OBLICZANIE WALCOWYCH PRZEKRYĆ DACHOWYCH PORÓWNANIE METOD TARCZOWNICOWYCH I PRZYBLIŻENIA SCHORERA

EUGENIUSZ BIELEWICZ, WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ (Gdańsk)

1. Wstęp

Powłoki cylindryczne należą do ekonomicznych i prostych konstrukcyjnie przekryć dachowych, dlatego chętnie są stosowane w różnego rodzaju konstrukcjach inżynierskich.

Istnieje szereg metod obliczeniowych dla powłok o przekroju kołowym. Większość z nich wymaga dość długich i żmudnych obliczeń. Najprostszą z nich jest metoda oparta na przybliżonych założeniach Schorera (aproksymacja Schorera). Przy daleko posuniętej tabelaryzacji metoda ta może być z powodzeniem stosowana przez inżynierów — konstruktorów nie będących specjalistami w dziedzinie powłok. Porównanie wyników obliczeniowych metody Schorera z wynikami metod bardziej ścisłych zostało przeprowadzone w pracy [1] gdzie aproksymacja Schorera porównana została z metodą Finsterwaldera i metodą Donnella — Kármána — Jenkinsa. Z rozważań, obliczeń, a również dyskusji, która pracy tej towarzyszyła ,wynika że aproksymacja Schorera daje dla powłok średnich i długich wyniki nie różniące się praktycznie od wyników metod pozostałych. Dość znaczne różnice powstały jedynie w momentach zginających poprzecznych dla powłoki pojedynczej bez belek brzegowych, a więc dla powłoki nie mającej szerszego zastosowania w praktyce.

Drugim stosunkowo prostym sposobem obliczeń powłok walcowych jest zastąpienie powłoki przez ustrój nośny, składający się z cienkich płaskich płyt, czyli przez tarczownicę wpisaną i obliczenie tej tarczownicy, Na podstawie obliczonych sił wewnętrznych, działających w tarczownicy, można wnioskować o przebiegu i wielkości sił wewnętrznych w powłoce. Sposób ten jest również jedyną praktyczną metodą rozwiązywania powłok o niekołowym przekroju i zmiennej grubości. Istnieje szereg metod rozwiązywania tarczownic, różniących się między sobą założeniami, a przede wszystkim sposobem rozwiązania zagadnienia. Krótki rys historyczny rozwoju teorii zastosowania tarczownicy zastępczej do obliczania powłok walcowych jest podany w pracy [2]. Należy podkreślić, że dopiero D. Yitzhaki [3] wprowadził istotne udokładnienie metod tarczownicowych przy rozwiązaniu powłok walcowych, wprowadzając pewne poprawki do wykresu momentów zginających poprzecznych. Stwierdzono na podstawie wykonanych przez nas obliczeń, że dopiero przy uwzględnieniu tej poprawki wyniki metod tarczownicowych są porównywalne z wynikami aproksymacji Schorera.

Celem niniejszej pracy jest dokonanie pewnego przeglądu metod tarczownicowych oraz porównanie rozwiązań na nich opartych z rozwiązaniem przy użyciu przybliżenia Schorera.

Z metod tarczownicowych rozważono bardziej szczegółowo następujące, jako najbardziej różniące się między sobą i reprezentujące grupy metod zbliżonych (por. [2])

1) metoda Własowa [4],

2) metoda Girkmanna [5],

3) metoda nomograficzna i metoda deformacji według Krzemińskiego [6],

4) metoda postępowania bezpośredniego Yitzhaki'ego [3]. (Książka Yitzhaki'ego [3] zawiera cały szereg metod. Wybrano jedną, naszym zdaniem najlepszą.)

Rozważania przeprowadzono w oparciu o jednolite założenia, stąd niektóre metody zostały omówione przy częściowo zmodyfikowanych w stosunku do oryginalnych założeń.

Metodę aproksymacji Schorera stosowano według stabelaryzowanego sposobu podanego przez R. Dąbrowskiego [7].

Jako podstawę do rozważań ogólnych przyjęto przeprowadzone obliczenia powłoki pojedynczej i powłoki wewnętrznej o tych samych danych geometrycznych. Obliczenia wykonano wszystkimi wyżej wymienionymi metodami.

Przyjęto następujące kryteria porównawcze:

1) porównanie otrzymanych wartości naprężeń podłużnych oraz momentów zginających poprzecznych,

2) porównanie nakładu pracy i czasu potrzebnego do obliczenia powłoki,

3) porównanie potrzebnej dokładności i stopnia skomplikowania obliczeń,

4) możliwość stosowania poszczególnych metod przez osoby nie będące specjalistami w teorii powłok.

2. Metody tarczownicowe

Przyjęto następujące założenia:

1) w poszczególnych płytach tarczownicy uwzględnia się tylko odkształcenia podłużne,

2) momenty zginające podłużne i momenty skręcające są równe zeru,

3) poszczególne płyty, z wyjątkiem skrajnych, nie mają sztywności na skręcanie; nie pominięto w obliczeniach momentu na styku belki skrajnej i powłoki,

4) wszystkie płyty nie mają sztywności w kierunku prostopadłym do płaszczyzn płyty,

5) siły wewnętrzne wyznacza się dla jednego przekroju poprzecznego tarczownicy; ich rozkład podłużny odpowiada rozwinięciu w szereg według postaci drgań własnych tarczownicy jako belki,

6) przepony tarczownicy są sztywne tylko w swojej płaszczyźnie,

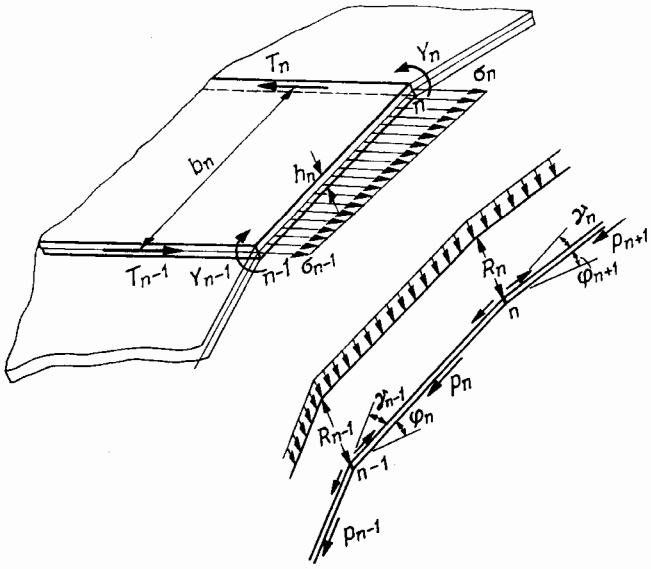
7) obciążenie zewnętrzne działa jedynie na krawędziach poszczególnych płyt,

8) ostateczny wykres momentów poprzecznych otrzymuje się przez uwzględnienie obciążenia działającego bezpośrednio na poszczególne płyty; obciążenie to wyznacza się na podstawie przebiegu sił normalnych poprzecznych tarczownicy (jest to poprawka Yitzhaki'ego, o której była mowa we wstępie).

