psi_1$		$q_{(a)}$	$q_{(c)}$	$q_{(a)}$	$-\varphi_2$	
			rad	$(\cdot)^\circ$				$(\cdot)^\circ$	
0,5	1,1967	1,7158	0,64641	37,037	2,2677	1,7470	1,8567	34,32	
1	3,1205	3,2409	1,3687	78,421	5,9133	4,5554	5,1118	74,49	
1,5	5,2935	4,0395	2,0943	120,00	10,031	7,7276	9,0081	116,37	
2	7,3228	4,1129	2,8117	161,10	13,877	10,690	12,8471	160,85	
2,5	8,9708	3,6615	3,5208	201,73	16,999	13,096	15,9420	207,55	
3	10,146	2,9389	4,2223	241,92	19,226	14,811	17,8904	244,00	
3,5	10,883	2,1730	4,9168	281,71	20,623	15,887	19,4014	292,43	
4	11,298	1,5175	5,6046	321,12	21,409	16,493	20,2423	352,79	
4,5	11,533	1,0351	6,2855	360,13	21,855	16,836	osobliwość; STANDER,		
5	11,713	0,70999	6,9599	398,77	22,196	17,099	MATZENMILLER		
5,5	11,910	0,48221	7,6239	436,82	22,569	17,387	i RAMM [1989]		
6	12,144	0,28066	8,2835	474,61	23,013	17,728	KLFR54** $20e3 C^1$		
6,5	12,391	0,05807	8,9328	511,81	23,481	18,089	DING [1989]		
7	12,609	-0,19178	9,5513	547,25	23,894	18,407	620,0	18,57	

* – powłoka swobodna
 ** – powłoka ślizgająca się w klinie danym normalnymi na brzegu (a)

W zakresie nieliniowym rozwiązanie 24×8 SEMm1 e4 jest również przeszywnione⁵⁴. Także rozwiązanie ASCe9 (podział 12×4) w zaawansowanej fazie deformacji $\lambda > 4$ okazało się rozbieżne. Zaskakującym jest fakt, że we wszystkich rozwiązaniach z pracy STANDER, MATZENMILLER i RAMM [1989] powyżej poziomu $\lambda = 4$ wystąpiły trudności z uzyskaniem rozwiązania. Fakt ten, tylko na podstawie obserwacji „konsystentnie” zlinearyzowanej macierzy stycznej, powiązano z obecnością w tym zakresie deformacji punktu bifurkacji. Jednak nie przytoczono wyników głębszych badań potwierdzających istnienie punktu bifurkacji rozwiązania. W naszych rozwiązaniach (z wyłączeniem ASCe9) nie wystąpiły kłopoty ze zbieżnością w całym badanym zakresie zmienności obciążenia $\lambda = \{0,5, 1, 1,5, \dots, 6,5, 7\}$. Żadnych uwag na temat kłopotów ze zbieżnością rozwiązań nie ma także w pracach DING [1989] oraz BAŞAR i DING [1990].

Przy poziomie obciążenia $\lambda = 7$ różnica pomiędzy uzyskaną w rozwiązaniu własnym wartością kąta obrotu a wartością podaną w pracy DING [1989] (BAŞAR i DING [1990]) jest bardzo duża. Rysunek 6.7.26 przedstawia deformację konturów wyciętych płaszczyznami symetrii. Należy zauważyć, że kąt $360^\circ + 180^\circ = 540^\circ$ odpowiada prawie zawinięciu końca powłoki w konfiguracji $\lambda = 7$ z rys. 6.7.26 ($547,25^\circ$), a odpowiadający temu obciążeniu podany w pracy DING [1989] kąt

⁵⁴To przeszywnienie jest wynikiem wrażliwości modelu interpolacji m1 elementu SEMe4 na dystorsję siatki podziału. Okazuje się, że zastosowanie tzw. triku Taylora prowadzi do zdecydowanej poprawy rozwiązania i praktycznego zaniku różnic.



Rys. 6.7.26. Swobodna paraboloida hiperboliczna: deformacja przekroju, różne fazy obciążenia.

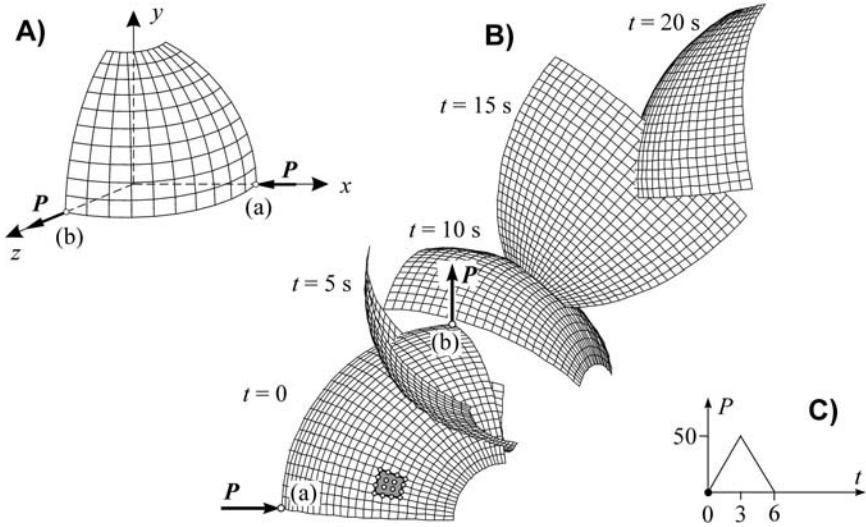
620° jest większy aż o ponad 70°(!). Mimo tak wyraźnych różnic, efekt ten trudno dostrzec na zbliżonych do rys. 6.7.26 poglądowych rysunkach z prac DING [1989] oraz BAŞAR i DING [1990]. Źródło tych różnic w rozwiązaniach może być wielorakie: nieco inne warunki brzegowe, wpływ podziału na lokalną deformację w obrębie obciążenia, realizacja rozłożenia obciążenia, inne położenie punktu odczytu wartości na brzegu, niewłaściwe przełożenie parametrów obrotowych na język stopni itp. Nie można również wykluczyć, że obserwowana różnica jest efektem nieco odmiennych sformułowań teorii powłok i elementów skończonych (por. p. 6.4.5).

6.7.6. Segment sfery z otworem w swobodnym locie bez udziału sił grawitacji

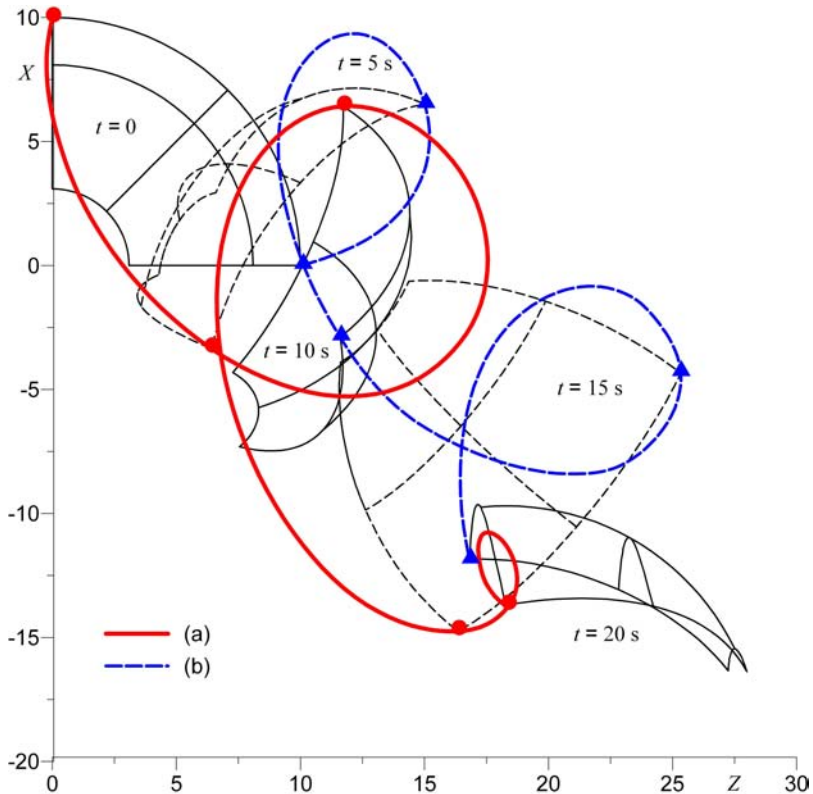
Zadanie z rys. 6.7.27 — wycinek kulistej powłoki z otworem obciążony parą sił⁵⁵ w swobodnym locie bez udziału sił grawitacji — rozważano w pracy SIMO, RIFAI i FOX [1992].

W obliczeniach własnych za MACNEAL i HARDER [1985] (zob. p. 6.7.1) przyjęliśmy następujące dane liczbowe: $R = 10$, $h_0 = 0,04$, $\alpha = 18^\circ$, $E = 6,825 \times 10^7$, $\nu = 0,3$, $P_{\text{ref}} = 10$ oraz $\rho_0 = 25$ tak, aby $m_0 = \rho_0 h_0 = 1$. Rozważono trójkątną funkcję zmiany obciążenia w czasie, wzrastającą od 0 do wartości 50 w ciągu 3 s,

⁵⁵Pierwotnie przykład ten zaproponowany został przez MACNEAL i HARDER [1985] jako test statyki (zob. p. 6.7.1).

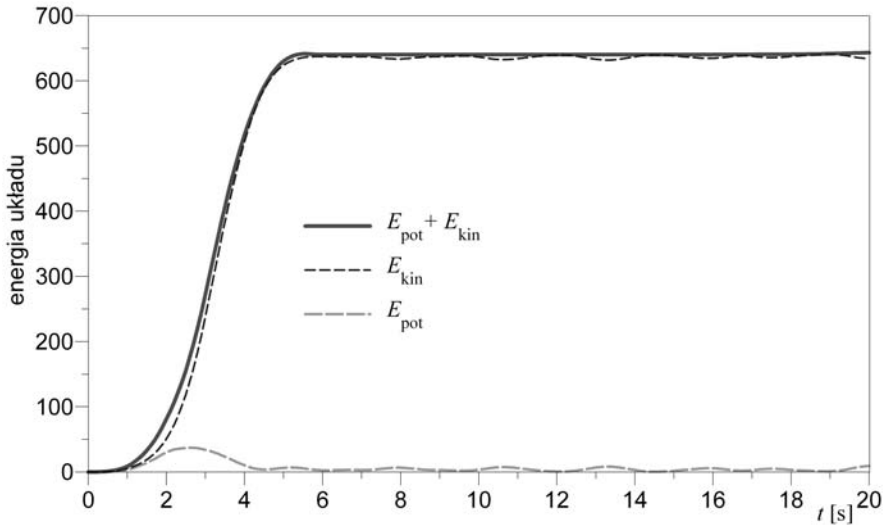


Rys. 6.7.27. Segment sfery z otworem w locie: A) schemat zadania, B) sekwencja konfiguracji, C) funkcja obciążenia.



Rys. 6.7.28. Segment sfery z otworem w locie: trajektorie punktów przyłożenia sił.

a następnie malejącą do 0 w ciągu kolejnych 3 s (rys. 6.7.27). Powłokę zdyskretyzowano w siatce 8×8 16-węzłowych elementów CAM całkowanych w sposób pełny (FI). Dynamiczne równania ruchu całkowano z krokiem czasowym $\Delta t = 0,1$ s.



Rys. 6.7.29. Segment sfery z otworem w locie: energia układu.

Sekwencję kolejnych konfiguracji powłoki, obrazujących jej deformację w różnych 5 s odstępach czasu, pokazano na rys. 6.7.27. Rysunek 6.7.28 pokazuje trajektorie punktów (a) i (b) przyłożenia sił zrzuconych na płaszczyznę współrzędnych x - z . Na rys. 6.7.29 przedstawiono wykres zmian energii układu w czasie. Obrazuje on wzrost energii w okresie odpowiadającym działaniu obciążenia. Po zaniku obciążenia widoczne są małe oscylacje energii kinetycznej i energii potencjalnej w trakcie swobodnego lotu powłoki, jednak suma obu energii jest równa dostarczonej do układu pracy obciążenia zewnętrznego i pozostaje stała w rozważanym przedziale czasu.

6.7.7. Uwagi

W podrozdziale 6.7 poruszono i pokazano (rys. 6.7.9 i 6.7.10) problem pogarszania się zbieżności rozwiązań wraz z narastaniem deformacji. Zjawisko to, w kontekście uzyskanych wyników, ma proste wyjaśnienie. Jest to efekt pogarszania się, w miarę rozwoju deformacji nieliniowej, możliwości odtworzenia — nawet przez coraz gęstsze siatki dyskretyzacyjne — coraz bardziej skomplikowanej i skrcającej się fali deformacji.

Zapewne silne dystorsje pojedynczych elementów są przyczyną zjawiska „wypadania”, z powodu braku zbieżności, kolejnych (brakujących do kompletu na rys. 6.7.9 i 6.7.10) rozwiązań ASCe4 i ASCe9 przy coraz gęstszych siatkach po-

działu. Podobne trudności wystąpiły w p. 6.7.4, gdzie rozwiązanie ASCe9, w wyniku znacznej deformacji, okazało się rozbieżne. Ponadto, model 9-węzłowego elementu ASC nie zawsze redukuje w zadawalającym stopniu postacie pasożytnicze. Fakty te są wynikiem pewnej matematycznej niekonsystencji sformułowań elementów typu ASC, bazujących na koncepcji dwustopniowej interpolacji odkształceń.

Działanie γ -stabilizacji okazało się także tylko częściowo skuteczne, gdyż formy pasożytnicze ulegają jedynie silnej redukcji do poziomu mało widocznego w skali deformacji. Efektywność γ -stabilizacji jest zdecydowanie gorsza dla obrotów niż dla translacji. Należy również zauważyć, że pola obrotów mają większą niż pola translacji skłonność do kumulacji form pasożytniczych. W literaturze powszechnie pokazuje się jedynie uzyskaną gładkość geometrii (czy translacji) jako sprawdzian skuteczności użytej procedury stabilizującej postacie pasożytnicze.

6.8. Konstrukcje wielopłatowe płytowo-powłokowe

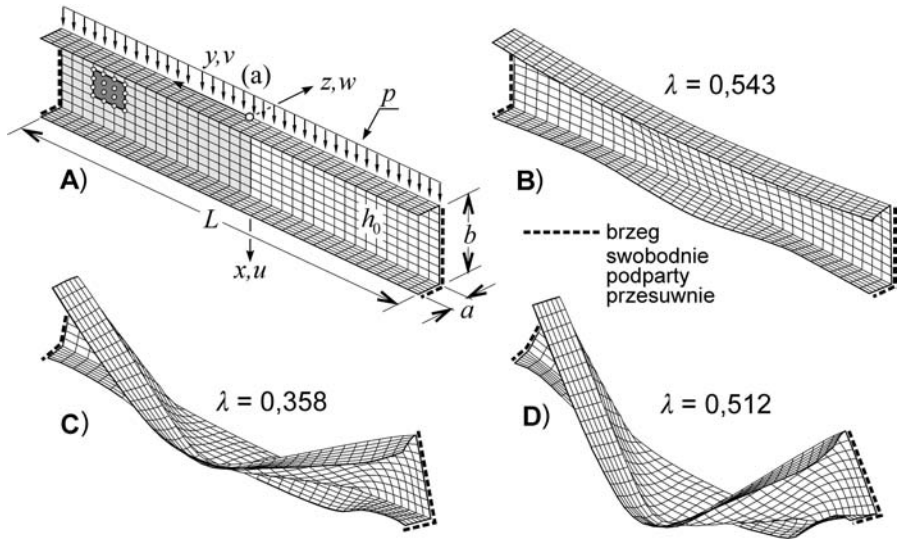
6.8.1. Uwagi wstępne

Zadania zebrane w tym podrozdziale są cienkościennymi formami przestrzennymi o dużej sztywności konstrukcyjnej, wynikającej z ukształtowania geometrycznego. Ich pracę charakteryzuje silna interakcja sztywności membranowej ze sztywnością giętną i skrętną układu. Pojawia się problem lokalnej utraty stateczności i wpływu tego zjawiska na stateczność globalną konstrukcji. Charakterystyczną jest tu bardzo skomplikowana postać ścieżek równowagi, opisujących rozwiązania nieliniowe. Występują duże przesunięcia i obroty włókien materialnych powłoki.

Wielopłatowy charakter przykładów upoważnia do traktowania tych zadań jako bardziej realnych testów sformułowań powłokowych elementów skończonych o trzech obrotowych stopniach swobody. Te elementy skończone są bowiem szczególnie predysponowane do obliczeń powłok o nieregularnej geometrii. W przypadku występowania deformacji, odpowiadającej prawie sztywnemu przemieszczaniu się dużych fragmentów konstrukcji, bardzo silnie ujawnia się tendencja do blokady przy całkowaniu pełnym (FI), bądź do powstawania form pasożytniczych (a nawet osobliwości) w przypadku stosowania całkowania zredukowanego (RI). Dlatego te zadania są także dobrym testem efektywności sformułowania samych elementów skończonych.

6.8.2. Belka C-owa swobodnie podparta obciążona liniowo, wspornik C-owy z siłą na końcu

Jako pierwszy wariant zadania rozpatrujemy belkę C-ową (rys. 6.8.1), swobodnie podpartą przesuwnie na obu końcach (wzdłuż półki dolnej i po wysokości środka) i obciążoną liniowo na krawędzi połączenia środka z półką górną.



Rys. 6.8.1. Swobodnie podparta belka C-owa: schemat zadania, postacie deformacji.

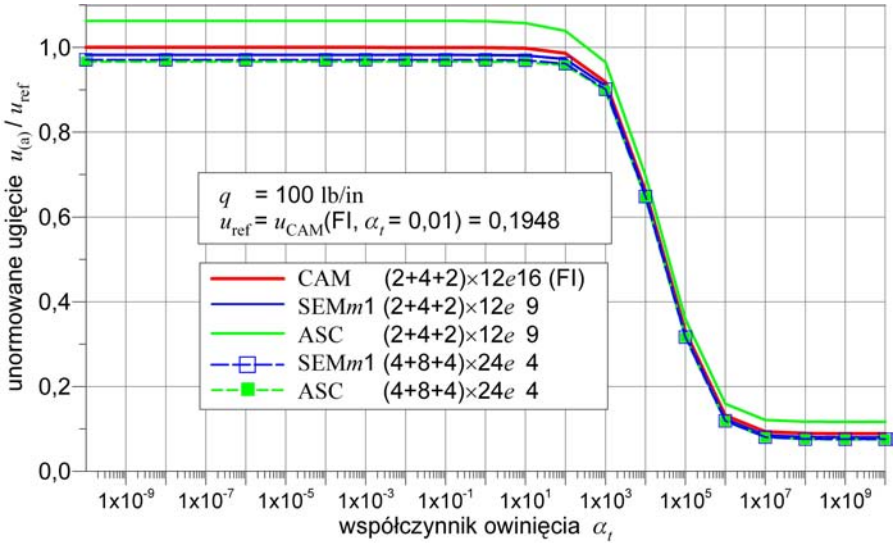
Za pracą⁵⁶ LEE I HARRIS [1979] przyjęto następujące dane liczbowe: $L = 36$ in, $a = 2$ in, $b = 6$ in, $h_0 = 0,05$ in, $E = 10^7$ lb/in², $\nu = 0,333$, $p_{\text{ref}} = 100$ lb/in. W obliczeniach wykorzystujemy symetrię układu, dyskretyzując tylko 1/2 konstrukcji.

W zakresie liniowym, rozważając wywołane obciążeniem p_{ref} ugięcie punktu (a), badano wpływ współczynnika owinięcia α_t na rozwiązania uzyskane różnymi elementami skończonymi. Wyniki analizy zamieszczono na rys. 6.8.2. Potwierdzają one, tak jak w przypadku powłok regularnych, fakt braku wpływu współczynnika α_t na ugięcie $u_{(a)}$ przy wartościach $\alpha_t < 1$.

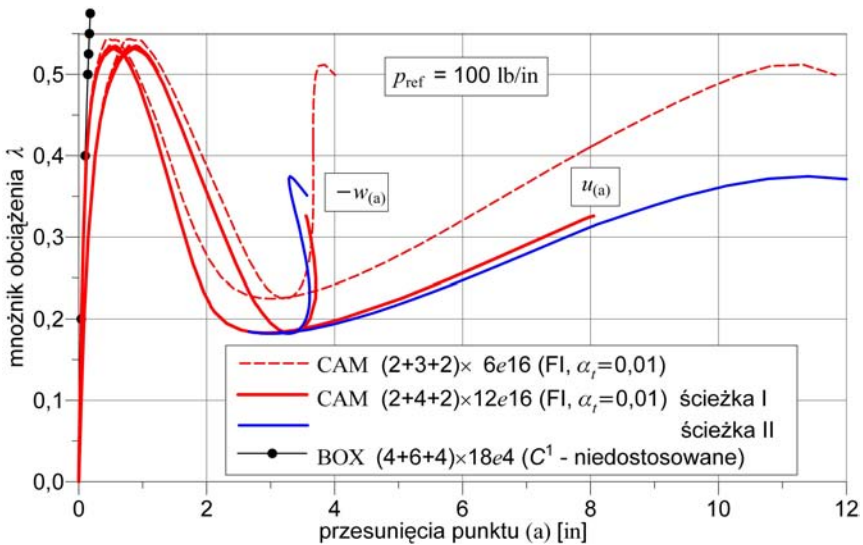
Zadanie charakteryzują następujące cechy: a) silne sprzężenie stanu membranowego ze stanem zgięciowym i stanem skrętnym układu, b) skłonność do blokady przy całkowaniu pełnym (FI), c) powstawanie silnych form pasożytniczych przy całkowaniu zredukowanym (RI), d) skomplikowana postać rozwiązania, odpowiadająca fałdowaniu się konstrukcji, pojawiająca się po zakresie umiarkowanych deformacji (rys. 6.8.3 ścieżki „równoległe” i rys. 6.8.4 „zadry”). Wymienione cechy czynią analizę bardzo trudną. Z tych względów analizę ograniczamy do częściowego prześledzenia rozwiązania nieliniowego dla dwóch dyskretyzacji elementami CAME16 i BOXe4 (rys. 6.8.3).

Częściowe wyniki liczbowe, z pominięciem złożonej strefy przejścia punktu granicznego (zob. rys. 6.8.4), zawiera tab. 6.8.1. Porównanie rozwiązań BOX

⁵⁶W pracy LEE i HARRIS [1979] zadanie analizowano w zakresie umiarkowanych deformacji sprężysto-plastycznych, stosując niedostosowany 4-węzłowy płaski element skończony klasy C^1 o sześciu stopniach swobody w węzle. Praca ta była inspiracją do opracowania algorytmu i utworzenia pierwowzoru programu BOX (CHRÓŚCIELEWSKI [1983]).

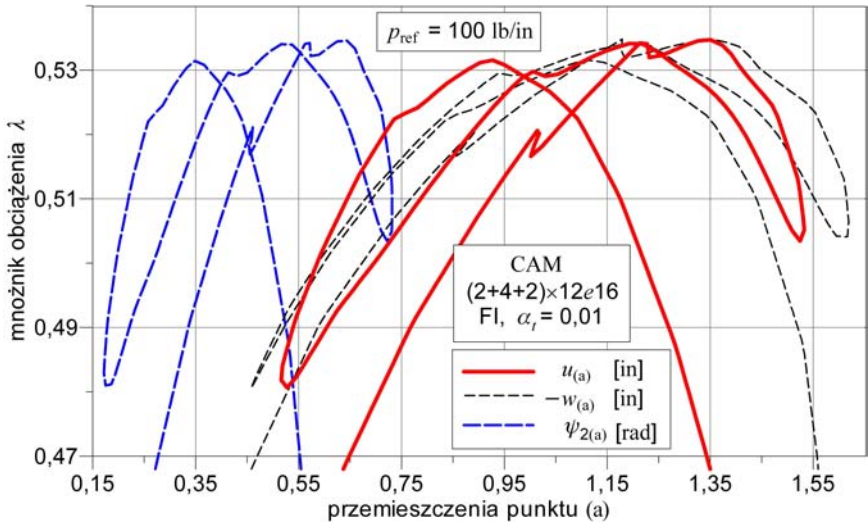


Rys. 6.8.2. Swobodnie podparta belka C-owa: wpływ α_t , rozwiązania liniowe.

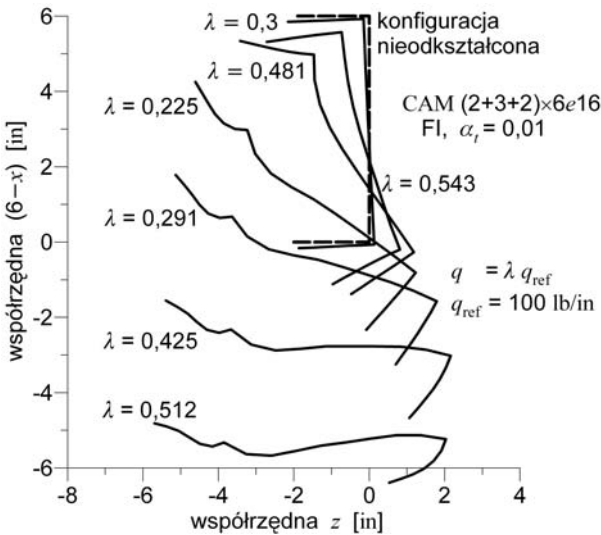


Rys. 6.8.3. Swobodnie podparta belka C-owa: rozwiązanie nieliniowe.

i CAM (rys. 6.8.3, tab. 6.8.1) wskazuje na ograniczony zakres stosowalności niedostosowanych elementów typu BOX (p. 5.6.2), sformułowanych na bazie teorii płyt von Kármána. W tym świetle prezentowane w pracach LEE i HARRIS [1979] oraz CHRÓŚCIELEWSKI [1983] rozwiązania sprężysto-plastyczne obarczone są znacznym błędem geometrycznym. Rysunek 6.8.5 przedstawia po-



Rys. 6.8.4. Swobodnie podparta belka C-owa: ścieżka deformacji w strefie punktu granicznego.



Rys. 6.8.5. Swobodnie podparta belka C-owa: deformacje przekroju w płaszczyźnie symetrii.

stać i skalę deformacji przekroju poprzecznego w płaszczyźnie symetrii. W strefie punktu granicznego i dalej ujawnia się istotny wpływ dyskretyzacji. Pojawiają się liczne fałdy na środniku (zob. rys. 6.8.1) świadczące o bogactwie i złożoności postaci deformacji, do odtworzenia której wymagane są gęste siatki podziału.

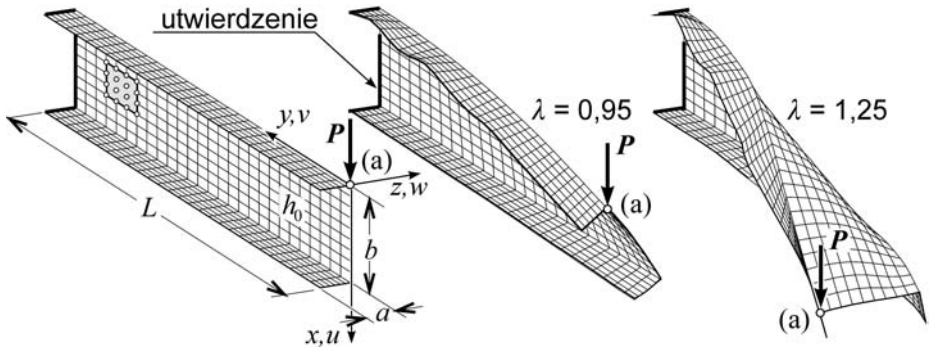
Tabela 6.8.1. Swobodnie podparta przesuwnie belka C-owa: przemieszczenia punktu (a),
 $p_{\text{ref}} = 100 \text{ lb/in.}$

CAM $(2+3+2) \times 9e16$, $\alpha_t = 0,01$				BOX $(4+6+4) \times 18e4$, C^1			
λ	$u_{(a)}$	$-w_{(a)}$	$\psi_{1(a)}$	λ	$u_{(a)}$	$-w_{(a)}$	$\varphi_{1(a)}$
0,2	0,04314	0,08477	0,0257	0,2	0,04188	0,08362	0,0276
0,4	0,12228	0,25544	0,0536	0,4	0,10224	0,21730	0,0627
0,506668	0,30313	0,55956	0,0989	0,5	0,14300	0,30894	0,0853
0,513406	0,32902	0,59432	0,1044	0,525	0,15460	0,33496	0,0932
złożona forma jak na rys. 6.8.3				0,55	0,16714	0,36324	0,1023
0,510351	0,80578	1,1733	-0,0002	BOX $e4$ – niedostosowany			
0,487261	0,93885	1,3266	-0,0370				
0,434602	1,1653	1,6058	-0,0960				
0,324238	1,5701	2,1561	-0,1549				
0,267254	1,7883	2,4598	-0,1533				
0,218427	2,0505	2,7637	-0,1238	CAM $(2+3+2) \times 9e16$, $\alpha_t = 0,01$			
0,215537	2,0634	2,7976	-0,1240	ścieżka B (druga)			
0,194616	2,3121	3,0023	-0,0847	λ	$u_{(a)}$	$-w_{(a)}$	$\psi_{1(a)}$
0,186659	2,5308	3,1330	-0,0487	0,184608	2,6611	3,1482	-0,0230
0,182794	2,9019	3,3041	0,0098	0,182006	2,9724	3,2674	0,0265
0,186080	3,3655	3,4593	0,0777	0,186857	3,5945	3,4414	0,1163
0,200078	4,1114	3,6167	0,1761	0,199690	4,2810	3,5531	0,2045
0,225371	5,0480	3,7025	0,2839	0,223644	5,2175	3,6095	0,3097
0,249119	5,7960	3,7088	0,3593	0,251709	6,1483	3,5909	0,3996
0,300238	7,2727	3,6253	0,4834	0,291563	7,3697	3,5027	0,4975
0,316973	7,7552	3,5831	0,5167	0,316042	8,1222	3,4340	0,5452
0,325908	8,0466	3,5548	0,5329	0,320535	8,3000	3,4187	0,5537
				0,339084	9,0009	3,3608	0,5913
				0,363097	10,129	3,2950	0,6412
				0,374532	11,403	3,3057	0,6829
				0,363935	12,474	3,4396	0,7062

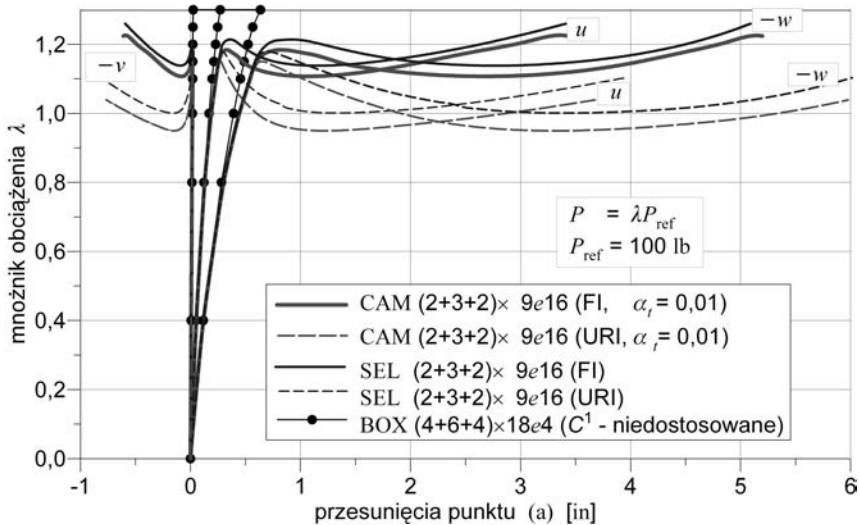
Badania wieloaspektowe przeprowadzono dla łatwiejszego do analizy⁵⁷ wariantu belki wspornikowej (rys. 6.8.6) obciążonej na końcu siłą skupioną P . W analizie nieliniowej belki wspornikowej przyjęto $P = \lambda P_{\text{ref}}$, $P_{\text{ref}} = 100 \text{ lb}$.

Rysunek 6.8.7 przedstawia ścieżki deformacji (przesunięcia u , v i w punktu (a) przyłożenia siły w funkcji mnożnika obciążenia λ) dla trzech typów elementów

⁵⁷Zamiana warunków brzegowych na utwierdzenie silnie redukuje mechanizm powstawania form pasożytniczych przy stosowaniu całkowania zredukowanego (RI), co w połączeniu z zamianą obciążenia liniowego na siłę skupioną znacznie upraszcza przebieg krzywej rozwiązania.



Rys. 6.8.6. Wspownik C-owy: schemat zadania, postacie deformacji.



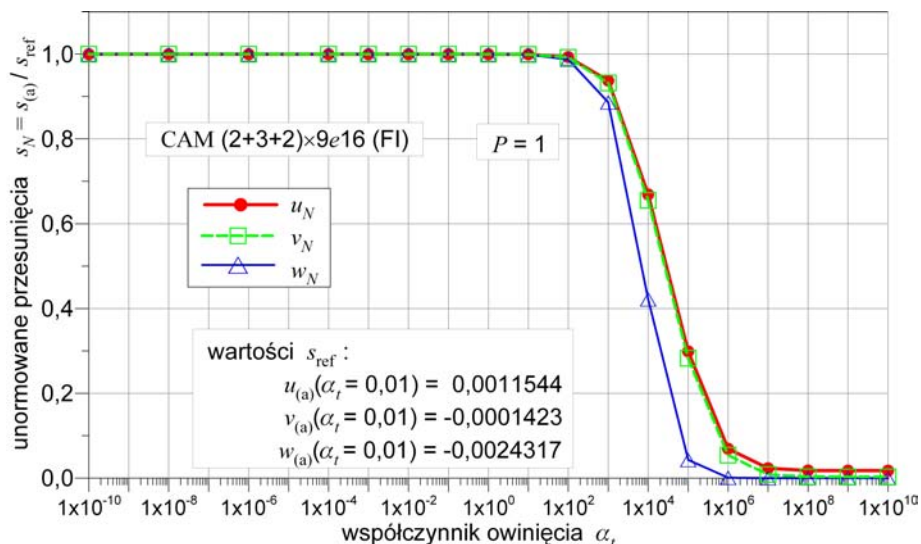
Rys. 6.8.7. Wspownik C-owy: rozwiązanie nieliniowe.

BOXe4 oraz CAME16 i SELe16 z całkowaniem pełnym (FI) lub zredukowanym (URI). Reprezentatywne wyniki liczbowe zawiera tab. 6.8.2. W rozwiązaniach 5-parametrowymi standardowymi elementami zdegenerowanymi SEL zastosowano modelowanie połączenia prostopadłych płatków przedstawione na rys. 6.4.2 B, uciągające poprzez krawędź pole wektorów kierunkowych. Rysunek 6.8.7 ponownie potwierdza ograniczony zakres stosowalności elementu BOXe4. Występujące różnice wyników CAME16 i SELe16 są efektem sposobu modelowania połączenia płatków (rys. 6.4.2 B) i typu sformułowania elementów.

