

## O LINIOWEJ TEORII POWŁOK O MAŁEJ WYNIOSŁOŚCI

WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ (GDAŃSK)

## 1. Wstęp

Równania podstawowe liniowej teorii powłok o małej wyniosłości, podane przez WŁASOWA [8] i przedyskutowane przez wielu autorów, napisane są w układzie wektorów podstawowych powierzchni środkowej powłoki (nazywanym dalej bazą  $\mathbf{a}_i$ ); niewiadomymi są składowe wielkości wektorowych również w bazie  $\mathbf{a}_i$ .

GREEN i ZERNA [1] wyrazili wielkości geometryczne powierzchni środkowej powłoki  $M$  za pośrednictwem wielkości geometrycznych rzutu powłoki na płaszczyznę  $\Pi$  o bazie  $\mathbf{e}_i$  oraz przez znaną funkcję wyniosłości powłoki  $z(\theta^1, \theta^2)$ . Otrzymane równania podane są w bazie  $\mathbf{a}_i$ , niewiadomymi są składowe szukanych wielkości wektorowych w bazie  $\mathbf{e}_i$ . W tej koncepcji wektor  $\mathbf{e}_3$  ma stały kierunek niezależny od funkcji wyniosłości  $z(\theta^1, \theta^2)$ . Pozwala to (po przyjęciu geometrycznych i fizycznych założeń upraszczających teorii powłok o małej wyniosłości) na proste powiązanie niektórych zależności dla powłok ze znanymi zależnościami dla płyt i płaskiego stanu naprężeń. Może to być również wykorzystane przy budowaniu rozwiązań wieloznacznych dla powłok o małej wyniosłości o dwu- i wielospójnym obszarze (por. [7 i 9]).

W niniejszej pracy podano opracowaną w sposób ścisły liniową teorię powłok o małej wyniosłości opartej na koncepcjach Greena i Zerny [1]. Wszystkie wielkości wektorowe oraz równania wektorowe liniowej teorii powłok wyrażono konsekwentnie w składowych bazy  $\mathbf{e}_i$  uwzględniając założenia upraszczające dla powłok o małej wyniosłości. Sformułowano obie analogie statyczno-geometryczne oraz podano trzy metody sprowadzenia w inwariantnej postaci układu równań podstawowych do jednego równania rozwiązującego. Przy dodatkowym założeniu o małej zmienności krzywizny powłoki wszystkie trzy metody prowadzą do rozwiązania tego samego zespolonego równania różniczkowego czwartego rzędu przy różnym określeniu całki szczególnej [10].

## 2. Zależności wstępne

Podstawowe oznaczenia przejęto od Greena i Zerny [1].

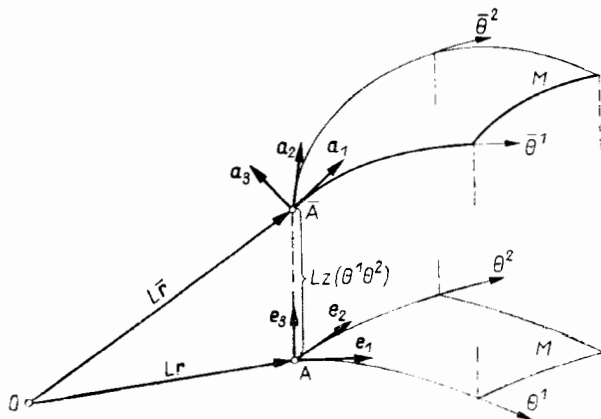
2.1. Zależności geometryczne. Wektor wodzący punktów powłoki ma postać [1]

$$\mathbf{R} = L \{ \bar{\mathbf{r}}(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) + \lambda \theta^3 \mathbf{a}_3(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) \}.$$

Z powierzchnią  $M$  (rys. 1) związane są wielkości  $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_3, a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta}, \bar{I}^{\gamma}_{\alpha\beta}$  itd. [1]. Z płaszczyzną  $\Pi$  związane są wielkości  $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_3, e_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta}, I^{\gamma}_{\alpha\beta}$  itd. [1]. Przyjmując układy współrzędnych  $\bar{\theta}^\alpha$  i  $\theta^\alpha$  tak, by dla odpowiadających sobie punktów  $\bar{A}$  i  $A$ ,  $\bar{\theta}^\alpha_A = \theta^\alpha_A$ , wektor  $\bar{\mathbf{r}}$  można przedstawić w postaci

$$\bar{\mathbf{r}}(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) \equiv \bar{\mathbf{r}}(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + z(\theta^1, \theta^2) \mathbf{e}_3.$$

Ścisłe zależności między wielkościami związanymi z  $M$  i  $\Pi$  podano w [1].