Dla tarczownicy swobodnie podpartej o rozpiętości l obowiązują następujące znane zależności (rys. 1). Napisano je dla jednego wyrazu rozwinięcia w szereg w kierunku podłużnym.

Równanie sił stycznych:

$$\frac{T_{n-1}}{F_n} + 2T_n\left(\frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}}\right) + \frac{T_{n+1}}{F_{n+1}} = \frac{3}{\alpha}\left(\frac{p_n}{F_n b_n} + \frac{p_{n+1}}{F_{n+1} b_{n+1}}\right) \tag{2.1}$$



Rys. 1. Obciążenie i siły wewnętrzne tarczownicy swobodnie podpartej o rozpiętości *l*

gdzie:

$$F_n = b_n h_n; \quad \alpha = \frac{\pi}{l};$$

oraz

$$p_n = R_n \frac{\cos\varphi_{n+1}}{\sin\gamma_n} - R_{n-1}\frac{\cos\varphi_{n-1}}{\sin\gamma_{n-1}}. \tag{2.2}$$

Równania naprężeń normalnych:

$$\sigma_{n-1}\frac{F_n}{6} + \sigma_n\left(\frac{F_n}{3} + \frac{F_{n+1}}{3}\right) + \sigma_{n+1}\frac{F_{n+1}}{6} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{p_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{p_n}{b_n}\right). \tag{2.3}$$

Równania (2.1), (2.2), (2.3) dotyczą tarczownicy o płytach połączonych przegubowo.

W wyniku działania momentów poprzecznych Y_n powstają dodatkowe obciążenia w płaszczyznach płyt:

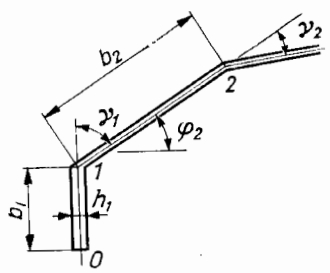
$$\Delta p_n = \left(\frac{Y_{n-1} - Y_n}{l_n} + \frac{Y_{n+1} - Y_n}{l_{n+1}}\right)\frac{\cos\varphi_{n+1}}{\sin\gamma_n} - \left(\frac{Y_{n-2} - Y_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{Y_n - Y_{n-1}}{l_n}\right)\frac{\cos\varphi_{n-1}}{\sin\gamma_{n-1}}. \tag{2.4}$$

Do obliczenia niewiadomych Y_n ustawia się równania zgodności kątów obrotu płyt na krawędziach:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b_{n+1}}\left[V_{n+1}(\operatorname{ctg}\gamma_{n+1} + \operatorname{ctg}\gamma_n) - \frac{V_{n+2}}{\sin\gamma_{n+1}} - \frac{V_n}{\sin\gamma_n}\right] - \\
&- \frac{1}{b_n}\left[V_n(\operatorname{ctg}\gamma_n + \operatorname{ctg}\gamma_{n-1}) - \frac{V_{n+1}}{\sin\gamma_n} - \frac{V_{n-1}}{\sin\gamma_{n-1}}\right] + \\
&+ \frac{2b_n}{Eh_n^3}(2Y_n + Y_{n-1}) + \frac{2b_{n+1}}{Eh_{n+1}^3}(2Y_n + Y_{n+1}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Dla krawędzi skrajnej przy uwzględnieniu sztywności skrętnej płyty brzegowej równanie to ma postać (rys. 2):

$$\frac{1}{b_2}\left[V_2(\operatorname{ctg}\gamma_2+\operatorname{ctg}\gamma_1)-\frac{V_3}{\sin\gamma_2}-\frac{V_1}{\sin\gamma_1}\right]+$$
$$+\frac{3}{Gb_1h_1^3\alpha^2}Y_1+\frac{2b_2}{Eh_2^3}(2Y_1+Y_2)=0,$$



Rys. 2. Krawędź skrajna

gdzie:

E — jest modułem sprężystości płyt,

G — modułem odkształcenia postaciowego.

Poza tym obowiązują zależności:

$$V_n=-\frac{\sigma_n-\sigma_{n-1}}{E\alpha^2 b_n}, \tag{2.6}$$

$$V_n=\frac{1}{EJ_n\alpha^4}\left[p_n+\Delta p_n-(T_n+\Delta T_n+T_{n-1}+\Delta T_{n-1})\frac{\alpha b_n}{2}\right] \tag{2.7}$$

gdzie ΔT_n jest siłą styczną na krawędzi tarcz od działania obciążenia Δp_n w układzie przegubowym połączeń płyt.

Wypisując powyższe zależności dla wszystkich wskaźników aktualnych dla danej tarczownicy, otrzymuje się układy równań liniowych. W zapisie macierzowym równaniom tym można nadać następującą postać (macierze oznaczono tłustym drukiem).

$$\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{p}, \quad \text{(odpowiednik (2.1))}, \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}, \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{F}_2\sigma=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{p}, \tag{2.10}$$

$$\Delta\boldsymbol{p}=\Phi_1\boldsymbol{Y}, \tag{2.11}$$

$$\Phi_2\boldsymbol{V}+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{Y}=0, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}_4\sigma, \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}_5(\boldsymbol{p}+\Delta\boldsymbol{p})+\boldsymbol{B}_6(\boldsymbol{T}+\Delta\boldsymbol{T}). \tag{2.14}$$

Równania te dotyczą przypadku obciążenia działającego na krawędzie. Różnice w poszczególnych metodach występują przy rozwiązaniu właśnie tego rodzaju obciążenia. Obcią-

żenie działające bezpośrednio na poszczególne płyty (poprawka Yitzhaki'ego) może być uwzględnione w ostatnim etapie obliczeń jednakowo we wszystkich metodach.

Rachunek macierzowy w trochę innej formie został użyty do rozwiązania tarczownic w pracy A. C. Scordelisa [8].