Analizę wpływu konstytutywnego współczynnika owinięcia α_t przeprowadzono w zakresie liniowym (rys. 6.8.8) i nieliniowym (rys. 6.8.9) dla dyskrety-

Tabela 6.8.2. Wspornik C-owy: przesunięcia punktu (a), CAM $(2+3+2) \times 9e16$, $P_{\text{ref}} = 100$, $\alpha_t = 0,01$.

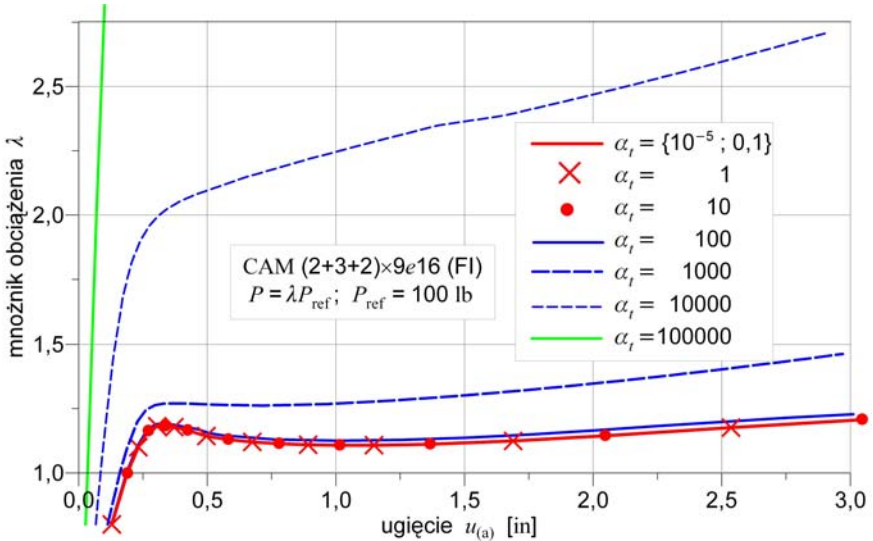
Całkowanie pełne (FI)				Całkowanie zredukowane (URI)			
λ	$u_{(a)}$	$v_{(a)}$	$-w_{(a)}$	λ	$u_{(a)}$	$v_{(a)}$	$-w_{(a)}$
0,4	0,05241	-0,00606	0,11752	0,4	0,05291	-0,00625	0,11794
0,8	0,12895	-0,01308	0,30214	0,8	0,13018	-0,01348	0,30349
1,1	0,23206	-0,01901	0,54188	1,1	0,23472	-0,01958	0,54561
1,16473	0,27183	-0,02010	0,63805	1,13637	0,25491	-0,02028	0,59212
1,18170	0,30580	-0,01958	0,75093	1,14997	0,27131	-0,02032	0,64538
1,18315	0,33835	-0,01813	0,86670	1,14002	0,29205	-0,01925	0,74250
1,17757	0,37137	-0,01592	0,98461	1,11465	0,32959	-0,01618	0,91815
1,14305	0,49689	-0,00306	1,4017	1,06676	0,41314	-0,00656	1,2702
1,12026	0,67508	0,02030	1,8790	0,999147	0,60367	0,02346	1,9199
1,10732	1,0153	0,07465	2,5847	0,959693	0,87590	0,07545	2,6243
1,11175	1,3658	0,13914	3,1524	0,949550	1,2170	0,14766	3,3068
1,14441	2,0465	0,27980	3,9956	0,955846	1,6262	0,24025	3,9544
1,20686	3,0466	0,51121	4,8837	0,967661	2,0156	0,33249	4,4596
1,22428	3,4255	0,60737	5,1905	0,993051	2,7121	0,50560	5,1914
				1,03877	3,6752	0,76455	5,9761



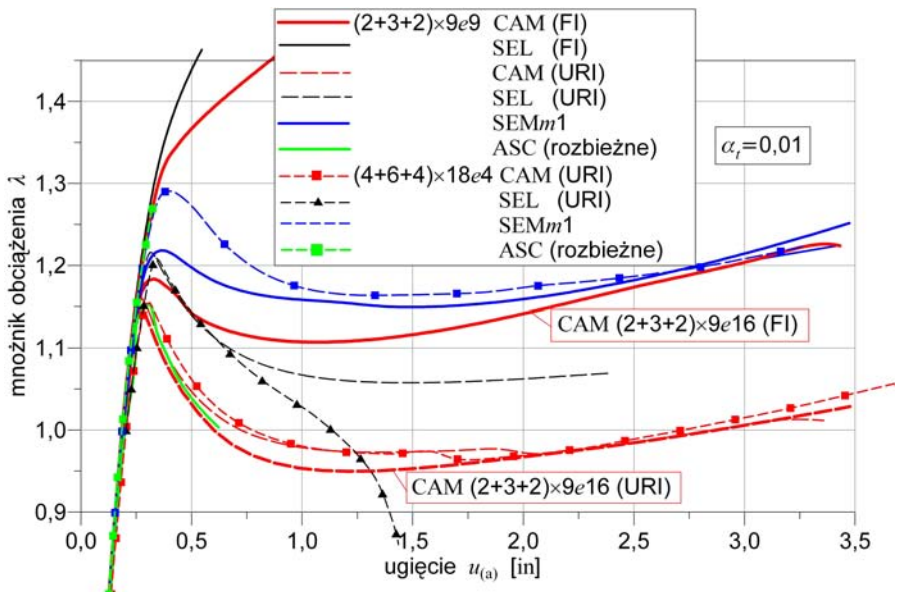
Rys. 6.8.8. Wspornik C-owy: wpływ α_t , rozwiązanie liniowe.

zacji CAM $(2+3+2)\times 9e16$ (FI). W zakresie liniowym (rys. 6.8.8) badano zmianę ugięcia punktu przyłożenia siły ($P = 1$) w funkcji α_t , normując ugięcie przez odpowiednie wartości przemieszczeń otrzymane przy $\alpha_t = 0,01$.

W zakresie nieliniowym (rys. 6.8.9) wyznaczono ścieżki ugięcie $u_{(a)}$ – mnożnik obciążenia λ dla różnych wartości α_t . Ponownie, w zakresie liniowym i nieliniowym



Rys. 6.8.9. Wspornik C-owy: wpływ α_t , rozwiązania nieliniowe.



Rys. 6.8.10. Wspornik C-owy: rozwiązanie nieliniowe dla różnych sformułowań.

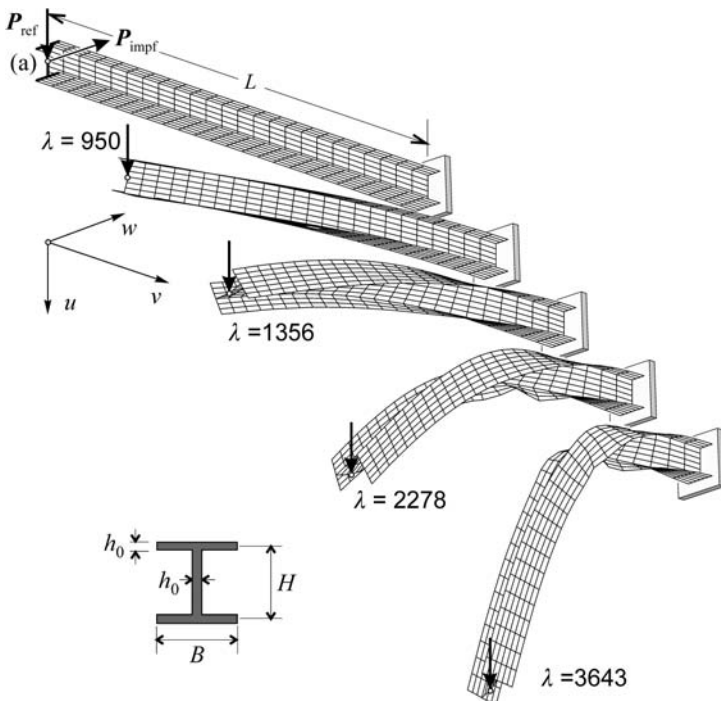
wym, otrzymano typową zależność rozwiązań od α_t , tj. dla wartości $\alpha_t < 1$ nie obserwuje się wpływu współczynnika owinięcia α_t na rozwiązanie.

Analogiczne wyniki rozwiązań nieliniowych dla różnych elementów przedstawia rys. 6.8.10 (por. rys. 6.8.7). Rozwiązań CAM i SEL elementami 4-węzłowymi z całkowaniem pełnym (FI) nie naniesiono, bo okazały się całkowicie zablokowane (zakleszczone). Pozostałe ścieżki równowagi, z wyjątkiem częściowo zablokowanych CAME9 i SELe9 (FI), mają punkt graniczny. Widoczna jest również lokalna utrata stateczności obu pólek w strefach ściskanych (rys. 6.8.6).

W tym przykładzie także rozwiązania ASC okazały się rozbieżne w zaawansowanym zakresie deformacji. Porównanie rozwiązań przy całkowaniu pełnym (FI) i zredukowanym (URI) wskazuje na istotny wpływ (nawet nieznacznych tutaj w skali deformacji) form pasożytniczych (przy stosowaniu URI) na ilościowy i jakościowy kształt rozwiązań po osiągnięciu punktu granicznego.

6.8.3. Dwuteowy wspornik obciążony siłą

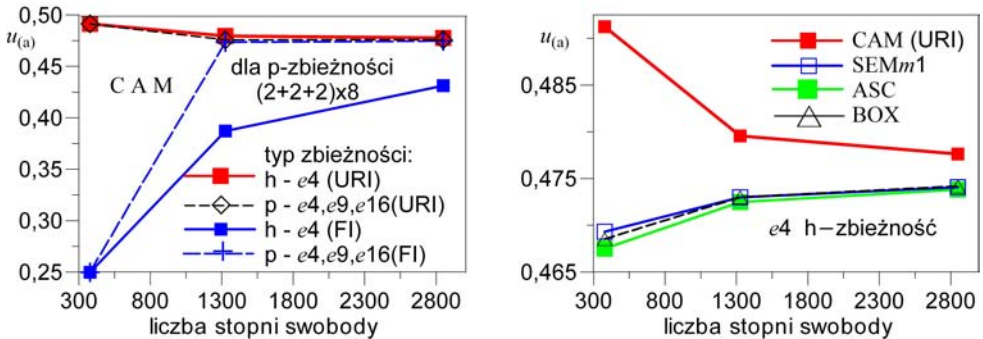
W tym zadaniu zbadano stateczność giętno-skrętną wspornika dwuteowego (rys. 6.8.11) pod działaniem poprzecznej siły skupionej zaczepionej na końcu.



Rys. 6.8.11. Wspornik dwuteowy: schemat zadania, postacie deformacji.

Przykład zaczerpnięto z pracy⁵⁸ TALBOT i DHATT [1986], przyjmując dane liczbowe: $L = 4800$ mm, $B = 300$ mm, $h_0 = 25$ mm, $E = 2 \times 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$, $P_{\text{ref}} = 1000$ N, $P = \lambda P_{\text{ref}}$, $P_{\text{impf}} = P/10000$. Wyniki są przemieszczeniami punktu (a) przyłożenia siły odpowiednio wyrażonymi w zakresie nieliniowym w funkcji obciążenia.

W zakresie liniowym, przyjmując $P = 1$ kN, badano zbieżność podziału (rys. 6.8.12) i wpływ współczynnika owinięcia α_t na rozwiązania (rys. 6.8.13).



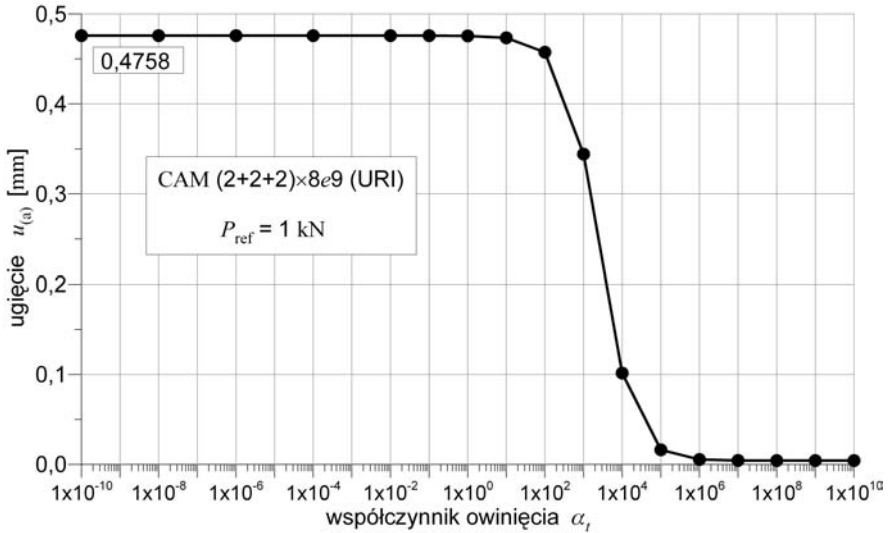
Rys. 6.8.12. Wspornik dwuteowy: zbieżność podziału, rozwiązania liniowe.

Analizę zbieżności podziału MES dla różnych elementów przedstawiono na rys. 6.8.12. Nie obserwuje się tu istotnego wpływu efektu blokady, także formy pasożytnicze przy (URI) są szczątkowe. Występuje typowe zjawisko zbieżności: dla elementów całkowanych w sposób pełny (FI) – od dołu, a w przypadku całkowania zredukowanego (URI) – od góry. Rysunek 6.8.12 przedstawia wyniki badań zbieżności MES typu h przez zagęszczanie siatki i typu p przez podnoszenie rzędu wielomianów aproksymacyjnych.

Na rysunku 6.8.13 zamieszczono wyniki badań wpływu współczynnika owinięcia α_t . Wykazują one typową charakterystykę — dla wartości współczynnika $\alpha_t < 1$ nie obserwuje się wpływu α_t na wartość ugięcia $u_{(a)}$ pod ustaloną siłą $P = 1$ kN.

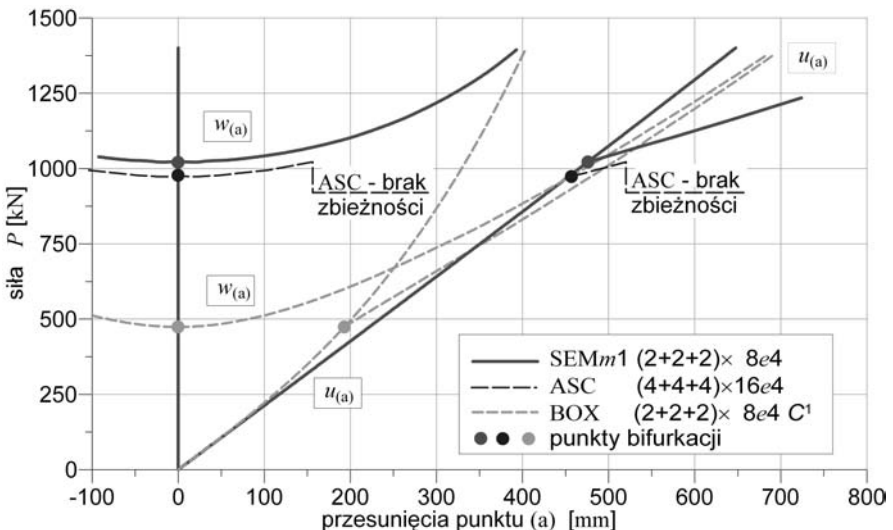
Zakres badań nieliniowych obejmuje prześledzenie ścieżek równowagi i określenie obciążenia krytycznego odpowiadającego rozdzieleniu się rozwiązań. Jak

⁵⁸W TALBOT i DHATT [1986, 1987] zadanie posłużyło jako test trzech płaskich powłokowych elementów trójkątnych DCT(3), DQT(3) i DLT(6-węzłowy), zdefiniowanych w ramach sformułowania (AULF) typu uaktualniony opis Lagrange'a. Elementy te są odpowiednią superpozycją elementów płytowych o dyskretnych więzach Kirchhoffa DKT(3), DKTP(6-węzłowy) z trzema odmianami elementu tarczowego CST(3), QST(3) i LST(6-węzłowy). Elementy mają po sześć stopni swobody w węzle. Parametry obrotowe powiązane są z pochodnymi przesunięć. W tym zadaniu elementy 3-węzłowe DCT(=CST+DCT) najslabiej opisujące stan tarczowy i DQT(=QST+DKT) nie dały poprawnego rozwiązania przed- i pokrytycznego. Wartość obciążenia krytycznego uzyskana elementem 6-węzłowym DLT(=LST+DKTP) jest zgodna z analitycznym wynikiem klasycznej teorii prętów (tab. 6.8.3).



Rys. 6.8.13. Wspornik dwuteowy: wpływ współczynnika α_t na rozwiązanie liniowe.

pokazano na rys. 6.8.14, przy monotonicznym wzroście wartości obciążenia przesunięcia belki pozostają w płaszczyźnie symetrii i są prawie liniowe. Przy krytycznej wartości siły P_{kr} pojawia się ścieżka wtórna i następuje gwałtowne wyjście belki z płaszczyzny symetrii. Ugięcia odpowiadające punktowi bifurkacji są rzędu wysokości belki. Występujący rząd przemieszczeń przekracza więc zakres



Rys. 6.8.14. Wspornik dwuteowy: początek rozwiązania, ścieżki przed- i pobifurkacyjne.

stosowalności użytej w sformułowaniu elementu BOXe4 teorii płyt von Kármána. W rezultacie, rozwiązanie BOX już w fazie dokrytycznej przybiera zdecydowanie nieliniowy charakter, a obliczone giętno-skრეტne obciążenie krytyczne leży zdecydowanie poniżej wartości uzyskiwanych z pozostałych rozwiązań. Ponadto, rozwiązanie ASCe4 przestaje być zbieżne w początkowej fazie rozwiązania pokrytycznego.

Wartości obciążeń krytycznych, uzyskane z rozwiązań nieliniowych (cofnięcie się do płaszczyzny symetrii po usunięciu obciążenia zaburzającego P_{impf}), zestawiono w tab. 6.8.3. Wartości siły krytycznej P_{kr}^Q dla obciążenia giętno-skრეტnego są silnie zróżnicowane. Wszystkie (z zagęszczeniem dyskretyzacji) układają się powyżej wyniku otrzymanego przez TALBOT i DHATT [1986] (z wyjątkiem BOXe4

Tabela 6.8.3. Wspornik dwuteowy: obciążenia krytyczne.

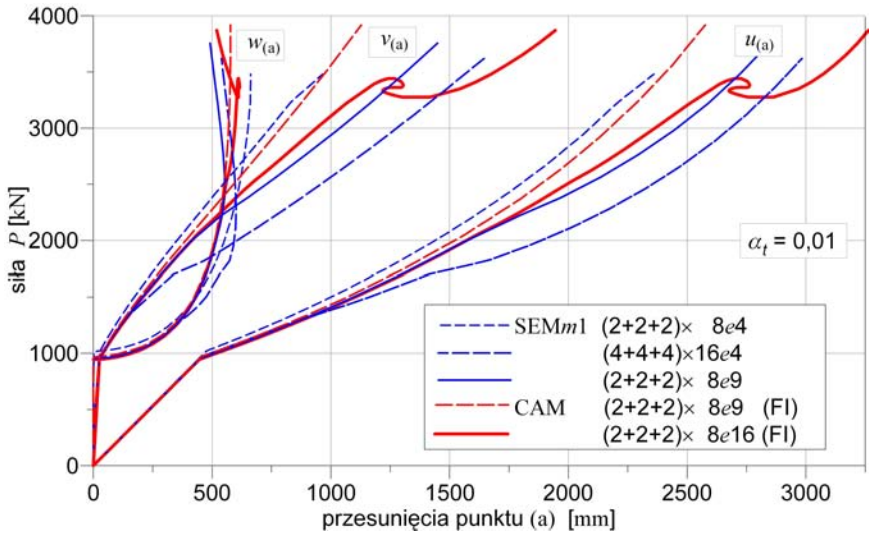
Element (całkowanie)	Podział	P_{kr}^Q	P_{kr}^N
CAME4 (URI)	$(2+2+2) \times 8$	790,1	1812
	$(4+4+4) \times 16$	903,8	2233
	$(6+6+6) \times 24$	921,7	2312
CAME9 (FI) (URI)	$(2+2+2) \times 8$	973,3	2403
	$(4+4+4) \times 16$	948,6	2382
	$(2+2+2) \times 8$	941,2	2376
	$(4+4+4) \times 16$	937,3	2373
CAME16 (FI) (URI)	$(2+2+2) \times 8$	946,5	2380
	$(4+4+4) \times 16$		2375
	$(2+2+2) \times 8$	938,0	2373
	$(4+4+4) \times 16$		2372
SEMm1 e4	$(2+2+2) \times 8$	1022	2439
	$(4+4+4) \times 16$	973,2	2404
	$(6+6+6) \times 24$	959,1	2392
SEMm1 e9	$(2+2+2) \times 8$	955,8	2391
	$(4+4+4) \times 16$	945,4	2379
ASCe4	$(2+2+2) \times 8$	1026	2491
	$(4+4+4) \times 16$	973,8	2416
	$(6+6+6) \times 24$	959,3	2397
ASCe9	$(2+2+2) \times 8$	832,0	2333
	$(4+4+4) \times 16$	(-)*	2366
BOXe4 C^1 , niedostosowany (równania von Kármána)	$(2+2+2) \times 8$	474,1	6034
	$(4+4+4) \times 16$	464,6	5680
DLTe3 wg TALBOT i DHATT [1986]	$(2+2+2) \times 8 \times 2\Delta$	834,2	2425
analityczne (prętowe) wg TIMOSHENKO i GERE [1963]		830,0	2418
(-)* – rozbieżny w stanie podkrytycznym			

i ASCe9). Wobec występujących różnic przeprowadzono dodatkową kontrolę, obliczając siłę krytyczną P_{kr}^N dla obciążenia wzdłużnego (normalnego, tab. 6.8.3). W przypadku P_{kr}^N różnice są nieznaczne, a wyniki (z wyjątkiem BOX) zbiegają się, odwrotnie niż dla P_{kr}^Q , do wartości poniżej tej, którą otrzymano w pracy TALBOT i DHATT [1986].

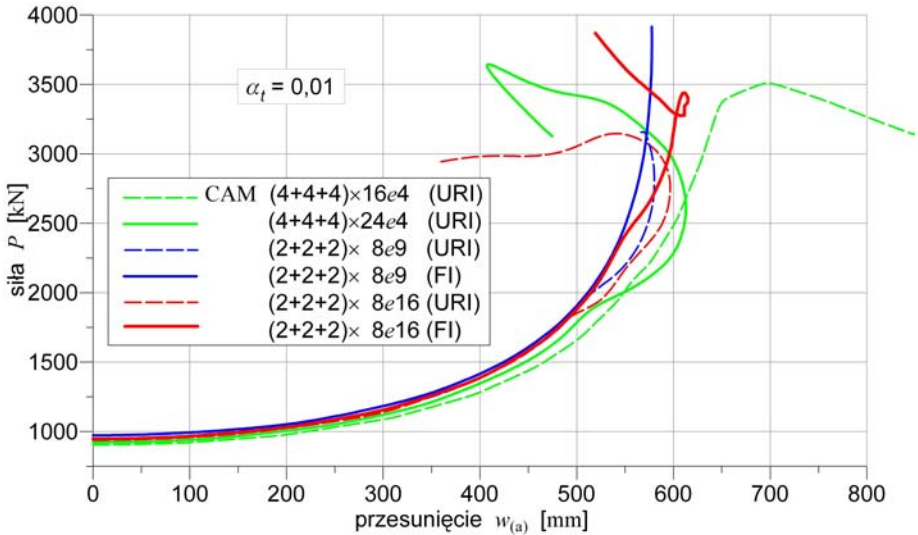
Tabela 6.8.4. Wspornik dwuteowy: rozwiązanie pokrytyczne CAM $(2+2+2) \times 8e16$ (FI), $\alpha_t = 0,01$.

P	$u_{(a)}$	$v_{(a)}$	$w_{(a)}$	$\psi_{2(a)}$	$-\psi_{1(a)}$	$\psi_{3(a)}$
946,534	445,98	24,655	0	0	0	0,13879
951,447	452,58	25,983	50,00	0,17003	0,04662	0,14060
966,452	472,64	30,076	100,00	0,33986	0,09389	0,14605
1030,73	556,94	48,284	200,00	0,67787	0,19341	0,16825
1156,21	714,17	86,742	300,00	1,0107	0,30692	0,20716
1387,82	981,53	166,37	400,00	1,3305	0,45069	0,26833
1687,16	1288,6	281,78	470,88	1,5372	0,59133	0,33514
2064,13	1626,5	441,59	521,46	1,6579	0,73270	0,40899
2438,93	1945,6	629,67	552,53	1,6723	0,84900	0,48799
2622,55	2094,6	731,55	572,42	1,6642	0,90102	0,52277
3018,47	2377,2	949,28	596,63	1,6428	0,99550	0,59125
3393,03	2636,8	1181,0	606,78	1,5999	1,0709	0,65594
3442,30	2725,6	1267,4	610,73	1,5689	1,0870	0,67632
3379,39	2762,6	1304,3	615,37	1,5448	1,0864	0,68234
3335,88	2676,4	1218,2	611,10	1,5748	1,0714	0,66271
3276,03	2757,5	1301,9	611,04	1,5124	1,0690	0,68900
3275,94	2861,9	1416,9	606,38	1,4395	1,0674	0,72766
3350,74	2969,2	1543,7	591,62	1,3737	1,0668	0,77242
3563,45	3121,7	1740,8	557,50	1,2899	1,0650	0,84237
3868,20	3262,3	1944,2	519,58	1,2190	1,0614	0,91123

Dalsze rozwiązania w zakresie nieliniowym dla różnych dyskretyzacji elementami SEM i CAM przy pełnym całkowaniu (FI) pokazano na rys. 6.8.15. Reprezentatywne dane liczbowe zamieszczono w tab. 6.8.4. Na rys. 6.8.16 zestawiono rozwiązania CAM otrzymane przy zastosowaniu reguł całkowania pełnego (FI) i jednolicie zredukowanego (URI). Zasadnicze różnice pojawiają się w zaawansowanym zakresie deformacji nieliniowej. Zapewne przyczyną tych różnic jest tu niemożność odtworzenia silnych dystorsji strefy przypodporowej widocznych na rys. 6.8.11 przez zgrubne siatki dyskretyzacyjne. Dodatkową przyczyną może być nakładanie się form pasożytniczych (tutaj nieznacznych w skali deformacji) przy stosowaniu całkowania zredukowanego (URI).



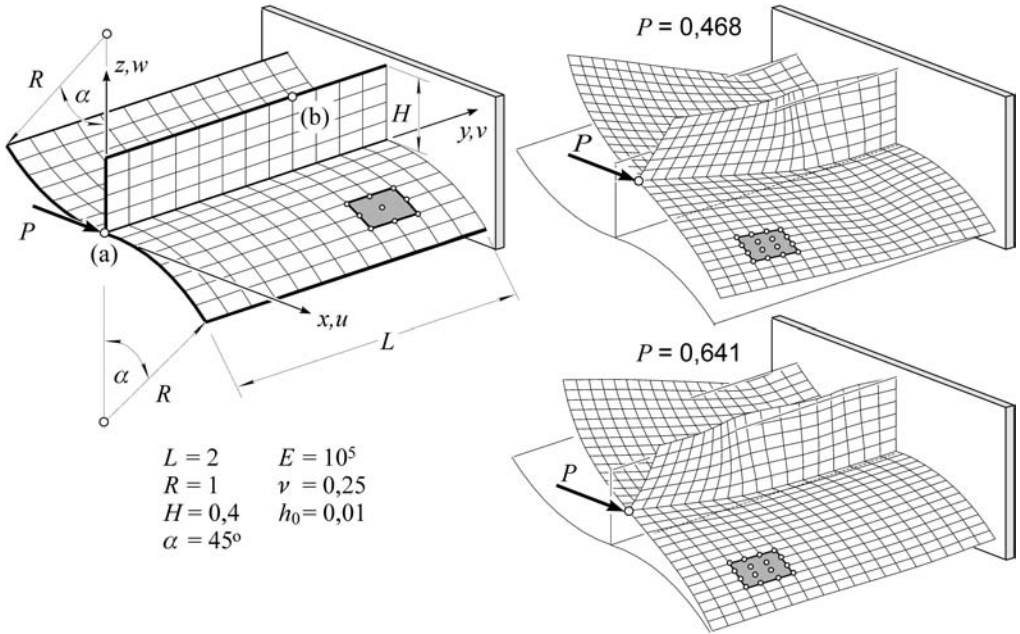
Rys. 6.8.15. Wspornik dwuteowy: rozwiązanie nieliniowe, całkowanie pełne (FI).



Rys. 6.8.16. Wspornik dwuteowy: rozwiązania pokrytyczne.

6.8.4. Wspornik falisty wzmocniony zębem i obciążony siłą

Rozważamy przykład w postaci jednostronnie utwierdzonego wycinka powłoki cylindrycznej ze zmianą znaku krzywizny na krawędzi wzmocnienia zębem (rys. 6.8.17). Przykład łączy w sobie wiele specyficznych cech występujących w poprzednich zadaniach.



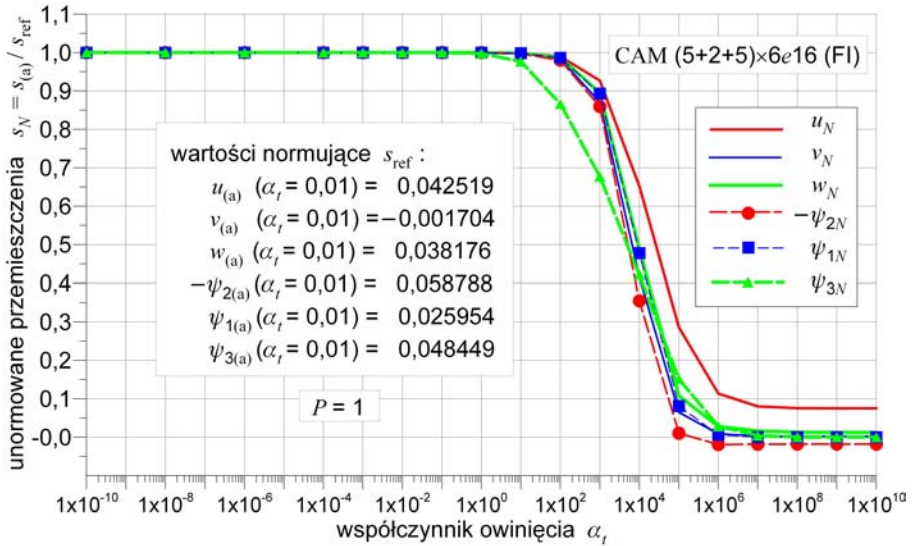
Rys. 6.8.17. Wspornik falisty z zębem: schemat zadania, postaci deformacji.

Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe: $L = 2$, $\alpha = 0,4$, $R = 1$, $H = 0,4$, $h_0 = 0,01$, $E = 10^5$, $\nu = 0,25$, $P_{\text{ref}} = 1$. W badaniach stosowano regularne siatki podziału na elementy 9- lub 16-węzłowe.

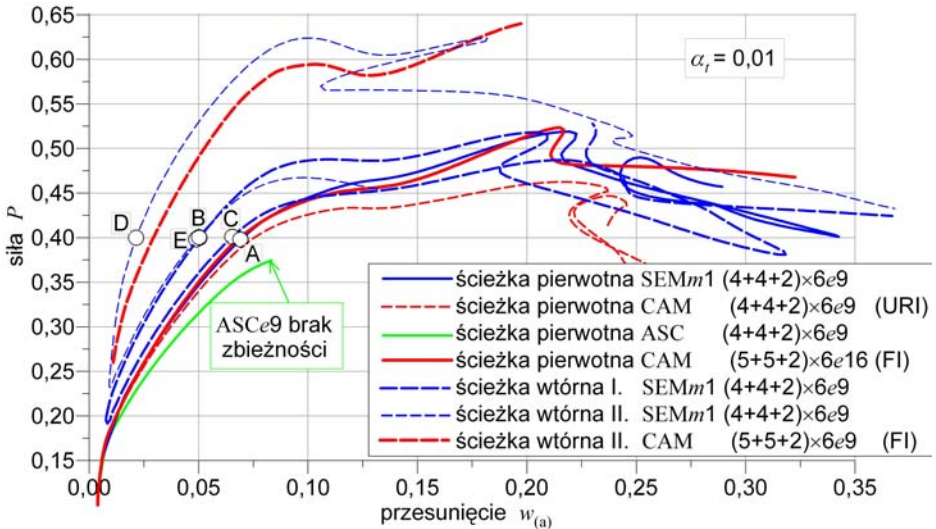
W zakresie liniowym analizowano wpływ wartości współczynnika owinięcia α_t na rozwiązania. Wyniki w postaci unormowanych (przez wartości odpowiadające rozwiązaniu dla $\alpha_t = 0,01$) przemieszczeń punktu (a) przyłożenia siły zamieszczono na rys. 6.8.18. Wykazują one typową charakterystykę: przy wartościach współczynnika $\alpha_t < 1$ nie obserwuje się jego wpływu na rozwiązania. Wyraźnie wcześniej, w stosunku do pozostałych stopni swobody, pojawił się efekt oddziaływania $\alpha_t (> 1)$ na stopień swobody ψ_3 (parametr obrotu) związany z globalną osią z .

W zakresie nieliniowym uzyskano zamieszczone na rys. 6.8.19 i 6.8.20 częściowe rozwiązania, charakteryzujące się bardzo złożoną formą relacji obciążenie–przemieszczenie. Rysunki te przedstawiają w funkcji siły P : pionowe przesunięcie $w_{(a)}$ punktu (a) przyłożenia siły (rys. 6.8.19) oraz poziome przesunięcie $u_{(b)}$ punktu (b) (rys. 6.8.20), leżącego na górnej krawędzi zębra w $1/3$ wysięgu wspornika, licząc od płaszczyzny utwierdzenia (rys. 6.8.17).