Rys. 1

2.2. Niektóre zależności liniowej teorii powłok. Przy uwzględnieniu założeń Kirchhoffa-Love'a przemieszczenia punktów powłoki określa wektor [1 i 3],

$$\mathbf{V} = L \{ \mathbf{v} + \lambda \theta^3 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}_3 \}$$

gdzie

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{a}_\alpha + v^3 \mathbf{a}_3, \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \Omega^3 \mathbf{a}_3,$$

$$\Omega^\alpha = \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} (v_{3,\beta} + b_\beta^\rho v_\rho), \quad \Omega^3 = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^{\beta\alpha} v_{\alpha\|\beta}.$$

Znany układ równań nierozdzielności można otrzymać z warunku znikania składowych tensora Riemanna-Christoffela dla odkształconej powłoki jako trójwymiarowego ciała sprężystego [5] lub bezpośrednio z równań Codazziego i równania Gaussa dla odkształconej powierzchni środkowej powłoki [2]. Dla potrzeb niniejszej pracy celowe jest przedstawienie równań nierozdzielności w postaci zależności wektorowej. Zależność taką można otrzymać z warunków [3]

$$\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} \boldsymbol{\Omega}_{,\alpha\beta} = \mathbf{0}, \quad \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} \mathbf{v}_{,\alpha\beta} = \mathbf{0},$$

skąd po wykonaniu różniczkowania mamy [3]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \{ \bar{\varepsilon}^{\alpha\gamma} \bar{\varepsilon}^{\delta\beta} \mu_{\gamma\beta\|\alpha} + b_\alpha^\delta \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} \zeta_{\beta\delta} \} \mathbf{a}_\delta + \{ \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} \zeta_{\alpha\|\beta} + b_{\alpha\delta} \bar{\varepsilon}^{\alpha\gamma} \bar{\varepsilon}^{\delta\beta} \mu_{\gamma\beta} \} \mathbf{a}_3 &= \mathbf{0}, \\ \{ \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} \alpha_{\alpha\delta\|\beta} + \zeta_\delta \} \mathbf{a}^\delta + \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} \{ b_\alpha^\delta \alpha_{\beta\delta} - \mu_{\alpha\beta} \} \mathbf{a}_3 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

gdzie [3 i 5]

$$(2.2) \quad \begin{aligned} a_{\rho\lambda} &= \frac{1}{2}(v_{\rho||\lambda} + v_{\lambda||\rho}) - b_{\rho\lambda} v_3, \\ \mu_{\rho\lambda} &= -v_{3||\rho\lambda} - (b_{\lambda}^{\alpha} v_{\alpha})_{||\rho} - \frac{1}{2} \delta_{\gamma\lambda}^{\alpha\beta} b_{\rho}^{\gamma} v_{\alpha||\beta}, \\ \zeta_{\alpha} &= \bar{\varepsilon}^{\delta\gamma} a_{\gamma\alpha||\beta}. \end{aligned}$$

Równania wektorowe równowagi mają postać [1]

$$(2.3) \quad \mathbf{N}_{x,\alpha} + \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{x,\alpha} + \mathbf{a}_{\alpha} \times \mathbf{N}_{\alpha} = \mathbf{0}.$$

### 3. Powłoki o małej wyniosłości

**3.1. Założenia.** Zależności dla powłok o małej wyniosłości otrzymano przy następujących założeniach:

a) Zależności podstawowe liniowej teorii powłok, z których otrzymano zależności dla powłok o małej wyniosłości, oparte są na założeniach geometrycznych i fizycznych Kirchhoffa-Love'a [2 i 3].

b) Dla wielkości geometrycznych powierzchni środkowej powłoki  $M$ , określanych na podstawie wielkości geometrycznych rzutu powłoki, możemy stosować oszacowania

$$(3.1) \quad |z_{,\alpha}| < 1, \quad |z|_{\alpha\beta}| < 1,$$

gdzie  $<$  oznacza «wielkość niższego rzędu». Będziemy pomijali iloczyny tego typu wyrazów w porównaniu z jednością.

c) Stan naprężeń i przemieszczeń w powłoce jest taki, że możemy stosować oszacowania

$$(3.2) \quad |q^{\alpha}| < |n^{\alpha\beta}|, \quad |v_{\alpha}| < |v_3|.$$

d) Zmiany krzywizn powierzchni  $M$  są małe i można przyjąć, że krzywizna jest stała przy różniczkowaniu kowariantnym:

$$(3.3) \quad (z|_{\beta}^{\alpha} A_{\lambda}^{\rho\cdot\cdot})_{|\delta} \approx z|_{\beta}^{\alpha} A_{\lambda}^{\rho\cdot\cdot}{}_{|\delta}.$$

W pracy założenie d) wykorzystano wyłącznie do sprowadzenia układu równań w przemieszczeniach i funkcjach naprężeń do jedynego równania rozwiązującego.