Zagadnienie tarczownicy opisane równaniami (2.8)÷(2.14) może być rozwiązane dwoma podstawowymi metodami: metodą sił i metodą przemieszczeń.

Równania metody sił otrzymuje się następująco: uwzględniając istnienie momentów zginających Y_n zamiast (2.10) można napisać:

$$\boldsymbol{F}_2\sigma = \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{p} + \Delta\boldsymbol{p}).$$

Po podstawieniu (2.11) otrzymuje się.

(2.15) $$\boldsymbol{F}_2\sigma = \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{p} + \Phi_1\boldsymbol{Y}):$$

Jest to jedna grupa równań.

Podstawiając do równania (2.12) równanie (2.13) otrzymuje się drugą grupę równań. Ostatecznie więc równania metody sił mają postać:

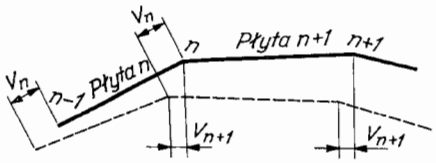
(2.16) $$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_2\sigma - \boldsymbol{B}_2\Phi_1\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{p}, \\ \Phi_2\boldsymbol{B}_4\,\sigma + \boldsymbol{B}_3\boldsymbol{Y} &= 0. \end{aligned}$$

Są to właśnie równania Własowa [4] z tą różnicą, że uwzględniona została tutaj również sztywność na skręcanie płyt skrajnych. Wpływ tej sztywności na rozkład momentów zginających poprzecznych jest bardzo istotny. Układ równań (2.16) można łatwo doprowadzić do postaci symetrycznej.

Metoda nomograficzna Krzemińskiego [6] jest również metodą sił, ale nie doprowadzoną do postaci równań (2.16). Autor początkowo eliminuje niewiadome σ_n, stosując nomogramy, doprowadzając do układu równań względem Y_n.

Metoda przemieszczeń polega na ułożeniu równań z niewiadomymi V_n (rys. 3). Z (2.12) można wyznaczyć:

(2.17) $$\boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{B}_3^{-1}\Phi_2\boldsymbol{V}.$$



Rys. 3. Przemieszczenia tarczownicy

Praktyczniejsze wydaje się zbudowanie macierzy $\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{B}_3^{-1}\Phi_2$ na innej drodze. Współczynniki tej macierzy można wyznaczyć zakładając kolejno $V_i = 1$; $V_k = 0$ dla $k \neq i$,

gdzie: $$i = 1, 2, \ldots n,$$
$$k = 1, 2, \ldots n$$

i obliczając metodą iteracji dla każdego przypadku rozkład momentów Y_n (tak, jak w metodzie Crossa — Błaszkowiaka dla ram).

Z (2.13) wyznacza się

(2.18) $$\sigma = \boldsymbol{B}_4^{-1}\boldsymbol{V}.$$

Macierz B_4 jest w zasadzie prostokątna. Do postaci kwadratowej doprowadza się ją przez dodanie równania równowagi, które po wyznaczeniu macierzy odwrotnej można odrzucić. Wówczas przy pomocy (2.17) i (2.18) układa się równanie (2.15). Po uporządkowaniu przyjmie ono postać:

$$(B_2^{-1}F_2B_4^{-1} - \Phi_1 K)V = p. \tag{2.19}$$

Macierze B_2^{-1} i B_4^{-1} mogą być podane w postaci gotowych wzorów.

O sposobie tym są wzmianki u W ł a s o w a [4]. K r z e m i ń s k i [6] stosuje dokładnie tę metodę, ale podając przykład liczbowy nie wykorzystuje symetrii układu i zalet operacji macierzowych.

W metodzie G i r k m a n n a [5] układa się równanie z niewiadomymi Y_n. Postępowanie jest następujące:

z równania (2.8) wyznacza się

$$T = F_1^{-1}B_1 p$$

i podobnie

$$\Delta T = F_1^{-1}B_1 \Delta p = F_1^{-1}B_1\Phi_1 Y,$$

po czym oba wyrażenia podstawia się do (2.14):

$$V = (B_5 + B_6F_1^{-1}B_1)(p + \Phi_1 Y),$$

a to ostatnie do równania (2.12).

Otrzymane wyrażenie jest szukanym równaniem

$$[\Phi_1(B_5 + B_6F_1^{-1}B_1)\Phi_1 + B_3]Y + \Phi_2(B_5 + B_6E_1^{-1}B_1)p = 0. \tag{2.20}$$

W metodzie postępowania bezpośredniego (design by direct procedure) Y i t z - h a k i ' e g o [3] operuje się układami sił krawędziowych (tzn. sił działających wzdłuż krawędzi tarczownicy). Liczba układów, które należy rozważyć, równa się liczbie krawędzi tarczownicy. Pierwszy układ sił krawędziowych pokrywa się z rzeczywistym obciążeniem R_n. Z (2.9) wyznaczyć wówczas można obciążenie p_n działające w płaszczyznach poszczególnych płyt. Następnie z (2.10)

$$\sigma = F_2^{-1}B_2 p.$$

Operację tę wykonuje się przy użyciu szybko zbieżnej iteracji. Potem z (2.13) wyznacza się

$$V = B_4F_2^{-1}B_2 p,$$

oraz Y z równania $Y = KV$ również drogą iteracji:

$$Y = KB_4F_2^{-1}B_2 p$$

dalej z (2.11)

$$\Delta p = \Phi_1 Y$$

oraz na podstawie (2.9)

$$\Delta R = C^{-1}\Delta p.$$

To znaczy, że rozwiązany przypadek odpowiada obciążeniu:

$$R + \Delta R = (J + C^{-1}\Phi KB_4F_2^{-1}B_2C)R \tag{2.21}$$

gdzie J jest macierzą jednostkową.

Następnie przyjmuje się samorównoważne układy obciążeń $\boldsymbol{R_a}$ i postępuje się jak poprzednio. Dalej układa się równanie którego sens statyczny jest taki, że pierwszy stan obciążenia dodany do sumy pozostałych stanów mnożonych przez nieznane współczynniki musi równać się obciążeniu rzeczywistemu:

$$(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{R}+(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{R_a a}=\boldsymbol{R}, \tag{2.22}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{F}_2^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}.$$

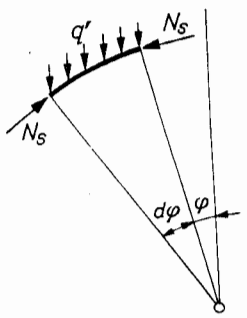
Po uproszczeniu:

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}+(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{R_a a}=0. \tag{2.23}$$

Liczba niewiadomych $\boldsymbol{a}$ jest równa $(n-1)$ jeżeli n — liczba stanów obciążenia. Po obliczeniu $\boldsymbol{a}$ wszystkie potrzebne wielkości wyznacza się jako sumę rozważanych stanów obciążeń. Yitzhaki ujął tę metodę w przejrzysty tabelaryczny zapis.