W rozwiązaniu, poza ścieżką pierwotną, wykryto dwie prawdopodobnie wtórne ścieżki równowagi, oznaczone symbolami I i II. Na rys. 6.8.20 zamieszczono ich powiększony fragment z rys. 6.8.19. Reprezentatywne wyniki liczbowe (dolne fragmenty ścieżek), uzyskane elementem 9-węzłowym SEMm1, zestawiono

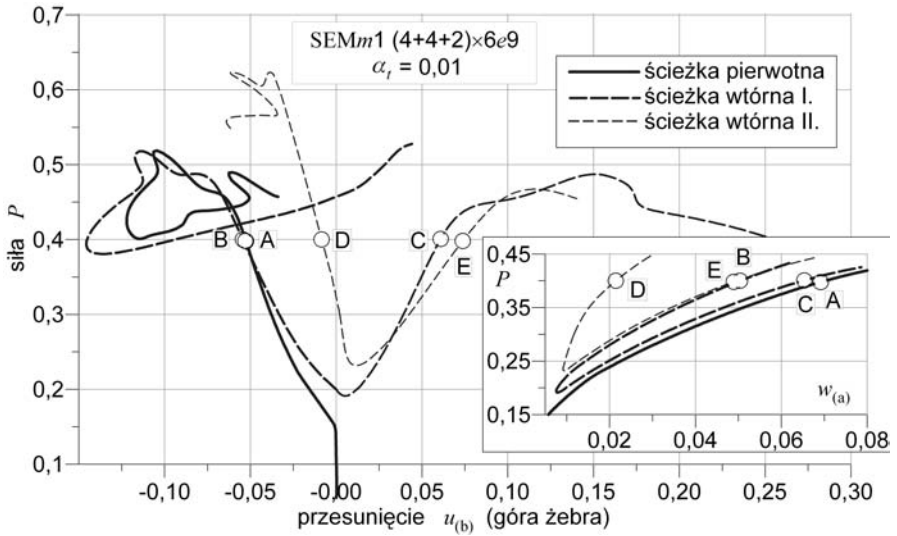


Rys. 6.8.18. Wspornik falisty z zębem: wpływ α_t , rozwiązania liniowe.

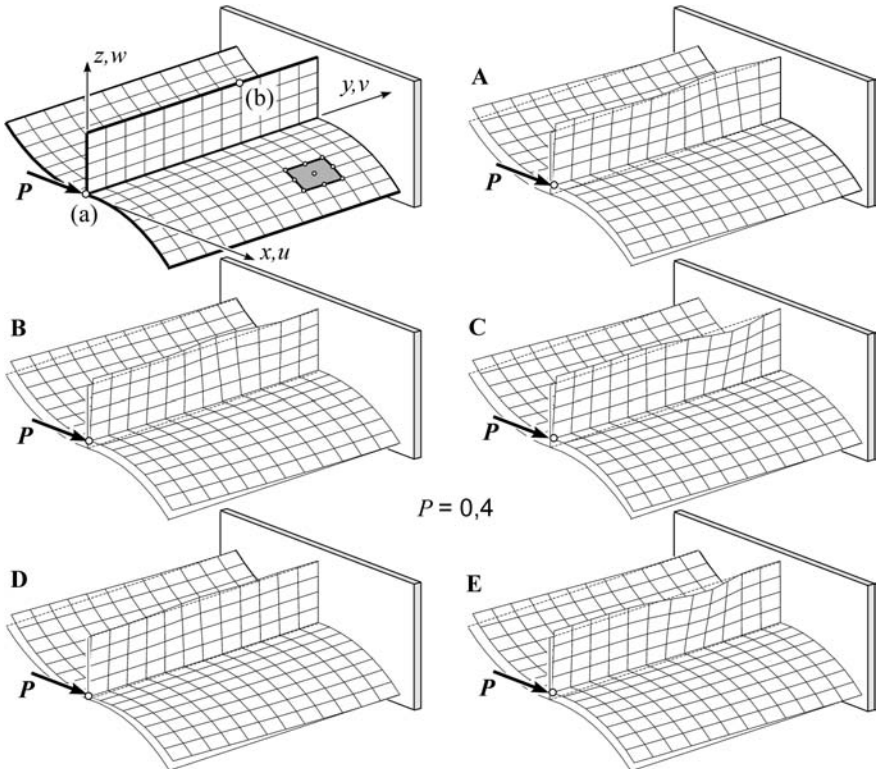


Rys. 6.8.19. Wspornik falisty z zębem: fragmenty ścieżek deformacji.

w tab. 6.8.5. Poszczególnym gałęziom krzywych równowagi odpowiadają różne postacie deformacji, wyraźnie widoczne dla zębra. Na rys. 6.8.21 zestawiono formy deformacji, odpowiadające stanom równowagi oznaczonym na rys. 6.8.19 i 6.8.20 literami A, B, C, D, E. Odpowiadające konfiguracjom A÷E wyniki liczbowe wyróżniono w tab. 6.8.5 linią półgrubą.



Rys. 6.8.20. Wspornik falisty z zębem: wychylenie zębra w punkcie (b).



Rys. 6.8.21. Wspornik falisty z zębem: konfiguracje z różnych gałęzi ścieżek deformacji na tym samym poziomie obciążenia.

Tabela 6.8.5. Falisty współnik z żebrzem: przesunięcia punktu (a), SEMm1 (4+4+2) × 6e9, $\alpha_t = 0,01$.

Ścieżka pierwotna			Ścieżka wtórna I			Ścieżka wtórna II		
P	$u_{(a)}$	$w_{(a)}$	P	$u_{(a)}$	$w_{(a)}$	P	$u_{(a)}$	$w_{(a)}$
0,0000	0,00000	0,00000	0,4839	0,03772	0,09357	0,5000	0,02627	0,04175
0,1500	0,00628	0,00573	0,4596	0,03212	0,07321	0,4500	0,02191	0,03028
0,2209	0,01098	0,01598	0,4000	0,02479	0,05038	0,4000	0,01818	0,02143
0,2621	0,01454	0,02551	0,3500	0,01980	0,03599	0,3500	0,01505	0,01519
0,3007	0,01822	0,03584	0,3000	0,01542	0,02411	0,3000	0,01257	0,01169
0,3535	0,02383	0,05229	0,2500	0,01156	0,01442	0,2700	0,01127	0,01036
0,3977	0,02930	0,06917	0,2000	0,00840	0,00783	0,2400	0,01002	0,00927
0,4272	0,03406	0,08507	0,1910	0,00806	0,00771	0,2325	0,00976	0,00922
0,4488	0,03937	0,1043	0,2063	0,00927	0,01093	0,2318	0,00976	0,00934
0,4615	0,04411	0,1218	0,2240	0,01061	0,01430	0,2351	0,01006	0,01025
0,4667	0,04821	0,1368	0,2589	0,01341	0,02170	0,2633	0,01206	0,01520
0,4756	0,05309	0,1528	0,3076	0,01779	0,03393	0,3148	0,01606	0,02565
0,4898	0,05896	0,1703	0,3517	0,02224	0,04710	0,3594	0,02006	0,03694
0,5046	0,06542	0,1886	0,4008	0,02807	0,06537	0,3981	0,02406	0,04891
0,5158	0,07215	0,2071	0,4306	0,03304	0,08270	0,4547	0,03206	0,07538
0,5187	0,07555	0,2164	0,4471	0,03970	0,1087	0,4672	0,03806	0,09872
0,5173	0,07775	0,2222	0,4518	0,04521	0,1291	0,4591	0,04406	0,1220

Zebrane na rys. 6.8.19 wyniki dla różnych sformułowań są w początkowej fazie rozwiązania w dobrej zgodności między sobą. Wyjątek stanowi rozwiązanie ASCe9, które dla zaawansowanej deformacji okazało się rozbieżne. Różnice rozwiązań pojawiają się wraz z rozwojem deformacji. Biorąc pod uwagę konieczność odtworzenia jej złożonej postaci, można oczekiwać, że różnice te ulegną redukcji przy odpowiednim zagęszczeniu siatki dyskretyzacyjnej. Należy zaznaczyć, że rozwiązanie CAME9 z użyciem całkowania jednolicie zredukowanego (URI) obarczone jest formami pasożytniczymi (szczególnie widocznymi na obrotach). Formy pasożytnicze mogą mieć dodatkowy wpływ na wielkość różnic występujących w zaawansowanym rozwiązaniu nieliniowym.

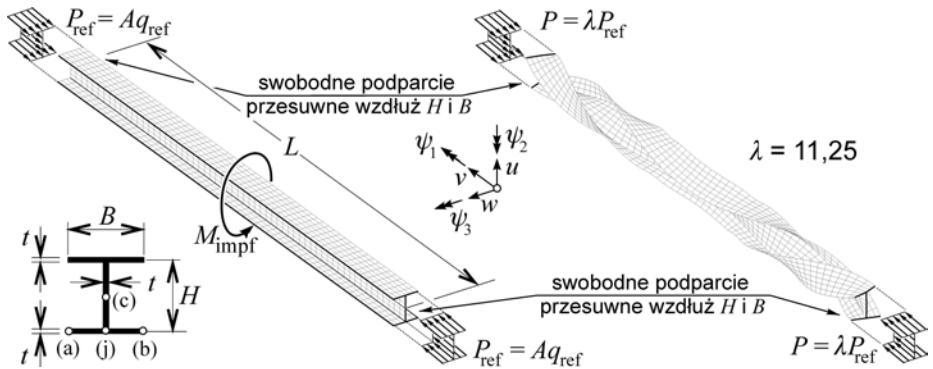
6.8.5. Stateczność skrętna dwuteownika bisymetrycznego

W ramach teorii prętów cienkościennych o przekroju nieodkształcalnym okazało się, że siła krytyczna wyboczenia skrętnego belek z dwuteowników bisymetrycznych o zmiennej wzdłuż długości L szerokości pólki $B_{\min} \leq B(y) \leq B_{\max}$, $0 \leq y \leq L$, może leżeć poza przedziałem określonym przez siły krytyczne prętów o stałej granicznej szerokości pólki (B_{\min} , B_{\max}) (zob. SZYMCZAK [1980]). Efekt

taki nie występuje w przypadku wybożenia giętnego (CYWIŃSKI i KOLBRUNNER [1971]). Ten nieoczekiwany efekt wzrostu siły krytycznej przy zmniejszaniu szerokości pasów, nazywany w literaturze *paradoksem Cywińskiego-Szymczaka*, opisano po raz pierwszy w pracy CYWIŃSKI [1970].

W pracy SZYMCZAK [1980] wykazano, że otrzymany z rozwiązań prętowych punkt bifurkacji jest symetryczny i stateczny, co wskazuje na realność tego zjawiska, nawet gdy uwzględni się wstępne imperfekcje. W ramach teorii prętów cienkościennych SZYMCZAK [1980] wyznaczył optymalne kształty pasów dwuteownika, odpowiadające ekstremalnym wartościom siły krytycznej. Nie tylko potwierdził w ten sposób powyższe zjawisko, ale stwierdził również fakt zmniejszenia siły krytycznej przy zwiększaniu szerokości pasów. Z inżynierskiego punktu widzenia jest to przypadek bardziej niebezpieczny.

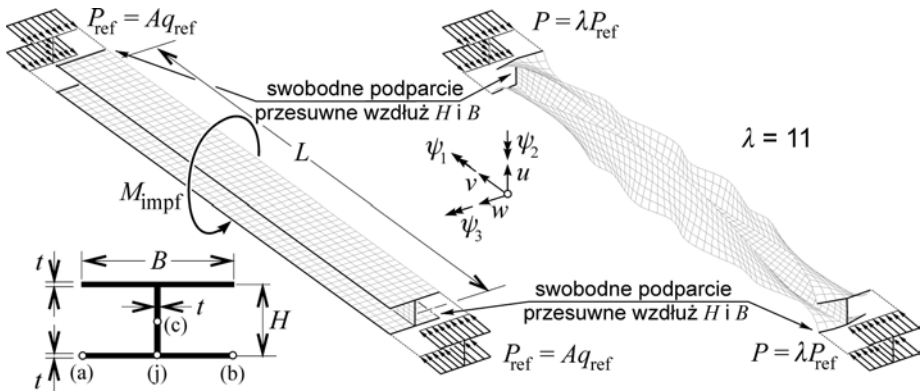
W rozwiązaniach własnych przedstawiamy weryfikację powyższego rozwiązania, uzyskanego w ramach teorii prętów cienkościennych, przy pomocy rozwiniętej tu 6-parametrowej teorii powłok i zastosowania MES. W odróżnieniu od rozważań w ramach teorii prętów cienkościennych, w analizie dwuwymiarowej nie mamy możliwości rozseparowania zjawisk utraty stateczności globalnej i lokalnej. Prezentowane wyniki dają więc całościowy wgląd w charakter tego zjawiska.



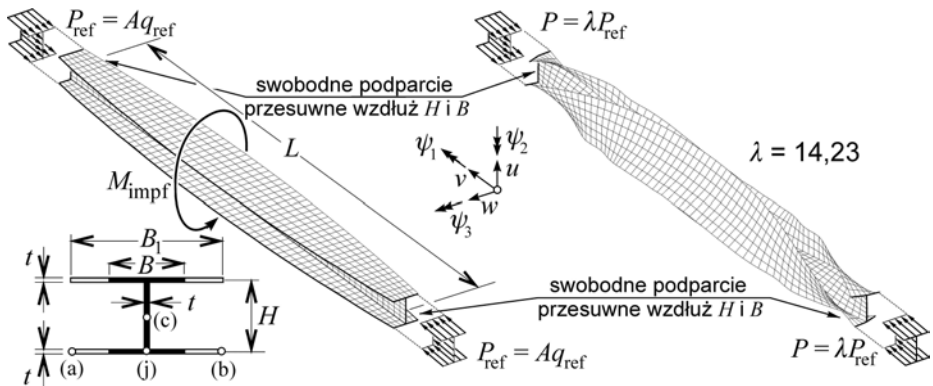
Rys. 6.8.22. Stateczność skrętna dwuteownika $B = 20$: schemat zadania, postać deformacji.

Przez analogię do pracy⁵⁹ KANOK-NUKULCHAI i SUSUMPOW [1993], rozważamy cztery warianty swobodnie podpartej belki. Za pracą SZYMCZAK [1980] przyjęto następujące dane geometryczne i materiałowe: $L = 400$, $H = 20$, szerokość pólek – stała $B_{\min} = 20$ i $B_{\max} = 40$ (rys. 6.8.22 i 6.8.23) oraz parabolicznie zmienna $B \in [20, 40]$ (rys. 6.8.24 i 6.8.25), $t = 1$, $E = 2,1 \times 10^6$, $\nu = 0,3$ dla $\alpha_t = 0,01$. Uwzględniamy jednoparametrowe obciążenie ściskające typu martwego $P = \lambda P_{\text{ref}}$, działające na końcach belki w dwóch wariantach: równomiernie rozłożone $P_{\text{ref}} = Aq_{\text{ref}} = 10^5$ na powierzchni przekroju A lub

⁵⁹W pracy KANOK-NUKULCHAI i SUSUMPOW [1993] podjęto dyskusję na temat paradoksu Cywińskiego-Szymczaka.



Rys. 6.8.23. Stateczność skrętna dwuteownika $B = 40$: schemat zadania, postać deformacji.

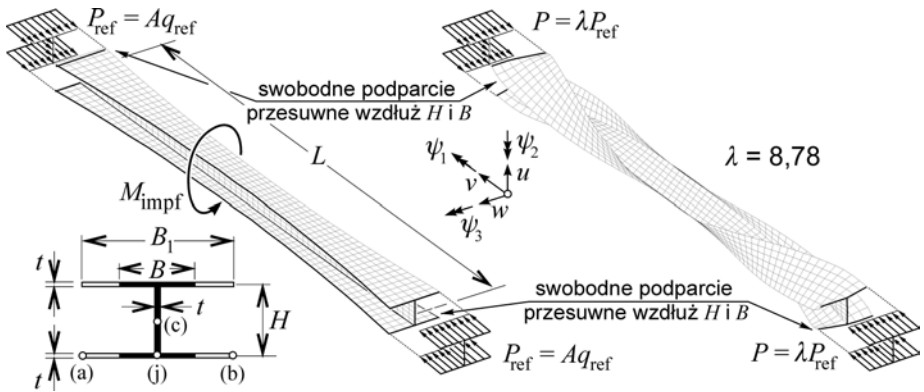


Rys. 6.8.24. Stateczność skrętna dwuteownika $B = (20-40-20)$: schemat zadania, postać deformacji.

skupione $2 \times (0,5P_{\text{ref}}) = 10^5$ i przyłożone w punktach (j) połączenia środka z półkami.

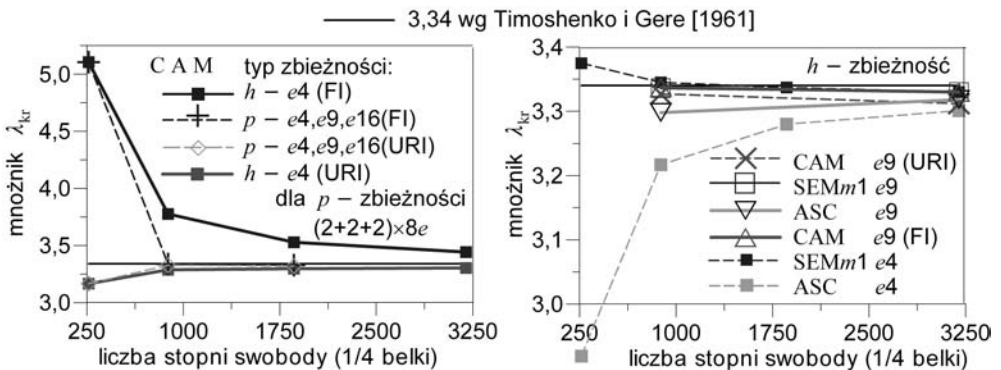
Rozważamy dwa typy obciążenia perturbacyjnego w postaci momentu $M_{\text{impf}} = 10^2$ w środku belki lub zespołu dziewięciu znakozmiennych sił $\pm P_{\text{impf}} = 10$ rozmieszczonych w równych odstępach wzdłuż brzegu półki. W rozwiązaniach numerycznych dyskretyzujemy $1/4$ belki wyciętą płaszczyznami symetrii w środku pręta i antysymetrii przechodzącej przez jego oś. Podziały na elementy podajemy jak dla całej konstrukcji, zaś liczbę stopni swobody dla analizowanej $1/4$ belki.

Analizę zbieżności siły krytycznej jako funkcji podziału, uwzględniając różne typy elementów, przeprowadzono dla wariantu belki o stałej szerokości pasów $B = 20$ (rys. 6.8.22). Wyniki zamieszczono na rys. 6.8.26 i w tab. 6.8.6. Uzyskane siły (mnożniki) krytyczne λ_{kr} są rozwiązaniami nieliniowymi, otrzymanymi ze



Rys. 6.8.25. Stateczność skrętna dwuteownika $B = (40-20-40)$: schemat zadania, postać deformacji.

ścieżek pokrytycznych przez cofnięcie się do punktu bifurkacji, po wcześniejszym usunięciu obciążenia zaburzającego. W tym wariancie belki ($B = 20$) nie obserwuje się istotnego wpływu na wartość siły krytycznej ani sposobu realizacji głównego obciążenia ściskającego (rozłożone, skupione), ani dwóch różnych wariantów obciążenia zaburzającego (moment, zespół znakozmiennych sił). Otrzymana zbieżność podziału dla siły krytycznej wykazuje analogiczne charakterystyki jak w poprzednich przykładach. Ponadto, otrzymane wartości λ_{kr} dobrze współgrają z wynikami liniowymi otrzymanymi w ramach różnych sformułowań prętowych, w tym w pracy⁶⁰ KANOK-NUKULCHAI i SUSUMPOW [1993].



Rys. 6.8.26. Stateczność skrętna dwuteownika $B = 20$: siła krytyczna, zbieżność podziału.

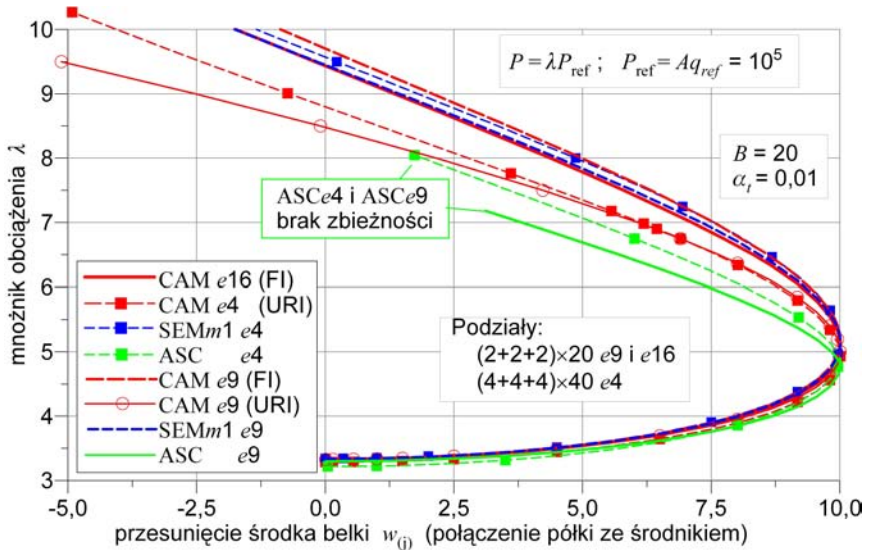
⁶⁰Rozwiązania KANOK-NUKULCHAI i SIVAKUMAR [1988] uzyskano elementem bazującym na koncepcji degeneracji opracowanym na potrzeby analizy konstrukcji cienkościennych, z wykorzystaniem założenia o nieodkształcalności przekroju poprzecznego w swojej płaszczyźnie (por. koncepcję sformułowania elementów z pracy WEKEZER [1989]).

Tabela 6.8.6. Stateczność skrętna dwuteownika, $B = 20$: mnożnik krytyczny.

Element (całkowanie)	Podział	λ_{kr}
CAMe4 (URI) (FI)	$(2+2+2) \times 20$	3,166
	$(4+4+4) \times 40$	3,287
	$(6+6+6) \times 60$	3,297
	$(8+8+8) \times 80$	3,302
	$(2+2+2) \times 20$	5,105
	$(4+4+4) \times 40$	3,775
	$(6+6+6) \times 60$	3,529
	$(8+8+8) \times 80$	3,442
CAMe9 (URI) (FI)	$(2+2+2) \times 20$	3,327
	$(4+4+4) \times 40$	3,312
	$(2+2+2) \times 20$	3,337
	$(4+4+4) \times 40$	3,330
CAMe16 (URI) (FI)	$(2+2+2) \times 20$	3,319
	$(2+2+2) \times 20$	3,329
SEMm1 e4	$(2+2+2) \times 20$	3,375
	$(4+4+4) \times 40$	3,345
	$(6+6+6) \times 60$	3,337
SEMm1 e9	$(2+2+2) \times 20$	3,336
ASCe4 ASCe9	$(2+2+2) \times 20$	2,919
	$(4+4+4) \times 40$	3,217
	$(6+6+6) \times 60$	3,280
	$(8+8+8) \times 80$	3,301
	$(2+2+2) \times 20$	3,298
	$(4+4+4) \times 40$	3,318
membranowo-prętowe KANOK-NUKULCHAI i SUSUMPOW [1993]	$(4+4+4) \times 30e(4/2)$	3,32
prętowe SZYMCZAK [1980]	$20 \times e2$	3,343
analityczne prętowe wg TIMOSHENKO i GERE [1961]		3,34

Wyniki rozwiązań pokrytycznych dla różnych typów elementów i dwóch siatek podziału pokazano na rys. 6.8.27, a reprezentatywne dane liczbowe rozwiązania CAM $(2+2+2) \times 10e16$ (FI) zawiera tab. 6.8.7. Rysunek 6.8.27 przedstawia obrót $\psi_{1(c)}$ osi i przesunięcie $w_{(j)}$ w przekroju $y = L/2$ jako funkcje mnożnika obciążenia λ .

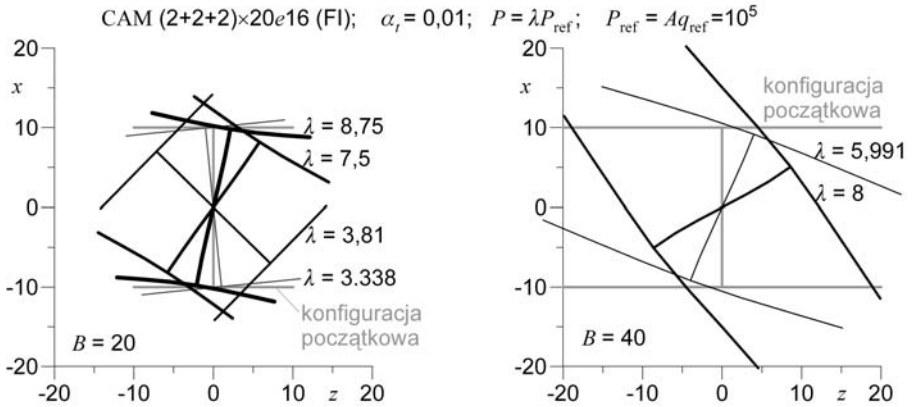
Charakterystykę zachowania pokrytycznego dla różnych typów elementów, w stosunku do poprzednich przykładów, można uznać za typową. Również w tym przykładzie rozwiązania ASC okazały się rozbieżne w zaawansowanym zakresie deformacji. Do badań pozostałych wariantów belek przyjęto jako reprezentatywną dyskretyzację CAM $(2+2+2) \times 10e16$ (FI).



Rys. 6.8.27. Stateczność skrętna dwuteownika $B = 20$: ścieżki pokrytyczne, różne elementy.

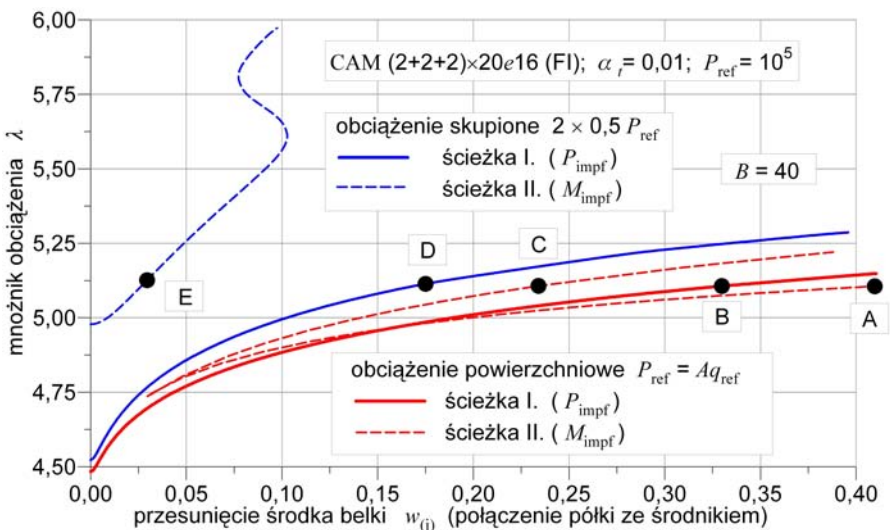
Tabela 6.8.7. Stateczność skrętna dwuteownika, $B = 20$, $P_{\text{ref}} = 10^5$, CAM $(2+2+2) \times 20e16$ (FI), $\alpha_t = 1$: ścieżka pokrytyczna.

Mnożnik obciążenia λ	Koniec belki $v_{(j)}$	Środek belki						
		oś połączenia			brzegi półki			
		$\psi_{1(c)}$	$u_{(j)}$	$w_{(j)}$	$u_{(a)}$	$w_{(a)}$	$u_{(b)}$	$u_{(b)}$
3,329	0,52705	0	-0,00793	0	-0,00793	-0,00293	-0,00793	0,00293
3,338	0,53152	0,10018	0,04213	1	-0,95585	1,0410	1,0393	0,95721
3,402	0,56683	0,30470	0,45208	3	-2,5447	3,4482	3,4418	2,5481
3,540	0,64379	0,52351	1,3299	5	-3,6702	6,3245	6,3106	3,6754
3,784	0,78144	0,77500	2,8456	7	-4,1635	9,8447	9,8174	4,1713
4,148	0,98923	1,0483	5	8,6722	-3,6931	13,690	13,639	3,7073
4,507	1,1977	1,2668	7	9,5514	-2,5775	16,597	16,521	2,6033
5,099	1,5481	1,5705	10	10,013	-0,02697	20,121	19,996	0,08663
6,045	2,1275	1,9794	14	9,1831	4,8988	23,409	23,194	-4,7313
7	2,7601	2,3366	17,045	7,1258	10,461	24,706	24,116	-9,9307
8	3,4384	2,6716	19,019	4,3746	15,577	23,811	23,304	-14,648
9	4,1317	2,9864	19,936	1,3489	19,749	21,397	21,198	-18,557
10	4,8547	3,2935	19,878	-1,7387	22,913	17,846	18,064	-21,555
11	5,6246	3,6048	18,857	-4,7143	24,907	13,322	14,069	-23,470

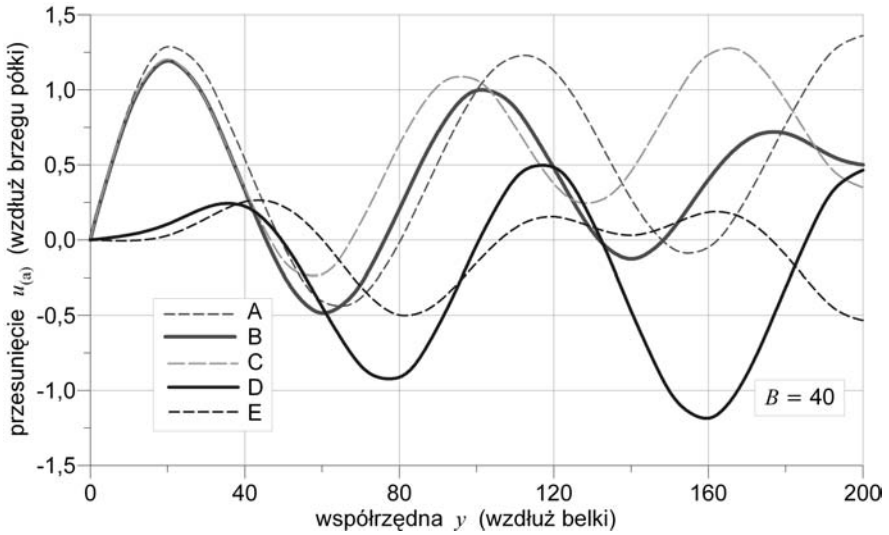


Rys. 6.8.28. Stateczność skrętna dwuteownika: deformacja środka belki, stała szerokość póltek.

Następnie analizowano belkę o stałej szerokości pasów $B = 40$ (rys. 6.8.28). Okazuje się, że w tym wariancie zadania (w przeciwieństwie do $B = 20$) istotny wpływ na wartość siły krytycznej ma zarówno sposób realizacji głównego obciążenia ściskającego ($P_{\text{ref}} = Aq_{\text{ref}}$ rozłożonego na powierzchni A lub dwóch sił skupionych $2 \times (0,5P_{\text{ref}})$ przyłożonych w punktach (j)), jak i sposób wprowadzenia imperfekcji (M_{impf} lub $10 \times (\pm P_{\text{impf}} = 10)$). Początkową fazę rozwiązań pokrytycznych badanych wariantów obciążenia przedstawia rys. 6.8.29. Odpowiadające postaci deformacji brzegu półki, z konfiguracji oznaczonych na rys. 6.8.29 punktami A÷E, pokazano na rys. 6.8.30.



Rys. 6.8.29. Stateczność skrętna dwuteownika $B = 40$: początek ścieżek pokrytycznych.

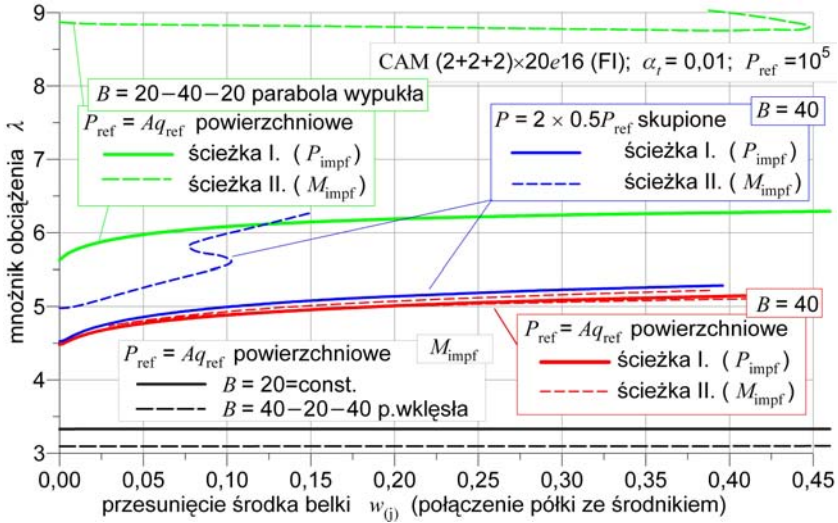


Rys. 6.8.30. Stateczność skrętna dwuteownika $B = 40$: deformacja brzegu półki.

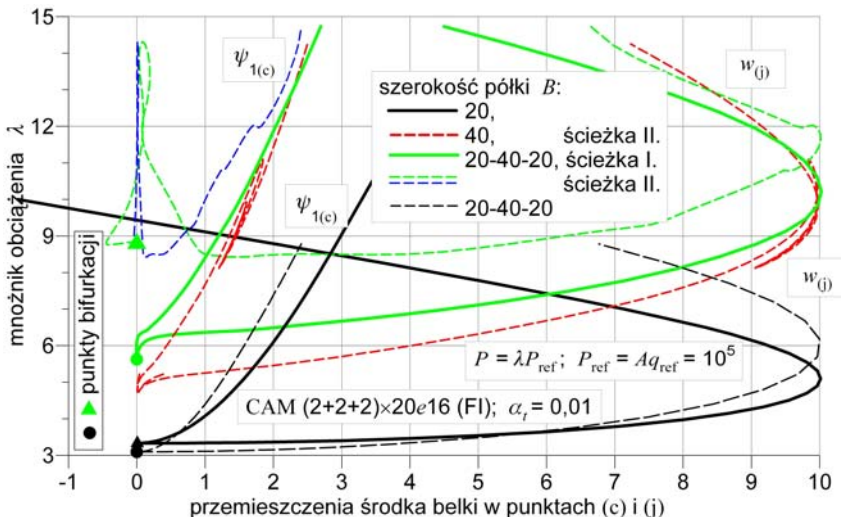
Liczba różnych przypadków zachowania pokrytycznego wskazuje na silną interakcję lokalnej i globalnej postaci wyboczenia. Najniższa uzyskana wartość krytyczna λ_{kr} mnożnika obciążenia dla $B = 40$ wynosi $\lambda_{kr} = 4,484$, rys. 6.8.30 B. W wariancie obciążenia $P_{ref} = Aq_{ref}$ i M_{impf} (krzywe zawierające konfiguracje oznaczone literami A i C na rys. 6.8.29) w ogóle nie wystąpił punkt odpowiadający sile krytycznej. W procesie odciażania, po zdjęciu imperfekcji M_{impf} nie osiągnięto poziomu przemieszczeń „zerowych” (wykres zakończył się „pętelką”), w pewnym momencie nastąpił wzrost obciążenia, a po pewnym czasie zwrot przemieszczeń. Konfiguracje przekroju poprzecznego środka belki $y = L/2$, przedstawione na rys. 6.8.28 dla wariantów dwuteownika o stałej szerokości pasów $B = 20$ i $B = 40$, uwidaczniają dystorsje przekroju zwiększającą się wraz z narastaniem obciążenia. Dla wariantu $B = 40$ dystorsje są widoczne nawet w początkowej fazie deformacji. To wskazuje, że w przypadku $B = 40$ założenie o nieodkształcalności przekroju poprzecznego, czynione w ramach teorii prętów cienkościennych, jest zbyt silne i nie jest tu spełnione.