**3.2. Zależności przybliżone.** Wszystkie wielkości wektorowe dane na powierzchni  $M$  rozłożymy konsekwentnie według bazy  $\mathbf{a}_i$  oraz  $\mathbf{e}_i$  [1]:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}_{\alpha} &= \sqrt{a}(n^{\alpha 0} \mathbf{a}_0 + q^{\alpha} \mathbf{a}_3) = \sqrt{e}(k^{\alpha 0} \mathbf{e}_0 + g^{\alpha} \mathbf{e}_3), \\ \mathbf{M}_{\alpha} &= \sqrt{a} m^{\alpha 0} \bar{\varepsilon}_{\rho\lambda} \mathbf{a}^{\rho} = \sqrt{e}(h^{\alpha 0} \varepsilon_{\rho\lambda} \mathbf{e}^{\rho} + h^{\alpha} \mathbf{e}_3), \\ \mathbf{P} &= \sqrt{a}(p^{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} + p^3 \mathbf{a}_3) = \sqrt{e}(s^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + s^3 \mathbf{e}_3), \\ \mathbf{v} &= v^{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} + v^3 \mathbf{a}_3 = u^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + u^3 \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Wielkości  $k^{\alpha 0}$ ,  $g^{\alpha}$ ,  $h^{\alpha 0}$  i  $h^{\alpha}$  są tensorami na płaszczyźnie i zdefiniowane są w nieco inny, bardziej bezpośredni sposób niż w pracy [1].

Przy uwzględnieniu założeń (3.1) i (3.2) można uwzględnić następujące zależności przybliżone [1]:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} a_{\alpha\beta} &\approx e_{\alpha\beta}, & a^{\alpha\beta} &\approx e^{\alpha\beta}, & b_{\alpha\beta} &\approx z|_{\alpha\beta}, \\ \bar{T}_{\beta\gamma}^{\alpha} &\approx T_{\beta\gamma}^{\alpha}, & \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} &\approx \varepsilon_{\alpha\beta}, \\ \mathbf{a}_{\alpha} &= \mathbf{e}_{\alpha} + z_{,\alpha} \mathbf{e}_3, & \mathbf{a}_3 &\approx \mathbf{e}_3 - z|_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \end{aligned}$$

oraz

$$(3.6) \quad \begin{aligned} n^{\alpha\varrho} &\approx k^{\alpha\varrho}, & q^{\alpha} &\approx g^{\alpha} - k^{\alpha\varrho} z_{,\varrho}, \\ m^{\alpha\varrho} &\approx h^{\alpha\varrho}, & h^{\alpha} &\approx m^{\alpha\varrho} \varepsilon_{\varrho\lambda} z|_{\lambda}, \\ p^{\alpha} &\approx s^{\alpha} + z|_{\alpha} s^3, & p^3 &\approx s^3 - z_{,\alpha} s^{\alpha}, \\ v_{\alpha} &\approx u_{\alpha} + z_{,\alpha} u_3, & v_3 &\approx u_3. \end{aligned}$$

W zależności analogicznej do (3.6)<sub>3</sub> Green i Zerna [1] przyjmują ponadto  $p^3 \approx s^3$  oraz  $p^{\alpha} \approx s^{\alpha}$ . Jednakże dla różnych przypadków oszacowania obciążenia powierzchniowego  $|p^{\alpha}| \lesssim |p^3|$  przy założeniu (3.1) jednoczesne pominięcie drugich wyrazów w (3.6)<sub>3</sub> nie jest możliwe.

#### 4. Równania podstawowe dla powłok o małej wyniosłości

Równania podstawowe liniowej teorii powłok o małej wyniosłości otrzymamy z równań ogólnej teorii powłok przy uproszczeniach wynikających z założeń geometrycznych (3.1) i fizycznych (3.2). Wszystkie zależności zbudowano używając składowych w bazie rzutu powłoki  $\mathbf{e}_i$ .

Po podstawieniu (3.6)<sub>4</sub> do (2.2) przy uwzględnieniu (3.1) zależności dla tensorów odkształceń przyjmą postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \alpha_{\varrho\lambda} &= \frac{1}{2} (u_{\varrho|\lambda} + u_{\lambda|\varrho} + z_{,\varrho} u_{3,\lambda} + z_{,\lambda} u_{3,\varrho}), \\ \mu_{\varrho\lambda} &= -u_{3|\varrho\lambda}, \\ \zeta_{\alpha} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\gamma} (u_{\gamma|\alpha\delta} + z_{,\gamma} u_{3|\alpha\delta} + z_{|\alpha\delta} u_{3,\gamma}). \end{aligned}$$