Poprawkę wykresu momentów poprzecznych uzyskuje się następująco. Po rozwiązaniu tarczownicy wyznacza się siły normalne o kierunku poprzecznym N_s i zakłada się, że takie siły normalne występują w powłoce. Z warunku równowagi obliczyć wówczas można równoważące obciążenie pionowe elementu powłoki (rys. 4).

$$q'=\frac{N_s}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{r}. \tag{2.24}$$



Rys. 4. Element powłoki

Obciążenie powodujące zmiany wykresu momentów poprzecznych wynosi:

$$q''=q-q', \tag{2.25}$$

gdzie q jest rzeczywistym obciążeniem powłoki.

Obciążenie q'' przyjmuje się jako działające na nieprzesuwny układ płyt. W obliczanych przykładach obciążenie to nie stanowiło samorównoważnego układu — nie było więc możliwości uwzględnienia podatności układu.

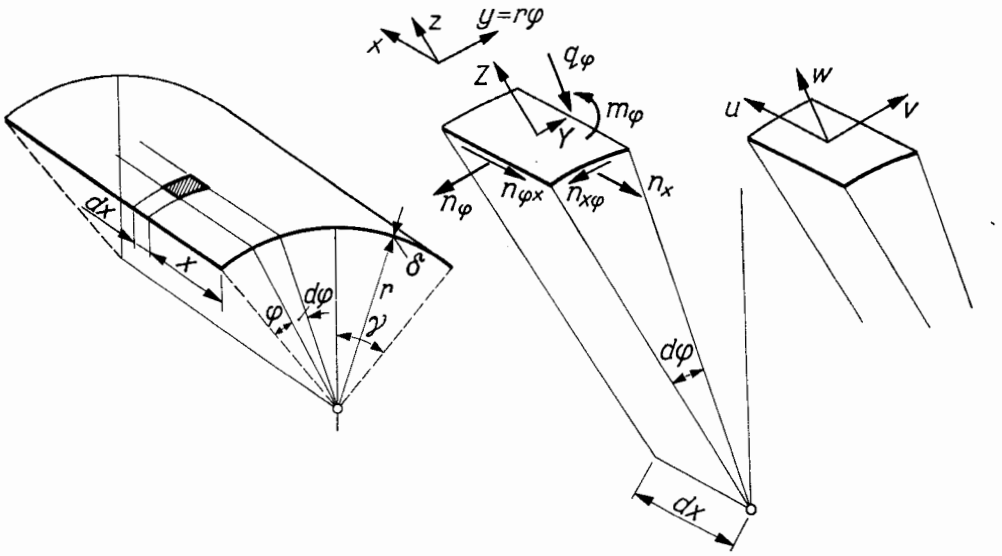
3. Przybliżenie Schorera

Postępowanie większości metod rozwiązania powłoki cylindrycznej o przekroju kołowym polega na ułożeniu równań równowagi dla elementu powłoki, powiązaniu stanu naprężenia ze stanem odkształcenia oraz na doprowadzeniu zagadnienia przez eliminację niewiadomych do równania różniczkowego względem jednej tylko niewiadomej. Metoda

S c h o r e r a różni się od pozostałych metod założeniem $\varepsilon_\varphi = \gamma_{x\varphi} = 0$. Wówczas zagadnienie powłoki może być sprowadzone do prostego równania różniczkowego dla składowej przemieszczenia w prostopadłej do powłoki. Równanie to ma postać

$$\frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial r^6}{J} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{r^4}{EJ}\left(\frac{\partial^3 Y}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial^4 Z}{\partial \varphi^4}\right), \tag{3.1}$$

gdzie E jest modułem sprężystości, a pozostałe oznaczenia są podane na rys. 5. Rysunek 5b podaje siły wewnętrzne elementu powłoki, a 5c — składowe stanu przemieszczenia. Tok rozwiązywania równania (3.1) jest podany w pracy [7].



Rys. 5. Powłoka cylindryczna o przekroju kołowym: *a*) oznaczenia, *b*) siły wewnętrzne elementu, *c*) składowe stanu przemieszczenia

Rozważając równanie jednorodne i przyjmując stałe zależne od warunków brzegowych tylko na jednym brzegu otrzymuje się rozwiązanie zawierające cztery dowolne stałe. Z otrzymanego rozwiązania łatwo można obliczyć pozostałe składowe przemieszczenia, jak również wszystkie siły wewnętrzne.

Tablica 1 zawiera zestawienie powyższych rozwiązań.

Ponieważ przy rozwiązaniu równania niejednorodnego (3.1) wpływ zginania dla powłok średnich i długich jest bez większego znaczenia, można dla działania obciążenia równomiernego q założyć stan błonowy. W rozwiązaniu tym zostały uwzględnione składowe stanu odkształcenia ε_x i $\gamma_{x\varphi}$, założono jedynie stałą P o i s s o n a $\nu = 0$.

Tablica 1*)

Zestawienie rozwiązań wg przybliżenia Schorera

$$W = M[(a_1\cos a_2\varphi + a_2\sin a_2\varphi)e^{-a_1\varphi} + (a_3\cos a_1\varphi + a_4\sin a_1\varphi)e^{-a_2\varphi}]$$