Rozwiązania pokrytyczne dla pozostałych dwóch wariantów belek dwuteowych o parabolicznie zmiennej szerokości półek (wypukłej rys. 6.8.24 i wklęsłej rys. 6.8.25) zamieszczono na rys. 6.8.31 i rys. 6.8.32. Uzyskane wyniki pokazują, że w przypadku pręta o szerokości pasów $B = 20$ obliczone siły krytyczne (tab. 6.8.6) są zbliżone z wynikami teorii prętów cienkościennych o przekroju nieodkształcalnym. Natomiast dla prętów o szerszych półkach pojawia się wiele różnych form lokalnej utraty stateczności pasów, które powodują znaczne obniżenie się obciążeń krytycznych w stosunku do rozwiązań prętowych. Porównanie deformacji przekroju poprzecznego wykazało, że dla węższych półek dystorsje są niewielkie,

ale znacznie rosną one przy zwiększaniu się szerokości pasów. Tym niemniej, dla dwuteownika o parabolicznie wklęsłej zmienności pól $B = 40-20-40$ otrzymano siłę krytyczną $\lambda_{kr} = 3,094$ niższą od siły krytycznej $\lambda_{kr} = 3,329$ z takiej samej dyskretyzacji $(2+2+2) \times 10$ CAME16 (FI) pręta o szerokości pól $B = 20$. Potwierdza to istnienie rozumianego w tym sensie „paradoksu” w rozwiązaniu tego zadania.



Rys. 6.8.31. Stateczność skrętna dwuteownika: początek fazy pokrytycznej, różne warianty pasów.

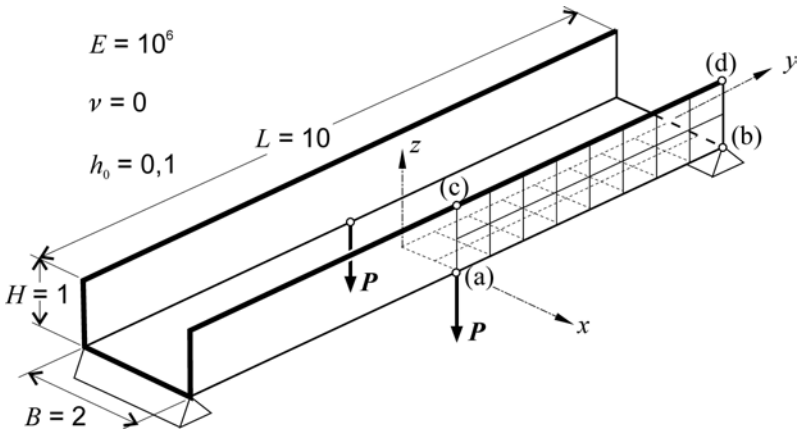


Rys. 6.8.32. Stateczność skrętna dwuteownika: ścieżki pokrytyczne, różne kształty pól.

Wyznaczone obciążenia krytyczne dla belki o maksymalnej szerokości pasów $B = 40$ (najniższa $\lambda_{kr} = 4,484$) znalazły się poniżej wartości najniższej siły krytycznej $\lambda_{kr} = 5,626$ obliczonej dla pręta o parabolicznie wypukłych półkach $B = 20-40-20$. Podważa to wnioski pracy KANOK-NUKULCHAI i SUSUMPOW [1993], w której jako główny powód pojawienia się tych „paradoksalnych” własności siły krytycznej wybożenia skrętnego uważa się pominięcie w teorii prętów cienkościennych efektu ścinania⁶¹.

6.8.6. Panel płytowy w kształcie korytka

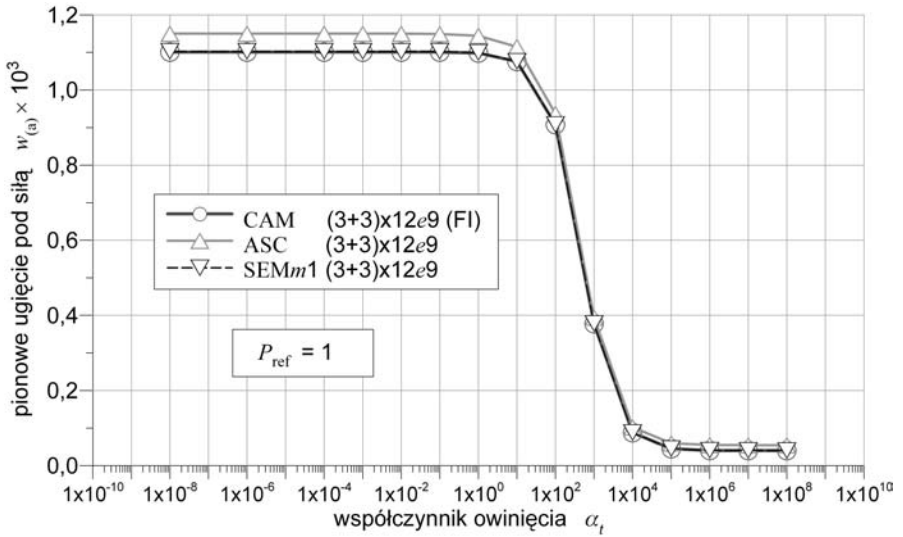
Celem głębszego wglądu w problem modelowania załamań i połączeń wielopłatowych oraz ich możliwego wpływu na rozwiązania, rozważamy problem liniowy przedstawiony na rys. 6.8.33. Rozważany panel płytowy w kształcie korytka ma podwójną symetrię geometrii i obciążenia, co pozwala na dyskretyzację tylko 1/4 konstrukcji. Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe: $L = 10$, $B = 2$, $H = 1$, $h_0 = 0,1$, $E = 10^6$, $\nu = 0$, $P_{ref} = 1$.



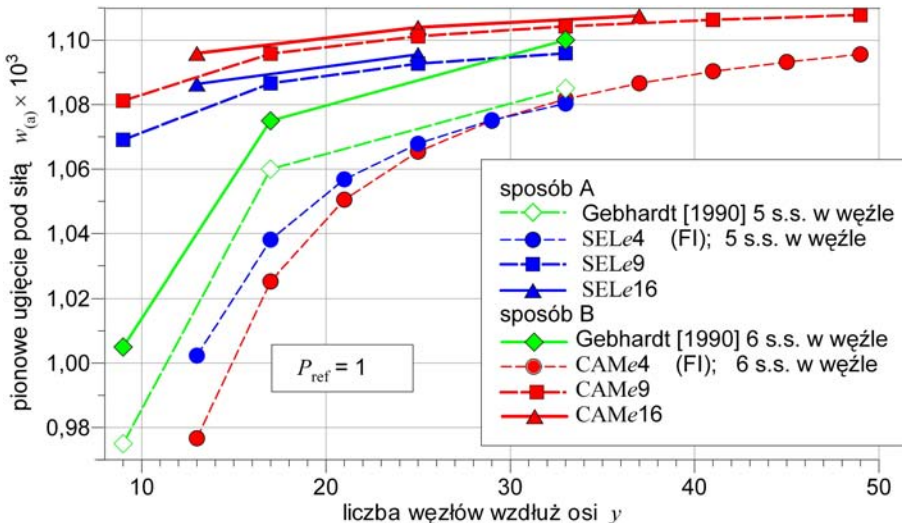
Rys. 6.8.33. Panel płytowy w kształcie korytka: schemat zadania, dyskretyzacja 1/4 konstrukcji.

Wyniki przedstawione na rys. 6.8.34 potwierdzają fakt małego wpływu współczynnika owinięcia α_t na rozwiązania w przypadku, gdy $\alpha_t < 1$. To potwierdza, że określony wcześniej przedział braku wpływu α_t na rozwiązania nie zależy od typu rozważanego problemu.

⁶¹Uwzględniające wpływ ścinania sformułowanie elementów skończonych z pracy KANOK-NUKULCHAI i SIVAKUMAR [1988], oparte na szczególnej postaci teorii powłok/prętów cienkościennych, wykorzystano w pracy KANOK-NUKULCHAI i SUSUMPOW [1993] do badań stateczności skrętnej dwuteowników. Ponieważ badania te nie wykazały istnienia paradoksu, wyciągnięto wniosek, że paradoks występuje tylko w ramach teorii nie uwzględniającej wpływu ścinania.

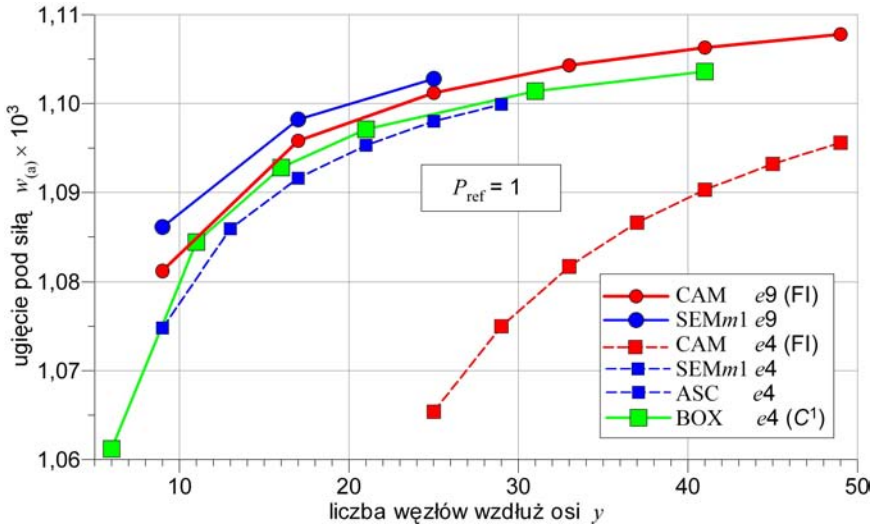


Rys. 6.8.34. Panel płytowy w kształcie korytka: wpływ α_t , rozwiązania liniowe.

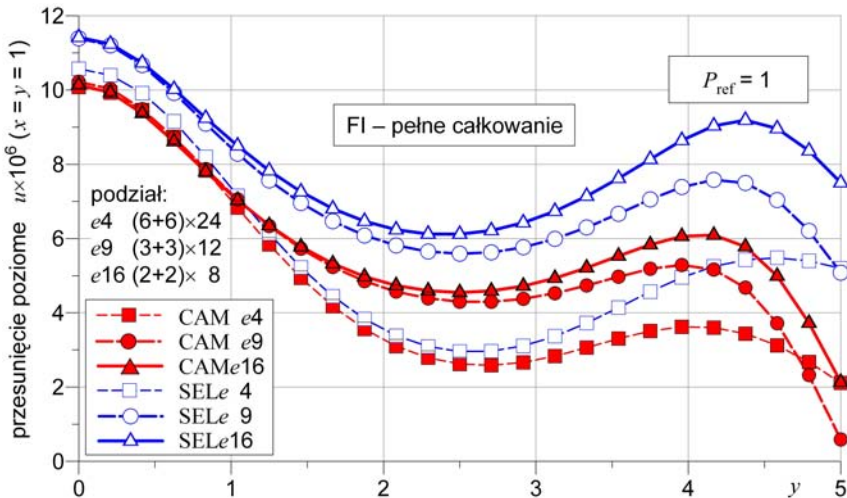


Rys. 6.8.35. Panel płytowy w kształcie korytka: zbieżności podziału, modelowanie połączenia płatów.

W liniowym zakresie przykład z rys. 6.8.33 był analizowany w pracy GEBHARDT [1990] przy użyciu standardowych elementów zdegenerowanych o pięciu stopniach swobody w węźle. Do modelowania połączenia płyty poziomej z pionowymi stosowano techniki A i B pokazane na rys. 6.4.2. Wyniki pracy



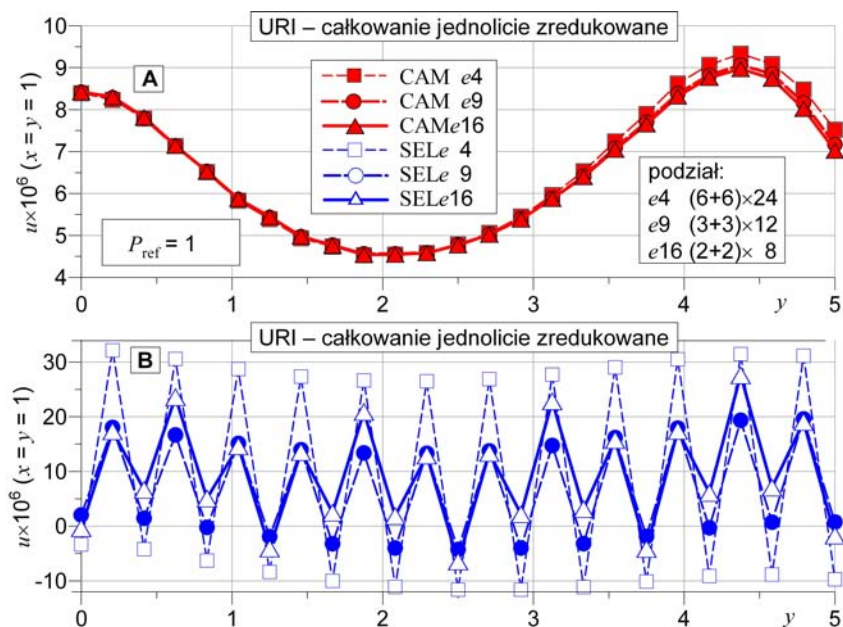
Rys. 6.8.36. Panel płytowy w kształcie korytka: zbieżności podziału, różne modele elementów.



Rys. 6.8.37. Panel płytowy w kształcie korytka: przesunięcie poziome wzdłuż krawędzi (c)-(d) płyty pionowej.

GEBHARDT [1990] zamieszczone na rys. 6.8.35 pokazują, że w przypadku modelowania połączenia techniką B ugięcia pod siłą są nieznacznie mniejsze niż otrzymane w przypadku modelowania techniką A. Przeprowadzone badanie własne zbieżności podziału (rys. 6.8.35) wskazuje, że elementy SEL dają również mniejsze ugięcia, niż elementy CAM, przy zachowaniu tej samej liczby węzłów.

Natomiast rozwiązania elementami SEM i ASC zbiegają się do tych samych wartości, jak rozwiązania elementami CAM (rys. 6.8.36). Przykład ten wyraźnie pokazuje, że technika użyta do modelowania połączeń konstrukcji ma pewien wpływ na otrzymywane rozwiązania.



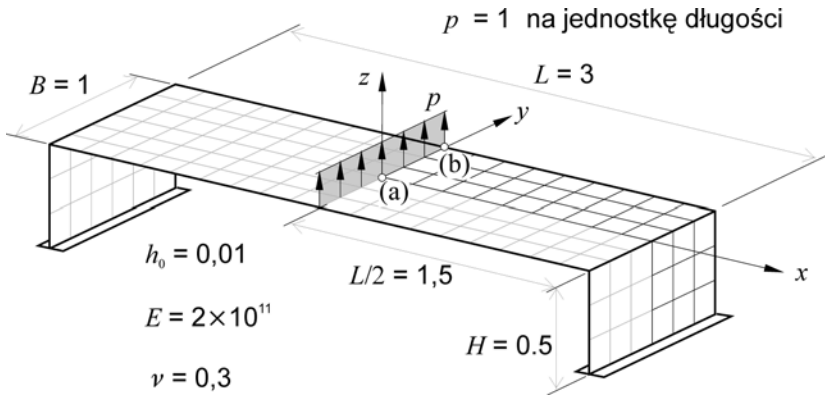
Rys. 6.8.38. Panel płytowy w kształcie korytka: przesunięcie poziome u wzdłuż krawędzi (c)–(d) płyty pionowej.

Analiza tylko ugięć pod siłą wskazywałaby, że różnice pomiędzy rozwiązaniami otrzymanymi przy wykorzystaniu rodzin elementów CAM i SEL nie są zbyt duże. Jednak przesunięcia poziome u górnej krawędzi płyty pionowej (punkty (c)–(d)), otrzymane z rozwiązań tymi samymi elementami skończonymi, różnią się już w sposób istotny (zob. rys. 6.8.37). Co więcej, obrotowe stopnie swobody, zdefiniowane w ramach 6-parametrowej teorii powłok, stabilizują rozwiązania w przypadku stosowania reguły jednocie zredukowanego całkowania zależności elementowych (por. rozwiązania elementami CAM z rys. 6.8.38 A i elementami zdegenerowanymi SEL z rys. 6.8.38 B).

6.8.7. Rama płytowa

Problem trójwymiarowego rozkładu odkształceń i naprężeń w bliskości krawędzi połączeń, załamań, przecięć itp. wykracza poza zakres stosowalności każdej teorii powłok, podobnie jak to ma miejsce przy próbie opisu przez teorię powłok stanu naprężeń i odkształceń w strefie brzegowej powłok regularnych. Jednak, wy-

łączając najbliższe sąsiedztwo połączenia płatów lub brzegu powłoki, rozwiązania bazujące na teorii powłok dają dobre przybliżenie opisu stanu przekrojowych sił (wypadkowych naprężeń) i powłokowych miar deformacji. Jako ilustrację tego zagadnienia, przedstawiamy analizę przykładu opisanego w pracy BATHE, LEE i BUCALEM [1990], pokazanego na rys. 6.8.39.



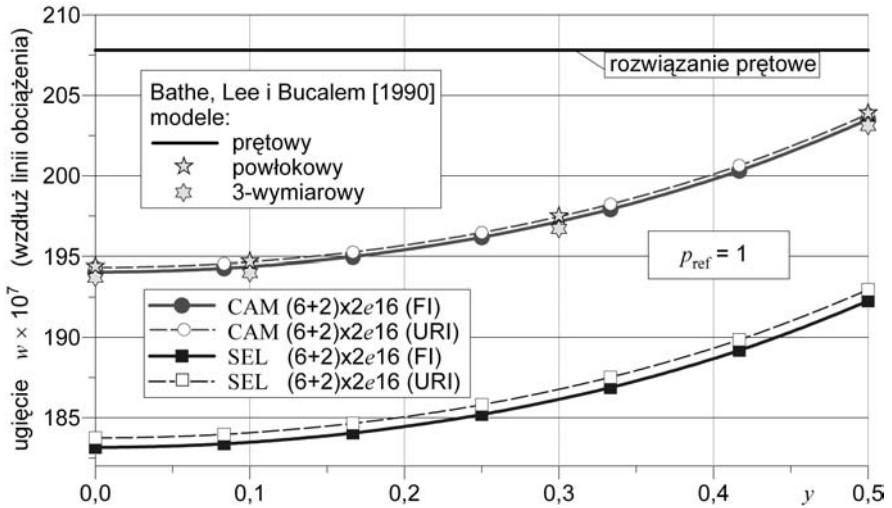
Rys. 6.8.39. Rama płytowa: schemat zadania, dyskretyzacja 1/4 symetrycznej części konstrukcji.

Rama ma podwójną symetrię geometrii i obciążenia, co pozwala na dyskretyzację tylko 1/4 konstrukcji. W obliczeniach stosujemy siatki podziału na $N \times (3N + N)$ elementów skończonych, gdzie N oznacza liczbę elementów przypadających na 1/2 szerokości konstrukcji. Do obliczeń przyjęto następujące wartości liczbowe: $L = 3$, $B = 1$, $H = 0,5$, $h_0 = 0,01$, $E = 2 \times 10^{11}$, $\nu = 0,3$, $p_{\text{ref}} = 1$ na jednostkę długości.

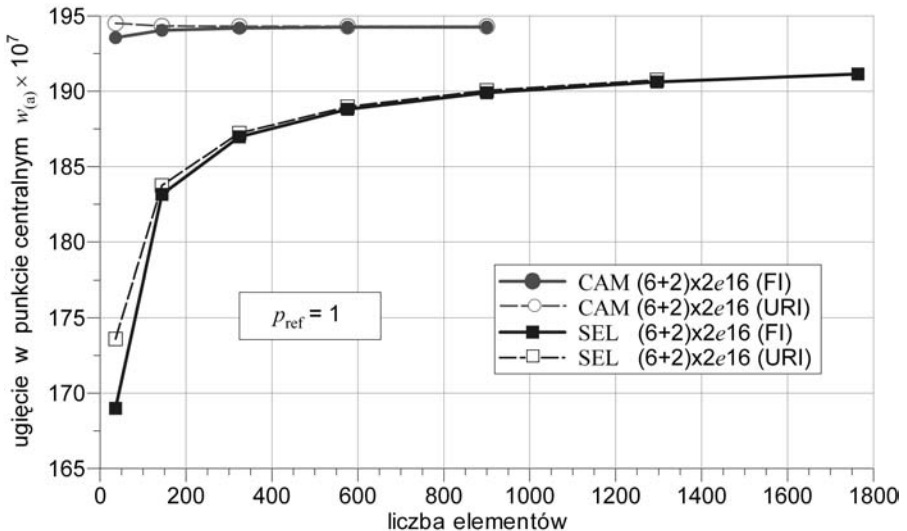
Tak jak w poprzednim przykładzie, rozważamy tylko zadanie liniowe. Jak wskazano w pracy BATHE, LEE i BUCALEM [1990], to zadanie może być analizowane przy użyciu elementów belkowych jednowymiarowych opierających się na teorii belki Timoszenki, elementów powłokowych opierających się na teorii typu T-R, lub trójwymiarowych elementów bryłowych. Z przytoczonych na rys. 6.8.40 rozwiązań BATHE, LEE i BUCALEM [1990] wynika, że ugięcia pod linią obciążenia, uzyskane z rozwiązań w ramach modeli powłokowych i trójwymiarowych, pozostają w bardzo dobrej zgodności. Oczywiście, model belkowy nie może odtworzyć poprzecznych ugięć konstrukcji.

Wykresy przedstawione na rys. 6.8.40 pokazują, że nawet przy zgrubnej siatce podziału ma miejsce bardzo dobra zgodność rozwiązań CAM z wynikami pracy BATHE, LEE i BUCALEM [1990]. Jednak elementy SEL, które są porównywalne z powłokowymi elementami stosowanymi w pracy⁶² BATHE, LEE i BUCA-

⁶²Oba rozwiązania są uzyskane 16-węzłowymi elementami zdegenerowanymi o pięciu stopniach swobody w węzle.



Rys. 6.8.40. Rama płytowa: ugięcie w linii działania obciążenia.

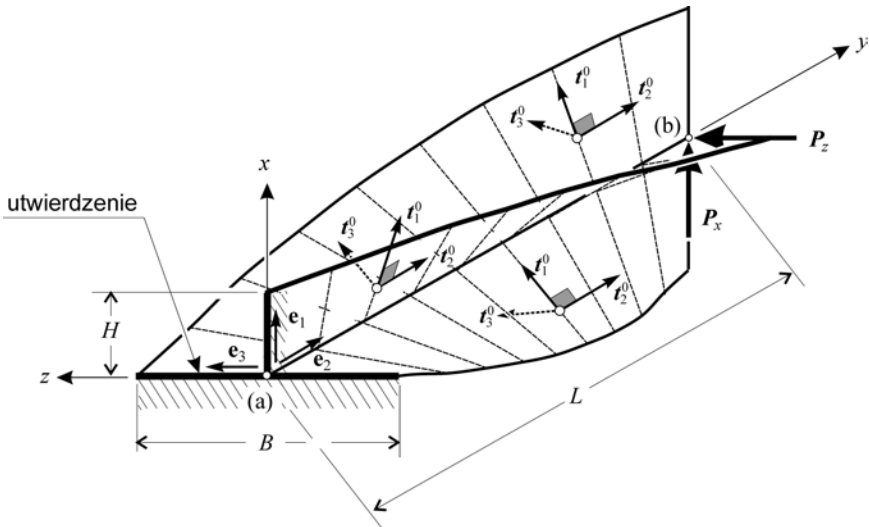


Rys. 6.8.41. Rama płytowa: analiza zbieżności podziału.

LEM [1990], dają nieco mniejsze ugięcia. Odnotowana różnica jest przypuszczalnie wynikiem różnego sposobu modelowania połączenia płyty poziomej z pionową. W pracy BATHE, LEE i BUCALEM [1990] połączenie płatów modelowano stosując technikę B, podczas gdy w rozwiązaniu elementami SEL używamy techniki A (zob. rys. 6.4.2). W rozwiązaniach tego zadania nie obserwowano ani efektu blokady, ani form pasożytniczych (rys. 6.8.40).

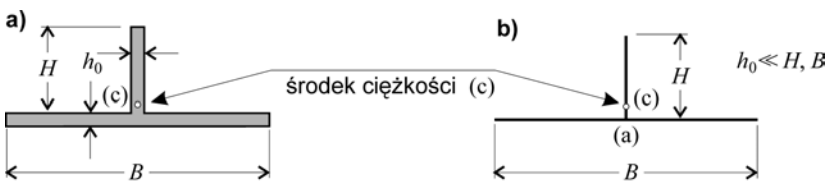
6.8.8. Skręcony wspornik teowy obciążony siłą

Wzorując się na przykładzie gładkiego wspornika wstępnie skręconego z p. 6.5.3 (zob. MACNEAL i HARDER [1985]), rozważamy podobny test dla powłoki złożonej z dwóch płatów o przekroju poprzecznym w kształcie teownika, rys. 6.8.42. Przyjęto jednakową grubość h_0 środnika i półki. Układ współrzędnych $Oxyz$ przyjęto jak na rys. 6.8.42. Szerokość B półki symetrycznego teownika, przy założonej wysokości środnika H , dobrano tak, aby występowała równość momentów bezwładności przekroju porzecznego $J_{zz} = J_{xx}$ względem głównych centralnych osi bezwładności przekroju. Przy założonej symetrii przekroju względem osi Ox , wobec $J_{zx} = 0$, z warunku $J_{zz} = J_{xx}$ wynika, że każdy dowolny układ centralnych osi bezwładności jest jednocześnie układem głównym. Analityczny dobór parametrów geometrycznych zadania przedstawiono w pracach LUBOWIECKA [2001] oraz LUBOWIECKA i CHRÓSCIELEWSKI [2002].



Rys. 6.8.42. Skręcony wspornik teowy: schemat zadania, geometria skręconej belki.

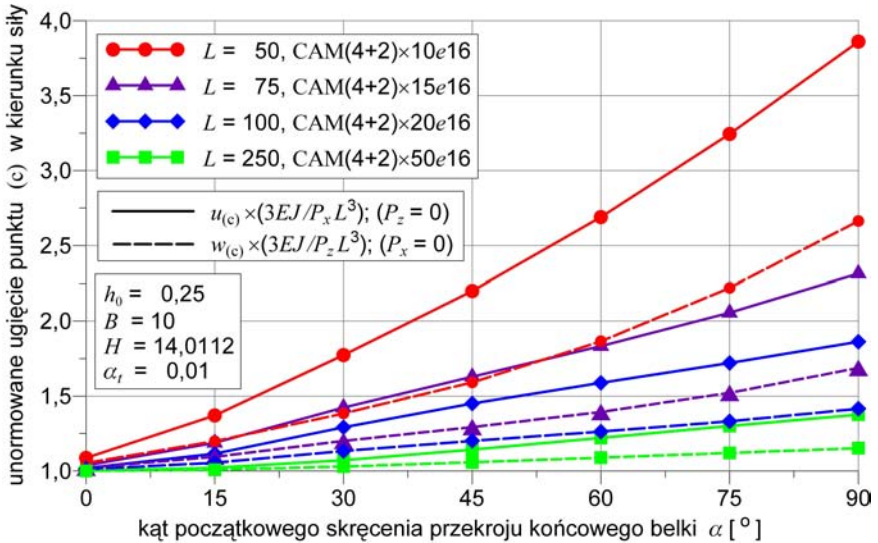
Okazuje się, że w zakresie proporcji h_0/H spotykanych w konstrukcjach inżynierskich, dla warunku $J_{zz} = J_{xx}$ i $h_0 = \text{const}$, stosunek B/H mieści się w prze-



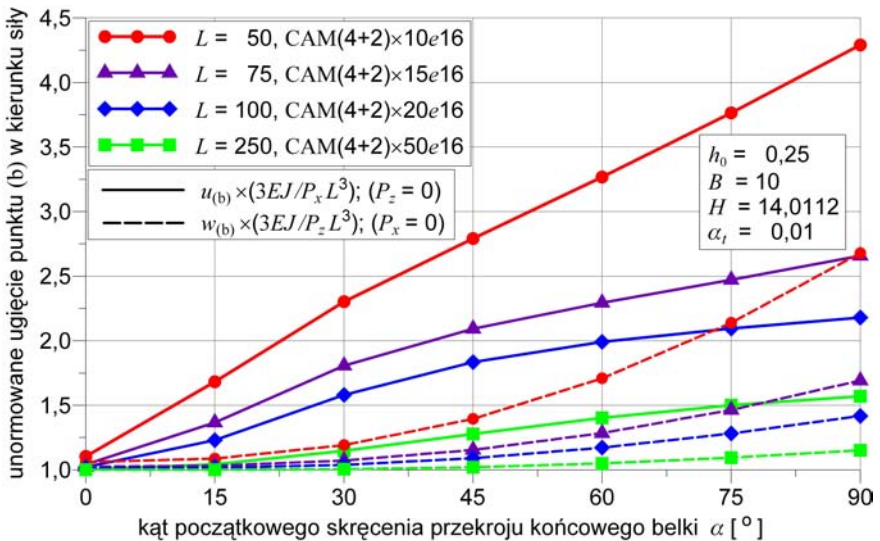
Rys. 6.8.43. Skręcony wspornik teowy: przekrój poprzeczny, a) grubościenny, b) cienkościenny.

dziale $1,40112 \div 2,2$ (rys. 6.8.43a). W przypadku przekroju cienkościennego stosunek ten jest stały i wynosi $B/H = 1,40111855316$ (rys. 6.8.43b).

W dyskretyzacji stosujemy regularne siatki podziału na elementy, określone przez równoodległe krzywe we wszystkich charakterystycznych kierunkach geo-



Rys. 6.8.44. Skręcony wspornik teowy: zmiana parametrów zadania, wyniki dla środka ciężkości przekroju.



Rys. 6.8.45. Skręcony wspornik teowy: analiza parametryczna dla punktu (b) połączenia półki ze środkiem.

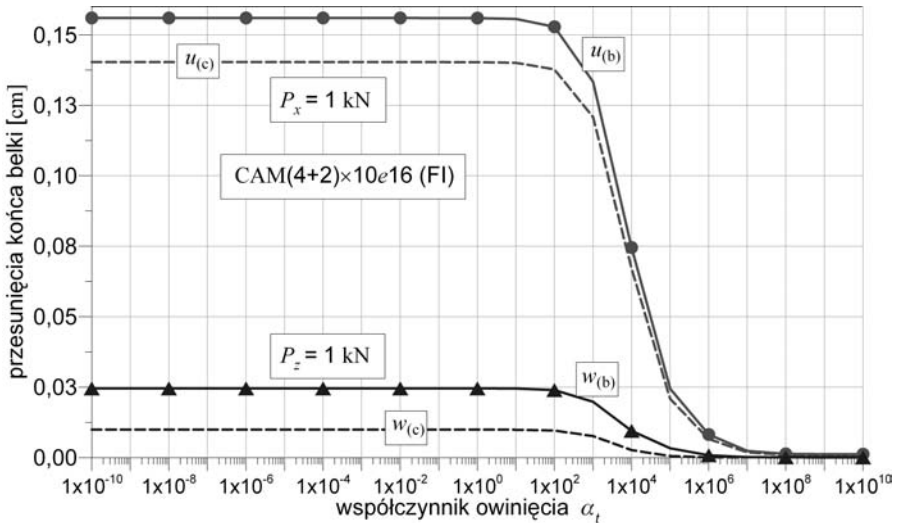
metrii belki. Użyty opis dyskretyzacji typu $(B + H) \times L$ oznacza przyjętą liczbę elementów skończonych w odpowiednich kierunkach.

W ramach badań liniowych przeprowadzono częściową analizę parametryczną, polegającą na zmianie długości belki i kąta początkowego jej skręcenia. Wyniki w postaci przesunięć u i w prostopadłych do osi skręcenia układu y w środku ciężkości przekroju poprzecznego (c) na końcu belki przedstawiono na rys. 6.8.44.

W ogólnym przypadku środek ciężkości przekroju poprzecznego (c) z rys. 6.8.43 nie pokrywa się z siatką węzłów. Dlatego wyniki z rys. 6.8.44 obliczono na drodze aproksymacji skończenie elementowej. Na rys. 6.8.45 pokazano odpowiednie przesunięcia u i w w punkcie (b) połączenia półki ze środkiem i jednocześnie miejscem przyłożenia siły.

Na podstawie analizy parametrycznej z rys. 6.8.45, w celu uwydatnienia cech powłokowych zadania do dalszych obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe: $L = 50$, $H = 10$, $B = 14,0112$, $h_0 = 0,25$, $\alpha = 90^\circ$, $E = 2 \times 10^7$, $\nu = 0,3$, $P_{\text{ref}} = 1000$.

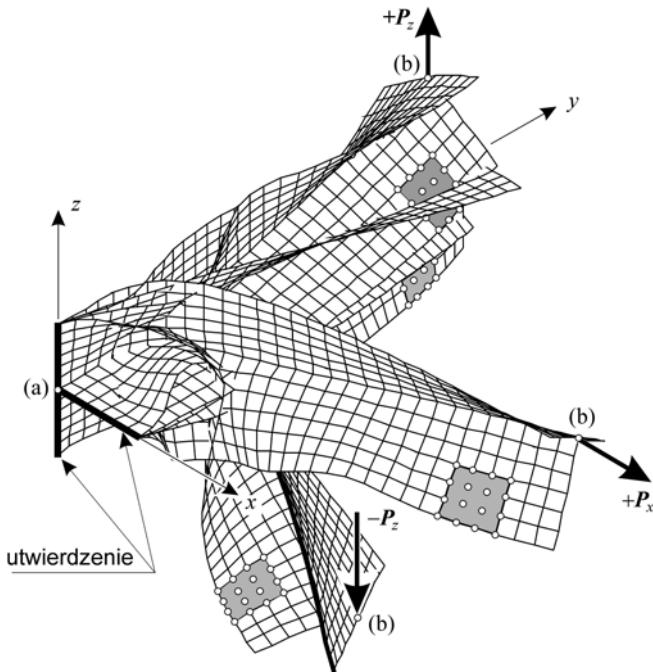
W kolejnym etapie badań określono wpływ wartości współczynnika owinięcia α_t na rozwiązania. Wyniki przedstawione na rys. 6.8.46 potwierdzają fakt małego wpływu α_t na rozwiązania w przypadku gdy $\alpha_t < 1$. Ponownie więc można stwierdzić, że określony wcześniej przedział braku wpływu α_t na rozwiązania nie zależy od typu rozważanego zadania.