Równania nierozdzielności, które funkcje  $\alpha_{\varrho\lambda}$ ,  $\mu_{\varrho\lambda}$  oraz  $\zeta_{\alpha}$  według (4.1) spełniają tożsamościowo, otrzymamy z zależności wektorowej (2.1). Przedstawiając (2.1) w układzie wektorów bazy  $\mathbf{e}_i$  przy uwzględnieniu (3.5) oraz (4.1) otrzymano

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} \mu_{\gamma\beta|\alpha}\} \mathbf{e}_{\delta} + \{\varepsilon^{\alpha\beta} \zeta_{\alpha|\beta} + (\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} \mu_{\gamma\beta} z_{,\alpha})|_{\delta}\} \mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}, \\ \{\varepsilon^{\alpha\beta} \alpha_{\alpha\delta|\beta} + \zeta_{\delta}\} \mathbf{e}^{\delta} + \{\varepsilon^{\alpha\beta} \alpha_{\alpha\delta|\beta} + \zeta_{\delta}\} z|_{\delta} \mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}; \end{aligned}$$

stąd po eliminacji  $\zeta_{\alpha}$  mamy

$$(4.2) \quad (\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} \mu_{\gamma\beta})|_{\alpha} = 0, \quad (\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} \mu_{\gamma\beta} z_{,\alpha})|_{\delta} - (\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} \alpha_{\gamma\beta})|_{\alpha\delta} = 0.$$

Równania równowagi otrzymamy z zależności wektorowej (2.3) ogólnej teorii przedstawiając ją w układzie wektorów bazy  $\mathbf{e}_i$ . Po uwzględnieniu (3.4), (3.5) i (3.6) otrzymano

$$\begin{aligned} \sqrt{e} \{k^{\alpha\delta} |_{\alpha} + s^{\delta}\} \mathbf{e}_{\delta} + \sqrt{e} \{(k^{\alpha\delta} z, \alpha) |_{\delta} + q^{\alpha} |_{\alpha} + s^3\} \mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}, \\ \sqrt{e} \{h^{\alpha\delta} |_{\alpha} - q^{\delta}\} \mathbf{e}_{\delta} + \sqrt{e} \{h^{\alpha\delta} |_{\alpha} - q^{\delta}\} z, \delta \mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}; \end{aligned}$$

stąd po eliminacji  $q^{\alpha}$  znajdziemy

$$(4.3) \quad k^{\alpha\delta} |_{\alpha} + s^{\delta} = 0, \quad (k^{\alpha\delta} z, \alpha) |_{\delta} + h^{\alpha\delta} |_{\alpha\delta} + s^3 = 0.$$

Równania konstytutywne wynikają z równań pierwszego przybliżenia Love'a liniowej teorii powłok [2] po uwzględnieniu tam zależności (3.5), (3.6) i (4.1) [1]:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} k^{\alpha\beta} &= DH^{\alpha\beta\varrho\lambda} \alpha_{\varrho\lambda}, \quad \alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{E\lambda L} H_{\alpha\beta\varrho\lambda}^{-1} k^{\varrho\lambda}, \\ h^{\alpha\beta} &= BH^{\alpha\beta\varrho\lambda} \mu_{\varrho\lambda}, \quad \mu_{\alpha\beta} = \frac{12}{E\lambda^3 L} H_{\alpha\beta\varrho\lambda}^{-1} h^{\varrho\lambda}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.5) \quad \begin{aligned} H^{\alpha\beta\varrho\lambda} &= \frac{1}{2} \{e^{\alpha\varrho} e^{\beta\lambda} + e^{\alpha\lambda} e^{\beta\varrho} + \nu (e^{\alpha\varrho} e^{\beta\lambda} + e^{\alpha\lambda} e^{\beta\varrho})\}, \\ H_{\alpha\beta\varrho\lambda}^{-1} &= \frac{1}{2} \{e_{\alpha\varrho} e_{\beta\lambda} + e_{\alpha\lambda} e_{\beta\varrho} - \nu (e_{\alpha\varrho} e_{\beta\lambda} + e_{\alpha\lambda} e_{\beta\varrho})\}, \\ A &= \frac{12(1-\nu^2)}{\lambda^2}, \quad B = \frac{E\lambda L}{A}, \quad D = \frac{E\lambda L}{1-\nu^2}, \quad k = \frac{E\lambda L}{\sqrt{A}}. \end{aligned}$$

Z porównania równań (4.2) oraz jednorodnych równań (4.3) wynika pierwsza analogia statyczno-geometryczna [2 i 3]:

$$(4.6) \quad k^{\alpha\delta} \leftrightarrow \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} \mu_{\gamma\beta}, \quad h^{\alpha\delta} \leftrightarrow -\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} \alpha_{\gamma\beta}.$$

Otrzymany układ równań podstawowych [równania nierozdzielności (4.2), równania równowagi (4.3) oraz równania konstytutywne (4.4)] zawiera tylko składowe w bazie rzutu powłoki. Pierwsza analogia (4.5) podana jest również między składowymi w bazie rzutu powłoki.