W	M	a_1	a_2	a_3	a_4
m_φ	$\frac{EJ}{r^3}\frac{\varrho^2}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi x}{l}$	$A-B$	$A+B$	$-C-D$	$C-D$
q_φ	$\frac{EJ}{r^3}\varrho^3\sin\frac{\pi x}{l}$	$-nA+mB$	$-mA-nB$	$mC-nD$	$nC+mD$
n_φ	$-\frac{EJ}{r^3}\varrho^4\sin\frac{\pi x}{l}$	$-B$	A	D	$-C$
$n_{x\varphi}$	$-\frac{EJ}{r^3}\frac{\varrho^5}{\lambda}\cos\frac{\pi x}{l}$	$nA+mB$	$-mA+nB$	$-mC-nD$	$nC-mD$
n_x	$\frac{EJ}{r^3}\frac{\varrho^6}{\lambda^2\sqrt{2}}\sin\frac{\pi x}{l}$	$-A-B$	$A-B$	$C-D$	$C+D$
u	$-\frac{\lambda}{\varrho^2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi x}{l}$	$-A-B$	$A-B$	$C-D$	$C+D$
V	$\frac{1}{\varrho}\sin\frac{\pi x}{l}$	$mA+nB$	$-nA+mB$	$nC+mD$	$-mC+nD$
$\Theta=\frac{\partial w}{r\partial\varphi}$	$\frac{\varrho}{r}\sin\frac{\pi x}{l}$	$-mA+nB$	$-nA-mB$	$-nC+mD$	$-mC-nD$
w	$1\sin\frac{\pi x}{l}$	A	B	C	D

gdzie: $\lambda=\frac{\pi r}{l}$, $\varrho=\sqrt[8]{12\frac{r^2}{\delta^2}\lambda^4}$, $J=\frac{\delta^3}{12}$,

$m=0{,}9239$, $n=0{,}3827$,

$a_1=0{,}9239\,\varrho$, $a_2=0{,}3827\,\varrho$.

*)Według [7]

Oto zestawienie wzorów wynikowych:

$$n_\varphi = -qr\cos(\varphi-\gamma)\sin kx,$$

$$n_{x\varphi} = \frac{2q}{k}\sin(\varphi-\gamma)\cos kx,$$

$$n_x = -\frac{2q}{rk^2}\cos(\varphi-\gamma)\sin kx, \tag{3.2}$$

$$u = \frac{2qr^2}{E\delta\lambda^2}\cos(\varphi-\gamma)\cos kx,$$

$$v = \frac{qr^2}{E\delta}\eta\sin(\varphi-\gamma)\sin kx,$$

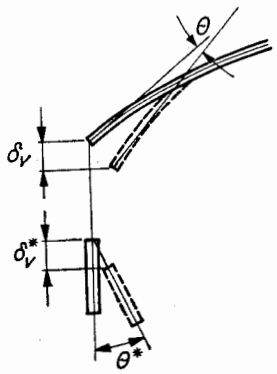
$$w = -\frac{qr^2}{E\delta}(1+\eta)\cos(\varphi-\gamma)\sin kx,$$

gdzie:

$$\eta = \frac{4}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^4}. \qquad \text{oraz } k = \frac{\pi}{l}.$$

Stałe dowolne występujące w rozwiązaniu równania jednorodnego wyznacza się z warunków brzegowych zależnych od rodzaju powłoki. Dla powłoki pojedynczej z belką brzegową mają one postać (rys. 6):

$$\text{(3.3)} \quad \begin{aligned} &1)\ q_\varphi \sin\gamma + n_\varphi \cos\gamma = 0, \\ &2)\ \Theta = \Theta^*, \\ &3)\ \delta_v = \delta_v^*, \\ &4)\ u = u^*. \end{aligned}$$



Rys. 6. Powłoka pojedyncza z belką brzegową

W równaniach tych

Θ — jest kątem obrotu brzegu powłoki,

δ — przemieszczeniem pionowym brzegu powłoki,

$*$ — oznacza, że dana wielkość odnosi się do belki brzegowej.

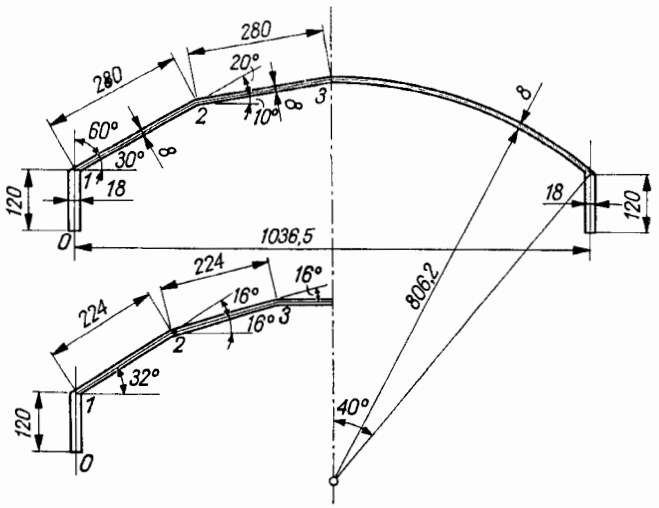
W sposób stosunkowo prosty może być również uwzględniony wpływ drugiego brzegu. Równaniom (3.3) można nadać przejrzysty tabelaryczny zapis, który zawiera praca [7]. Dla powłoki wewnętrznej z belką brzegową równania warunkowe są następujące:

$$\begin{aligned} &1)\ w \sin\gamma - u \cos\gamma = 0, \\ &2)\ \Theta = 0, \\ &3)\ \delta_v = \delta_v^*, \\ &4)\ u = u^*. \end{aligned}$$

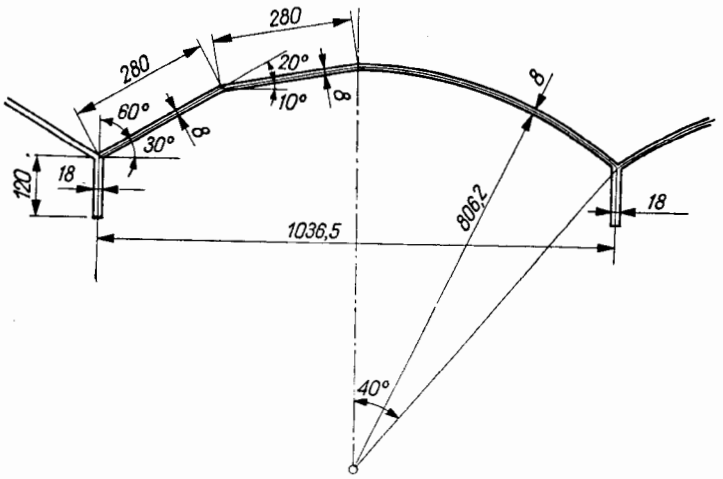
Po wyznaczeniu stałych z układu równań wykresy sił wewnętrznych otrzymuje się z gotowych wzorów.