Rys. 6.8.46. Skręcony wspornik teowy: sposób dyskretyzacji, wpływ α_t , rozwiązania liniowe.

W zakresie nieliniowym rozważono cztery przypadki obciążenia siłą P_{ref} działającą w punkcie (b) połączenia półki ze środkiem, odpowiednio w kierunkach osi globalnego układu współrzędnych $\pm 0x$ i $\pm 0z$. Obliczenia przeprowadzono dla podziału $(B + H) \times L = (4 + 2) \times 10$ na 16-węzłowe elementy CAM przy pełnym

całkowaniu (FI). Dyskretyzację, sposób działania obciążenia oraz postacie i rozważane zakresy deformacji zamieszczono na rys. 6.8.47.

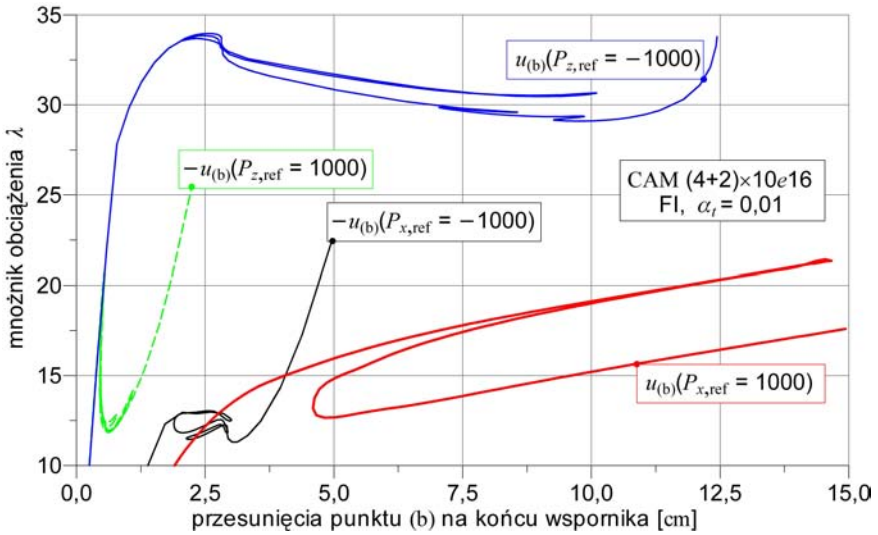


Rys. 6.8.47. Skręcony wspornik teowy: dyskretyzacja, postacie i zakresy deformacji.

Ścieżki równowagi, w postaci krzywych przesunięcia $u_{(b)}$ – mnożnik obciążenia λ , zamieszczono na rys. 6.8.48. Reprezentatywne dane liczbowe dla przypadku $P_x = P_{\text{ref}}$ zestawiono w tab. 6.8.8.

Tabela 6.8.8. Skręcony wspornik teowy: CAM $(4 + 2) \times 10e16$ (FI), $\alpha_t = 0,01$, $P_{x,\text{ref}} = 1000$, przesunięcia punktu (b).

λ	$u_{(b)}$	$-v_{(b)}$	$-w_{(b)}$	λ	$u_{(b)}$	$-v_{(b)}$	$-w_{(b)}$
5,00000	0,84906	0,00146	0,11418	15,3112	5,4067	0,31222	0,78970
10,0000	1,9051	0,02695	0,20248	13,9906	4,6575	0,21393	0,71487
12,6581	2,6707	0,06225	0,24317	12,9529	4,6126	0,19525	0,83902
14,2517	3,4414	0,11592	0,33920	12,9278	5,5558	0,29619	1,2086
15,9178	4,9736	0,27403	0,66155	13,9724	7,7039	0,63364	1,8614
17,6375	7,2528	0,60977	1,0710	15,5227	10,627	1,2984	2,5493
19,5975	10,986	1,4438	1,8069	17,2493	14,223	2,4337	3,0034
21,3785	14,669	2,6398	2,5914	19,0719	17,738	3,9021	3,1222
19,0008	9,9818	1,1779	1,6057	20,6958	20,471	5,3143	3,0681
16,9675	6,9469	0,54727	1,0339	22,1857	22,761	6,6967	2,8869



Rys. 6.8.48. Skręcony wspornik teowy: rozwiązanie nieliniowe.

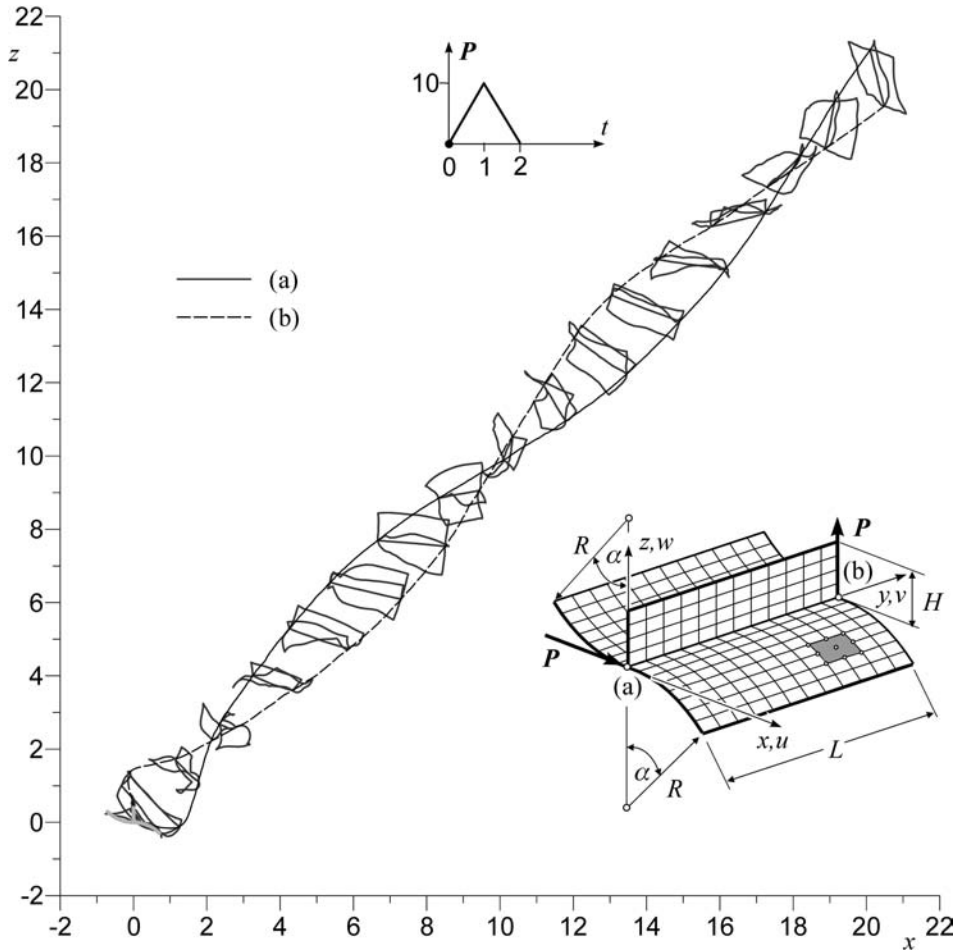
6.8.9. Powłoka falista wzmocniona żebrem w swobodnym locie bez udziału sił grawitacji

Rozważamy dynamikę swobodnego lotu bez udziału sił grawitacyjnych powłoki cylindrycznej (o tworzącej w kształcie litery S ze zmianą znaku krzywizny) wzmocnionej żebrem płytowym (zob. p. 6.8.3). Schemat zadania i sposób dyskretyzacji pokazano na rys. 6.8.49.

Do obliczeń, tak jak w p. 6.8.3, przyjęto następujące dane liczbowe: $L = 2$, $\alpha = 0,4$, $R = 1$, $H = 0,4$, $h_0 = 0,01$, $E = 10^5$, $\nu = 0,25$, $P_{\text{ref}} = 1$, oraz $\rho_0 = 100$, tak aby zachodził warunek $\rho_0 h_0 = 1$. Obciążenie w postaci dwóch sił skupionych, działających w przeciwnych punktach (a) i (b) krawędzi połączenia cylindra z żebrem, wzrasta w sposób liniowy od wartości 0 do wartości 10 w ciągu 1 s, a następnie maleje liniowo do wartości 0 w ciągu następnej 1 s.

W obliczeniach przyjęto podziały $(5+2+5) \times 6 = 72$ na elementy 9-węzłowe z całkowitą liczbą stopni swobody 1950, na elementy 16-węzłowe z 4218 stopniami swobody oraz podział $(10+4+10) \times 12 = 288$ na elementy 9-węzłowe z 7350 stopniami swobody, wszystkie całkowane w sposób pełny (FI). Dynamiczne równania ruchu całkowano z dwoma różnymi krokami czasowymi: $\Delta t = 0,01$ s i $\Delta t = 0,0025$ s.

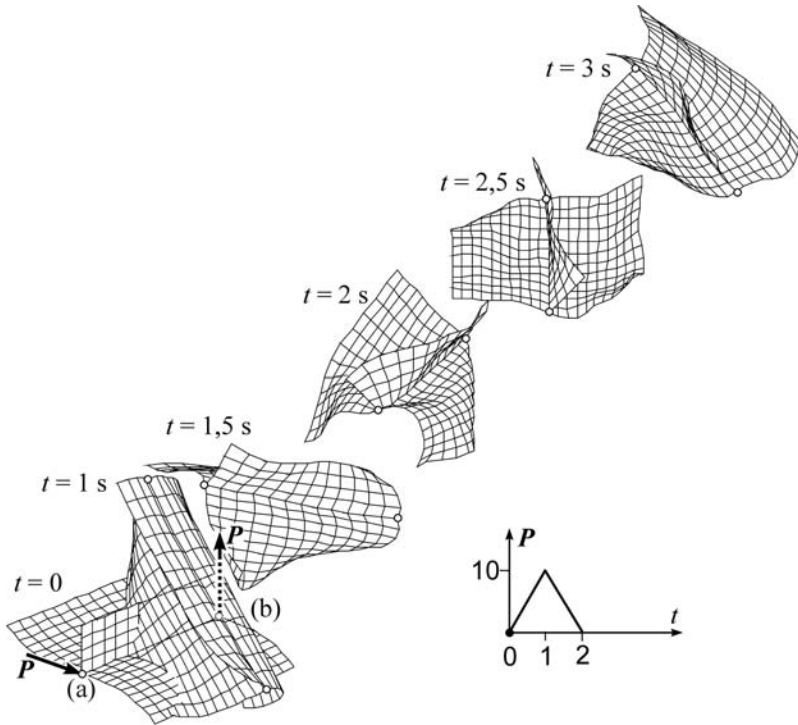
Rysunek 6.8.49 pokazuje trajektorie ruchu punktów (a) i (b) przyłożenia sił rzutowane na płaszczyznę współrzędnych $x-z$. Sekwencję kolejnych konfiguracji powłoki w początkowej fazie ruchu, obrazującą jej deformację i rozważaną skalę przemieszczeń, pokazano na rys. 6.8.50. Na rys. 6.8.51 przedstawiono wykresy zmian energii układu w czasie uzyskane dla dyskretyzacji $(5+2+5) \times 6 = 72$



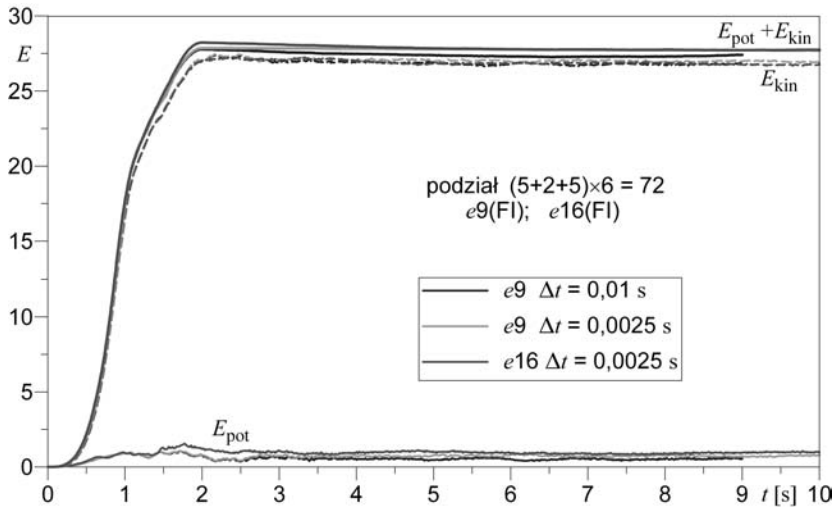
Rys. 6.8.49. Powłoka falista z zębem w locie: schemat zadania, trajektorie punktów przyłożenia sił.

elementami 9-węzłowymi i 16-węzłowymi (FI) oraz kroków $\Delta t = 0,01$ s i $\Delta t = 0,0025$ s. Na rys. 6.8.52 pokazano zmiany energii potencjalnej w ciągu pierwszych 5 s, uzyskane dla różnych dyskretyzacji, elementów i kroków całkowania.

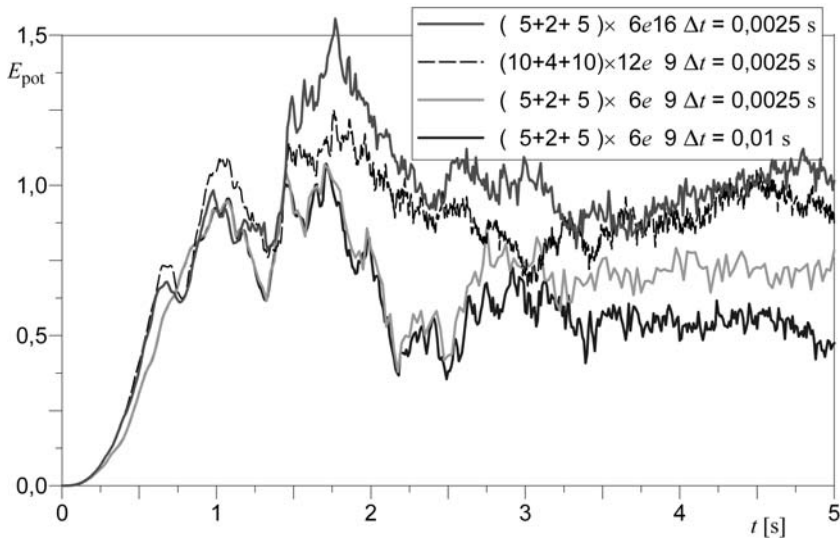
Rysunek 6.8.51 pokazuje wzrost energii w okresie odpowiadającym działaniu obciążenia. Po zaniku działania obciążenia widoczne są małe oscylacje energii kinetycznej i energii potencjalnej występujące w trakcie swobodnego lotu powłoki. Jednak sumy tych energii, w ramach poszczególnych wariantów dyskretyzacji przestrzennej i po czasie, są równe dostarczonej do układu pracy obciążenia zewnętrznego i utrzymują się na stałym poziomie w okresie symulacji. Porównanie przedstawionych na rys. 6.8.51 różnych wariantów dyskretyzacji czasoprzestrzennej pokazuje wyraźne różnice w wartościach całkowitej energii układu zarówno



Rys. 6.8.50. Powłoka falista z zębem w locie: sekwencja konfiguracji, funkcja obciążenia.



Rys. 6.8.51. Powłoka falista z zębem w locie: energia układu.



Rys. 6.8.52. Powłoka falista z żebrzem w locie: zmiany energii potencjalnej układu dla różnych podziałów, elementów i kroków całkowania.

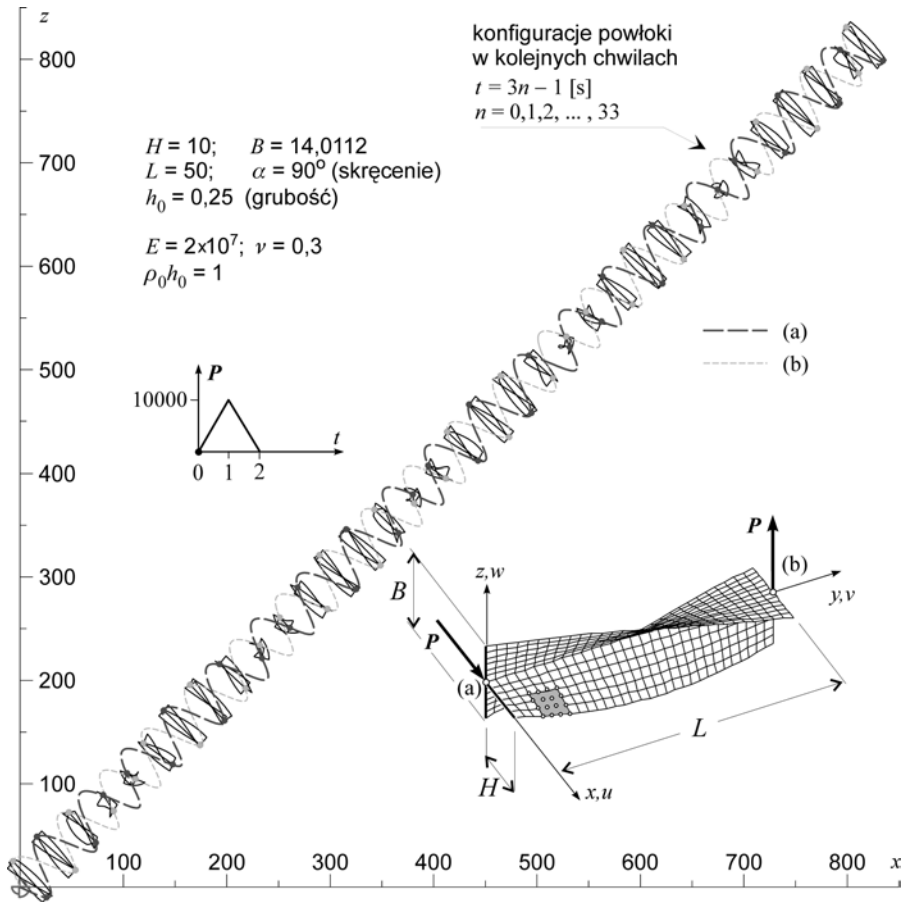
dla różnych kroków czasowych przy tej samej dyskretyzacji przestrzennej, jak i przy stosowaniu tego samego kroku czasowego z dyskretyzacją różnymi elementami. Obserwowaliśmy również, że ze wzrostem liczby stopni swobody układu wyraźnie uwidaczniała się większa skłonność algorytmu całkowania do niestabilności numerycznej, co wymagało zmniejszenia długości kroku całkowania podczas procesu symulacji. Ponadto rys. 6.8.52 pokazuje, że użycie tego samego krótszego kroku czasowego $\Delta t = 0,0025 \text{ s}$ przy różnych dyskretyzacjach daje różne wartości energii potencjalnej, co oznacza także różne przebiegi wartości naprężeń w powłoce.

6.8.10. Skręcona powłoka o przekroju teowym w swobodnym locie bez udziału sił grawitacji

Rozważamy dynamikę swobodnego lotu bez udziału sił grawitacyjnych wstępnie skręconej powłoki o przekroju teowym z podrozdziału 6.8.7 (rys. 6.8.42), jednak oswobodzonej z utwierdzenia⁶³ (rys. 6.8.53).

W celu uwydatnienia cech powłokowych zadania, przyjęto do obliczeń dane liczbowe, takie jak w p. 6.8.7: $L = 50$, $H = 10$, $B = 14,0112$, $h_0 = 0,25$, $\alpha = 90^\circ$, $E = 2 \times 10^7$, $\nu = 0,3$ oraz $\rho_0 h_0 = 1$. W tym zadaniu układ obciążono dwiema siłami skupionymi, przyłożonymi w punktach (a) i (b) (rys. 6.8.53). Zmiany obciążenia w czasie określono funkcją o równobocznym przebiegu trójkątnym, o wartości maksymalnej równej 10000 i czasie trwania równym 2 s (rys. 6.8.54).

⁶³Przykład ten analizowano w rozprawie LUBOWIECKA [2001].

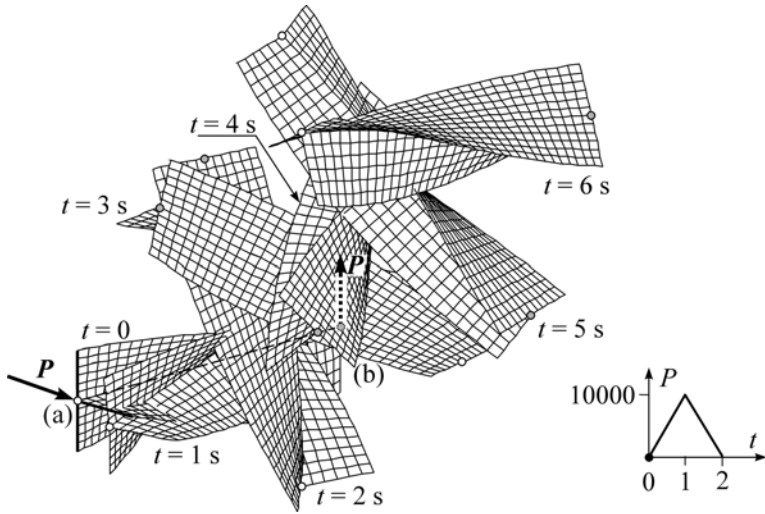


Rys. 6.8.53. Skręcona powłoka o przekroju teowym: schemat zadania, trajektorie punktów przyłożenia sił.

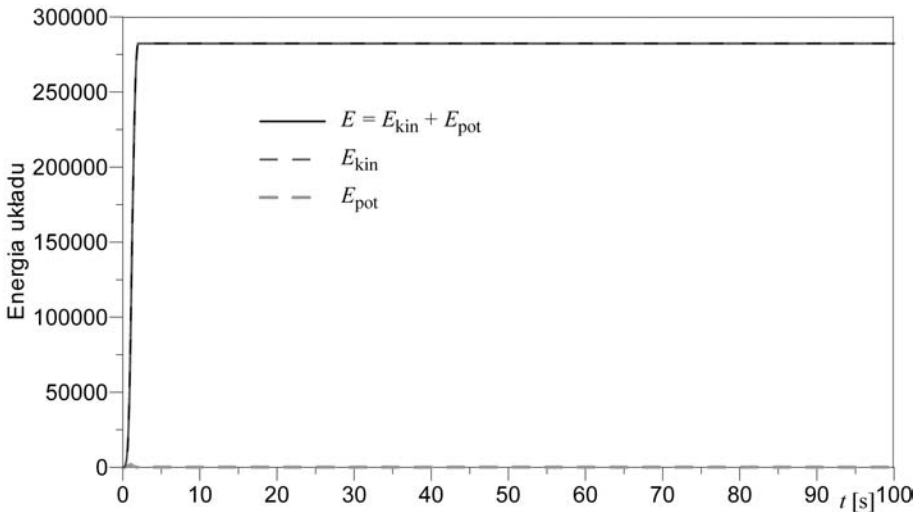
W dyskretyzacji zastosowano regularne siatki podziału na 16-węzłowe elementy CAM całkowane w sposób pełny (FI). Dynamiczne równania ruchu w ciągu pierwszych 100 s swobodnego lotu powłoki całkowano ze zmiennym krokiem czasowym, przyjmując wartości $\Delta t = \{0,1, 0,025, 0,005\}$ s, przy wartościach parametrów $\beta = 0,25$, $\gamma = 0,5$.

Rysunek 6.8.53 pokazuje trajektorie ruchu punktów (a) i (b) przyłożenia sił rzutowane na płaszczyznę współrzędnych x - z . Sekwencję kolejnych konfiguracji powłoki, obrazującą jej deformację i rozważaną skalę przemieszczeń w początkowej fazie ruchu, pokazano na rys. 6.8.54.

Na rysunku 6.8.55 przedstawiono wykres zmian energii układu w czasie. Pokazuje on wzrost energii w okresie odpowiadającym działaniu obciążenia. Po zaniku działania obciążenia widoczne są małe oscylacje energii kinetycznej i energii potencjalnej (rys. 6.8.56 i 6.8.57) występujące w trakcie swobodnego lotu powłoki.



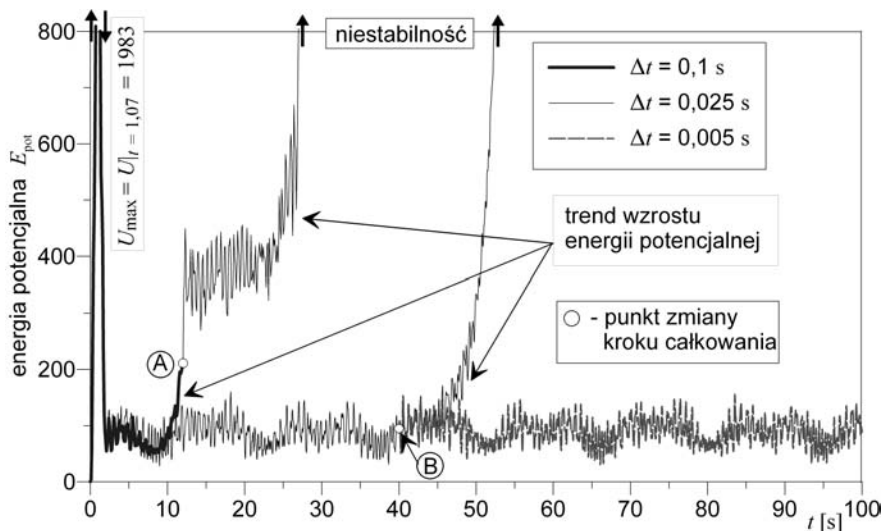
Rys. 6.8.54. Skręcona powłoka o przekroju teowym w locie: sekwencja kilku konfiguracji, funkcja obciążenia.



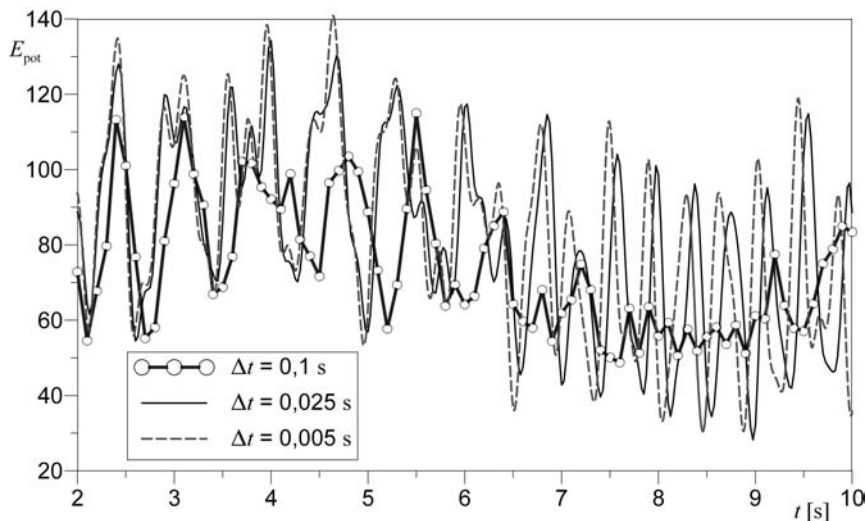
Rys. 6.8.55. Skręcona powłoka o przekroju teowym w locie: energia układu.

Jednak ich suma $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = 2,824 \times 10^5$ jest równa dostarczonej do układu pracy obciążenia zewnętrznego i pozostaje stała w rozważanym przedziale czasu.

Pomimo spełnionego energetycznego kryterium stabilności, przy niezmiennych parametrach całkowania dalszy znaczący postęp w analizie, poza zakresy pokazane na rysunkach, nie jest możliwy. Po pewnym czasie występuje bowiem



Rys. 6.8.56. Skręcona powłoka o przekroju teowym w locie: energia potencjalna układu, zmiana kroku całkowania.



Rys. 6.8.57. Skręcona powłoka o przekroju teowym w locie: przebieg energii potencjalnej układu przy różnych krokach całkowania.

niestabilność algorytmu, objawiająca się między innymi fizycznie nieuzasadnionym gwałtownym wzrostem energii układu. Tego rodzaju trudności są typowe i znane z literatury przedmiotu (zob. np. KUHLE i CRISFIELD [1999], KUHLE i RAMM [1996a,b]). Są one powodowane nieuzasadnionym fizycznie, narastającym

z czasem całkowania zbyt silnym w zagadnieniach dynamiki konstrukcji wpływem postaci deformacji związanych z wysokimi częstotliwościami drgań własnych układu. Ten problem występuje przy całkowaniu równań ruchu w długich przedziałach czasowych przy użyciu stosunkowo dużego kroku Δt .

Niestabilność algorytmu całkowania można zaobserwować analizując np. przebieg zmienności w czasie energii potencjalnej układu, który w powiększonej skali pokazano na rys. 6.8.56. Można tu zauważyć, że pojawienie się niestabilności algorytmu poprzedza początkowo lekki trend wzrostowy energii potencjalnej. Tę informację (punkt B na rys. 6.8.56) można wykorzystać do zmniejszenia od tej chwili długości kroku całkowania w celu przedłużenia przedziału stabilnych obliczeń. Jednak zbyt późna zmiana kroku Δt (punkt A na rys. 6.8.56) nie daje właściwego ustabilizowania procesu obliczeń. Na rys. 6.8.57 porównano przebiegi zmian energii potencjalnej (odkształcenia sprężystego) skumulowanej w układzie w czasie pierwszej fazy lotu, otrzymane dla trzech długości kroku całkowania $\Delta t = \{0,1, 0,025, 0,005\}$ s.

Omawiana technika zmniejszania długości kroku całkowania umożliwia wprawdzie pewne wydłużenie przedziału stabilnych symulacji numerycznych, ale nie rozwiązuje dyskutowanego tu problemu stabilności algorytmu. Przewyciężenie problemu związanego z zagadnieniem stabilności algorytmu wymaga takiego zaprojektowania schematu całkowania po czasie, który umożliwi kontrolę wpływu wysokich częstotliwości drgań układu na proces całkowania nieliniowych równań ruchu.

Rysunek 6.8.57 pokazuje, że w przebiegu po czasie energii potencjalnej badanej powłoki dla najdłuższego kroku całkowania występują znaczne różnice w stosunku do przebiegów z krótszymi krokami, w rezultacie występują także istotne różnice w stanie naprężeń układu. Dlatego rozwiązania otrzymane z długim krokiem całkowania Δt , mimo spełnienia energetycznego kryterium stabilności algorytmu, mogą być niepoprawne. Wniosek ten jest szczególnie istotny w kontekście użytkowania w nieliniowej analizie dynamicznej konstrukcji algorytmów (np. tzw. energetyczno-pędowych), dopuszczających z założenia stosowanie bardzo dużych kroków całkowania Δt .

6.8.11. Uwagi

Zebrane w podrozdziale 6.8 zadania, ze względu na wielopłatowość ich geometrii, wykraczają poza zakres stosowalności standardowych 5-parametrowych powłokowych elementów zdegenerowanych. Zadania te wykraczają także poza zakres stosowalności klasycznych elementów opartych na założeniach teorii typu Timoszenko–Reissnera oraz teorii powłok, wykorzystujących koncepcję powierzchni Cosserat z pojedynczym wektorem kierunkowym.

Powłokowe konstrukcje wielopłatowe charakteryzuje bardzo złożone zachowanie, wynikające z interakcji lokalnych wyboczeń z globalną utratą stateczności. W zakresie pokrytym pojawiać się mogą zarówno stateczne, jak

i niestateczne ścieżki równowagi. Tego typu zadania wydają się być bardziej realistycznymi i ostrymi testami poprawności stosowania różnych elementów skończonych.

Uwagi wymienione w poprzednich podrozdziałach, dotyczące aspektów teoretycznych i efektywności sformułowania elementów, znalazły także potwierdzenie w przypadku zadań wielopłatowych. W szczególności, wyniki badań wpływu współczynnika owinięcia α_t na rozwiązania potwierdzają, że ten wpływ jest mały gdy $\alpha_t < 1$. Potwierdza to także, że ten szeroki przedział braku wpływu wartości α_t na rozwiązania nie zależy od typu rozważanego problemu.

W dwóch ostatnich przykładach rozważaliśmy trudne zadania symulacji dynamiki powłok trójpłatowych, wymuszonych do lotu w przestrzeni bez wpływu grawitacji przez parę krótko działających sił. W ruchu tym powłoki podlegają dużym sprężystym deformacjom bez ograniczania zakresu przesunięć i obrotów. Po ustaniu działania sił wymuszających ruch, obserwowaliśmy małe oscylacje energii kinetycznej i potencjalnej, ale suma obu energii pozostawała praktycznie stała.

W ruchu swobodnym bez udziału sił grawitacyjnych środek masy powłoki trójpłatowej powinien poruszać się w przestrzeni wzdłuż prostej, stanowiącej oś obrotu ruchu wirowego układu. Spełnienie tego warunku jest istotnym kryterium poprawności rozwiązań nieliniowej dynamiki konstrukcji, jakości elementów skończonych i dokładności algorytmu całkowania równań ruchu. W naszych symulacjach warunek ten był spełniony z dużą dokładnością.

Przez zagęszczanie siatki podziału na elementy skończone, i/lub użycie elementów skończonych wyższego rzędu, zwiększa się liczba stopni swobody układu dyskretnego. W rezultacie wzrasta także liczba i wartości najwyższych częstości drgań własnych. Wzrost liczby stopni swobody powoduje zatem znaczne podniesienie górnej granicy pasma częstości drgań własnych układu dyskretnego. W wyniku silnego rozszerzenia pasma częstości drgań własnych układ dynamiczny staje się bardziej wrażliwym na długość kroku obliczeniowego w algorytmach całkowania po czasie.