### 5. Trzy metody rozwiązywania równań podstawowych

Układ równań podstawowych (4.2), (4.3) i (4.4) podanego wariantu liniowej teorii powłok o małej wyniosłości można rozwiązywać trzema metodami:

- 1) w przemieszczeniach  $u_{\alpha}$ ,  $u_3$ ,
- 2) w funkcjach naprężeń  $\varphi_{\alpha}$ ,  $\varphi_3$ ,
- 3) metodą mieszaną, przyjmując za niewiadome  $u_3$ ,  $\varphi_3$ .

Pierwsze dwie są analogiczne do metod rozwiązywania równań ogólnych liniowej teorii powłok [2 i 6], natomiast wszystkie trzy metody są stosowane przy rozwiązy-

waniu równań efektu brzegowego w liniowej teorii powłok [4]. Za niewiadome przyjmuje się wtedy oczywiście niewiadome  $v_\alpha$ ,  $v_3$  lub  $\psi_\alpha$ ,  $\psi_3$ , a więc składowe w bazie wektorów podstawowych powłoki  $\mathbf{a}_i$ .

Podobnie jak dla równań efektu brzegowego, mimo różnych wyjściowych założeń upraszczających, przy dodatkowym założeniu (3.3) o małej zmienności krzywizny powłoki wszystkie trzy metody sprowadzone zostały w postaci inwariantnej do rozwiązania tego samego zespolonego równania różniczkowego czwartego rzędu przy różnym określeniu całki szczególnej.

**5.1. Rozwiązanie w przemieszczeniach.** Równania równowagi (4.3) po wyrażeniu  $k^{\alpha\delta}$  i  $h^{\alpha\delta}$  przez  $u_\alpha$ ,  $u_3$  wg (4.4) i (4.1) przyjmą postać

$$(5.1) \quad H^{\alpha\delta\mu\nu} a_{\mu\nu|\alpha} + \frac{1}{D} s^\delta = 0, \quad H^{\alpha\delta\mu\nu} \left\{ (a_{\mu\nu} z, \alpha)_{|\delta} + \frac{\lambda^2}{12} \mu_{\mu\nu|\alpha\delta} \right\} + \frac{1}{D} s^3 = 0.$$

Otrzymano podstawowy układ równań w przemieszczeniach. Dla konkretnej danej powłoki [po rozwinięciu równań (5.1) w przyjętym układzie współrzędnych] trzy równania (5.1) mogą być sprowadzone do jednego równania przez bezpośrednią eliminację  $u_\alpha$  metodą wyznaczników operatorowych lub też za pośrednictwem wyrażenia funkcji  $u_\alpha$  i  $u_3$  przez funkcję przemieszczeń odpowiednio dobraną do danej powłoki i układu współrzędnych. Tak postępuje Własow [8] i szereg innych autorów.

Istnieje jednakże możliwość bezpośredniego sprowadzenia układu równań (5.1) w inwariantnej postaci do jednego równania przy przyjęciu *dodatkowego* założenia (3.3) o małej zmienności krzywizny powłoki. Założenie (3.3) dla najczęściej stosowanych powłok o małej wyniosłości jest spełnione.

Wyraźmy  $u_\alpha$  i  $u_3$  przez funkcję przemieszczeń  $F$  za pomocą zależności (por. [4])

$$(5.2) \quad u_\mu = 2z \left|_\mu^\lambda F \right|_{\alpha\lambda}^{\alpha} - z \left|_\alpha^\lambda F \right|_{\lambda\mu}^{\alpha} + \nu \delta_{\lambda\alpha}^{\sigma\tau} z \left|_\sigma^\lambda F \right|_{\tau\mu}^{\alpha} - z, \mu F \left|_{\alpha\lambda}^{\alpha\lambda} + \bar{u}_\mu, \quad u_3 = F \left|_{\alpha\lambda}^{\alpha\lambda},\right.$$

gdzie  $\bar{u}_\mu$  spełnia układ równań

$$H^{\alpha\delta\mu\nu} \bar{u}_{\mu\nu|\alpha} + \frac{1}{D} s^\delta = 0.$$

Dla tensorów odkształceń (4.1) otrzymano wyrażenia

$$(5.3) \quad \alpha_\mu^\nu = \delta_{\beta\gamma}^{\alpha\delta} z \left|_\alpha^\beta (\nu F \right|_{\delta\mu}^{\gamma\nu} - \delta_{\mu\lambda}^{\nu\alpha} F \left|_{\delta\alpha}^{\gamma\lambda}) + \frac{1}{2} (\bar{u}_{\mu\nu} \left|^\nu + \bar{u}^\nu \left|_\mu), \quad \mu_\mu^\nu = -F \left|_{\alpha\lambda\mu}^{\alpha\lambda\nu}.$$