4. Przykłady liczbowe

Za podstawę do analizy poszczególnych metod przyjęto przeprowadzone obliczenia powłok jednoprzęsłowych, pojedynczej (rys.7) i wewnętrznej (rys.8), swobodnie podpartych na sztywnych przeponach skrajnych, o takich samych danych geometrycznych.



Rys. 7. Powłoka jednoprzęsłowa pojedyncza



Rys. 8. Powłoka jednoprzęsłowa wewnętrzna

Powłoki rozwiązano metodami tarczownicy zastępczej podanymi na wstępie, oraz przy pomocy przybliżenia S c h o r e r a. Do metod tarczownicy zastępczej zastosowano podział powłoki na 6 tarcz, oraz dodatkowo powłokę pojedynczą przy podziale na 7 tarcz obliczono metodami W ł a s o w a [4] i Y i t z h a k i ' e g o [3].

Jako materiał przyjęto żelbet $\gamma = 2{,}4$ T/m^3,

$$E = 210\,000 \text{ kG/cm}^2, \quad \nu = 0, \quad G = 105\,000 \text{ kG/cm}^2.$$

Obliczenia przeprowadzono dla obciążenia symetrycznego ciężarem własnym $q = 0{,}214$T/m^2.

W celu ujednolicenia wyników przyjęto:

dla naprężeń: (+) — rozciąganie,
(—) — ściskanie,

dla momentów: (+) — dolne włókna rozciągane,
(—) — górne włókna rozciągane.

W tablicach 2, 3 i 4 są podane wyniki obliczeń powłok metodami tarczownicy zastępczej.

Tablica 2

Powłoka pojedyncza — podział na 6 tarcz

σ_n, Y_n / Metody	Naprężenia kG/cm^2				Momenty kGm		
	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	Y_1	Y_2	Y_3
Girkmanna [5]	+54,10	—11,32	—13,32	—3,28	+136,8	—45,4	—190,9
Własowa [4]	+54,10	—11,32	—13,32	—3,28	+136,8	—45,4	—190,9
nomograficzna [6]	+53,86	—10,91	—13,41	—3,45	+136,2	—44,4	—192,4
przemieszczeń [6]	+53,88	—10,63	—13,32	—3,62	+138,5	—45,0	—190,3
Yitzhaki'ego [3]	+53,83	—12,54	—13,60	—3,03	+140,4	—48,0	—195,0

Tablica 3

Powłoka pojedyncza — podział na 7 tarcz

σ_n, Y_n / Metody	Naprężenia kG/cm^2				Momenty kGm		
	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	Y_1	Y_2	Y_3
Własowa [4]	+50,58	—8,44	—14,69	—6,40	+109,8	+27,2	—155,0
Yitzhaki'ego [3]	+50,51	—8,38	—14,62	—6,39	+110,0	+25,0	—154,0

Tablica 4

Powłoka wewnętrzna — podział na 6 tarcz

σ_n, Y_n / Metody	Naprężenia kG/cm^2				Momenty kGm			Siła poziom. kG/m
	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	Y_1	Y_2	Y_2	H
Własowa [4]	+44,75	+17,68	—13,90	—19,98	—99,26	+131,0	—162,8	+10,94
Girkmanna [5]	+44,93	+17,65	—13,88	—20,02	—99,47	+131,3	—162,9	+10,96
Yitzhaki'ego [3]	+44,78	+17,66	—13,96	—19,89	—104,0	+138,0	—166,0	+10,92
przemieszczeń [6]	+44,74	+17,69	—13,87	—20,04	—98,59	+131,2	—163,6	+10,90

5. Porównanie metod tarczownicy zastępczej

Wyniki przykładu liczbowego pozwalają stwierdzić, że metody tarczownicy zastępczej pod względem dokładności wyników są równowartościowe. Różnice w ostatecznych wartościach poprzecznych momentów zginających, naprężeń podłużnych oraz naprężeń stycznych nie przekraczają 2,5 %, które uważa się w ogóle za dokładność obliczeń statycznych. Można więc mówić o jednym wspólnym wyniku metod tarczownicowych (np. wynik otrzymany z metody Własowa [4]).

Inne kryteria podane na wstępie wykazują pewne charakterystyczne dla poszczególnych metod różnice.

Poniżej dana jest krótka analiza poszczególnych metod tarczownicy zastępczej.

Metoda Girkmanna [5] jest metodą dokładną o stosunkowo prostej teorii. Obliczenia sprowadzają się do rozwiązania dwóch układów równań liniowych typu (2.8) i (2.20). Metoda ta wymaga zastosowania maszyny do liczenia. Obliczenia prowadzone sposobem podanym w [5] są jednak pracochłonne — obliczenie łupiny kołowej trwa 10 — 14 godz. Po zastosowaniu tabelaryzacji są możliwości skrócenia czasu obliczeń do 7—9 godz.

Metoda Własowa [4] jest metodą dokładną i efektywną, o przejrzystym układzie obliczeń. Obliczenia sprowadzają się do ułożenia i rozwiązania układu ośmioczłonowych równań różniczkowych, sprowadzonego przy pomocy funkcji fundamentalnych do symetrycznego układu równań liniowych, który można łatwo rozwiązać skróconym algorytmem Gaussa. Dla tarczownicy wewnętrznej wprowadzono dodatkową niewiadomą — siłę poziomą H. Wówczas należy rozwiązać układ równań dziewięcioczłonowych. Metoda Własowa odznacza się dużą pewnością obliczeń (skrócony algorytm Gaussa jest samosprawdzalny). W pracy [4] są podane gotowe tabele współczynników równań liniowych dla różnych tarczownic przy pominięciu sztywności na skręcanie tarczy skrajnych. Na podstawie równań (2.16) można ułożyć tabele współczynników uwzględniając sztywność skrętną tarczy skrajnej (ma to duże znaczenie dla dokładności wyników).

Zastosowanie nomogramów oraz tabelaryzacja do metody sił podane przez Krzemińskiego w pracy [6], prowadzi do zwiększenia pracochłonności obliczeń. Nie stwierdzono zalet praktycznych nomogramów. Tę samą operację można wykonać przy pomocy szybko zbieżnej iteracji w krótszym czasie. Obliczenia przeprowadzono tylko dla tarczownicy zewnętrznej.