Stabilność algorytmów całkowania po czasie układów nieliniowych dynamiki konstrukcji jest zazwyczaj sprawdzana poprzez kryterium energetyczne (p. 4.6.1). Okazało się, że pomimo spełnionego kryterium stabilności, przy niezmiennych parametrach całkowania w obliczeniach osiągnany jest punkt, od którego dalszy znaczący postęp w analizie nie jest możliwy. Niestabilność numeryczna objawia się gwałtownym, fizycznie nieuzasadnionym wzrostem energii całkowitej układu. W naszych badaniach zauważyliśmy, że ta niestabilność numeryczna jest poprzedzona tendencją wzrostową wartości energii potencjalnej układu. Ta obserwacja umożliwia dokonanie zawczasu wyboru chwili skrócenia kroku całkowania numerycznego. Postępowanie takie daje szansę pewnego wydłużenia zakresu stabilnych symulacji numerycznych.

Bibliografia

1. ACTIS R. L., SZABO B. A., SCHWAB CH. [1999]: *Hierarchical models for laminated plates and shells*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **172**, 79–107.
2. ADELI H., GERE J. M., WEAVER W. [1978]: *Algorithms for nonlinear structural dynamics*, J. Struct. Div., **104**, 2, 263–280.
3. AHMAD S., IRONS B. M., ZIENKIEWICZ O. C. [1970]: *Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements*, Int. J. Num. Meth. Engng., **2**, 419–451.
4. AJNOŁA L. J. A. [1965]: *Nielinieyjnaja teorija tipa Timoszenko dlja uprugich obołoczek*, Izv. AN Est. SSR, Ser. Fiz.-Matem. i Techn. Nauk, **14**, 3, 337–344.
5. AJNOŁA L. J. A. [1968]: *Wariacionnyje metody dlja nieliniejnych urawnienij dwizejnija obołoczek*, Prik. Mat. Mech., **32**, 1, 154–158.
6. AKIAN J.-L. [1999]: *Asymptotic analysis of ‘bending-dominated’ shell junctions* (in French), CR l’Acad. Sci. Ser. IIB, **327**, 11, 1129–1132.
7. ALLMAN D. J. [1984]: *A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis*, Comp. Struct., **19**, 1–8.
8. ALLMAN D. J. [1988]: *Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations*, Int. J. Num. Meth. Engng., **26**, 2645–2655.
9. ALMANSI E. [1932]: *Sulle deformazioni della piastre elastiche*, Atti Acad. Naz. Lincei, Rend. VI, I: **15**, 473–477; II: **19**, 497–603; III: **17**, 12–19; IV: **17**, 197–203; V: **17**, 425–431; VI: **17**, 776–783; VII: **17**, 1031–1038; VIII: **18**, 3–9; IX: **18**, 77–82.
10. ALTENBACH H., ŽILIN P. A. [1988]: *Teorija uprugich, prostych obołoczek*, Uspiechi Miechaniki, **11**, 107–148.
11. ALTMAN S. L. [1986]: *Rotations, Quaternions, and Double Groups*, Clarendon Press, Oxford.
12. ALUMJAE N. A. [1949]: *Differencialnyje urawnienija sostojanij rawnowiesija tonkostiennych uprugich obołoczek w posliekriticzeskoj stadii*, Prik. Mat. Mech., **13**, 1, 95–106.
13. AMBARCUMJAN S. A. [1974]: *Obszczaja teorija anizotropnych obołoczek*, Nauka, Moskwa.
14. AMBRÓSIO J. A. C., KLEIBER M. (eds.) [2000]: *Computational aspects of nonlinear structural systems with large rigid body motion*, NATO-ARW, Pułtusk, Poland, 2–7 July; IDMEC, Lisboa.
15. AMBRÓSIO J. A. C., KLEIBER M. (eds.) [2001]: *Computational aspects of nonlinear structural systems with large rigid body motion*, NATO Science Series, Vol. 179; IOS Press, Amsterdam, Berlin, etc.
16. AMINPOUR M. A. [1992]: *An assumed-stress hybrid 4-node shell element with drilling degrees of freedom*, Int. J. Num. Meth. Engng., **33**, 19–38.

17. ANDEFINGER U., RAMM E. [1993]: *EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements*, Int. J. Num. Meth. Engng., **36**, 1311–1337.
18. ANDRIANOV I. V., AWREJCEWICZ J. [2003]: *Dynamics of folded shells*, J. Sound Vib., **265**, 3, 689–692.
19. ANTMAN S. S. [1972]: *The theory of rods*, In: S. Flügge (ed.), *Encyclopedia of Physics*, VIa/2, 641–703; Springer-Verlag, Berlin.
20. ANTMAN S. S. [1976]: *Ordinary differential equations of non-linear elasticity I: Foundations of the theories of non-linearly elastic rods and shells*, Arch. Rat. Mech. Anal., **61**, 307–351.
21. ANTMAN S. S. [1995]: *Nonlinear Problems of Elasticity*, Springer-Verlag, New York, Berlin, etc.
22. ANTMAN S. S. [1997]: *Convergence properties of hierarchies of dynamical theories of rods and shells*, ZAMP, **48**, 6, 874–884.
23. ANTMAN S. S., MARLOW R. S. [1991]: *Material constraints, Lagrange multipliers, and compatibility. Applications to rod and shell theories*, Arch. Rat. Mech. Anal., **116**, 257–299.
24. ARGYRIS J. [1982]: *An excursion into large rotations*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **32**, 85–155.
25. ARGYRIS J., POTERASU V. F. [1993]: *Large rotations revisited: application of Lie algebra*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **103**, 11–42.
26. ARGYRIS J. H., BALMER H., DOLTSINIS J. ST., DUNNE P. C., HAASE M., KLEIBER M., MALEJANNAKIS G. A., MLEJNEK H.-P., MÜLLER M., SCHARPF D. W. [1979]: *Finite element method — the natural approach*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **17/18**, 1–106.
27. ARGYRIS J. H., DUNNE P. C., MALEJANNAKIS G. A., SCHARPF D. W. [1978]: *On large displacement — small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **15**, 99–135.
28. ARNOLD W. I. [1981]: *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa.
29. ARNOLD W. I. [1983]: *Teoria równań różniczkowych*, PWN, Warszawa.
30. ARON H. [1874]: *Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen Schale*, J. Reine und Angew. Math. (Crelle Journal), **78**, 136–174.
31. ASHWELL D. G., GALLAGHER R. (eds.) [1976]: *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, John Wiley & Sons, London et al.
32. ATLURI S. N. [1984]: *Alternate stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotations, for computational analyses of finitely deformed solids, with application to plates and shells — I. Theory*, Comp. Struct., **18**, 1, 93–116.
33. ATLURI S. N., CAZZANI A. [1995]: *Rotations in computational solid mechanics*, Arch. Comput. Meth. Engng., **2**, 1, 49–138.

34. ATLURI S. N., GALLAGHER R. G., ZIENKIEWICZ O. C. (eds.) [1983]: *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, J. Wiley & Sons, Chichester.
35. ATLURI S., PIAN T. H. H. [1972]: *Theoretical formulation of finite-element methods in linear-elastic analysis of general shells*, J. Struct. Mech., **1**, 1–41.
36. AXELRAD E. L. [1987]: *Theory of Flexible Shells*, North-Holland, Amsterdam.
37. AXELRAD E. L. [2000]: *Shell theory and its specialized branches*, Int. J. Solids Str., **37**, 10, 1425–1451.
38. BABUŠKA I., SCAPOLLA T. [1989]: *Benchmark computation and performance evaluation for a rhombic plate bending problem*, Int. J. Num. Meth. Engng., **28**, 155–179.
39. BABUŠKA I., SURI M. [1990]: *The p- and p-h versions of the finite element method: An overview*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **80**, 5–26.
40. BABUŠKA I., SZABO B. [1997]: *Trends and new problems in finite element methods*, In: Whiteman J. R. (ed.), *The Mathematics of Finite Elements and Applications*, John Wiley & Sons Ltd.
41. BADUR J. [1984]: *Nieliniowa analiza powłok sprężystych według drugiego przybliżenia do energii odkształcenia*, Rozprawa doktorska, Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk.
42. BADUR J., GARDZILEWICZ A., MARCINKOWSKI S., OSTROWSKI P., RADULSKI W. [2003]: *Korozja naprężeniowa turbin ciepłowniczych 13UC-100*, W: VI Konf. N-T „Elektrownie Ciepłne”, Słok, 4-6 czerwca, 171–180; Wyd. Inst. Energ. Pol. Łódzkiej, Łódź.
43. BADUR J., KUCHARSKI R., MALEC A., BANASZKIEWICZ M. [2002]: *Obliczeniowa ocena zużycia elementów rurociągów parowych*, W: IV Symp. „Eksplotacja i diagnostyka modernizowanych bloków energetycznych”, Wisła, 2-4 paźdź., 47–59.
44. BADUR J., KOZŁÓW P. [2002]: *Gas turbine come of age*, European Power News, **27**, 11–14.
45. BADUR J., PIETRASZKIEWICZ W. [1986]: *On geometrically non-linear theory of elastic shells derived from pseudo-Cosserat continuum with constrained micro-rotations*, In: Pietraszkiewicz W. (ed.), *Finite Rotations in Structural Mechanics*, Proc. EUROMECH Colloquium 197, 19–32; Springer-Verlag, Berlin.
46. BANASZKIEWICZ M., KUCHARSKI R., DUDDA W., BADUR J. [2003]: *Obliczeniowy stan referencyjny konstrukcji korodującej*, W: III Konf. N-T „Eksplotacja maszyn i Urządzeń Energetycznych”, Szczyrk, 7-9 maja, 239–249.
47. BAŞAR Y. [1987]: *A consistent theory of geometrically non-linear shells with an independent rotation vector*, Int. J. Solids Str., **23**, 1401–1415.
48. BAŞAR Y., DING Y. [1990]: *Finite-rotation elements for the non-linear analysis of thin shell structures*, Int. J. Solids Str., **26**, 83–97.
49. BAŞAR Y., DING Y. [1992]: *Finite-rotation shell elements for the analysis of finite-rotation shell problems*, Int. J. Num. Meth. Engng., **34**, 165–169.

50. BAŞAR Y., ITSKOV M. [1998]: *Finite element formulation of the Ogden material model with application to rubber-like shells*, Int. J. Num. Meth. Engng., **42**, 1279–1305.
51. BAŞAR Y., ITSKOV M., ECKSTEIN A. [2000]: *Composite laminates: nonlinear interlaminar stress analysis by multi-layer shell elements*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **185**, 367–397.
52. BAŞAR Y., KINTZEL O. [2003]: *Finite rotations and large strains in finite element shell analysis*, CMES, **4**, 2, 217–230.
53. BAŞAR Y., KRÄTZIG W. B. [1985]: *Mechanik der Flächentragwerke*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden.
54. BAŞAR Y., KRÄTZIG W. B. [2001]: *Theory of Shell Structures*, 2. Aufl., Fortschritt-Berichte VDI, R. 18, Nr. 258, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf.
55. BATHE K.-J. [1982]: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
56. BATHE K.-J. [1996]: *Finite Element Procedures*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
57. BATHE K.-J., BOLOURCHI S. [1979]: *Large displacement analysis of three-dimensional beam structures*, Int. J. Num. Meth. Engng., **14**, 961–986.
58. BATHE K.-J., BOLOURCHI S. [1980]: *A geometric and material nonlinear plate and shell element*, Comp. Struct., **11**, 23–48.
59. BATHE K.-J., DVORKIN E. [1985]: *A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation*, Int. J. Num. Meth. Engng., **21**, 367–383.
60. BATHE K.-J., DVORKIN E. [1986]: *A formulation of general shell elements — the use of mixed interpolation of tensorial components*, Int. J. Num. Meth. Engng., **22**, 697–722.
61. BATHE K.-J., HO L.-W. [1981]: *A simple and effective element for analysis of general shell structures*, Comp. Struct., **13**, 673–681.
62. BATHE K.-J., LEE N.-S., BUCALEM M. L. [1990]: *On the use of hierarchical models in engineering analysis*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **82**, 5–26.
63. BATHE K.-J., RAMM E., WILSON E. L. [1975]: *Finite element formulations for large deformation dynamic analysis*, Int. J. Num. Meth. Engng., **9**, 353–386.
64. BATHE K.-J., WILSON E. L. [1976]: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
65. BAUCHAU O. A., BOTTASSO C. L. [1999]: *On the design of energy preserving and decaying schemes for flexible, nonlinear multi-body systems*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **169**, 61–79.
66. BEATTY M. F. [1977]: *Vector analysis of finite rigid rotations*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **3**, 501–502.
67. BELYTSCHKO T., LIU W.-K., ENGELMANN B. E. [1984]: *The gamma-elements and related developments*, In: *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, Vol. 1: Element Technology, 316–347; Pineridge Press, Swansea, U.K.

68. BELYTSCHKO T., LIU K. M., MORAN B. [2003]: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, Chichester.
69. BELYTSCHKO T., SCHOEBERLE D. F. [1975]: *On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **42**, 865–869.
70. BELYTSCHKO T., STOLARSKI H., LIU W. K., CARPENTER N., ONG J. S.-J. [1985]: *Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **51**, 221–258.
71. BELYTSCHKO T., WONG B. L., STOLARSKI H. [1989]: *Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element*, Int. J. Num. Meth. Engng., **28**, 385–414.
72. BERDICHEVSKII V. L. [1980]: *Variational-asymptotic method of constructing the nonlinear shell theory*, In: Koiter W. T., Mikhailov G. K. (eds.), *Theory of Shells*, 137–161; North-Holland P.Co., Amsterdam.
73. BERDICZEWSKI W. L. [1983]: *Wariacionnyje principy miechaniki sptosznoj sriedy*, Nauka, Moskwa.
74. BERGAN P. G., FELIPPA C. A. [1985]: *A triangular membrane element with rotational degrees of freedom*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **50**, 25–69.
75. BERGAN P. G., NYGARD M. K. [1986]: *Nonlinear shell analysis using free formulation finite elements*, In: Bergan P. G., Bathe K. J., Wunderlich W. (eds.), *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, 317–338; Springer-Verlag, Berlin.
76. BERNADOU M. [1993a]: *C^1 -curved finite elements with numerical integration for thin plate and thin shell problems. Part 1: Construction and interpolation properties of curved C^1 -finite elements*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **102**, 255–289.
77. BERNADOU M. [1993b]: *C^1 -curved finite elements with numerical integration for thin plate and thin shell problems. Part 2: Approximation of thin plate and thin shell problems*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **102**, 389–421.
78. BERNADOU M. [1996]: *Finite Element Methods for Thin Shell Problems*, J. Wiley and Sons, Chichester.
79. BERNADOU M., CUBIER A. [1998a]: *Numerical analysis of junctions between thin shells. Part 1: Continuum problems*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **161**, 349–363.
80. BERNADOU M., CUBIER A. [1998b]: *Numerical analysis of junctions between thin shells. Part 2: Approximation by finite element methods*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **161**, 365–387.
81. BERNADOU M., FAYOLLE S., LÉNE F. [1989]: *Numerical analysis of junctions between plates*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **74**, 307–326.
82. BERNADOU M., TROUVE P. [1990]: *Approximation of general shell problems by flat plate elements. Part 3: Extension to triangular curved facet elements*, Comp. Mech., **7**, 1–11.
83. BETSCH P., MENZEL A., STEIN E. [1998]: *On the parametrization of finite rotations in computational mechanics: A classification of concepts with application to smooth shells*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **155**, 273–305.

84. BIELEWICZ E., GÓRSKI J., SCHMIDT R., WALUKIEWICZ H. [1994]: *Random fields in the limit analysis of elastic-plastic shell structures*, Comp. Struct., **51**, 267–275.
85. BILLINGTON E. W. [1986]: *Introduction to the Mechanics and Physics of Solids*, Adam Hilger Ltd., Bristol and Boston.
86. BJÖRCK Å., DAHLQUIST G. [1983]: *Metody numeryczne*, PWN, Warszawa.
87. BOLLE L. [1947]: *Contribution au problème lineaire de flexion d'une plaque élastique*, Bull. Techn. Suisse Rom., **73**, 21, 281–285; **73**, 22, 293–298.
88. BORRI M., MELLO F., ATLURI S. N., [1991]: *Primal and mixed forms of Hamiltonians principle for constrained rigid body systems: Numerical studies*, Comput. Mech., **7**, 205–220.
89. BORRI M., TRAINELLI L., BOTTASSO C. L., [2000]: *On representations and parameterizations of motion*, Multibody Sys. Dyn., **4**, 129–193.
90. BOTTASSO C. L., BORRI M. [1998]: *Integrating finite rotations*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **164**, 307–331.
91. BOUT A. [1993]: *A displacement-based geometrically non-linear constant stress element*, Int. J. Num. Meth. Engng., **36**, 1161–1188.
92. BOWEN R. M., WANG C.-C. [1976]: *Introduction to Vectors and Tensors* (2 volumes), Plenum Press.
93. BRAESS D. [1992]: *Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*, Springer-Verlag, Berlin.
94. BRANICKI CZ., CHRÓŚCIELEWSKI J., TARASZKIEWICZ CZ. [1984]: *Analiza statyczna stalowego rurociągu ułożonego w gruncie*, Inż. Morska, **1**, 27–29.
95. BRANK B., BRISEGHELLA L., TONELLO N., DAMJANIĆ F. B. [1998]: *On non-linear dynamics of shells: Implementation of energy-momentum conserving algorithm for a finite rotation shell model*, Int. J. Num. Meth. Engng., **42**, 409–442.
96. BRISEGHELLA L., MAJORANA C. E., PELLEGRINO C. [1999]: *Conservation of angular momentum and energy in the integration of non-linear dynamic equations*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **179**, 247–263.
97. BRUSH D. O., ALMROTH B. O. [1975]: *Buckling of Bars, Plates and Shells*, McGraw-Hill B.Co., New York.
98. BUDIANSKY B. [1968]: *Notes on the nonlinear shell theory*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **35**, 393–401.
99. BUDIANSKY B., SANDERS J. L., Jr. [1963]: *On the 'best' first-order linear shell theory*, In: Progress in Applied Mechanics (Prager Anniversary Volume), 129–140; Macmillan, New York.
100. BUFLER H. [1983]: *On the work theorems for finite and incremental elastic deformations with discontinuous fields: A unified treatment of different versions*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **36**, 95–124.
101. BUFLER H. [1984]: *Pressure loaded structures under large deformations*, ZAMM, **64**, 7, 287–295.

102. BUFLER H. [1985]: *The Biot stresses in nonlinear elasticity and the associated generalized variational principles*, Ing.-Archiv, **55**, 5, 450–462.
103. BURZYŃSKI W. [1949]: *Skrećanie bez skrećania*, Przegląd Mech., **8**, 187–200.
104. BÜCHTER N., RAMM E. [1992]: *Shell theory versus degeneration — a comparison in large rotation finite element analysis*, Int. J. Num. Meth. Engng., **34**, 39–59.
105. BÜCHTER N., RAMM E., ROEHL D. [1994]: *Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept*, Int. J. Num. Meth. Engng., **37**, 2551–2568.
106. BYRNE R. [1944]: *Theory of small deformations of a thin elastic shell*, Seminar Reports in Mathematics (Los Angeles), 103–152, University of California Press.
107. CHAPELLE D., BATHE K.J. [2003]: *The Finite Element Analysis of Shells — Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
108. CARDONA A., GÉRADIN M. [1988]: *A beam finite element non-linear theory with finite rotations*, Int. J. Num. Meth. Engng., **26**, 2403–2438.
109. CARDONA A., HUESPE A. [1999]: *Evaluation of simple bifurcation points and post-critical path in large finite rotation problems*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **175**, 137–156.
110. CERVERA M., HINTON E., BICANIC N. [1987]: *Non-linear transient dynamic analysis of three-dimensional reinforced concrete structures using a three-dimensional approach*, In: Lewis R. W., Hinton E., Bettess P., Schrefler B. A. (eds.), Numerical Methods in Transient and Coupled Problems, 279–318; John Wiley & Sons, Chichester et al.
111. CHRÓŚCIELEWSKI J. [1983]: *Analiza numeryczna płyt uźebrowanych w zakresie nieliniowości geometrycznej i materiałowej metodą elementów skończonych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska, Wydż. Bud. Łądowego, Gdańsk.
112. CHRÓŚCIELEWSKI J. [1996]: *Rodzina elementów skończonych klasy C^0 w nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Nr 540, Bud. Łąd., **LIII**, 1–291.
113. CHRÓŚCIELEWSKI J., BRANICKI Cz. [1989]: *MINIMOD — Pakiet podprogramów wspomagający badanie zagadnień nieliniowych*, W: Materiały IX Konf. Metody Komputerowe w Mechanice, Kraków – Ryto, tom **1**, 131–138.
114. CHRÓŚCIELEWSKI J., GÓRSKI J., IWICKI P. [1995]: *An analysis of the DCT-3 node triangular flat shell finite element*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Nr 522, Bud. Łąd., **LI**, 45–60.
115. CHRÓŚCIELEWSKI J., JANCZEWSKI D., JASINA M. [1998]: *Sprężysto-plastyczna analiza stateczności konstrukcji cienkościennych za pomocą elementów DCT*, W: Referaty: Konferencja „Zbiorniki Cienkościenne”, Karłów, 17–19.06.1998, 19–22; Instytut Techniki WSP, Zielona Góra.
116. CHRÓŚCIELEWSKI J., KŁOSOWSKI P., PFAHL U., SCHMIDT R., WEICHERT D. [1996]: *Plates and Shells under Impact Loading*, Proc. of Int. Symposium on Dynamics of Continua, Bad Honnef, 9–13.09.1996, 83–92; Shaker Verlag.

117. CHRÓŚCIELEWSKI J., LUBOWIECKA I., PIETRASZKIEWICZ W. [2004]: *FEM and time stepping procedures in non-linear dynamics of flexible branched shell structures*, In: Kienzler R., Altenbach H., Ott I. (eds.), *Theories of Plates and Shells: Critical Review and New Applications*, Proc. EUROMECH Colloquium 444, 21–28; Springer-Verlag, Berlin.
118. CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W. [2000]: *Large overall motion of flexible branched shell structures*, In: Ambrósio J. A. C., Kleiber M. (eds.), *Computational Aspects of Nonlinear Structural Systems with Large Rigid Body Motion*, NATO Advanced Research Workshop, July 2–7, Pultusk (Poland), 201–218; IDMEC, Lisboa.
119. CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W. [2002]: *Non-linear dynamics of flexible shell structures*, *Comp. Assisted Mech. Engng. Sci.*, **9**, 341–357.
120. CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., SMOLEŃSKI W. [1993]: *On the interpolation in the $SO(3)$ rotation group*, In: Gilewski W., Chodor L. (eds.), *Computer Methods in Mechanics*, Proc. XI Polish Conference, Kielce–Cedzyna, Vol. I, 187–194; Kielce Univ. Techn., Kielce.
121. CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., STUMPF H. [1992]: *Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **35**, 63–94.
122. CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., STUMPF H. [1994]: *Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells*, *Mitt. Institut für Mechanik*, **96**, Ruhr-Universität, Bochum.
123. CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., STUMPF H. [1997]: *Finite element analysis of smooth, folded and multi-shell structures*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **141**, 1–46.
124. CHRÓŚCIELEWSKI J., NOLTE L.-P. [1985]: *Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY*, *Mitt. Institut für Mechanik*, **48**, Ruhr-Universität, Bochum.
125. CHRÓŚCIELEWSKI J., SCHMIDT R. [1985]: *A solution control method for nonlinear finite element post-buckling analysis of structures*, In: Szabo J. (ed.), Proc. EUROMECH Colloquium 200, Matrafüred, Hungary, 19–33.
126. CHRÓŚCIELEWSKI J., SCHMIDT R. [1986a]: *Comparison of numerical results for nonlinear finite element analysis of beams and shells based on 2-D elasticity theory and on novel finite rotation theories for thin structures*, In: Pietraszkiewicz W. (ed.), *Finite Rotations in Structural Mechanics*, Proc. EUROMECH Colloquium, 197, 111–120; Springer-Verlag, Berlin.
127. CHRÓŚCIELEWSKI J., SCHMIDT R. [1986b]: *Contribution to nonlinear finite element analysis of structures with emphasis on buckling and post-buckling problems*, In: Yagawa G., Atluri S.N. (eds.), *Computational Mechanics '86*, Proc. Int. Conf. Comp. Mech., III_179–III_184; Springer-Verlag, Tokyo.
128. CIARLET P. G. [1990a], *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures: An Asymptotic Analysis*, Masson, Paris and Springer-Verlag, Berlin.
129. CIARLET P. G. [1990b], *A new class of variational problems arising in the modeling of elastic multi-structures*, *Numer. Math.*, **57**, 547–560.

130. CIARLET P. G. [2000]: *Mathematical Elasticity, Vol. III: Theory of Shells*, North-Holland, Amsterdam.
131. COFER W. F., WILL K. M. [1991]: *A three-dimensional shell-solid transition element for general nonlinear analysis*, Comp. Struct., **38**, 449–462.
132. COFER W. F., WILL K. M. [1992]: *A finite element technique for the ultimate strength analysis of tubular joints*, Eng. Comput., **9**, 345–358.
133. COHEN H., DASILVA C. N. [1966]: *Nonlinear theory of elastic directed surfaces*, J. Math. Phys., **7**, 6, 960–966.
134. COHEN H., WANG C.-C. [1989]: *A mathematical analysis of the simplest direct models for rods and shells*, Arch. Rat. Mech. Anal., **108**, 35–82.
135. COLEMAN B. D. [1964]: *Thermodynamics of materials with memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, 1–46.
136. COLEMAN B. D., NOLL W. [1963]: *Thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **13**, 167–178.
137. COLLATZ L. [1960]: *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa.
138. COOK R. D., MALKUS D. S., PLESHA M. E. [1974, 1981, 1989]: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York et al.
139. COSSERAT E., COSSERAT F. [1908]: *Sur la théorie des corps minces*, Comptes Rendus, 1er Semestre, **CXLVI**, 4, 169–172.
140. COSSERAT E., COSSERAT F. [1909]: *Théorie des Corps Deformables*, Hermann et Fils, Paris.
141. COURANT R. [1943]: *Variational methods for problems of equilibrium and vibrations*, Bull. Amer. Math. Soc., **49**, 1–23.
142. COURANT R., HILBERT D. [1953]: *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, J. Wiley – Interscience, New York.
143. COWPER G. R., LINDBERG G. M., OLSON M. D. [1970]: *A shallow shell finite element of triangular shape*, Int. J. Solids Str., **6**, 1133–1156.
144. CRISFIELD M. A. [1990]: *A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **81**, 131–150.
145. CRISFIELD M. A [1991]: *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 1: Essentials*, J. Wiley and Sons, Chichester.
146. CRISFIELD M. A [1997]: *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 2: Advanced Topics*, J. Wiley and Sons, Chichester.
147. CRISFIELD M. A., GALVANETTO U., JELENÍČ G [1997]: *Dynamics of 3-D co-rotational beams*, Comp. Mech., **20**, 507–519.
148. CRISFIELD M. A., PENG X. [1996]: *Instabilities induced by coarse meshes for a nonlinear shell problem*, Eng. Comput., **13**, 6, 110–114.
149. CRIVELLI L. A., FELIPPA C. A. [1993]: *A three-dimensional non-linear Timoshenko beam based on the core-congruential formulation*, Int. J. Num. Meth. Engng., **36**, 3647–3673.

150. CURTIES W. D., LEE Y. D., MILLER F. R. [1973]: *A class of infinite dimensional subgroups of $DIFF(X)$ which are Banach Lie groups*, Pacific J. Math., **47**, 59–65.
151. CYWIŃSKI Z. [1970]: *Równania wybozczenia skrętnego pręta dwuteowego o zmiennym przekroju bisymetrycznym*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Nr 162, Bud. Łąd., **XXI**, 19–41.
152. CYWIŃSKI Z., KOLBRUNNER C. [1971]: *Drillknicken dünnwandiger I-Stäbe mit veränderlichen, doppelt-symmetrischen Querschnitten*, Institut für bauwissenschaftliche Forschung, **18**; Verlag Leemann, Zürich.
153. CZERNYCH K. F. [1964]: *Liniejnaja teorija obołoczek, Cz. 2. Niekotoryje woprosy teorii*, Izd. Leningr. Un-ta, Leningrad; Tłumaczenie angielskie: CHERNYKH K. F., *Linear Theory of Shells*, Part II, NASA-TT-F-II 562.
154. CZERNYCH K. F. [1983]: *Teorija tonkich obołoczek iz elastomierow (rezinopodobnych materiałów)*, Uspiechi Miechaniki, **6**, 111–147.
155. CZERNYCH K. F. [1986]: *Nieliniejnaja teorija uprugosti w maszynostroitel'nych rasczetach*, Maszynostrojenije, Leningrad.
156. CZERNYCH K. F., KABRIC S. A. (red.), [2002]: *Obszczaja nieliniejnaja teorija obołoczek*, Izd. St.-Peterburgskogo U-ta.
157. CZERNYCH K. F., SZAMINA W. A. [1975]: *Niekotoryje woprosy nieliniejnój klassycznej teorii tonkich stierżniej i obołoczek*, W: Trudy IX Wsiesoj. Konf. po Teorii Płastin i Obołoczek, 99–103; Sudostrojenije, Leningrad.
158. DACKO M., BORKOWSKI W., DOBROCIŃSKI S., NIEZGODA T., WIECZOREK M. [1994]: *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Arkady, Warszawa.
159. DEMIDOWICZ B. P., MARON I. A., SZUWAŁOWA E. Z. [1965]: *Metody numeryczne, Część II: Przybliżanie funkcji, równania różniczkowe i całkowe*, PWN, Warszawa.
160. DEN HEIJER C., RHEINBOLDT W. C. [1981]: *On steplength algorithms for a class of continuation methods*, SIAM J. Numer. Anal., **18**, 925–948.
161. DE VEUBEKE B. F. [1972]: *A new variational principle for finite elastic deformations*, Int. J. Engng. Sci., **10**, 9, 745–763.
162. DHATT G. S. [1970]: *Instability of thin shells by the finite element method*, In: Proc. IASS Symp. on Folded Plates, Prismatic Structures, Vienna.
163. DING Y. [1989]: *Finite-Rotations-Elemente zur geometrisch nichtlinearen Analyse allgemeiner Flächentragwerke*, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Mitt. **86–6**, Ruhr-Universität, Bochum.
164. DO CARMO M. P. [1976]: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey.
165. DUSZEK M. K. [1978]: *A systematic study of kinematics of shells at large strains and displacements*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., **26**, 39–47.
166. DVORKIN E. N., BATHE K.-J. [1984]: *A continuum mechanics based four-node element for general non-linear analysis*, Eng. Comput., **1**, 77–88.

167. EBERLEIN R., WRIGGERS P. [1999]: *Finite element concepts for finite elastoplastic strain and isotropic stress response in shells: theoretical and computational analysis*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **171**, 243–279.
168. EDELEN D. G. B. [1981]: *Aspects of variational arguments in the theory of elasticity: Facts and folklore*, Int. J. Solids Str., **17**, 8, 729–740.
169. EISENHART L. P. [1947]: *An Introduction to Differential Geometry with Use of the Tensor Calculus*, Princeton Univ. Press, Princeton.
170. EREMEJEV W. A., ZUBOW L. M. [2003]: *Obszczajana nieliniejnaja teorija uprugich mikropoljarnych obołoczek*, Izwiestija WUZow, Siewiero-Kawk. Region, Ser. Jestiestw. Nauki, Specwypusk, 124–169.
171. EREMEYEV V. A., PIETRASZKIEWICZ W. [2004]: *The non-linear theory of elastic shells with phase transitions*, J. Elast., **74**, 67–86.
172. ERICKSEN J. L., TRUESDELL C. [1957]: *Exact theory of stress and strain in rods and shells*, Arch. Rat. Mech. Anal., **1**, 295–323.
173. ERIKSSON A., PACOSTE C. [2002]: *Element formulation and numerical techniques for stability problems in shells*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **191**, 3775–3810.
174. ERINGEN A. C. [1967]: *Mechanics of Continua*, J. Wiley, New York.
175. ERINGEN A. C., MAUGIN G. A. [1990]: *Electrodynamics of Continua I – Foundations and Solid Media*, Springer-Verlag, New York et al.
176. ERINGEN A. C., SUHUBI E. S. [1965]: *Stress distribution at two normally intersecting cylindrical shells*, Nucl. Struct. Engng., **2**, 253–270.
177. FAFARD M., DHATT G., BATOZ J. L. [1989]: *A new discrete Kirchhoff plate/shell element with updated procedures*, Comp. Struct., **31**, 591–606.
178. FELIPPA C. A., MILITELLO C. [1990a]: *Developments in variational methods for high performance plate and shell elements*, In: Noor A. K., Belytschko T., Simo J. C. (eds.), *Analytical and Computational Models of Shells*, CED Vol. 3, 191–215; ASME, New York.
179. FELIPPA C. A., MILITELLO C. [1990b]: *Variational formulation of high-performance finite elements: Parametrized variational principles*, Comp. Struct., **36**, 1–11.
180. FERRARESE G. [1979]: *Dinamica dei continui sottili bidimensionali: formulazione intrinseca del problema di Cauchy*, Riv. Math. Univ. Parma, **5**, 321–335.
181. FISHER D. [1988]: *Configuration dependent pressure potentials*, J. Elasticity, **19**, 77–84.
182. FOX D. D., SIMO J. C. [1990]: *A drill rotation formulation for geometrically exact shells*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **81**, 91–126.
183. FREY F. [1990]: *Shell finite elements with six degrees of freedom per node*, In: Noor A. K., Belytschko T., Simo J. C. (eds.), *Analytical and Computational Models of Shells*, CED, Vol. 3, 291–316; ASME, New York.

184. FUNG Y. C., PIN TONG [2001]: *Classical and Computational Solid Mechanics*, World Scientific Publishing, Singapore et al.
185. GALIMOW K. Z. [1951]: *K obszczej teorii płastin i obołoczek pri koniecznych pieremeszczeniach i dieformacijach*, Prik. Mat. Mech., **15**, 723–742.
186. GALIMOW K. Z. (red.) [1977]: *Teorija obołoczek s ucetom poperecznogo sdwiga*, Izd. Kazanskogo Un-ta, Kazań.
187. GALLAGHER R. H. [1976]: *Problems and progress in thin shell finite element analysis*, In: Ashwell D. G., Gallagher R. H (eds.), *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, 1–14, J. Wiley & Sons, London.
188. GAO D. Y. [1998]: *Duality, triality and complementary extremum principles in non-convex parametric variational problems with applications*, IMA J. Appl. Math., **61**, 3, 199–235.
189. GEBHARDT H. [1990]: *Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen*, Schriftenreihe Heft **10**, Institut für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe.
190. GELFAND I. M., FOMIN S. V. [1970]: *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa.
191. GÉRADIN M., CARDONA A. [2001]: *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*, John Wiley & Sons, Chichester.
192. GIBBS J. W. [1884]: *Elements of Vector Analysis*, Privately printed, New Haven, CT, 1–36, 1881; 37–83, 1984; Reprint In: *The Scientific Papers of J. Willard Gibbs*, Vol. II, Part 2, Longmans, Green and Co., New York, 1928.
193. GILEWSKI W., RADWAŃSKA M. [1991]: *A survey of finite element models for the analysis of moderate thick shells*, Finite Elem. Anal. Design, **9**, 1–21.
194. GIRKMANN K. [1957]: *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa.
195. GOL'DENWEJZER A.L. [1976]: *Teorija uprugich tonkich obołoczek*, Izd. 2-je, Nauka, Moskwa.
196. GOMULIŃSKI A., WITKOWSKI M. [1993]: *Mechanika budowli. Kurs dla zaawansowanych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
197. GORSKI W. [1978]: *A review of literature and a bibliography of finite elastic deflections of bars*, Civil Engng. Trans. (Australia), **18**, 2, 74–85.
198. GOUDREAU G. L., TAYLOR R. L. [1972]: *Evaluation of numerical integration methods in elastodynamics*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **2**, 69–97.
199. GREEN A. E., LAWS N., NAGHDI P. M. [1968]: *Rods, plates and shells*, Proc. Camb. Phil. Soc., **64**, 895–913.
200. GREEN A. E., NAGHDI P. M. [1974]: *On the derivation of shell theory by direct approach*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **41**, 1, 173–176.
201. GREEN A. E., NAGHDI P. M., WENNERS M. L. [1974]: *On the theory of rods. I. Derivations from the three-dimensional equations, II. Developments by direct approach*, Proc. Royal Soc. London, **337**, 1611, 451–507.