Funkcje (5.3) spełniają tożsamościowo równania (5.1)<sub>1</sub>. Równanie (5.1)<sub>2</sub> po przekształceniach przyjmie postać

$$(5.4) \quad F \left|_{\alpha\beta\alpha\lambda}^{\alpha\beta\alpha\lambda} + A \delta_{\nu\delta}^{\mu\beta} \delta_{\alpha\lambda}^{\alpha\nu} z \left|_\mu^\gamma z \left|_\alpha^\alpha F \right|_{\beta\nu}^{\delta\lambda} = p,$$

$$p = \frac{A}{E\lambda L} \{s^3 + DH^{\alpha\delta\mu\nu} \bar{u}_{\mu\nu} z \left|_{\alpha\delta}\}.$$

Po znalezieniu całki szczególnej  $\overset{p}{F}$  równania (5.4)<sub>1</sub> całkę ogólną  $\overset{\circ}{F}$  można znaleźć z równania

$$(5.5) \quad \overset{\circ}{F} \left|_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} \mp i \sqrt{A} \delta_{\alpha\lambda}^{\alpha\nu} z \left|_\alpha^\alpha \overset{\circ}{F} \left|_\nu^\lambda = 0.$$

Tak więc rozwiązanie w przemieszczeniach sprowadza się ostatecznie do rozwiązania równania (5.5) oraz wyznaczenia całki szczególnej (5.4)<sub>1</sub> przy wyrazie wolnym (5.4)<sub>2</sub>.

**5.2. Rozwiązanie w funkcjach naprężeń.** Zbudujmy wektor funkcji naprężeń  $\mathbf{v}^*$  o postaci analogicznej do wektora przemieszczeń  $\mathbf{v}$  wg (3.4)<sub>4</sub> oraz (3.6)<sub>4</sub>:

$$(5.6) \quad \mathbf{v}^* = \varphi_\alpha \mathbf{a}^\alpha + \varphi_3 \mathbf{a}^3 = \varphi_\alpha \mathbf{e}^\alpha + \varphi_3 \mathbf{e}^3, \\ \varphi_\alpha \approx \varphi_\alpha + z, \quad \varphi_3 \approx \varphi_3.$$

Zgodnie z analogią (4.6) rozwiązanie równań równowagi (4.3) można przedstawić w postaci

$$(5.7) \quad k^{\alpha\delta} = k^{\alpha\delta} + k \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} \mu_{\gamma\beta}^*, \quad h^{\alpha\delta} = h^{\alpha\delta} - k \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} \alpha_{\gamma\beta}^*,$$

gdzie  $k^{\alpha\delta}$  i  $h^{\alpha\delta}$  są całkami szczególnymi równań (4.3) oraz  $\alpha_{\alpha\lambda}^*$ ,  $\mu_{\alpha\lambda}^*$  funkcjami analogicznymi do (4.1), zbudowanymi według  $\varphi_\alpha$ ,  $\varphi_3$  zamiast odpowiednich  $U_\alpha$ ,  $U_3$  w (4.1).

Układ równań nierozdzielności (4.2) po wprowadzeniu wg (4.4) oraz (5.7) funkcji naprężeń  $\varphi_\alpha$  i  $\varphi_3$  ma postać:

$$(5.8) \quad H^{*\alpha\delta\mu\nu} \alpha_{\mu\nu|\alpha} + \frac{1}{D} s^{*\delta} = 0, \\ H^{*\alpha\delta\mu\nu} \left\{ (\alpha_{\mu\nu}^* z, \alpha)_{|\delta} + \frac{\lambda^2}{12} \mu_{\mu\nu|\alpha\delta}^* \right\} + \frac{1}{D} s^{*3} = 0,$$

gdzie

$$(5.9) \quad s^{*\delta} = - \frac{\sqrt{A}}{1-\nu^2} \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} H_{\gamma\beta e\lambda}^{-1} h^{e\lambda} |_\alpha, \\ s^{*3} = \frac{\sqrt{A}}{1-\nu^2} \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} H_{\gamma\beta e\lambda}^{-1} \left[ \frac{\lambda^2}{12} k^{e\lambda} |_{\alpha\delta} - (h^{e\lambda} z, \alpha)_{|\delta} \right], \\ H^{*\alpha\delta\mu\nu} = \frac{1}{2} \{ e^{\alpha\mu} e^{\delta\nu} + e^{\alpha\nu} e^{\delta\mu} - \nu (e^{\alpha\mu} \varepsilon^{\delta\nu} + e^{\alpha\nu} \varepsilon^{\delta\mu}) \}.$$