Metoda Yitzhaki'ego [3] jest metodą przybliżoną, posiadającą szereg zalet praktycznych. Do kompletu obliczeń w zupełności wystarczy: tabela danych wyjściowych, ogólna tabela obliczeniowa oraz pewne obliczenia pośrednie, część których może być w ogóle nie dołączana do obliczeń. Obliczenie tarczownicy trwa 4 — 6 godz. Zadziwiająca jest zbieżność wyników metody [3] w porównaniu do metod dokładnych (np. metoda [4]), mimo, że wszystkie obliczenia wykonano przy pomocy suwaka logarytmicznego 50 cm. Należy jednak zaznaczyć, że w metodzie [3] ze względu na skrócony zapis tabelaryczny oraz na odmienne od przyjętych w Polsce oznaczenia dodatnich kierunków działania sił i sposobów iteracji łatwo o pomyłkę. Po pewnej jednak wprawie te trudności znikają.

W metodzie przemieszczeń w której niewiadomymi są przemieszczenia w płaszczyźnie tarcz V_n, ostateczny układ równań ma około dwa razy mniej niewiadomych, niż w meto-

dach sił. Szczególnie szybko i prosto rozwiązuje się tarczownice, stosując rachunek macierzowy, istota którego podana jest w części ogólnej (wzory (2.17) — (2.19)). Czas obliczenia tarczownicy nie przekracza 4 — 6 godz.

Porównując poszczególne metody można zauważyć, że metody Girkmanna [5], Własowa [4] oraz nomograficzna [6] bazują na metodzie sił. Bezwzględnie najbardziej efektywną z tych trzech metod jest metoda Własowa, odznaczająca się szybkością i dużą pewnością obliczeń. Natomiast metody Własowa [4], Yitzhaki'ego [3] oraz metoda przemieszczeń [6], z uwagi na kryteria podane na wstępie, są mniej więcej równoważne. Obliczenie typowej tarczownicy symetrycznej nie przekracza 5 — 6 godz. Wydaje się, że decydujące znaczenie ma tu stopień opanowania danej metody, rutyna oraz osobiste skłonności pracownika wykonywującego obliczenia (np. do metod iteracyjnych).

Obliczenie tarczownic symetrycznych pod dowolnym obciążeniem można rozbić na symetrię i antysymetrię i wyniki superponować. Układ pod obciążeniem antysymetrycznym posiada z zasady mniej niewiadomych od symetrycznego, więc nakład pracy dla obciążenia dowolnego zwiększa się mniej niż dwukrotnie.

6. Porównanie przybliżenia Schorera z metodą tarczownicy zastępczej

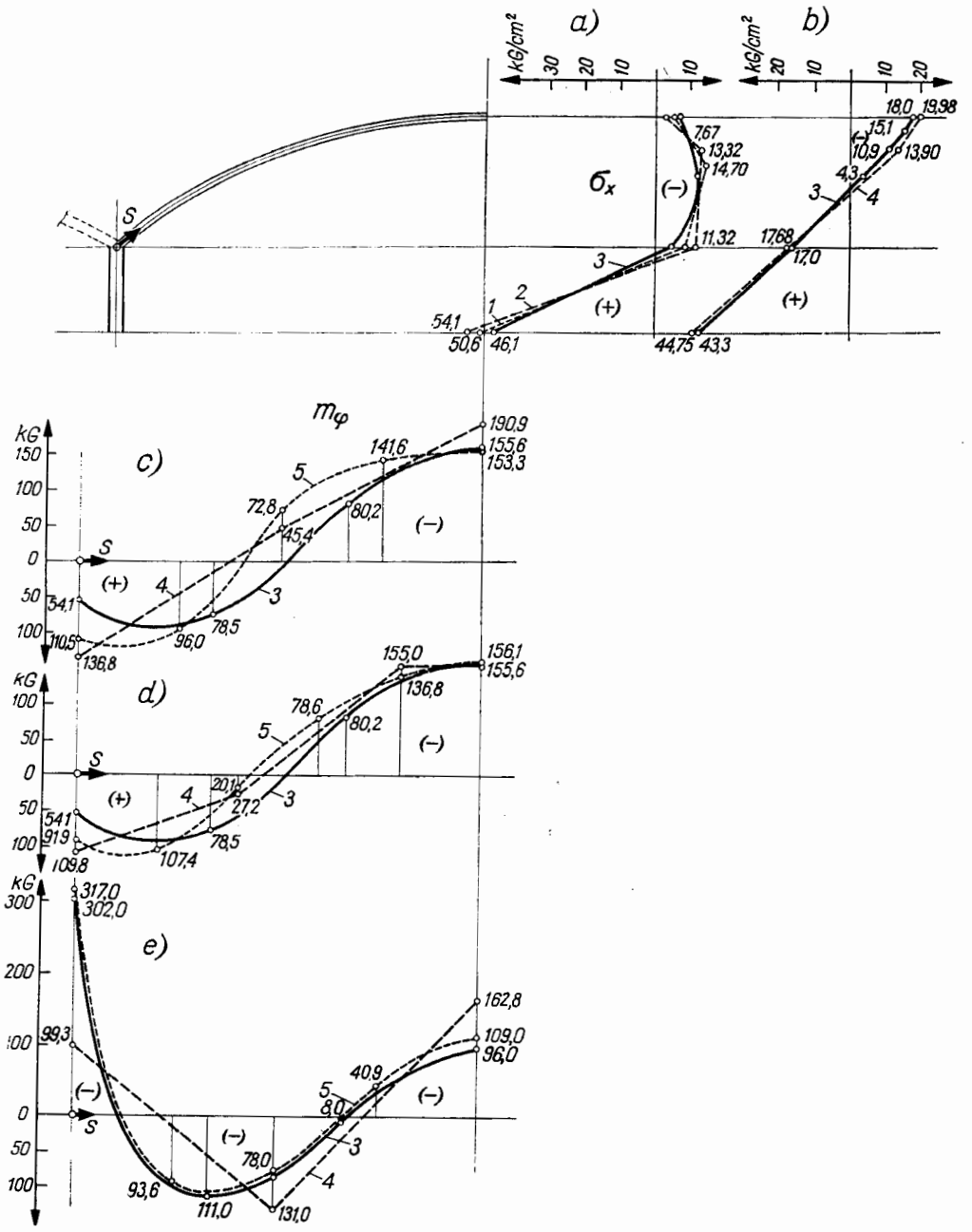
Na podstawie rozważań w p. 3 oraz pracy [5] przeprowadzono obliczenia łupiny pojedynczej i wewnętrznej przybliżeniem Schorera, które potwierdzają, odnośnie nakładu pracy, dane zawarte w [1].

Obliczenie łupiny symetrycznej pod symetrycznym obciążeniem trwa 4—6 godz., przy czym większość operacji można wykonać na suwaku logarytmicznym. Jedynie rozwiązanie układu czterech równań względem stałych przeprowadzono na maszynie do liczenia przy pomocy ogólnego algorytmu Gaussa. Korzystając z gotowych wzorów stabelaryzowanego sposobu podanego w [7] obliczenia przeprowadza się niemal mechanicznie.

Na rys. 9 zestawiono wyniki obliczeń łupiny otrzymane z metod tarczownicowych oraz przybliżenia Schorera. Przyjęto jeden wynik metod tarczownicowych — według metody Własowa [4]. Wykresy wykonano na prostej, będącej rozwinięciem linii kołowej powłoki.

Wykres porównawczy wskazuje na znaczną rozbieżność momentów zginających poprzecznych szczególnie dla powłoki wewnętrznej (niektóre rzędne różnią się od siebie kilkakrotnie) oraz na mniejszą, rzędu 10%, rozbieżność w naprężeniach normalnych. Jeżeli wielkości naprężeń normalnych, otrzymane z metod tarczownicy zastępczej, można uważać za praktycznie dobre, to wykres momentów poprzecznych nie odzwierciedla rzeczywistego rozkładu momentów w powłoce.

Wprowadzona przez Yitzhaki'ego poprawka do wykresu momentów, jak wskazują obliczenia, pozwala na otrzymanie praktycznie poprawnego wykresu momentów w powłoce. Większe różnice występują w łupinie pojedynczej na krawędzi łączącej powłokę i belkę brzegową. Po wprowadzeniu poprawki do momentów z rozwiązania powłoki pojedynczej dzielonej na 6 i 7 tarcz, otrzymano różne wykresy momentów zginających



Rys. 9. Wykresy porównawcze sił wewnętrznych; naprężenia: *a*) powłoka pojedyncza, *b*) powłoka wewnętrzna, *1*-Własow (6 tarcz,), *2*-Własow (7 tarcz), *3*-Schorer; momenty zginające poprzeczne: *c*)powłoka pojedyncza (6 tarcz), *d*) powłoka poiedyncza (7 tarcz), *e*) powłoka wewnętrzna *3*-Schorer, 4-Własow, 5-poprawka Yitzhaki'ego

poprzecznych, z tym, że wykres otrzymany z podziału powłoki na 7 tarcz był bliższy rzeczywistego według przybliżenia Schorera. Świadczy to o tym, że ostateczne wyniki rozwiązania łupiny metodą tarczownicy zastępczej zależą od przyjętego podziału powłoki na tarcze.

7. Wnioski

Nakład pracy przy obliczeniu powłoki najefektywniejszymi metodami tarczownicy zastępczej i przybliżeniem Schorera jest mniej więcej równoważny. Jednakże wykres momentów poprzecznych otrzymany z rozwiązania tarczownicy bez poprawki Yitzhaki'ego nie daje rzeczywistego rozkładu momentów poprzecznych w powłoce.

Powłoki cylindryczne o przekroju kołowym celowo jest obliczać przy pomocy przybliżenia Schorera.

Stosowanie metod tarczownicowych należy ograniczyć do powłok o niekołowym przekroju poprzecznym i zmiennej grubości, stosując do wykresu momentów poprzecznych poprawkę Yitzhakie'go.

Literatura cytowana w tekście

[1] Mc Namee J. J.: *Existing Methods for the Analysis of Concrete Shell Roofs*, Proceedings of a Symposium on Concrete Shell Roof Construction, London 1954
[2] Dąbrowski R.: *Recenzja pracy* [3], „Czasopismo techniczne", nr 5, s. 52, Kraków 1961
[3] Yitzhaki D.: *The Design of Prismatic and Cylindrical Shell Roofs*, Haifa 1958
[4] Własow W. Z.: *Tonkostiennyje prostranstwiennyje sistemy*, Gosstrojizdat, 1958
[5] Girkmann K.: *Dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1958
[6] Krzemiński J.: *Nowe metody obliczania łupin walcowych*, Warszawa 1955
[7] Dąbrowski R: *Zur Berechnung der kreiszylindrischen Schalendächer nach der Näherung von* Schorer, „Beton — und Stahlbetonbau" z. 1,1963
[8] Scordelis A. C.: *Matrix Formulation of the Folded Plate Equations*, „Journal of the Structural Division", Proc. of the ASCE, October 1960

РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ. СРАВНЕНИЕ МЕТОДА ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА ШОРЕРА

Резюме

Работа относится к технической теории цилиндрических оболочек. Рассматривается расчет оболочек средней и большой длины методом призматической оболочки и на основании приближенного метода Шорера. Обсуждаются и сравниваются, в отношении пригодности для практического расчета, следующие методы призматичеекой складчатой оболочки: Власова, Гиркманна, Кжеминского и Ицаки, а затем полученные результаты сопоставляются с решением основанным на приближенном методе Шорера. Сравнение основано на некоторых общих рассуждениях проведенных в матричной записи и на расчете одинарной и внутренней оболочки, свободно опертой и подверженной симметричной нагрузке.

Формулируются следующие заключительные выводы:

1. Оболочки кругового сечения целесообразно расчитывать с помощью приближенного метода Шорера (метод призматической оболочки не дает существенной экономии объема тельных работ).

2. При пользовании методом призматической оболочки следует применять так называемое уточнение Ицаки к диаграмме трансверсальных изгибающих моментов.

DESING OF CYLINDRICAL SHELL ROOFS. CONFRONTATION OF FOLDED PLATE METHODS AND S H O R E R' S APPROXIMATION

Summary

The paper deals with the practical theory of cylindrical shells. The analysis of shells of medium and large lengths is considered by means of the auxiliary folded plate and by using Shorer's approximation. The methods of the auxiliary folded plate structure in the form suggested by Własow, Girkmann, Krzemiński and Yitzhaky, are confronted from the point of view of the usefulness for practical design purposes. The corresponding results are compared with the solution obtained according to Shorer's approximation. The comparison is based on certain general considerations in the matrix notation, and on the analysis of a single and interior shell simply supported and subject to symmetrical loading.

The final conclusions are:

1. For the analysis of shells with circular cross-section Shorer's approximation should be applied (the method of the auxiliary folded plate structure yields no essential decrease in the amount of computational work).
2. In using the auxiliary folded-plate methods the so-called Yitzhaky's correction for the transversal bending moment diagrams should be applied.

Praca wpłynęła do Redakcji 6. 6. 1962