202. GREEN A. E., ZERNA W. [1950]: *The equilibrium of thin elastic shells*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **3**, 9–22.
203. GREEN A. E., ZERNA W. [1968]: *Theoretical Elasticity*, 2nd ed. Clarendon Press, Oxford.
204. GRIGOLJUK E., KABANOW W. W. [1978], *Ustojcziwost' obołoczek*, Nauka, Moskwa.
205. GRIGOLJUK E., SELEZOW I. T. [1973]: *Nieklasiczeskije teorii kolebanij stierżniej, płastin i obołoczek*, Itogi Nauki i Tiejchniki, Ser. Miec. Tw. Def. Tiel, t. 5, WINITI, Moskwa.
206. GRUTTMANN F. [1988]: *Theorie und Numerik Schubelastischer Schalen mit Endlichen Drehungen unter Verwendung der Biot-Spannungen*, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
207. GRUTTMANN F., STEIN E., WRIGGERS P. [1989]: *Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations*, Ing.-Arch., **59**, 54–67.
208. GRUTTMANN F., WAGNER W., WRIGGERS P. [1992]: *A nonlinear quadrilateral shell element with drilling degrees of freedom*, Arch. App. Mech., **62**, 474–486.
209. GUO ZHONG-HENG [1981]: *Representations of orthogonal tensors*, Solid Mechanics Archives, **6**, 4, 451–466.
210. GUO Z. H. [1980]: *The unified theory of variational principles in nonlinear elasticity*, Arch. Mech Stos., **32**, 4, 577–596.
211. GURTIN M. E. [1981]: *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York.
212. GURTIN M. E., MURDOCH A. I. [1975]: *A continuum theory of elastic material surfaces*, Arch. Rat. Mech. Anal., **57**, 291–323.
213. GÜNTHER W. [1961]: *Analoge Systeme von Schalengleichungen*, Ing.-Archiv, **30**, 160–186.
214. HAMMEL J. [1978]: *Geometrisch nichtlineare Schalengleichungen als Approximation des dreidimensionalen Kontinuums unter Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung*, Ing.-Archiv, **47**, 2, 75–93.
215. HALMOS P. R. [1958]: *Finite-Dimensional Vector Spaces*, 2nd ed., Van Nostrand, Princeton.
216. HANYGA A. [1985]: *Mathematical Theory of Non-Linear Elasticity*, PWN, Warszawa.
217. HANYGA A. [1991]: *Współczesna termodynamika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa – Poznań.
218. HARTE R. [1982]: *Doppelt gekrümmte finite Dreieckelemente für die lineare und geometrisch nichtlineare Berechnung allgemeiner Flächentragwerke*, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Mitt. 82–10, Ruhr-Universität, Bochum.
219. HARTE R., ECKSTEIN U. [1986]: *Derivation of geometrically nonlinear finite shell elements via tensor notation*, Int. J. Num. Meth. Engng., **23**, 367–384.

220. HARTMANN F., KATZ C. [2002]: *Statik mit finiten Elementen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
221. HAUPTMANN R., SCHWEIZERHOF K. [1998]: *A systematic development of 'solid-shell' element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom*, Int. J. Num. Meth. Engng., **42**, 49–69.
222. HENCKY H. [1947]: *Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten*, Ing.-Archiv, **16**, 72–76.
223. HEPPLER G. R., HANSEN J. S. [1986]: *A Mindlin element for thick and deep shells*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **54**, 21–47.
224. HIBBITT H. D., KARLSSON B. I., SORENSEN E. P. [1987]: *ABAQUS. Theory Manual, Version 4.8*, Providence, R.I.
225. HILDEBRAND F. B., REISSNER E., THOMAS G. B. [1949]: *Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells*, NACA TR 1833.
226. HOLZAPFEL G. A. [1991]: *Hermitian-method for the nonlinear analysis of arbitrary thin shell structures*, Comp. Mech., **8**, 279–290.
227. HORRIGMOE G., BERGAN P. G. [1978]: *Nonlinear analysis of free-form shells by flat finite elements*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **16**, 11–35.
228. HRABOK M. M., HRUDEY T. M. [1984]: *A review and catalogue of plate bending finite elements*, Comp. Struct., **19**, 479–495.
229. HSIAO K. M., LIN J. Y., LIN W. Y. [1999]: *A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-D beams*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **169**, 1–18.
230. HUANG H.-C. [1987a]: *Implementation of assumed strain degenerated shell elements*, Comp. Struct., **25**, 147–155.
231. HUANG H.-C. [1987b]: *Membrane locking and assumed strain shell elements*, Comp. Struct., **27**, 671–677.
232. HUANG H.-C., HINTON E. [1984]: *A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation*, Eng. Comput., **1**, 369–379.
233. HUANG H.-C., HINTON E. [1986a]: *A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation*, Int. J. Num. Meth. Engng., **22**, 73–92.
234. HUANG H.-C., HINTON E. [1986b]: *Elastic-plastic geometrically nonlinear analysis of plates and shells using a new nine node element*, In: Bergan P. G., Bathe K. J., Wunderlich W. (eds.), *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, 283–297; Springer-Verlag, Berlin.
235. HUGHES T. J. R., BREZZI F. [1989]: *On drilling degrees of freedom*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **72**, 105–121.
236. HUGHES T. J. R., HINTON E. (eds.) [1986a]: *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures. Vol. 1: Element Technology*, Pineridge Press, Swansea, U.K.
237. HUGHES T. J. R., HINTON E. (eds.) [1986b]: *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures. Vol. 2: Formulations and Algorithms*, Pineridge Press, Swansea, U.K.

238. HUGHES T. J. R., MASUD A., HARARI I. [1995]: *Numerical assessment of some membrane elements with drilling degrees of freedom*, *Comp. Struct.*, **55**, 297–314.
239. HUGHES T. J. R., LIU W. K. [1981]: *Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. Three-dimensional shells*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **26**, 331–362.
240. HUGHES T. J. R., LIU W. K., LEVIT I. [1981]: *Nonlinear dynamic finite element analysis of shells*, In: Wunderlich W., Stein E., Bathe K.-J. (eds.), *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Proc. Europe–U.S. Workshop, Ruhr-Universität Bochum, Germany, July 28–31, 1980, 151–168; Springer-Verlag, Berlin et al.
241. IBRAHIMBEGOVIĆ A. [1993]: *Mixed finite element with drilling rotations for plane problems in finite elasticity*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **107**, 225–238.
242. IBRAHIMBEGOVIĆ A. [1994]: *Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations – Part I: A consistent formulation*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **118**, 265–284.
243. IBRAHIMBEGOVIĆ A., FREY F. [1994a]: *Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations – Part II: Computational aspects*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **118**, 285–308.
244. IBRAHIMBEGOVIĆ A., FREY F. [1994b]: *Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations – Part III: Linearized kinematics*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **37**, 21, 3659–3683.
245. IBRAHIMBEGOVIĆ A., FREY F. [1995]: *Variational principles and membrane finite elements with drilling rotations for geometrically non-linear elasticity*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **38**, 1885–1900.
246. IBRAHIMBEGOVIĆ A., AL MIKIDAD M. [1998]: *Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **41**, 781–814.
247. ILJUCHIN A. A. [1979]: *Prostranstwiennyje zadaczi nelineijnoj teorii uprugich stierzniej*, Naukowa Dumka, Kijew.
248. IRONS B. M. [1976]: *The semiloof shell element*, In: Ashwell D. G., Gallagher R. H. (eds.), *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, 197–222; J. Wiley & Sons, London.
249. IURA M., ATLURI S. N. [1988]: *Dynamic analysis of finitely stretched and rotated three-dimensional space-curved beams*, *Comp. Struct.*, **29**, 875–889.
250. IURA M., ATLURI S. N. [1989]: *On a consistent theory, and variational formulation, of finitely stretched and rotated 3-D space-curved beams*, *Comput. Mech.*, **4**, 1, 73–88.
251. IURA M., IWAKUMA T. [1992]: *Dynamic analysis of the planar Timoshenko beam with finite displacement*, *Comp. Struct.*, **45**, 173–179.
252. IURA M., SUETAKE Y., ATLURI S. N. [2003]: *Accuracy of co-rotational formulation for 3-D Timoshenko’s beam*, *CMES – Comp. Mod. Eng. Sci.*, **4**, 2, 249–258.
253. JAAMEI S., FREY F., JETTEUR P. [1989]: *Nonlinear thin shell finite element with six degrees of freedom per node*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **75**, 251–266.

254. JANECKI S. [1998]: *The effects of constrained cross-sectional warping on the bending of beams*, J. Theor. Appl. Mech., **36**, 121–144.
255. JASINA M. K. [2003]: *Nieliniowa analiza konstrukcji powłokowych za pomocą płaskich trójkątnych elementów skończonych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska, Wydz. Inż. Łąd., Gdańsk.
256. JELENIĆ G., CRISFIELD M. A. [1998]: *Interpolation of rotational variables in nonlinear dynamics of 3D beams*, Int. J. Num. Meth. Engng., **43**, 1193–1222.
257. JELENIĆ G., CRISFIELD M. A. [1999]: *Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **171**, 141–171.
258. JEMIELITA G. [2001]: *Teorie płyt sprężystych*, W: Woźniak Cz. (red.), Mechanika sprężystych płyt i powłok, 143–330, PWN, Warszawa.
259. JETTEUR PH., FREY F. [1986]: *A four node Marguerre element for nonlinear shell analysis*, Eng. Comput., **3**, 276–282.
260. JOHN F. [1965]: *Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations*, Comm. Pure Appl. Math., **18**, 235–267.
261. JOHNSON D. E. [1967]: *Stresses in a spherical shell with a nonradial nozzle*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **34**, 299–307.
262. KAGAN W. F. [1947]: *Osnovy teorii powierzchnostiej w tienzornom izłożenii*, cz. 1 i 2, OGIZ, Moskwa – Leningrad.
263. KAJUK JA. F. [1987]: *Geometriczeski nelineijnyje zadaczi teorii płastin i obołoczek*, Naukowa Dumka, Kijew.
264. KANOK–NUKULCHAI W. [1979]: *A simple and efficient finite element for general shell analysis*, Int. J. Num. Meth. Engng., **14**, 179–200.
265. KANOK–NUKULCHAI W., SIVAKUMAR M. [1988]: *Degenerate elements for combined flexural and torsional analysis of thin-walled structures*, ASCE J. Struct. Engng., **114**, 657–674.
266. KANOK–NUKULCHAI W., SUSUMPOW T. [1993]: *False paradox of torsional buckling*, ASCE J. Struct. Engng., **119**, 3670–3679.
267. KANOK–NUKULCHAI W., TAYLOR R. L., HUGHES T. J. R. [1981]: *A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method*, Comp. Struct., **13**, 19–27.
268. KELLER H. B. [1978]: *Global homotopies and Newton methods*, In: deBoor C., Golub G. H. (eds.), Recent Advances in Numerical Analysis, 73–94; Academic Press, New York.
269. KEMP B. L., CHO CH., LEE S. W. [1998]: *A four-node solid shell element formulation with assumed strain*, Int. J. Num. Meth. Engng., **43**, 909–924.
270. KIL'CZEWSKIJ N. A. [1963]: *Osnovy analiticzeskoj miechaniki obołoczek*, I. Izd. AN Ukr. SSR, Kijew.
271. KIRCHHOFF G. [1850]: *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, J. Reine und Angew. Math. (Crelle Journal), **40**, 55–88.

272. KIRCHHOFF G. [1876]: *Vorlesungen ueber Mathematische Physik*, Band 1, Mechanik, Leipzig.
273. KLEIBER M. [1985]: *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa – Poznań.
274. KLEIBER M. [1989]: *Wprowadzenie do metody elementów skończonych*, PWN, Warszawa – Poznań.
275. KLEIBER M. (red.) [1995]: *Mechanika techniczna. Tom XI: Komputerowe metody mechaniki ciał statycznych*, PWN, Warszawa.
276. KLEIBER M. (ed.) [1998]: *Handbook of Computational Solid Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.
277. KLEIBER M., WOŹNIAK Cz. [1991]: *Nonlinear Mechanics of Structures*, PWN, Warszawa.
278. KŁOSOWSKI P. [1999]: *Nieliniowa analiza numeryczna i badania doświadczalne drgań sprężysto-lepkoplastycznych płyt i powłok*, Monografie, **8**, Politechnika Gdańska, Gdańsk.
279. KOITER W. T. [1960]: *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Proc. IUTAM Symp. Theory of Thin Shells, 12–33; North-Holland P. Co, Amsterdam.
280. KOITER W. T. [1966]: *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetensch., **B69**, 1–54.
281. KOITER W. T., SIMMONDS J. G. [1973]: *Foundations in shell theory*, In: Becker E., Mikhailov G. K. (eds.), Theoretical and Applied Mechanics, Proc. 13th ICTAM, 150-170; Springer-Verlag, Berlin et al.
282. KRASNOSEL'SKII M. A., VAINIKKO G. M., ZABREIKO P. P., RUTITSKII YA. B., STETSENKO V. YA. [1972]: *Approximate Solution of Operator Equations*, Wolters-Noordhoff Pub., Groningen.
283. KRÄTZIG W. B. [1971]: *Allgemeine Schalentheorie beliebiger Werkstoffe und Verformungen*, Ing.-Archiv, **40**, 5, 311–326.
284. KRÄTZIG W. B. [1993]: *Bestmögliche innere Schalengleichungen für schubweiche Werkstoffe unter Berücksichtigung von Dickenänderungen*, Arch. Appl. Mech., **64**, 1, 1–19.
285. KREJA I. [1988]: *Zdegenerowane elementy izoparametryczne w nieliniowej analizie konstrukcji dwuwymiarowych*, Praca doktorska, Politechnika Gdańska, Wyd. Bud. Łąd., Gdańsk.
286. KREJA I., CYWIŃSKI Z. [1988]: *Is reduced integration just a numerical trick*, Comp. Struct., **29**, 491–496.
287. KREJA I., CYWIŃSKI Z. [1991]: *Degenerated isoparametric finite elements in nonlinear analysis of 2D-problems*, Comp. Struct., **41**, 1029–1040.
288. KREJA I., SCHMIDT R. [1995]: *Moderate rotation shell theory in FEM application*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, 522, Bud. Łąd., **LI**, 229–249.

289. KREJA I., SCHMIDT R., REDDY J.N. [1997]: *Finite elements based on a first-order shear deformation moderate rotation shell theory with applications to the analysis of composite structures*, Int. J. Non-Linear Mech., **32**, 1123–1142.
290. KRUPOWICZ A. [1986]: *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa.
291. KUHLMAN D., CRISFIELD M. A. [1999]: *Energy-conserving algorithms in non-linear structural dynamics*, Int. J. Num. Meth. Engng., **45**, 569–599.
292. KUHLMAN D., RAMM E. [1996a]: *Constraint energy momentum algorithm and its application to non-linear dynamics of shells*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **136**, 293–315.
293. KUHLMAN D., RAMM E. [1996b]: *Conservation of energy and momentum for implicit single step time integration schemes*, In: Augusti G., Borri C., Spinelli P. (eds.), Structural Dynamics, Eurodyn '96, 3rd European Conference on Structural Dynamics, Florence, 5–8 June, 349–356.
294. KULKARNI A. K., NEALE K. W., ELLYIN F. [1975]: *Consistent theories for intersecting shells*, Nucl. Engng. Design, **35**, 377–385.
295. KUMARESAN S., RADHAKRISHNAN S., GANESAN N. [1994]: *Mixed models in finite element analysis*, Comp. Struct., **51**, 117–123.
296. LAMBERT J. D. [1971]: *Predictor-corrector algorithms with identical regions of stability*, SIAM J. Numer. Anal., **8**, 337–344.
297. LAGNESE J. E., LEUGERING G., SCHMIDT E. J. P. G. [1993]: *Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams*, Math. Methods Appl. Sci., **16**, 327–358.
298. LAGNESE J. E., LEUGERING G., SCHMIDT E. J. P. G. [1994]: *Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures*, Birkhäuser, Boston et al.
299. LASHKARI M., WEINGARTEN V.I. [1973]: *Vibrations of segmented shells*, Experimental Mechanics, January, 120–125.
300. LEE H.P., HARRIS P. J. [1979]: *Post-buckling strength of thin-walled members*, Comp. Struct., **10**, 689–702.
301. LEE H. P., HARRIS P. J., HSU CH.-T. T. [1984]: *A nonlinear finite element computer program for thin-walled members*, Thin-Walled Str., **2**, 355–376.
302. LEE S. J., SHIELD R. T. [1980]: *Variational principles in finite elastostatics*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), **31**, 437–453.
303. LEE S. J., KANOK-NUKULCHAI W. [1998]: *A nine-node assumed strain finite element for large-deformation analysis of laminated shells*, Int. J. Num. Meth. Engng., **42**, 777–798.
304. LEICESTER R. H. [1968]: *Finite deformations of shallow shells*, J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, **94**, 6, 1409–1423.
305. LEWIŃSKI T., TELEGA J. J., [2000]: *Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization*, World Scientific Publishing Co, Singapore et al.
306. LÉVY S. [1942]: *Square plate with clamped edges under normal pressure producing large deflections*, NACA Tech. Note 847.

307. LÉVY S. [1953]: *Structural analysis and influence coefficients for delta wings*, J. Aero. Sci., **20**, 449–454.
308. LIBAI A., SIMMONDS J. G. [1983]: *Nonlinear elastic shell theory*, In: Hutchinson J. W., Wu T. Y. (eds.), *Advances in Applied Mechanics*, **23**, 271–371; Academic Press, New York.
309. LIBAI A., SIMMONDS J. G. [1998]: *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.
310. LIBRESCU L. [1975]: *Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-Type Structures*, Noordhoff Int., Leyden.
311. LIU W. K., BELYTSCHKO T., ONG J. S.-J., LAW S. E. [1985]: *Use of stabilization matrices in non-linear analysis*, Eng. Comput., **2**, 47–55.
312. LIU W. K., LAW E. S., LAM D., BELYTSCHKO T. [1986]: *Resultant-stress degenerated shell element*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **55**, 259–300.
313. LIU W. K., ONG J. S.-J., URAS R. A. [1985]: *Finite element stabilization matrices – a unification approach*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **53**, 13–46.
314. LOVE A. E. H. [1889]: *The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell*, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) for the year 1888, **179**, 491–546.
315. LOVE A. E. H. [1927]: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Cambridge Univ. Press.
316. LUBOWIECKA I. [2001]: *Całkowanie nieliniowych równań dynamiki w mechanice konstrukcji. Dynamika powłok sprężystych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska, Wydz. Inż. Łąd., Kat. Mech. Bud., Gdańsk.
317. LUBOWIECKA I., CHRÓŚCIELEWSKI J. [2002]: *On dynamics of flexible branched shell structures undergoing large overall motion using finite elements*, Comp. Struct., **80**, 891–898.
318. ŁUKASIEWICZ S. [1976], *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa.
319. ŁURIE A. I. [1961]: *Analiczeskaja miechanika*, Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskwa.
320. ŁURIE A. I. [1980]: *Nieliniejnaja teorija uprugosti*, Nauka, Moskwa.
321. MACKERLE J. [1997]: *Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements: A bibliography (1992–1995)*, Eng. Comput., **14**, 347–440.
322. MACKERLE J. [2000]: *Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements – an addendum: A bibliography (1996–1999)*, Eng. Comput., **17**, 274–360.
323. MACKERLE J. [2002a]: *Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements, an addendum: A bibliography (1999–2002)*, Eng. Comput., **19**, 520–594.
324. MACKERLE J. [2002b]: *Finite- and boundary-element linear and nonlinear analyses of shells and shell-like structures: A bibliography (1999–2001)*, Finite Elem. Anal. Design, **38**, 765–782.

325. MACNEAL R. H. [1987]: *A theorem regarding the locking of tapered four-noded membrane elements*, Int. J. Num. Meth. Engng., **24**, 1793–1799.
326. MACNEAL R. H., HARDER R. L. [1985]: *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*, Finite Elem. Anal. Design, **1**, 3–20.
327. MACNEAL R. H., HARDER R. L. [1988]: *A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom*, Comp. Struct., **28**, 75–84.
328. MAKOWSKI J. [1981]: *Liniowa i nieliniowa analiza stateczności sprężystej cienkich powłok*, Rozprawa doktorska, Instytut Budownictwa Lądowego, Politechnika Gdańska.
329. MAKOWSKI J., CHRÓŚCIELEWSKI J. [1998]: *Shells and shell-like structures: Thermomechanical foundations and computational issues*, In: Chróścielewski J., Pietraszkiewicz W. (eds.), Shell Structures: Theory and Applications, Proc. 6th Conf., 35–44; Technical University of Gdańsk, Gdańsk.
330. MAKOWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W. [1989]: *Work-conjugate boundary conditions in the nonlinear theory of thin shells*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **56**, 395–402.
331. MAKOWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W. [2002]: *Thermomechanics of shells with singular curves*, Zeszyty Naukowe IMP PAN, Nr 528 (1487), 1–100, Gdańsk.
332. MAKOWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W., STUMPF H. [1998]: *On the general form of jump conditions for thin irregular shells*, Arch. Mech., **50**, 3, 483–495.
333. MAKOWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W., STUMPF H. [1999]: *Jump conditions in the non-linear theory of thin irregular shells*, J. Elasticity, **54**, 1–26.
334. MAKOWSKI J., STUMPF H. [1990]: *Buckling equations for elastic shells with rotational degrees of freedom undergoing finite strain deformation*, Int. J. Solids Str., **26**, 353–368.
335. MAKOWSKI J., STUMPF H. [1994]: *Mechanics of Irregular Shell Structures*, Mitt. Institut für Mechanik, **95**, Ruhr-Universität, Bochum.
336. MAN C.-S., COHEN H. [1986]: *A coordinate-free approach to the kinematics of membranes*, J. Elasticity, **16**, 97–104.
337. MARCINOWSKI J. [1999]: *Nieliniowa stateczność powłok sprężystych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
338. MARGUERRE K. [1939]: *Zur Theorie der gekruemmten Platte grosser Formänderung*, In: Proc. 5th Int. Congr. for Applied Mechanics, 93–101; J. Wiley and Sons, New York.
339. MARTINS R. A. F., OLIVEIRA C. A. M. [1988]: *Semi-loof shell, plate and beam elements — new computer versions: Part 1. Elements formulation*, Eng. Comput., **5**, 15–25.
340. MAZURKIEWICZ Z. E. [1995]: *Cienkie powłoki sprężyste: Teoria liniowa*, Ofic. Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
341. MAZURKIEWICZ Z. E., NAGÓRSKI R. T. [1987]: *Powłoki obrotowe sprężyste*, PWN, Warszawa.

342. MEES P., VERMEIR G. [1993]: *Structure-borne sound transmission at elastically connected plates*, J. Sound and Vibration, **166**, 55–76.
343. MENZEL W. [1996]: *Gemischt-hybride Elementformulierungen für komplexe Schalenstrukturen unter endlichen Rotationen*, Dissertation, T-W Mitt. Nr. 96–4, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität, Bochum.
344. MICHAJŁOW B. K. [1980]: *Plastiny i obołoczki s razrywnymi paramietrami*, Izd. Leningr. Un-ta, Leningrad.
345. MILFORD R. V., SCHNOBRICH W. C. [1985]: *The application of the rotating crack model to the analysis of reinforced concrete shells*, Comp. Struct., **20**, 225–234.
346. MILFORD R. V., SCHNOBRICH W. C. [1986]: *Degenerated isoparametric finite elements using explicit integration*, Int. J. Num. Meth. Engng., **23**, 133–154.
347. MINDLIN R. D. [1951]: *Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **18**, 1, 31–38.
348. MONDAL S. K., UDDIN M. W. [1998]: *Stresses at the junctions of axisymmetric shells under axially varying load*, Int. J. Press. Vess. & Piping, **75**, 10, 727–733.
349. MONDKAR D. P., POWELL G. H. [1977]: *Finite element analysis of non-linear static and dynamic response*, Int. J. Num. Meth. Engng., **11**, 499–520.
350. MURDOCH A. I. [1976]: *A thermodynamical theory of elastic material interfaces*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **29**, 245–275.
351. MURDOCH A. I. [1990]: *A coordinate-free approach to surface kinematics*, Glasgow Math. J., **32**, 299–307.
352. MURDOCH A. I., COHEN H. [1979]: *Symmetry considerations for material surfaces*, Arch. Rat. Mech. Anal., **72**, 61–98.
353. MUSZTARI CH. M. [1938]: *Niekotoryje oboszczeniya tonkich obołoczek s priloženijami k zadacze ustojczivosti uprugogo rawnowesija*, Izv. Kazanskogo Fiz.-Mat. Ob-va, Ser. 3, **11**, 71–150.
354. MUSZTARI CH. M. [1949]: *Kaczezwiennoje issliedowanije napriazennogo sostojanija uprugoj obołoczki pri małych dieformacijach i proizwolnych smieszczenijach*, Prik. Mat. Mech., **13**, 121–134.
355. MUSZTARI CH. M., GALIMOW K. Z. [1957]: *Nieliniejnaja tieorija uprugich obołoczek*, Tatknigoizdat, Kazań.
356. MUSZTARI CH. M., TIEREGUŁOW I. G. [1959]: *K tieorii obołoczek sredniej tołszczyiny*, DAN SSSR, **128**, 6, 1144–1147.
357. NAGANARAYANA B. P., PRATHAP G. [1989]: *Force and moment corrections for the warped four-node quadrilateral plane shell element*, Comp. Struct., **33**, 1107–1115.
358. NAGHDI P. M. [1957]: *On the theory of thin elastic shells*, Quart. Appl. Math., **14**, 4, 369–380.
359. NAGHDI P. M. [1963]: *Foundations of elastic shell theory*, In: Sneddon I. N., Hill R. (eds.), Progress in Solid Mechanics, **4**, 1–90; North-Holland, Amsterdam.

360. NAGHDI P. M. [1972]: *The theory of plates and shells*, In: Flügge S., Truesdell C. (eds.), *Handbuch der Physik*, Band VI a/2, 425–640; Springer-Verlag, Berlin.
361. NARDINOCCHI P., PODIO-GUIDUGLI P. [2001]: *Angle plates*, *J. Elast.*, **63**, 19–53.
362. NEMAT-NASSER S. [1974]: *General variational principles in nonlinear and linear elasticity with applications*, In: Nemat-Nasser S. (ed.), *Mechanics Today*, Vol. 1, 214–261; Pineridge Press, New York.
363. NEWMARK N. N. [1959]: *A method of computation for structural dynamics*, *J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE*, **85**, 3, 67–94.
364. NIEMISZ JU. N., CHOMA I. JU. [1991]: *Napriazénno-deformirovannoje sostojanije nietonkich obołoczek i płastin. Triehmiernaja teorija (Obzor)*, *Prikl. Miech.*, **27**, 11, 3–27.
365. NOLL W. [1958]: *A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **2**, 197–226.
366. NOLL W. [1987]: *Finite-Dimensional Spaces: Algebra, Geometry and Analysis*, Vol. I, Martinus Nijhoff, Dordrecht.
367. NOLTE L.-P. [1983]: *Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung grosser Rotationen*, *Mitt. Institut für Mechanik*, **39**, Ruhr-Universität, Bochum.
368. NOLTE L.-P., CHRÓSCIELEWSKI J. [1986]: *Large rotation elastic-plastic analysis of flexible shells*, In: Taylor C., Owen D. R. J., Hinton E., Damjanic F. B. (eds.), *Numerical Methods for Non-Linear Problems*, 391–404; Pineridge Press, Swansea.
369. NOLTE L.-P., CHRÓSCIELEWSKI J. [1987]: *On the nonlinear analysis of thin shells undergoing small strains and large rotations*, *ZAMM*, **67**, 4, T226–T228.
370. NOLTE L.-P., MAKOWSKI J., STUMPF H. [1986]: *On the derivation and comparative analysis of large rotation shell theories*, *Ing.-Archiv*, **56**, 145–160.
371. NOLTE L.-P., STUMPF H. [1983]: *Energy-consistent large rotation shell theories in Lagrangean description*, *Mech. Res. Comm.*, **10**, 4, 213–221.
372. NOOR A. K. [1990a]: *Bibliography of monographs and surveys of shells*, *Appl. Mech. Rev.*, **43**, 223–234.
373. NOOR A. K. [1990b]: *List of books, monographs, conference proceedings, and survey papers on shells*, In: Noor A. K., Belytschko T., Simo J. C. (eds.), *Analytical and Computational Models of Shells*, CED, Vol. 3, vii–xxxiv; ASME, New York.
374. NOOR A. K., ANDERSEN C.M. [1982]: *Mixed models and reduced/selective integration displacement models for nonlinear shell analysis*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **18**, 1429–1454.
375. NOOR A. K., BELYTSCHKO T., SIMO J. C. (eds.) [1990]: *Analytical and Computational Models of Shells*, CED, Vol. 3, ASME, New York.
376. NOUR-OMID B., RANKIN C. C. [1991]: *Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **93**, 353–384.
377. NOWACKI W. [1980]: *Dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa.

378. NOWOŻYŁOW W. W., CZERNYCH K. F., MICHAJŁOWSKIJ E. I. [1991]: *Liniejnaja Teorija Tonkich Oboczek*, Politechnika, Leningrad.
379. NOVOŻYŁOW W. W., FINKEL'SZTEJN R. [1943]: *O pogriesznosti gipotez Kirchgoffa w teorii oboczek*, Prikl. Mat. Mech., **7**, 331–340.
380. NOVOŻYŁOW W. W., SZAMINA W. A. [1975]: *O kinematiczeskich krajewych usłowijach w nielinejnych zadaczach teorii uprugosti*, Izv. AN SSSR, Mech. Tv. Tela., **5**, 63–71.
381. ODEN J. T. [1972]: *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill B. Co., New York.
382. OGDEN R. [1984]: *Non-Linear Elastic Deformations*, Halsted Press (J. Wiley), New York.
383. OLSON M. D., BEARDEN T. W. [1979]: *A simple flat triangular element revisited*, Int. J. Num. Meth. Engng., **14**, 51–68.
384. OMBACH J. [1999]: *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo – Maple*, Wyd. UJ, Kraków.
385. OPOKA S., PIETRASZKIEWICZ W. [2004]: *Intrinsic equations for non-linear deformation and stability of thin elastic shells*, Int. J. Solids Str., **41**, 3275–3292.
386. ORKISZ J., WASZCZYSZYN Z. [1978]: *Metody komputerowe w teorii powłok. Część I: Metoda elementów skończonych*, W: Orkisz J., Waszczyszyn Z. (red.), *Konstrukcje Powłokowe, Teoria i Zastosowanie*, tom 1, 217–259; PWN, Warszawa.
387. ORTEGA J. M., RHEINBOLDT W. C. [2000]: *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*, SIAM, Philadelphia.
388. ORTIZ M., RADOVITZKY R. A., REPETTO E. A. [2001]: *The computation of the exponential and logarithmic mappings and their first and second linearizations*, Int. J. Num. Meth. Engng., **52**, 1431–1441.
389. OSTROWSKA-MACIEJEWSKA J. [1994]: *Mechanika ciał odkształcalnych*, PWN, Warszawa.
390. PACOSTE C. [1998]: *Co-rotational flat face triangular elements for shell instability analyses*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **156**, 75–110.
391. PAI P. F., PALAZOTTO A. N. [1996]: *Large-deformation analysis of flexible beams*, Int. J. Solids Str., **33**, 9, 1335–1353.
392. PALCZEWSKI A. [1999]: *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych*, WNT, Warszawa.
393. PARISCH H. [1986]: *Efficient non-linear finite element shell formulation involving large strains*, Eng. Comput., **3**, 121–128.
394. PARISCH H. [1991]: *An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element*, Int. J. Num. Meth. Engng., **31**, 127–150.
395. PARK K. C., STANLEY G. M. [1986]: *A curved C^0 shell element based on assumed natural-coordinate strains*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **53**, 278–290.