Z porównania jednorodnych równań (5.8) oraz (5.1) wynika, że rozwiązania ich różnią się tylko znakiem współczynnika Poissona:

$$(5.10) \quad (+\nu)_u \leftrightarrow (-\nu)_\varphi.$$

Jest to *druga analogia* statyczno-geometryczna [2 i 6]. Przy dodatkowym założeniu (3.3) układ (5.8) można więc również w inwariantnej postaci sprowadzić do jednego równania przez wprowadzenie funkcji naprężeń  $\Phi$  wg (5.2), przy czym funkcje  $u_\mu$ ,  $u_3$ ,  $\bar{u}_\mu$ ,  $(+\nu)$  i  $F$  należy odpowiednio zastąpić przez  $\varphi_\mu$ ,  $\varphi_3$ ,  $\bar{\varphi}_\mu$   $(-\nu)$ , i  $\Phi$ . Rozwiązanie sprowadza się więc do rozwiązania równania jednorodnego (5.5) oraz znalezienia całki szczególnej równania (5.4)<sub>1</sub> dla wyrazu wolnego odpowiednio zbudowanego z wielkości  $s^{*3}$ ,  $H^{*\alpha\delta\mu\nu}$  i  $\bar{\varphi}_\mu$ .

W tej metodzie, mimo prostych wzorów (5.7) na wyznaczenie sił wewnętrznych, należy najpierw wyznaczyć całkę szczególną równań równowagi.

**5.3. Rozwiązanie metodą mieszaną.** Zgodnie z pierwszą analogią (4.6) równanie (4.3)<sub>1</sub> można spełnić przez funkcję

$$(5.11) \quad k^{\alpha\delta} = \bar{k}^{\alpha\delta} + k\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} \mu_{\gamma\beta}^*,$$

gdzie  $\bar{k}^{\alpha\delta}$  spełnia układ równań

$$\bar{k}^{\alpha\delta} |_{\alpha} + s^{\delta} = 0.$$

Z (4.3)<sub>2</sub> oraz (4.2)<sub>2</sub> otrzymamy następujące równanie dla metody mieszanej:

$$(5.12) \quad \Psi |_{\alpha e}^{\alpha e} + i \sqrt{A} \delta_{\delta\beta}^{\alpha\gamma} z |_{\alpha}^{\delta} \Psi |_{\gamma}^{\beta} = q,$$

$$q = \frac{A}{E\lambda L} (s^3 - z, {}_a s^{\alpha} + \bar{k}^{\alpha\delta} z |_{\alpha\delta}) \pm i \frac{\sqrt{A}}{E\lambda L} (\delta_{\delta e}^{\alpha\lambda} \bar{k}_{\lambda}^{\delta} |_{\alpha}^{\delta} + \nu s^{\alpha} |_{\alpha}),$$

$$\Psi = u_3 \pm i\varphi_3.$$

W [1] wprowadzono funkcję naprężeń Airy'ego za pomocą zależności typu

$$k^{\alpha\delta} = \bar{k}^{\alpha\delta} + \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\delta\beta} \varphi |_{\gamma\beta}.$$

Tak więc istnieje odpowiedniość  $\varphi \leftrightarrow -k\varphi_3$ . Jednak funkcja Airy'ego  $\varphi$  w pracach [1 i 8] oraz u innych autorów nie może być uważana za składową wektora  $\mathbf{v}^*$  w kierunku stałego wektora  $\mathbf{e}_3$ . Dopiero przez powiązanie jej z funkcją  $\varphi_3$  można funkcję  $\varphi$  traktować również jako składową wektora  $-\frac{1}{k}\mathbf{v}^*$  w kierunku  $\mathbf{e}_3$ . W ten sposób otrzymane w pracy [9] na drodze geometrycznej wyrażenia dla  $\varphi_3$  mogą być uważane za słuszne również dla funkcji Airy'ego  $\varphi$ .

Prócz (5.12) można otrzymać również inne równania dla metody mieszanej, np. wprowadzając funkcje zespolone  $\varphi_3 \pm iu_3$ ,  $\varphi \pm i\frac{1}{k}u_3$  itp.

## 6. Uwagi końcowe

Analogiczne trzy metody rozwiązania można podać dla określenia składowych wektorów  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{v}^*$  w bazie  $\mathbf{a}_i$  (czyli  $v_{\alpha}$ ,  $v_3$  oraz  $\psi_{\alpha}$ ,  $\psi_3$ ). Przy dodatkowym założeniu (3.3), wszystkie trzy metody można sprowadzić w inwariantnej postaci do takich samych równań jak w p. 5. Należy tylko odpowiednio zmodyfikować wzory pośrednie.

W przypadkach gdy obciążenie zewnętrzne oraz warunki brzegowe formułowane są w składowych bazy  $\mathbf{a}_i$ , rozwiązanie buduje się na ogół również w składowych bazy  $\mathbf{a}_i$ . Natomiast w przypadkach gdy obciążenie zewnętrzne oraz warunki brzegowe formułowane są w składowych bazy  $\mathbf{e}_i$ , co jest niemal regułą dla powłok o małej wyniosłości stosowanych np. w budownictwie, celowe jest budowanie rozwiązania również w składowych bazy  $\mathbf{e}_i$  [7].

Jak wynika z (3.6)<sub>4</sub> oraz (5.6)<sub>2</sub>, w ramach przyjętych założeń upraszczających składowe wektorów  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{v}^*$  w kierunku wektorów jednostkowych  $\mathbf{a}_i$  i  $\mathbf{e}_i$  w przybliżeniu są sobie równe:  $v_3 \approx u_3$  i  $\psi_3 \approx \varphi_3$ . Jednakże jak wynika z (3.5)<sub>3</sub>, kierunek wektorów  $v_3 \mathbf{a}_3$  oraz  $\psi_3 \mathbf{a}_3$  jest zależny od funkcji wyniosłości powłoki. Wektory



$u_3 e_3$  i  $\varphi_3 e_3$  natomiast mają ważną własność geometryczną: ich kierunek jest stały i nie zależy od postaci funkcji  $z(\theta^1, \theta^2)$ . Umożliwia to na powiązanie niektórych wzorów na  $\varphi_3$  i  $u_3$  dla powłok o małej wyniosłości ze wzorami znanymi z teorii płyt i płaskiego stanu naprężeń. Może to być również wykorzystane przy znajdowaniu rozwiązań wieloznacznych dla powłok o małej wyniosłości o obszarze dwu- i wielospójnym [7] i [9].

#### Literatura cytowana w tekście

1. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
2. P. M. NAGHDI, *Foundations of Elastic Shell Theory*, in „Progress in Solid Mechanics”, vol. 4, North-Holland, 1963.
3. К. Ф. Черных, *Линейная теория оболочек*, Т. II, Изд. ЛГУ, Ленинград 1963.
4. H. DUDDECK, *Das Randstörungsproblem der technischen Biegetheorie dünner Schalen in drei korrespondierenden Darstellungen*, Öster. Ing. — Arch., 1, 17 (1962).
5. F. G. KOLLMAN, *Eine Ableitung der Kompatibilitätsbedingungen in der linearen Schalentheorie mit Hilfe des Riemannschen Krümmungstensors*, Ing.-Arch., 1, 35 (1966).
6. A. I. LURIE, *Problems of Continuum Mechanics*, p. 267 (English Edition), Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, Pa., 1961.
7. W. PIETRASZKIEWICZ, *Niektóre zagadnienia statyki powłok obrotowych o małej wyniosłości*, Praca Doktorska, Politechnika Gdańska, Gdańsk 1966.
8. В. З. Власов, *Избранные труды*, Т. I, Изд. АН СССР, Москва 1962.
9. W. PIETRASZKIEWICZ, *Multivaluedness of solutions of shallow shells*, Arch. Mech. Stos., 5, 19 (1967).
10. W. PIETRASZKIEWICZ, *On a solving equation for shallow shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 5, 15 (1967).

#### Резюме

#### O ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В работе дается уточнение и развитие линейной теории пологих оболочек, основанной на замысле Грина и Церны [1]. Все векторные зависимости выражены в векторном базисе проекции оболочки на плоскости, вводя геометрические и физические допущения пологих оболочек. Полученные основные уравнения решаются в перемещениях, в функциях напряжений и смешанным методом. Допуская дополнительно, что изменение кривизны оболочки мало, все три метода сведены к решению того же комплексного дифференциального уравнения 4-го порядка при различном вычислении частного решения.

#### Summary

#### ON THE LINEAR THEORY OF SHALLOW SHELLS

This paper presents an accurate linear theory of shallow shells, based on the conceptions of Green and Zerna [1]. All the vector relations are expressed in a consistent manner using the basic vectors of the plane projection of the shell and taking into account the geometrical and

physical assumptions concerning the shallowness of the shell. The obtained fundamental equations are solved in displacements, in stresses functions and by a mixed method. With the additional assumption of small variability of curvature, each of the three methods reduces to the solution of the same complex differential equation of the fourth order the difference being that of the particular integral.

ZAKŁAD DYNAMIKI MASZYN  
INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 grudnia 1966 r.*

---