396. PARKER D. F. [1987]: *Dynamical equations for the finite elastic bending, torsion, and stretching of rods*, Quart. Appl. Math., **45**, 535–548.
397. PEDREGAL P. [2000]: *Variational Methods in Nonlinear Elasticity*, SIAM, Philadelphia.
398. PERCIVALE D. [1992]: *Folded shells: a variational approach*, Annali Scuola Normale, Sup. Pisa Cl., Serie IV, **19**, 2, 207–221.
399. PERZYNA P. [1966]: *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa.
400. PETROV E., GÉRADIN M. [1998]: *Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids. Part I: Beam concept and geometrically exact nonlinear formulation*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **165**, 43–92.
401. PIAN T. H. H. [1978]: *A historical note about ‘Hybrid Elements’*, Int. J. Num. Meth. Engng., **12**, 891–892.
402. PIAN T. H. H., CHEN D.-P. [1983]: *On the suppression of zero energy deformation modes*, Int. J. Num. Meth. Engng., **19**, 1741–1752.
403. PIAN T. H. H., SUMIHARA K. [1984]: *Rational approach for assumed stress finite elements*, Int. J. Num. Meth. Engng., **20**, 1685–1695.
404. PIAN T. H. H., WU C.-C. [1988]: *A rational approach for choosing stress terms for hybrid finite element formulations*, Int. J. Num. Meth. Engng., **26**, 2331–2343.
405. PICA A., WOOD R. D., HINTON E. [1980]: *Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a Mindlin formulation*, Comp. Struct., **11**, 203–215.
406. PIEKARCZYK M. [2002]: *Wykorzystanie nadkrytycznej rezerwy nośności w projektowaniu konstrukcji stalowych*, Politechnika Krakowska, Seria Inżynieria Lądowa, Monografie, **281**, Kraków.
407. PIETRASZKIEWICZ W. [1971]: *Material equations of motion for nonlinear theory of thin shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., **19**, 6, 261–266.
408. PIETRASZKIEWICZ W. [1976]: *Obroty skończone i opis Lagrange’a w nieliniowej teorii powłok*, Rozprawa habilitacyjna, Biuletyn IMP PAN 172/880/1976, 1–191, Gdańsk.
409. PIETRASZKIEWICZ W. [1977]: *Introduction to the non-linear theory of shells*, Mitt. Inst. f Mech., **12**, Ruhr-Universität, Bochum.
410. PIETRASZKIEWICZ W. [1978]: *Nieliniowe teorie cienkich powłok sprężystych*, W: Orkisz J., Waszczyszyn Z. (red.), Konstrukcje Powłokowe, Teoria i Zastosowania, Tom 1, 27–50; PWN, Warszawa.
411. PIETRASZKIEWICZ W. [1979a]: *Niekotoryje sootnoszenija nielinieijnoj teorii obołoczek Reissnera*, Wiestnik Leningr. Un-ta, Ser. Mat, Mech. i Astron., **1**, 115–124.
412. PIETRASZKIEWICZ W. [1979b]: *Finite Rotations and Lagrangean Description in the Non-Linear Theory of Shells*, PWN, Warszawa – Poznań.
413. PIETRASZKIEWICZ W. [1980a]: *Finite rotations in shells*, In: Koiter W. T., Mikhailov G. K. (eds.), Theory of Shells, 445–471; North-Holland P. Co., Amsterdam.

414. PIETRASZKIEWICZ W. [1980b]: *Finite rotations in the nonlinear theory of shells*, In: Olszak W. (ed.): *Thin Shell Theory: New Trends and Applications*, 153–208; Springer-Verlag, Wien – New York.
415. PIETRASZKIEWICZ W. [1981]: *On consistent approximations in the geometrically non-linear theory of shells*, Mitt. Inst. f Mech., **26**, Ruhr-Universität, Bochum.
416. PIETRASZKIEWICZ W. [1984]: *Lagrangian description and incremental formulation in the non-linear theory of thin shells*, Int. J. Non-Linear Mech., **19**, 115–140.
417. PIETRASZKIEWICZ W. [1989]: *Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells*, Advances in Mechanics, **12**, 51–130.
418. PIETRASZKIEWICZ W. [1992a]: *Addendum to: Bibliography of monographs and surveys of shells*, Appl. Mech. Rev., **45**, 249–250.
419. PIETRASZKIEWICZ W. [1992b]: *Unified Lagrangian displacement formulation of the non-linear theory of thin shells*, RBCM – J. Braz. Soc. Mech. Sc., **14**, 4, 327–345.
420. PIETRASZKIEWICZ W. [1993a]: *Explicit Lagrangian incremental and buckling equations for the non-linear theory of thin shells*, Int. J. Non-Linear Mech., **28**, 2, 209–220.
421. PIETRASZKIEWICZ W. [1993b]: *Work-conjugate boundary conditions associated with the total rotation angle of the shell boundary*, Trans. ASME, J. Applied Mech., **60**, 785–786.
422. PIETRASZKIEWICZ W. [2001a]: *On using rotations as primary variables in the non-linear theory of thin irregular shells*, In: Durban D. et al. (eds.), *Advances in the Mechanics of Plates and Shells*, 245–258; Kluwer Acad. Publ., Amsterdam.
423. PIETRASZKIEWICZ W. [2001b]: *Teorie nieliniowe powłok*, W: Woźniak Cz. (red.), *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, 424–497; Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
424. PIETRASZKIEWICZ W., BADUR J. [1983]: *Finite rotations in the description of continuum deformation*, Int. J. Engng. Sci., **21**, 1097–1115.
425. PIETRASZKIEWICZ W., SZWABOWICZ M. L. [1981]: *Entirely Lagrangian nonlinear theory of thin shells*, Arch. Mech., **33**, 273–288.
426. PRENTER P. M. [1975]: *Splines and Variational Methods*, J. Wiley & Sons, New York.
427. PUGH E. D. L., HINTON E., ZIENKIEWICZ O. C. [1978]: *A study of quadrilateral plate bending elements with 'reduced' integration*, Int. J. Num. Meth. Engng., **12**, 1059–1076.
428. QUADRELLI B. M., ATLURI S. N [1998]: *Analysis of flexible multibody systems with spatial beams using mixed variational principles*, Int. J. Num. Meth. Engng., **42**, 1071–1090.
429. RADWAŃSKA M. [1990]: *Analiza stateczności i dużych przemieszczeń ustrojów powierzchniowych za pomocą MES*, Politechnika Krakowska, Monografia **105**.

430. RADWAŃSKA M., URBAŃSKI A., WASZCZY SZYŃ Z. [1993]: *Faced and curved shell finite elements with 6 DOF per node*, In: Proc. XI Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, Kielce, tom II, 785–792.
431. RALSTON A. [1975]: *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa.
432. RAMM E. [1976]: *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente*, Bericht, **76–2**, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
433. RAMM E. [1977]: *A plate/shell element for large deflections and rotations*, In: Bathe K. J., Oden J. T., Wunderlich W. (eds.), *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*, 264–293; The MIT Press, Boston.
434. RAMM E., STEGMÜLLER H. [1982]: *The displacement finite element method in nonlinear buckling analysis of shells*, In: Ramm E. (ed.), *Buckling of Shells*, 201–235; Springer-Verlag, Berlin.
435. REDDY J. N. [1984]: *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics with an Introduction to the Finite Element Method*, Wiley, New York.
436. REESE S., WRIGGERS P., REDDY B. D. [2000]: *A new locking-free brick element technique for large deformation problems in elasticity*, *Comp. Struct.*, **75**, 291–304.
437. REISSNER E. [1944]: *On the theory of bending of elastic plates*, *J. Math. Phys.*, **23**, 184–191.
438. REISSNER E. [1945]: *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **12**, 69–77.
439. REISSNER E. [1947]: *On bending of elastic plates*, *Quart. Appl. Math.*, **5**, 1, 55–68.
440. REISSNER E. [1970]: *Variational methods and boundary conditions in shell theory*, In: *Studies in Optimisation*, Vol. 1, 78–94; SIAM, Philadelphia.
441. REISSNER E. [1973]: *On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory*, *Stud. Applied Math.*, **52**, 2, 87–95; MIT Press, Boston.
442. REISSNER E. [1974]: *Linear and nonlinear theory of shells*, In: Fung Y. C., Sechler E. E. (eds.), *Thin Shell Structures*, 29–44; Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
443. REISSNER E. [1981]: *On finite deformations of space-curved beams*, *J. Appl. Math. Phys.*, **32**, 734–744.
444. REISSNER E. [1982]: *A note on two-dimensional finite deformation theories of shells*, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **17**, 3, 217–221.
445. RENGARAJAN G., AMINPOUR M. A., KNIGHT N. F. [1995]: *Improved assumed-stress hybrid shell element with drilling degrees of freedom for linear stress, buckling and free vibration analyses*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **38**, 1917–1943.
446. RHEINBOLDT W. C. [1986]: *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations*, J. Wiley & Sons, New York.
447. RIKS E. [1970]: *On the numerical solution of snapping problems in the theory of elastic stability*, *SUDAAR*, **401**, Stanford University, Stanford, Calif.
448. RIKS E. [1972]: *The application of Newton's method to the problem of elastic stability*, *Trans ASME, J. Appl. Mech.*, **39**, 1060–1065.

449. RIKS E. [1998]: *Buckling analysis of elastic structures: A computational approach*, In: van der Giesen E., Wu T. Y. (eds.), *Advances of Applied Mechanics*, **34**, 1–76; Academic Press, New York.
450. ROONEY J. [1977]: *A survey of representations of spatial rotation about a fixed point*, *Environment and Planning B*, **4**, 185–210.
451. RUBIN M. B. [2000]: *Cosserat Theories: Shells, Rods and Points*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.
452. RUBIN M. B. [2001]: *Numerical solution procedures for nonlinear elastic rods using the theory of a Cosserat point*, *Int. J. Solids Str.*, **38**, 24–25, 4395–4437.
453. RYCHTER Z. [1987]: *On the shear coefficient in beam bending*, *Mech. Res. Comm.*, **14**, 379–385.
454. RYMARZ CZ. [1993]: *Mechanika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa.
455. SABIR A. B., LOCK A. C. [1973]: *The application of finite elements to the large deflection geometrically non-linear behavior of cylindrical shells*, In: Brebbia C. A., Tottenham H. (eds.), *Variational Methods In Engineering*, Vol. II, 7/66–7/75; Southampton University Press.
456. SACZUK J. [1988]: *Analiza powłok cienkich przy dużych odkształceniach sprężystych*, Rozprawa doktorska, Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk.
457. SALEEB A. F., CHANG T. Y., GRAF W. [1987]: *A quadrilateral shell element using a mixed formulation*, *Comp. Struct.*, **26**, 787–803.
458. SALEEB A. F., CHANG T. Y., GRAF W., YINGYEUNYONG S. [1990]: *A hybrid/mixed model for non-linear shell analysis and its applications to large-rotation problems*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **29**, 407–446.
459. SANDER G., IDELSOHN S. [1982]: *A family of conforming finite elements for deep shell analysis*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **18**, 363–380.
460. SANDERS J. L. [1963]: *Nonlinear theories of thin shells*, *Quart. Appl. Math.*, **21**, 21–36.
461. SANSOUR C., BEDNARCZYK H. [1995]: *The Cosserat surface as a shell model, theory and finite-element formulation*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **120**, 1–32.
462. SANSOUR C., BOCKO J. [1998]: *On hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain finite element formulations for a geometrically exact shell theory with drilling degrees of freedom*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **43**, 175–192.
463. SANSOUR C., BUFLER H. [1992]: *An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **34**, 73–115.
464. SANSOUR C., WRIGGERS P., SANSOUR J. [1997]: *Nonlinear dynamics of shells: Theory, finite element formulation, and integration schemes*, *Nonlinear Dynamics*, **13**, 3, 279–305.
465. SCHIECK B. [1989]: *Grosse elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien*, *Mitt. Inst. f Mech.*, **69**, Ruhr–Universität, Bochum.

466. SCHIECK B., PIETRASZKIEWICZ W., STUMPF H. [1992]: *Theory and numerical analysis of shells undergoing large elastic strains*, Int. J. Solids Str., **29**, 689–709.
467. SCHMIDT B., DAMRATH R., PAHL P. J. [1977]: *A geometrically and physically nonlinear finite element method for the analysis of stiffened rectangular panels*, In: Bathe K.-J., Oden J. T., Wunderlich W. (eds.), *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*, 294–320; The MIT Press, Boston.
468. SCHMIDT R. [1982]: *Variational principles for general and restricted geometrically non-linear Kirchhoff–Love type shell theories*, In: He G. Q., Cheung Y. K. (eds.), *Proc. Int. Conf. on Finite Element Methods*, 621–626; Science Press, Beijing.
469. SCHMIDT R. [1984]: *On geometrically nonlinear theories for thin shells*, In: Axelrad E. L., Emmerling F. A. (eds.), *Flexible Shells*, 76–90; Springer-Verlag, Berlin.
470. SCHMIDT R. [1985]: *A current trend in shell theory: Constrained geometrically nonlinear Kirchhoff–Love type theories based on polar decomposition of strains and rotations*, *Comp. Struct.*, **20**, 1–3, 265–275.
471. SCHMIDT R. [1993]: *Eine thermodynamisch widerspruchsfreie Theorie elastischer Flächentragwerke bei endlichen Verschiebungen und Drehungen des Direktors*, Habilitationsschrift, Bergischen Universität Wuppertal, Fachbereich Bautechnik.
472. SCHMIDT R., PIETRASZKIEWICZ W. [1981]: *Variational principles in the geometrically non-linear theory of shells undergoing moderate rotations*, *Ingenieur-Archiv*, **50**, 187–201.
473. SCHWAB C. [1998]: *p and hp FEM*, Oxford Univ. Press, Oxford.
474. SCHWEIZERHOF K. [1989]: *Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik*, Institut für Baustatik, **9**, Universität Fridericiana, Karlsruhe.
475. SEWELL M. J. [1965]: *On the calculation of potential functions defined on curved boundaries*, *Proc. Royal Soc. London, Ser. A, Math. Phys. Sci.*, **286**, 1406, 402–411.
476. SEWELL M. J. [1982]: *Legendre transformations and extremum principles*, In: Hopkins H. G., Sewell M. J. (eds.), *Mechanics of Solids*, 563–605; Pergamon Pr., Oxford.
477. SIMMONDS J. G. [1976]: *Recent advances in shell theory*, In: *Advances in Engineering Sciences*, Proc. 13th Annual Meeting, 617–626; NASA CP-2001, Washington.
478. SIMMONDS J. G. [1979]: *Special cases of the nonlinear shell equations*, In: Besseling J. F., van der Heijden A. M. A. (eds.), *Trends in Solid Mechanics*, 211–223; Delft University Press.
479. SIMMONDS J. G. [1984a]: *The nonlinear thermodynamical theory of shells: Descent from 3-dimensions without thickness expansions*, In: Axelrad E. L., Emmerling F. A. (eds.), *Flexible Shells, Theory and Applications*, 1–11; Springer-Verlag, Berlin.
480. SIMMONDS J. G. [1984b]: *Moment potentials*, *Am. J. Phys.*, **52**, 9, 851–852.
481. SIMMONDS J. G. [1985]: *The strain energy density of rubber-like shells*, *Int. J. Solids Str.*, **21**, 1, 67–77.
482. SIMMONDS J. G. [1997a]: *Some comments on the status of shell theory at the end of the 20th century: Complaints and correctives*, NASA/CP-206280, 9–18.

483. SIMMONDS J. G. [1997b]: *A Brief on Tensor Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York et al.
484. SIMMONDS J. G. [2001]: *Rotary inertia in the classical nonlinear theory of shells and the constitutive (non-kinematic) Kirchhoff hypothesis*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **68**, 320–323.
485. SIMMONDS J. G., DANIELSON D. A. [1972]: *Nonlinear shell theory with finite rotation and stress function vectors*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **39**, 4, 1085–1090.
486. SIMO J. C. [1993]: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part VII: Shell intersections with 5/6-DOF finite element formulations*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **108**, 319–339.
487. SIMO J. C., ARMERO F. [1992]: *Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes*, Int. J. Num. Meth. Engng., **33**, 1413–1449.
488. SIMO J. C., ARMERO F., TAYLOR R. L. [1993]: *Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **110**, 359–386.
489. SIMO J. C., FOX D. D. [1989]: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **72**, 267–304.
490. SIMO J. C., FOX D. D., HUGHES T. J. R. [1992]: *Formulations of finite elasticity with independent rotations*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **95**, 277–288.
491. SIMO J. C., FOX D. D., RIFAI M. S. [1989]: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; Computational aspects*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **73**, 53–92.
492. SIMO J. C., FOX D. D., RIFAI M. S. [1990]: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **79**, 21–70.
493. SIMO J. C., KENNEDY J. G. [1992]: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part V: Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **96**, 133–171.
494. SIMO J. C., RIFAI M. S. [1990]: *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*, Int. J. Num. Meth. Engng., **29**, 1595–1638.
495. SIMO J. C., RIFAI M. S., FOX D. D. [1990]: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part IV: Variable thickness shells with through-the-thickness stretching*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **81**, 91–126.
496. SIMO J. C., RIFAI M. S., FOX D. D. [1992]: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part VI: Conserving algorithms for non-linear dynamics*, Int. J. Num. Meth. Engng., **34**, 117–164.
497. SIMO J. C., TARNOW N. [1994]: *A new energy and momentum conserving algorithm for the non-linear dynamics of shells*, Int. J. Num. Meth. Engng., **37**, 2527–2549.

498. SIMO J. C., TARNOW N., DOBLARE M. [1995]: *Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conserving algorithms*, Int. J. Num. Meth. Engng., **38**, 1431–1473.
499. SIMO J. C., TARNOW N., WONG K. K. [1992]: *Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **100**, 63–116.
500. SIMO J. C., VU-QUOC L. [1986]: *On the dynamics of flexible beams under large overall motions — The plane case: Part II*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **53**, 855–863.
501. SIMO J. C., VU-QUOC L. [1988]: *On the dynamics in space of rods undergoing large motions — A geometrically exact approach*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **66**, 125–161.
502. SIMO J. C., WONG K. K. [1991]: *Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum*, Int. J. Num. Meth. Engng., **31**, 19–52.
503. SMOLEŃSKI W. M. [1999]: *Statically and kinematically exact nonlinear theory of rods and its numerical verification*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **178**, 89–113.
504. SKOPINSKY V. N. [1997]: *Stress analysis of shell intersections with torus transition under internal pressure loading*, Trans. ASME, J. Press. Vess. Technol., **119**, 3, 288–292.
505. SKOPINSKY V. N. [2001]: *Stress concentration in cone-cylinder intersection*, Int. J. Press. Vess. & Piping, **78**, 1, 35–41.
506. SPENCE A., JEPSON D. [1985]: *Folds in the solution of two parametre systems and their calculation, Part I*, SIAM J. Numer. Anal., **22**, 347–368.
507. SPENCER A. J. M. [1971]: *Theory of invariants*, In: Eringen A. C. (ed.), Continuum Physics, **1**, 239–353; Academic Press, New York.
508. STANDER N., MATZENMILLER A., RAMM E. [1989]: *An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis*, Eng. Comput., **6**, 58–66.
509. STANLEY G. M., PARK K. C. HUGHES T. J. R. [1986]: *Continuum-based resultant shell elements*, In: Finite Element Methods for Plate and Shell Structures. Vol. 1: Element Technology, 1–45; Pineridge Press, Swansea, U.K.
510. STEIN E., LAMMERING R., WAGNER W. [1989]: *Stability problems in continuum mechanics and their numerical computation*, Ing.-Archiv, **59**, 89–105.
511. STOER J., BULIRSH R. [1980]: *Wstęp do metod numerycznych*, t. 2, PWN, Warszawa.
512. STOLARSKI H., BELYTSCHKO T. [1982]: *Membrane locking and reduced integration for curved elements*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **49**, 172–176.
513. STOLARSKI H., BELYTSCHKO T., CARPENTER N., KENNEDY J. M. [1984]: *A simple triangular curved shell element*, Eng. Comput., **1**, 210–218.
514. STRICKLIN J. A., HAISLER W. E., VON RIESEMANN W. A. [1971]: *Self-correcting initial value formulations in nonlinear structural mechanics*, AIAA J., **9**, 10, 2060–2067.

515. STRICKLIN J. A., HAISLER W. E., VON RIESEMANN W. A. [1973]: *Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically nonlinear structural analysis*, AIAA J., **11**, 3, 292–299.
516. STUELPNAGEL J. [1964]: *On the parameterization of the three-dimensional rotation group*, SIAM Review, **6**, 422–430.
517. STUMMEL F. [1980]: *The limitations of the patch test*, Int. J. Num. Meth. Engng., **15**, 177–188.
518. STUMPF H. [1986]: *General concept of the analysis of thin elastic shells*, ZAMM, **66**, 8, 337–350.
519. STUMPF H., MAKOWSKI J. [1986]: *On large strain deformation of shells*, Acta Mech., **65**, 153–168.
520. SURANA K. S. [1983]: *Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements*, Int. J. Num. Meth. Engng., **19**, 581–615.
521. SZILARD R. [1974]: *Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods*, Englewood Cliffs.
522. SZAMINA W. A. [1998]: *O postrojenii nelineijnoj tieorii tonkich stierzniej*, Izv. RAN., Mech. Tw. Tef, 3, 128–138.
523. SZKUTIN L. I. [1978]: *Tocznaja formulirowka urawnienij dieformirowanija tonkich obołoczek*, Sbornik: Prikładnyje Problemy Procznosti i Płasticznosti, **7**, 3–9; **8**, 38–42; **9**, 19–25, Gorkij.
524. SZKUTIN L. I. [1988]: *Miechanika deformacij gibkich tieł*, Nauka, Nowosibirsk.
525. SZWABOWICZ M. L. [1986]: *Variational formulation in the geometrically nonlinear thin elastic shell theory*, Int. J. Solids Str., **22**, 11, 1161–1175.
526. SZWABOWICZ M. L. [1999]: *Deformable surfaces and almost inextensional deflections of thin shells*, D.Sc. Dissertation, Zesz. Nauk. IMP PAN Nr 501/1460/99, 1–172; Wyd. IMP PAN, Gdańsk.
527. SZYMCZAK Cz. [1980]: *Optymalne kształtowanie prętów cienkościennych o bisymetrycznym przekroju dwuteowym z uwagi na wartości własne*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Nr 322, Bud. Łąd., **XXXV**, 1–86.
528. SZYMCZAK Cz., CHRÓŚCIELEWSKI J., LUBOWIECKA I. [2003]: *On the paradox of torsional buckling of thin-walled I columns*, Arch. Civil Engng., **49**, 1, 3–13.
529. ŠILHAVY M. [1997]: *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*, Springer-Verlag, Berlin.
530. TALBOT M., DHATT G. [1986]: *New shell elements for the analysis of pre and post-buckling problems*, In: Taylor C., Owen D. R. J., Hinton E., Damjanic F. B. (eds.), Numerical Methods for Non-Linear Problems, Vol. 3, 509–521; Pineridge Press, Swansea.
531. TALBOT M., DHATT G. [1987]: *Three discrete Kirchhoff elements for shell analysis with large geometrical non-linearities and bifurcations*, Eng. Comput., **4**, 15–22.

532. TAYLOR R. L. [1988]: *Finite element analysis of linear shell problems*, In: Whiteman J. R. (ed.), *The Mathematics of Finite Elements and Applications VI*, 191–203; Academic Press, London.
533. TAYLOR R. L., BERESFORD P. J., WILSON E. L. [1976]: *A non-conforming element for stress analysis*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **10**, 1211–1219.
534. TIEREGUŁOW I. G. [1962]: *K wariacjonnym mietodam w nieliniejnoy teorii uprugosti*, *Doklady AN SSSR*, **142**, 3, 568–571.
535. TIEREGUŁOW I. G. [1969]: *Izhib i ustojcziwost' tonkich plastin i obołoczek pri pōtuczestii*, Nauka, Moskwa.
536. TESÁR A., KUGLEROVA J. [2000]: *The influence of elasticity of joints on the behaviour of thin-walled structures*, *Thin-Walled Str.*, **36**, 1, 67–88.
537. TIMOSZENKO S. P. [1916]: *Kurs teorii uprugosti. Cz. 2: Stierżni i plastinki*, Tipografia A. E. Kollins, Pietrograd; Również w: Timoszenko S. P., *Kurs teorii uprugosti*, Grigoljuk E. I. (red.), Naukowa Dumka, Kijew 1972.
538. TIMOSHENKO S. P. [1921]: *On the corerection for shear of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars*, *Phil. Mag.*, Ser. 6, **41**, 245, 744–746; Również w: Timoshenko S. P., *The Collected Papers*, 288–290; McGraw-Hill B.Co., New York 1953.
539. TIMOSHENKO S. P. [1922]: *On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section*, *Phil. Mag.*, Ser. 6, **43**, 253, 125–131; Również w: Timoshenko S. P., *The Collected Papers*, 329–333; McGraw-Hill B.Co., New York 1953.
540. TIMOSHENKO S. P., GERE J. M. [1963]: *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa.
541. TIMOSHENKO S. P., WOJNOWSKY-KRIEGER S. [1959]: *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa.
542. TITEUX I., SANCHEZ-PALENCIA E. [2000]: *Junction of thin plates*, *Eur. J. Mech. – A/Solids*, **19**, 377–400.
543. TOCHER J.L., HARTZ B.J. [1967]: *Higher-order finite element for plane stress*, *J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE*, **93**, 4, 149–172.
544. TONTI E. [1984]: *Variational formulation for every non-linear problem*, *Int. J. Engng. Sci.*, **22**, 11/12, 1343–1371.
545. TRUESDELL C., NOLL W. [1965]: *The non-linear field theories of mechanics*, In: Flügge S. (ed.), *Handbuch der Physik*, Bd. III/3, 1–602; Springer-Verlag, Berlin.
546. TRUESDELL C. [1972]: *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, The John Hopkins Univ., Baltimore, MD; Wydanie rosyjskie: TRUESDELL K., *Pierwotaczal'nyj kurs racional'noj miechaniki spłosznnych sried*, Izd. Mir, Moskwa 1975.
547. TRUESDELL C. [1984]: *Rational Thermodynamics*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
548. TRUESDELL C., TOUPIN R. [1960]: *The Classical Field Theories*, In: Flügge S. (ed.), *Handbuch der Physik*, Vol. III/1, 226–793; Springer-Verlag, Berlin.

549. TURNER M. J., CLOUGH R. W., MARTIN H. C., TOPP L. J. [1956]: *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aero. Sci., **23**, 805–823.
550. UFLJAND JA. S. [1948]: *Rasprostranienije wołn pri popieriecznych koliebanijach stierżniej i płastin*, Prikl. Mat. Mech., **12**, 3, 287–300.
551. VALID R. [1981]: *Mechanics of Continuous Media and Analysis of Structures*, North-Holland P.Co., Amsterdam.
552. VALID R. [1992a]: *The nonlinear principles of complementary energy in shell theory, statics and dynamics. I. Statics*, Eur. J. Mech. A – Solids, **11**, 5, 625–651.
553. VALID R. [1992b]: *The nonlinear principles of complementary energy in shell theory, statics and dynamics. II. Dynamics*, Eur. J. Mech. A – Solids, **11**, 6, 761–834.
554. VALID R. [1995]: *The Nonlinear Theory of Shells through Variational Principles*, Wiley, Chichester.
555. VAN KEULEN F. [1993]: *A geometrically nonlinear curved shell element with constant stress resultants*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **106**, 315–352.
556. VAN KEULEN F., BOUT A., ERNST L. J. [1993]: *Nonlinear thin shell analysis using a curved triangular element*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **103**, 315–343.
557. VU-QUOC L., MORA J. A. [1989]: *A class of simple and efficient degenerated shell elements — Analysis of global spurious-mode filtering*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **74**, 117–175.
558. WAGNER W. [2000]: *Modeling of shell-beam transitions in the presence of finite rotations*, In: Ambrósio J. A. C., Kleiber M. (eds.), Computational Aspects of Nonlinear Structural Systems with Large Rigid Body Motion, 49–59, Proc. NATO Advanced Research Workshop, Pułtusk (Poland), July 2–7; IDMEC, Lisboa.
559. WALUKIEWICZ H., CHRÓSCIELEWSKI J. [1995]: *On stability of discretized nonlinear models of shells*, In: Proc. 4th Int. Conf. Modern Building Materials, Structures and Techniques, Vilnius, 189–194.
560. WAN F. Y. M., WEINITSCHKE H. J. [1988]: *On shells of revolution with the Love-Kirchhoff hypotheses*, J. Engng. Math., **22**, 285–334.
561. WANG C.-C., TRUESDELL C. [1973]: *Introduction to Rational Elasticity*, Noordhoff, Amsterdam.
562. WASZCZYSZYN Z. [1981]: *Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych*, W: Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji (Praca zbiorowa, Waszczyszyn Z. (red.)), 341–380; Ossolineum, Wrocław.
563. WASZCZYSZYN Z. [1983]: *Numerical problems of nonlinear stability analysis of elastic structures*, Comp. Struct., **17**, 13–24.
564. WASZCZYSZYN Z., CICHON CZ., RADWAŃSKA M. [1990]: *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Arkady, Warszawa.
565. WASZCZYSZYN Z., CICHON CZ., RADWAŃSKA M. [1994]: *Stability of Structures by Finite Element Methods*, Elsevier, Amsterdam et al.

566. WEICHERT D. [1987]: *Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie*, Mitt. Inst. für Mech., **53**, Ruhr-Universität, Bochum.
567. WEISS H. [2002]: *Dynamics of geometrically nonlinear rods: I – Mechanical models and equations of motion, II – Numerical methods and computational examples*, Nonlinear Dynamics, **30**, 4, 357–415.
568. WEKEZER J. W. [1989]: *Vibrational analysis of thin-walled bars with open cross sections*, J. Struct. Engng., **115**, 2965–2978.
569. WEMPNER G. [1969]: *Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells*, Int. J. Solids Str., **5**, 117–153.
570. WEMPNER G. [1971]: *Discrete approximations related to nonlinear theories of solids*, Int. J. Solids Str., **7**, 1581–1599.
571. WEMPNER G. [1986]: *A general theory of shells and the complementary potentials*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **53**, 4, 881–885.
572. WEMPNER G. [1989]: *Mechanics and finite elements of shells*, Appl. Mech. Rev., **42**, 129–142.
573. WHITE D. W., ABEL J. F. [1989]: *Testing of shell finite element accuracy and robustness*, Finite Elem. Anal. Design, **6**, 129–151.
574. WIŚNIEWSKI K. [1997]: *Finite rotations of shells and beams: Extended equations and numerical models*, Prace IPPT PAN, Nr 9/1997, Warszawa.
575. WIŚNIEWSKI K. [1998]: *A shell theory with independent rotations for relaxed Biot stress and right stretch strain*, Comput. Mech., **21**, 101–122.
576. WIŚNIEWSKI K., KLEIBER M., TURSKA E. [2000]: *Implicit kinematical parameters and sensitivity of finite rotation shells*, In: Ambrósio J. A. C., Kleiber M. (eds.), Computational Aspects of Nonlinear Structural Systems with Large Rigid Body Motion, 475–491, Proc. NATO Advanced Research Workshop, Pułtusk (Poland), July 2–7; IDMEC, Lisboa.
577. WIŚNIEWSKI K., TURSKA E. [2000]: *Kinematics of finite rotation shells with in-plane twist parameter*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **190**, 1117–1135.
578. WIŚNIEWSKI K., TURSKA E. [2001]: *Warping and in-plane twist parameters in kinematics of finite rotation shells*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **190**, 5739–5758.
579. WITKOWSKI W. [2004]: *Efektywny 4-węzłowy element skończony o wzbogaconym polu odkształceń w nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok*, Rozprawa doktorska (w przygotowaniu), Politechnika Gdańska, Wyd. Inż. Łąd., Gdańsk.
580. WOŁ’MIR A. S. [1956]: *Gibkije płastinki i obołoczki*, Gostiechizdat, Moskwa.
581. WOŹNIAK CZ. [1966]: *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa.
582. WOŹNIAK CZ. [1969]: *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*, PWN, Warszawa.
583. WOŹNIAK CZ. [1985]: *Mechanika ośrodków ciągłych*, W: Zorski H. (red.), Mechanika techniczna, tom I: Podstawy mechaniki, 377–436; PWN, Warszawa.
584. WOŹNIAK CZ. [1992]: *Mechanics of continuous media*, In: Zorski H. (ed.), Foundations of Mechanics, 405–483; PWN, Warszawa and Elsevier, Amsterdam.

585. WOŹNIAK CZ. (red.) [2001]: *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, Mechanika Techniczna, Tom VIII, PWN, Warszawa (autorzy: BORKOWSKI S., JEMIELITA G., MICHALAK B., NAGÓRSKI R., PIETRASZKIEWICZ W., RUDNICKI M., WOŹNIAK M., WOŹNIAK CZ.).
586. WOŹNIAK CZ., KLEIBER M. [1982]: *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN, Warszawa.
587. WOŹNIAK CZ., KLEIBER M. [1991]: *Nonlinear Mechanics of Structures*, Kluwer, Dordrecht.
588. WRIGGERS P., GRUTTMANN F. [1993]: *Thin shells with finite rotations formulated in Biot stresses: Theory and finite element formulation*, Int. J. Num. Meth. Engng., **36**, 2049–2071.
589. WRIGGERS P., SIMO J.C. [1993]: *A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points*, Int. J. Num. Meth. Engng., **30**, 155–176.
590. YAMADA T., KIKUCHI F. [1991]: *A 9-node mixed shell element based on the Hu–Washizu principle*, Comput. Mech., **7**, 149–171.
591. YANG H. T. Y., SAIGAL S., LIAW D. G. [1990]: *Advances of thin shell finite elements and some applications — version I*, Comp. Struct., **35**, 481–504.
592. YANG H. T. Y., SAIGAL S., MASUD A., KAPANIA R. K. [2000]: *A survey of recent shell finite elements*, Int. J. Num. Meth. Eng., **47**, 101–127.
593. ZBOIŃSKI G. [2001]: *Modelowanie hierarchiczne i metoda elementów skończonych do adaptacyjnej analizy struktur złożonych*, Rozprawa habilitacyjna, Zesz. Nauk. IMP PAN, Nr 520/1479, 1–304; Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk.
594. ZBOIŃSKI G., OSTACHOWICZ W. [2000]: *An algorithm of a family of 3D-based solid-to-shell transition, hpq/hp-adaptive finite elements*, J. Theor. Appl. Mech., **38**, 791–806.
595. ZENG Q., COMBESURE A. [1998]: *A new one-point quadrature, general non-linear quadrilateral shell element with physical stabilization*, Int. J. Num. Meth. Engng., **42**, 1307–1338.
596. ZHILIN P. A. [1976]: *Mechanics of deformable directed surfaces*, Int. J. Solids Str., **12**, 635–648.
597. ZIENKIEWICZ O. C. [1971]: *Incremental displacement in non-linear analysis*, Int. J. Num. Meth. Engng., **3**, 587–592.
598. ZIENKIEWICZ O. C. [1972]: *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa.
599. ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., TOO J. M. [1971]: *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*, Int. J. Num. Meth. Engng., **3**, 275–290.
600. ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L. [2000a]: *The Finite Element Method. Vol. 1. The Basis*, Butterworth–Heinemann, Oxford.
601. ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L. [2000b]: *The Finite Element Method. Vol. 2. Solid Mechanics*, Butterworth–Heinemann, Oxford.

602. ZUBOW L. M. [1975]: *Ob usłowijach potencial'nosti gidrostaticzeskoj nagruzki na obołoczku*, W: Trudy X Wses. Konf. po Teorii Obołoczek i Płastin I, 129–134; Mecniereba, Tbilisi.
603. ZUBOV L. M. [1982]: *Mietody nieliniejnoj teorii uprugosti w teorii obołoczek*, Izd. Rostowskiego Un-ta, Rostow-na-Donu.
604. ZUBOV L. M. [1997]: *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies*, Springer-Verlag, New York et al.
605. ŽILIN P. A. [1982]: *Osnownyje urawnienija nieklasiczeskoj teorii uprugich obołoczek*, Dinamika i Procznost' Maszin, Trudy Leningr. Politiech. In-ta, **386**, 29–46.
606. ŻYCZKOWSKI M. [1973]: *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa.