PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH
1971 Zeszyt 52

NADBITKA

WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ

Gdańsk

Naprężenia izotropowego ciała sprężystego po kolejnym nałożeniu dwóch małych deformacji

W pracy rozważa się zagadnienie nałożenia małej deformacji pierwszego rzędu na małą deformację drugiego rzędu dla izotropowego ciała sprężystego. Dwoma sposobami uzyskano wyrażenia dla tensora naprężenia w ciele sprężystym w sensie Cauchy'ego i Greena.

1. Wstęp

W teorii małych deformacji nałożonych na deformację skończoną ciał sprężystych wiadomo, że po wstępnej deformacji skończonej reakcja materiału na dalsze małe odkształcenia jest inna niż przy odkształceniu wstępnym. Fakt ten, zwany czasem anizotropią deformacyjną, znany jest z prac Urbanowskiego [1], Berga [2], Zorskiego [3], Toupina i Bernsteina [4], a także monografii Truesdella i Nolla [5], gdzie można znaleźć dalszą literaturę. Fakt ten słuszny jest nawet w przypadku małej deformacji wstępnej, co stwierdzono w pracach Toupina i Rivlina [6] oraz Greena [7]. Z ogólnej teorii ośrodka ciągłego podanej przez Nolla [16] fakt ten staje się oczywisty i wynika z tego, że funkcja (ogólniej funkcjonał) reakcji materiału zależy od przyjętej konfiguracji odniesienia.

Konieczność rozpatrywania konfiguracji napiętej jako konfiguracji odniesienia pojawia się przy badaniu takich zagadnień jak problemy stateczności, rozchodzenia się fal w ośrodku napiętym i szeregu innych. Przy formułowaniu tego typu zagadnień należy używać tensorów sprężystości ciała w konfiguracji napiętej,

Znane komplikacje analityczne powodują, że rozwiązywanie bardziej złożonych zadań staje się możliwe dopiero po wprowadzeniu założenia o małości nie tylko drugiej deformacji, lecz również i pierwszej. Oprócz tego, w celu dalszych uproszczeń, przy rozwiązaniu uwzględnia się tylko pierwsze wyrazy w rozwinięciach dla pierwszej deformacji, co w konsekwencji prowadzi do utożsamienia tensorów sprężystości ciała w konfiguracji napiętej i nie napiętej. W ramach tej klasycznej teorii sprężystości równanie konstytutywne staje się liniowym i słuszna jest tzw. zasada superpozycji.

Celem niniejszego opracowania jest uzyskanie ogólniejszej od klasycznej zależności dla tensora naprężenia, który powstanie w jednorodnym izotropowym ciele sprężystym po nałożeniu małej deformacji na konfigurację odkształconą, która otrzymana jest z konfiguracji początkowej też za pomocą małej deformacji. Konfigurację początkową uważa się za stan naturalny ciała [5].

Rozważania analityczne prowadzone są w notacji absolutnej [5]. Deformację „małą" rozumie się w sensie małości gradientu wektora przemieszczenia, co zostało uwzględnione w rozważaniach za pomocą małego parametru ε przy gradientach wektorów przemieszczenia obu deformacji. Wszystkie wielkości zostały następnie konsekwentnie rozwinięte w szeregi potęgowe względem ε. W pracy nie zakłada się utożsamienia tensorów sprężystości ciała w konfiguracji początkowej i napiętej, co powoduje konieczność uwzględnienia dla pierwszej małej deformacji członów do rzędu ε^2 włącznie. Można więc tu mówić również o nałożeniu deformacji małej pierwszego rzędu na deformację małą drugiego rzędu (por. [17]). W ramach takiej teorii, podobnie jak w nieliniowej teorii materiału sprężystego, zasada superpozycji nie będzie oczywiście obowiązywała.

By uniknąć błędu w końcowych zależnościach, otrzymanych po długich i żmudnych przekształceniach pośrednich, obliczenia wykonane zostały dwukrotnie, przyjmując za punkt wyjścia różne równoważne postacie równania konstytutywnego izotropowego ciała sprężystego. Rozważono ciało sprężyste w sensie Cauchy'ego i w sensie Greena zwane czasem hipersprężystym [5]. Uzyskane zależności dla tensora naprężeń, oprócz członów znanych z klasycznej teorii sprężystości, zawierają człony dodatkowe rzędu ε^2 złożone z tensorów małych odkształceń i obrotów obu deformacji oraz stałych sprężystych pierwszego i drugiego rzędu ciała w stanie naturalnym.

2. Oznaczenia i zależności wstępne

W opracowaniu stosowany jest rachunek absolutny (por. Lichnerowicz [8], Greub [10], Rychlewski [11]). Podstawowe oznaczenia zgodne są z oznaczeniami Truesdella i Nolla [5] oraz Truesdella [12].

Wektory w trójwymiarowej euklidesowej przestrzeni wektorowej $\mathscr{V} \equiv \mathscr{T}_1$ oznaczamy przez $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\xi}$, ... Tensory w euklidesowej przestrzeni tensorowej $\mathscr{T}_p$ o wymiarze 3^p oznaczamy przez $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{T}$, ... Głównie w niniejszym opracowaniu mamy do czynienia z tensorami o walencji 2, tzn. z przestrzeni $\mathscr{T}_2$. Dla tensora $\mathbf{B} \in \mathscr{T}_2$ symbol $\mathbf{B}^T$ oznacza transpozycję, $\det \mathbf{B}$ — wyznacznik, $\operatorname{tr} \mathbf{B}$ — ślad, $\mathbf{B}^{-1}$ — odwrotność.

Ustalając w trójwymiarowej euklidesowej przestrzeni punktowej $\mathscr{E}$ (por. [11]) początek O, miejsce P cząstki X ciała $\mathscr{B}$, $P = \lambda(X)$, można określić wektorem $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x} \in \mathscr{V}$, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(X)$, zwanym dalej również miejscem cząstki $X \in \mathscr{B}$ w konfiguracji $\boldsymbol{\lambda}$.

Jeżeli $\mathbf{X}$ i $\mathbf{x}$ oznaczają miejsca cząstki $X \in \mathscr{B}$ w konfiguracjach, odpowiednio, $\boldsymbol{\kappa}$ i $\boldsymbol{\lambda}$, to wektory te są związane zależnością

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}), \tag{2.1}$$

gdzie $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\kappa}^{-1}$: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ jest funkcją deformacji ciała względem konfiguracji $\boldsymbol{\kappa}$. Dla gradientu tej deformacji $\mathbf{F} = \dfrac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$ słuszne są zależności [5]

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2, \quad \mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}), \tag{2.3}$$

gdzie **U** i **V** oznaczają, odpowiednio prawy i lewy, symetryczne i dodatnio określone tensory rozciągnięcia, **R** — tensor obrotu, **C** i **B** — odpowiednio prawy i lewy, symetryczne dodatnio określone tensory odkształcenia Cauchy'ego-Greena, E — symetryczny dodatnio określony tensor odkształcenia Grenna-St. Venanta.

Wprowadzając wektor przemieszczenia **u** cząstki X z miejsca **X** do miejsca **x**

$$\mathbf{u}(\mathbf{X})=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})-\mathbf{X}+\overrightarrow{O_0O} \tag{2.4}$$

otrzymamy zależności

$$\mathbf{F}=\mathbf{1}+\mathbf{H}, \qquad \mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}} \tag{2.5}$$

definiujące gradient przemieszczenia **H**.

Rozkładając **H** na część symetryczną i antysymetryczną, mamy

$$\mathbf{H}=\tilde{\mathbf{E}}+\tilde{\mathbf{R}}, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}&=\tfrac{1}{2}(\mathbf{H}+\mathbf{H}^T),\\ \tilde{\mathbf{R}}&=\tfrac{1}{2}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^T),\end{aligned} \tag{2.7}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{E}}$ i $\tilde{\mathbf{R}}$ są tensorami klasycznej liniowej teorii małych przemieszczeń i obrotów.

Dla dowolnego $\mathbf{B}\in\mathscr{T}_2$ określone są główne niezmienniki

$$\begin{aligned}I_\mathbf{B}&=\operatorname{tr}\mathbf{B},\\ II_\mathbf{B}&=\tfrac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{B})^2-\operatorname{tr}\mathbf{B}^2\right],\\ III_\mathbf{B}&=\det\mathbf{B}=\tfrac{1}{6}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{B})^3-3\operatorname{tr}\mathbf{B}\operatorname{tr}\mathbf{B}^2+2\operatorname{tr}\mathbf{B}^3\right].\end{aligned} \tag{2.8}$$

Słuszne są następujące zależności

$$\begin{gathered}\frac{\partial I_\mathbf{B}}{\partial\mathbf{B}}=\mathbf{1}, \qquad \frac{\partial II_\mathbf{B}}{\partial\mathbf{B}}=I_\mathbf{B}\mathbf{1}-\mathbf{B}^T,\\ \frac{\partial III_\mathbf{B}}{\partial\mathbf{B}}=III_\mathbf{B}(\mathbf{B}^{-1})^T=\left[\mathbf{B}^2-I_\mathbf{B}\mathbf{B}+II_\mathbf{B}\mathbf{1}\right]^T,\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial\operatorname{tr}\mathbf{B}^k}{\partial\mathbf{B}}=k(\mathbf{B}^{k-1})^T. \tag{2.10}$$

3. Małe odkształcenia nałożone na odkształcenia skończone dla izotropowego ciała sprężystego

Rozważmy ciało $\mathscr{B}$ w trzech różnych konfiguracjach [4, 5]:

$\boldsymbol{\kappa}_0$ — konfiguracja początkowa, stan naturalny ciała, w której miejsce cząstki X określone jest funkcją $\boldsymbol{\kappa}_0$: $\mathscr{B}\to\mathscr{V}$

$$\mathbf{X}_0=\boldsymbol{\kappa}_0(X), \tag{3.1}$$

$\boldsymbol{\kappa}$ — konfiguracja odniesienia, w której miejsce cząstki X określone jest funkcją $\boldsymbol{\kappa}:\mathscr{B}\to\mathscr{V}$

$$\mathbf{X}=\boldsymbol{\kappa}(X), \tag{3.2}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ — konfiguracja aktualna, w której miejsce cząstki X określone jest funkcją $\boldsymbol{\lambda}$: $\mathscr{B} \to \mathscr{V}$

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\lambda}(X). \tag{3.3}$$

Te trzy konfiguracje związane są ze sobą funkcjami deformacji

$$\chi_0=\boldsymbol{\kappa}\circ\boldsymbol{\kappa}_0^{-1}, \quad \chi=\boldsymbol{\lambda}\circ\boldsymbol{\kappa}^{-1}, \quad \chi^*=\boldsymbol{\lambda}\circ\boldsymbol{\kappa}_0^{-1}; \tag{3.4}$$

o gradientach deformacji

$$\mathbf{F}_0\equiv\frac{\partial\chi_0(\mathbf{X}_0)}{\partial\mathbf{X}_0}, \quad \mathbf{F}\equiv\frac{\partial\chi(\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}}, \quad \mathbf{F}^*\equiv\frac{\partial\chi^*(\mathbf{X}_0)}{\partial\mathbf{X}_0}. \tag{3.5}$$

Ponieważ

$$\mathbf{x}=\chi^*(\mathbf{X}_0)=\chi(\mathbf{X}) \tag{3.6}$$

powyższe gradienty deformacji związane są zależnością

$$\mathbf{F}^*=\mathbf{F}\mathbf{F}_0=(\mathbf{1}+\mathbf{H})\mathbf{F}_0. \tag{3.7}$$

Tensory gradientów deformacji $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^*$ posiadają zgodnie z (2.2) następujące rozkłady biegunowe:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0&=\mathbf{R}_0\mathbf{U}_0=\mathbf{V}_0\mathbf{R}_0,\\ \mathbf{F}&=\mathbf{R}\mathbf{U}=\mathbf{V}\mathbf{R},\\ \mathbf{F}^*&=\mathbf{R}^*\mathbf{U}^*=\mathbf{V}^*\mathbf{R}^*, \end{aligned} \tag{3.8}$$

a stąd według (2.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0&=\mathbf{F}_0^T\mathbf{F}_0=\mathbf{U}_0^2, & \mathbf{B}_0&=\mathbf{F}_0\mathbf{F}_0^T=\mathbf{V}_0^2,\\ \mathbf{C}&=\mathbf{F}^T\mathbf{F}=\mathbf{U}^2, & \mathbf{B}&=\mathbf{F}\mathbf{F}^T=\mathbf{V}^2,\\ \mathbf{C}^*&=\mathbf{F}^{*T}\mathbf{F}^*=\mathbf{U}^{*2}, & \mathbf{B}^*&=\mathbf{F}^*\mathbf{F}^{*T}=\mathbf{V}^{*2}; \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0&=\tfrac{1}{2}(\mathbf{C}_0-\mathbf{1}),\\ \mathbf{E}&=\tfrac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{1}),\\ \mathbf{E}^*&=\tfrac{1}{2}(\mathbf{C}^*-\mathbf{1}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Załóżmy, że deformacja χ od $\boldsymbol{\kappa}$ do $\boldsymbol{\lambda}$ jest mała w sensie małości normy gradientu wektora przemieszczenia $\mathbf{H}$ i w tym celu wprowadźmy mały parametr porządkujący ε zależnością

$$\mathbf{H}(\varepsilon)=\varepsilon\mathbf{H}. \tag{3.11}$$

Traktując dalej wszystkie wielkości, zależne od parametru ε poprzez $\mathbf{H}(\varepsilon)$ według (3.11), jako funkcje analityczne ε, rozwińmy je w szeregi potęgowe w otoczeniu $\varepsilon=0$ odrzucając człony drugiego i wyższego rzędu względem ε.

Z (3.7) oraz $(3.9)_3$, a także (2.6), (2.7) i (2.8), mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^*(\varepsilon)&=\mathbf{B}_0+\varepsilon[\mathbf{B}_0\mathbf{H}^T+\mathbf{H}\mathbf{B}_0]+\ldots\\ \mathbf{B}^{*2}(\varepsilon)&=\mathbf{B}_0^2+\varepsilon[\mathbf{B}_0^2\mathbf{H}^T+\mathbf{B}_0(\mathbf{H}+\mathbf{H}^T)\mathbf{B}_0+\mathbf{H}\mathbf{B}_0^2]+\ldots\\ \mathbf{B}^{*3}(\varepsilon)&=\mathbf{B}_0^3+\varepsilon[\mathbf{B}_0^3\mathbf{H}^T+\mathbf{B}_0^2(\mathbf{H}+\mathbf{H}^T)\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_0(\mathbf{H}+\mathbf{H}^T)\mathbf{B}_0^2+\mathbf{H}\mathbf{B}_0^3]+\ldots \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\mathbf{B}^*(\varepsilon) &= I_{\mathbf{B}_0}+\varepsilon\cdot 2I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}+\ldots \\ \operatorname{tr}\mathbf{B}^{*2}(\varepsilon) &= I_{\mathbf{B}_0^2}+\varepsilon\cdot 4I_{\mathbf{B}_0^2\tilde{\mathbf{E}}}+\ldots \\ \operatorname{tr}\mathbf{B}^{*3}(\varepsilon) &= I_{\mathbf{B}_0^3}+\varepsilon\cdot 6I_{\mathbf{B}_0^3\tilde{\mathbf{E}}}+\ldots \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tr}\mathbf{B}^*(\varepsilon))^2 &= I^2_{\mathbf{B}_0}+\varepsilon\cdot 4I_{\mathbf{B}_0}I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}+\ldots \\ (\operatorname{tr}\mathbf{B}^*(\varepsilon))^3 &= I^3_{\mathbf{B}_0}+\varepsilon\cdot 6I^2_{\mathbf{B}_0}I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}+\ldots \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{B}^*}(\varepsilon) &= I_{\mathbf{B}_0}+\varepsilon\cdot 2I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}+\ldots \\ II_{\mathbf{B}^*}(\varepsilon) &= II_{\mathbf{B}_0}+\varepsilon\cdot 2(I_{\mathbf{B}_0}I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}-I_{\mathbf{B}_0^2\tilde{\mathbf{E}}})+\ldots \\ III_{\mathbf{B}^*}(\varepsilon) &= III_{\mathbf{B}_0}+\varepsilon\cdot 2(II_{\mathbf{B}_0}I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}-I_{\mathbf{B}_0}I_{\mathbf{B}_0^2\tilde{\mathbf{E}}}+I_{\mathbf{B}_0^3\tilde{\mathbf{E}}})+\ldots \end{aligned} \tag{3.15}$$

Równanie konstytutywne izotropowego ciała sprężystego w sensie Cauchy'ego w niniejszych oznaczeniach przyjmuje postać [5]

$$\mathbf{T}=f_{\kappa_0}(\mathbf{B}^*)=k_0\mathbf{1}+k_1\mathbf{B}^*+k_2\mathbf{B}^{*2}\equiv\sum_{r=0}^{2}k_r(\mathbf{B}^*)\mathbf{B}^{*r}, \tag{3.16}$$

gdzie $k_r: {}^s\mathscr{T}_2\to\mathscr{R}$ są niezmiennikami ortogonalnymi tensora $\mathbf{B}^*\in{}^s\mathscr{T}_2$,

$$k_r(\mathbf{B}^*)=\bar{k}_r(I_{\mathbf{B}^*}, II_{\mathbf{B}^*}, III_{\mathbf{B}^*}),\qquad \bar{k}_r:\mathscr{R}\to\mathscr{R};$$

$f_{\kappa_0}: {}^s\mathscr{T}_2\to{}^s\mathscr{T}_2$ jest funkcją izotropową tensora $\mathbf{B}^*$.

Dla ciała sprężystego w sensie Greena, mamy ponadto [5, 13]

$$\mathbf{T}=f_{\kappa_0}(\mathbf{B}^*)=2\rho\mathbf{B}^*\sigma_{\kappa_0,\mathbf{B}^*}(\mathbf{B}^*)=2\rho\sigma_{\kappa_0,\mathbf{B}^*}(\mathbf{B}^*)\mathbf{B}^*, \tag{3.17}$$

gdzie $\sigma_{\kappa_0}: {}^s\mathscr{T}_2\to\mathscr{R}$ jest niezmiennikiem ortogonalnym tensora $\mathbf{B}^*$,

$$\sigma_{\kappa_0}(\mathbf{B}^*)=\bar{\sigma}_{\kappa_0}(I_{\mathbf{B}^*}, II_{\mathbf{B}^*}, III_{\mathbf{B}^*}),\qquad \bar{\sigma}_{\kappa_0}:\mathscr{R}\to\mathscr{R}.$$

Rozwińmy równanie konstytutywne (3.16) w szereg według potęg ε. Przy użyciu (3.12) oraz (3.15) otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{T}= &\sum_{r=0}^{2}k_r(\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0^r+\varepsilon\{k_1(\mathbf{B}_0)(\mathbf{B}_0\mathbf{H}^T+\mathbf{H}\mathbf{B}_0)+k_2(\mathbf{B}_0)(\mathbf{B}_0^2\mathbf{H}^T+2\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{B}_0+\mathbf{H}\mathbf{B}_0^2)+ \\ &+2\sum_{r=0}^{2}[k_{r,1}(\mathbf{B}_0)I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}+k_{r,2}(\mathbf{B}_0)(I_{\mathbf{B}_0}I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}-I_{\mathbf{B}_0^2\tilde{\mathbf{E}}})+ \\ &k_{r,3}(\mathbf{B}_0)(II_{\mathbf{B}_0}I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}-I_{\mathbf{B}_0}I_{\mathbf{B}_0^2\tilde{\mathbf{E}}}+I_{\mathbf{B}_0^3\tilde{\mathbf{E}}})]\mathbf{B}_0^r\}+\ldots \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pamiętając, że

$$\mathbf{T}_0=\sum_{r=0}^{2}k_r(\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0^r \tag{3.19}$$

po przekształceniu (3.18) można otrzymać

$$\begin{aligned} \mathbf{T}=\mathbf{T}_0+\varepsilon\{&(\mathbf{T}_0\mathbf{H}^T+\mathbf{H}\mathbf{T}_0)-2k_0(\mathbf{B}_0)\tilde{\mathbf{E}}+2k_2(\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{B}_0+ \\ &+2\sum_{r=0}^{2}[k_{r,1}(\mathbf{B}_0)I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}+k_{r,2}(\mathbf{B}_0)(I_{\mathbf{B}_0}I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}-I_{\mathbf{B}_0^2\tilde{\mathbf{E}}})+ \\ &+k_{r,3}(\mathbf{B}_0)(II_{\mathbf{B}_0}I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}-I_{\mathbf{B}_0}I_{\mathbf{B}_0^2\tilde{\mathbf{E}}}+I_{\mathbf{B}_0^3\tilde{\mathbf{E}}})]\mathbf{B}_0^r\}+\ldots \end{aligned} \tag{3.20}$$

Zależność (3.18) lub (3.20) jest podstawowym równaniem na wyznaczanie naprężeń w teorii małych odkształceń nałożonych na odkształcenia skończone dla izotropowego ciała sprężystego.

Łatwo zauważyć, że w przypadku gdy konfiguracja $\boldsymbol{\kappa}$ pokrywa się z $\boldsymbol{\kappa}_0$, tzn. jest stanem naturalnym ciała, wtedy $\mathbf{T}_0=\mathbf{0}$, $\mathbf{B}_0=\mathbf{1}$, $k_r(1)=\kappa_r$, $k_{r,s}(1)=\kappa_{r,s}$, $I_1=II_1=3$, $III_1=1$ i równanie konstytutywne (3.18) lub (3.20) przyjmuje postać znaną z klasycznej teorii sprężystości

$$\mathbf{T}=\varepsilon\,[\lambda I_{\tilde{\mathbf{E}}}\mathbf{1}+2\mu\tilde{\mathbf{E}}]+\ldots, \tag{3.21}$$

gdzie oznaczono

$$\lambda=2\sum_{r=0}^{2}(\kappa_{r,1}+2\kappa_{r,2}+\kappa_{r,3}), \qquad \mu=\kappa_1+2\kappa_2. \tag{3.22}$$

4. Małe odkształcenia nałożone na małe wstępne odkształcenia

Załóżmy teraz, że zarówno deformacja χ od $\boldsymbol{\kappa}$ do $\boldsymbol{\lambda}$ rozważona w poprzednim punkcie, jak i deformacja wstępna χ_0 od $\boldsymbol{\kappa}_0$ do $\boldsymbol{\kappa}$ są małe w sensie małości gradientów przemieszczenia $\mathbf{H}$ i $\mathbf{H}_0$. Wprowadźmy więc mały parametr ε zarówno do $\mathbf{H}$ zależnością (3.11) jak i $\mathbf{H}_0$ zależnością

$$\mathbf{H}_0(\varepsilon)=\varepsilon\mathbf{H}_0. \tag{4.1}$$

Z zależności (3.18) lub (3.20) wynika, że na to aby nie utracić członów odpowiadających superpozycji deformacji, wielkości występujące w nawiasie $\{\ldots\}$ powinniśmy rozwinąć w szereg potęgowy względem ε zachowując człony liniowe, natomiast tensor naprężeń $\mathbf{T}_0$ powinien być obliczony z dokładnością do członów ε^2.

Korzystając z poprzedniego opracowania autora [14] otrzymamy rozwinięcia

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_0(\varepsilon)&=\mathbf{1}+\varepsilon\cdot 2\tilde{\mathbf{E}}_0+\varepsilon^2\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T,\\
\mathbf{B}_0^2(\varepsilon)&=\mathbf{1}+\varepsilon\cdot 4\tilde{\mathbf{E}}_0+\varepsilon^2(2\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T+4\tilde{\mathbf{E}}_0^2)+\ldots,\\
\mathbf{B}_0^3(\varepsilon)&=\mathbf{1}+\varepsilon\cdot 6\tilde{\mathbf{E}}_0+\varepsilon^2(3\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T+12\tilde{\mathbf{E}}_0^2)+\ldots,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{B}_0}&=3+\varepsilon\cdot 2I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+\varepsilon^2 I_{\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T},\\
II_{\mathbf{B}_0}&=3+\varepsilon\cdot 4I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+\varepsilon^2(2I_{\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T}+4II_{\tilde{\mathbf{E}}_0})+\ldots,\\
III_{\mathbf{B}_0}&=1+\varepsilon\cdot 6I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+\varepsilon^2(I_{\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T}+4II_{\tilde{\mathbf{E}}_0})+\ldots,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

które umożliwiają przedstawienie $\mathbf{T}_0$ w postaci [5, 14, 15]

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_0=\varepsilon\,[\lambda I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}\mathbf{1}+2\mu\tilde{\mathbf{E}}_0]+\varepsilon^2\,[(\tfrac{1}{2}\lambda I_{\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T}+\alpha_3 I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}^2+\alpha_4 II_{\tilde{\mathbf{E}}_0})\mathbf{1}+\\
+\alpha_5 I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}\tilde{\mathbf{E}}_0+\mu\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T+\alpha_6\tilde{\mathbf{E}}_0^2]+\ldots,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia stałych [14]

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1=2\sum_{r=0}^{2}(\kappa_{r,1}+2\kappa_{r,2}+\kappa_{r,3})\equiv\lambda,\\
&\alpha_2=\kappa_1+2\kappa_2\equiv\mu,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_3=2\sum_{r=0}^{2}\left[(\kappa_{r,11}+2\kappa_{r,12}+\kappa_{r,13})+2(\kappa_{r,21}+2\kappa_{r,22}+\kappa_{r,23})+\right.\\
&\qquad\left.+(\kappa_{r,31}+2\kappa_{r,32}+\kappa_{r,33})\right],\\
&\alpha_4=4\sum_{r=0}^{2}(\kappa_{r,2}+\kappa_{r,3}),\\
&\alpha_5=4\left[(\kappa_{1,1}+2\kappa_{1,2}+\kappa_{1,3})+2(\kappa_{2,1}+2\kappa_{2,2}+\kappa_{2,3})\right],\\
&\alpha_6=4\kappa_2.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

przy oznaczeniach

$$
\begin{aligned}
&k_r(\mathbf{1})=\kappa_r,\ \ldots,\qquad \frac{\partial\bar{k}_r}{\partial I_{\mathbf{B}^*}}(\mathbf{1})=\kappa_{r,1},\ \ldots\\
&\frac{\partial\bar{k}_r}{\partial II_{\mathbf{B}^*}\partial III_{\mathbf{B}^*}}(\mathbf{1})=\kappa_{r,23},\ \ldots
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Potrzebne są ponadto następujące rozwinięcia:

$$
\begin{aligned}
&k_r(\mathbf{B}_0)=\kappa_r+\varepsilon\cdot 2(\kappa_{r,1}+2\kappa_{r,2}+\kappa_{r,3})I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+\ldots,\\
&k_{r,s}(\mathbf{B}_0)=\kappa_{r,s}+\varepsilon\cdot 2(\kappa_{r,s1}+2\kappa_{r,s2}+\kappa_{r,s3})I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+\ldots,
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&I_{\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}}}=I_{\tilde{\mathbf{E}}}+\varepsilon\cdot 2I_{\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}}+\ldots,\\
&I_{\mathbf{B}_0^2\tilde{\mathbf{E}}}=I_{\tilde{\mathbf{E}}}+\varepsilon\cdot 4I_{\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}}+\ldots,\\
&I_{\mathbf{B}_0^3\tilde{\mathbf{E}}}=I_{\tilde{\mathbf{E}}}+\varepsilon\cdot 6I_{\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}}+\ldots.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Podstawmy uzyskane rozwinięcia do (3.18). Zachowując człony do ε^2 włącznie, przy użyciu oznaczeń stałych (4.5) i (4.6), po długich i żmudnych przekształceniach otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}-\mathbf{T}_0=\ &\varepsilon\left[\lambda I_{\tilde{\mathbf{E}}}\mathbf{1}+2\mu\tilde{\mathbf{E}}\right]+\varepsilon^2\left[\{(2\alpha_3+\alpha_4)I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}I_{\tilde{\mathbf{E}}}+(2\lambda-\alpha_4)I_{\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}}\}\mathbf{1}+\right.\\
&\left.+\alpha_5(I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}\tilde{\mathbf{E}}+I_{\tilde{\mathbf{E}}}\tilde{\mathbf{E}}_0)+2\mu(\tilde{\mathbf{E}}_0\mathbf{H}^T+\mathbf{H}\tilde{\mathbf{E}}_0)+\alpha_6(\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}+\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}_0)\right]+\ldots
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Pamiętając, ponadto, że

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T=\tilde{\mathbf{E}}_0^2+(\tilde{\mathbf{R}}_0\tilde{\mathbf{E}}_0-\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{R}}_0)-\tilde{\mathbf{R}}_0^2,\\
&I_{\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T}=I_{\tilde{\mathbf{E}}_0^2}-I_{\tilde{\mathbf{R}}_0^2}=I^2_{\tilde{\mathbf{E}}_0}-2II_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+2II_{\tilde{\mathbf{R}}_0},\\
&\tilde{\mathbf{E}}_0\mathbf{H}^T+\mathbf{H}\tilde{\mathbf{E}}_0=\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}+\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}_0+(\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{E}}_0-\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{R}})
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

i podstawiając te zależności do (4.4) otrzymamy z (4.10)

$$\mathbf{T}=\varepsilon\{\lambda(I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+I_{\tilde{\mathbf{E}}})\mathbf{1}+2\mu(\tilde{\mathbf{E}}_0+\tilde{\mathbf{E}})\}+\varepsilon^2\{[(\alpha_3+\tfrac{1}{2}\alpha_4)I^2_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+$$
$$+(\tfrac{1}{2}\lambda-\tfrac{1}{2}\alpha_4)I_{\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}_0}+(2\alpha_3+\alpha_4)I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}I_{\tilde{\mathbf{E}}}+(2\lambda-\alpha_4)I_{\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}}+\lambda II_{\tilde{\mathbf{R}}_0}]\mathbf{1}+$$
$$+\alpha_5(I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}\tilde{\mathbf{E}}_0+I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}\tilde{\mathbf{E}}+I_{\tilde{\mathbf{E}}}\tilde{\mathbf{E}})+(\alpha_6+\mu)\tilde{\mathbf{E}}_0^2+(2\mu+\alpha_6)(\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}+\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}_0)+$$
$$+\mu(\tilde{\mathbf{R}}_0\tilde{\mathbf{E}}_0-\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{R}}_0)+2\mu(\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{E}}_0-\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{R}})-\mu\tilde{\mathbf{R}}_0^2\}+\ldots \tag{4.12}$$

Zależność powyższa określa naprężenia izotropowego ciała sprężystego powstałe w wyniku kolejnego nałożenia, począwszy od stanu naturalnego ciała, dwóch małych deformacji.

W ramach klasycznej teorii sprężystości zależność (3.21) dla pierwszej deformacji jest liniowa względem ε, co dla nałożenia deformacji daje zależność również liniową

$$\mathbf{T}=\varepsilon[\lambda(I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+I_{\tilde{\mathbf{E}}})\mathbf{1}+2\mu(\tilde{\mathbf{E}}_0+\tilde{\mathbf{E}})]+\ldots \tag{4.13}$$

5. Inny sposób uzyskania poprzednich zależności

Zależność (4.12) uzyskana została bezpośrednio z równania konstytutywnego (3.16) na drodze konsekwentnego rozwijania wszystkich wielkości w szeregi według potęg ε. Ponieważ przekształcenia były długie i żmudne, tu sprawdzimy na nieco innej drodze uzyskaną zależność (4.12).

Korzystając z twierdzenia Cayley'a-Hamiltona, funkcję izotropową $f_{\kappa_0}: {}^s\mathscr{T}_2\to{}^s\mathscr{T}_2$ z równania (3.16) można przedstawić w postaci [5]

$$\mathbf{T}=f_{\kappa_0}(\mathbf{B}^*)=z_{-1}\mathbf{B}^{*-1}+z_0\mathbf{1}+z_1\mathbf{B}^*\equiv\sum_{r=-1}^{1}z_r(\mathbf{B}^*)\mathbf{B}^{*r}, \tag{5.1}$$

gdzie z_r: ${}^s\mathscr{T}_2\to\mathscr{R}$ są niezmiennikami ortogonalnymi tensora $\mathbf{B}^*$,

$$z_r(\mathbf{B}^*)=\hat{z}_r(I_{\mathbf{B}^*}, II_{\mathbf{B}^*}, III_{\mathbf{B}^*}), \qquad \hat{z}_r: \mathscr{R}\to\mathscr{R}.$$

Ze względu na identyczność niezmienników głównych (2.8) dla tensorów **B** i **C**, poprzez zależność $(3.10)_3$ niezmienniki z_r można wyrazić poprzez niezmienniki główne tensora $\mathbf{E}^*$, $z_r(\mathbf{B}^*)=\tilde{z}_r(\mathbf{E}^*)=\bar{z}_r(I_{\mathbf{E}^*}, II_{\mathbf{E}^*}, III_{\mathbf{E}^*})$, $\bar{z}_r: \mathscr{R}\to\mathscr{R}$.

Postępując podobnie jak w punkcie 3, uzyskamy rozwinięcia

$$\mathbf{B}^{*-1}(\varepsilon)=\mathbf{B}_0^{-1}+\varepsilon(-\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{H}-\mathbf{H}^T\mathbf{B}_0^{-1})+\ldots, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{E}^*(\varepsilon)=\mathbf{E}_0+\varepsilon(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)+\ldots,$$
$$\mathbf{E}^{*2}(\varepsilon)=\mathbf{E}_0^2+\varepsilon[\mathbf{E}_0(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)+(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\mathbf{E}_0]+\ldots, \tag{5.3}$$
$$\mathbf{E}^{*3}(\varepsilon)=\mathbf{E}_0^3+\varepsilon[\mathbf{E}_0^2(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)+\mathbf{E}_0(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\mathbf{E}_0+(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\mathbf{E}_0^2]+\ldots,$$

$$\operatorname{tr}\mathbf{E}^*(\varepsilon)=I_{\mathbf{E}_0}+\varepsilon\cdot\operatorname{tr}\{\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0\}+\ldots,$$
$$\operatorname{tr}\mathbf{E}^{*2}(\varepsilon)=I_{\mathbf{E}_0^2}+\varepsilon\cdot 2\operatorname{tr}\{\mathbf{E}_0(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\}+\ldots, \tag{5.4}$$
$$\operatorname{tr}\mathbf{E}^{*3}(\varepsilon)=I_{\mathbf{E}_0^3}+\varepsilon\cdot 3\operatorname{tr}\{\mathbf{E}_0^2(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\}+\ldots,$$

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{tr}\mathbf{E}^*(\varepsilon))^2 &= I_{\mathbf{E}_0}^2+\varepsilon\cdot 2I_{\mathbf{E}_0}\operatorname{tr}\{\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0\}+\dots,\\
(\operatorname{tr}\mathbf{E}^*(\varepsilon))^3 &= I_{\mathbf{E}_0}^3+\varepsilon\cdot 3I_{\mathbf{E}_0}^2\operatorname{tr}\{\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0\}+\dots,
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{\mathbf{E}^*}(\varepsilon) &= I_{\mathbf{E}_0}+\varepsilon\operatorname{tr}\{\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0\}+\dots,\\
II_{\mathbf{E}^*}(\varepsilon) &= II_{\mathbf{E}_0}+\varepsilon[I_{\mathbf{E}_0}\operatorname{tr}\{\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0\}-\operatorname{tr}\{\mathbf{E}_0(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\}]+\dots,\\
III_{\mathbf{E}^*}(\varepsilon) &= III_{\mathbf{E}_0}+\varepsilon[II_{\mathbf{E}_0}\operatorname{tr}\{\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0\}-I_{\mathbf{E}_0}\operatorname{tr}\{\mathbf{E}_0(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\}+\operatorname{tr}\{\mathbf{E}_0^2(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\}]+\dots
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Rozwijając równanie konstytutywne (5.1) w szereg według potęg ε i korzystając z $(3.12)_1$, (5.2) i (5.6), po przekształceniach uzyskamy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 &+\varepsilon\{(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{T}_0-\mathbf{T}_0\tilde{\mathbf{R}})-\tilde{z}_{-1}(\mathbf{E}_0)(\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{B}_0^{-1}+\mathbf{B}_0^{-1}\tilde{\mathbf{E}})+\tilde{z}_1(\mathbf{E}_0)(\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_0\tilde{\mathbf{E}})+\\
&+\sum_{r=-1}^{1}[\tilde{z}_{r,1}(\mathbf{E}_0)\operatorname{tr}\{\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0\}+\tilde{z}_{r,2}(\mathbf{E}_0)(I_{\mathbf{E}_0}\operatorname{tr}\{\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0\}-\operatorname{tr}\{\mathbf{E}_0(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\})+\\
&+\tilde{z}_{r,3}(\mathbf{E}_0)(II_{\mathbf{E}_0}\operatorname{tr}\{\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0\}-I_{\mathbf{E}_0}\operatorname{tr}\{\mathbf{E}_0(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\}+\operatorname{tr}\{\mathbf{E}_0^2(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\})]\mathbf{B}_0^r\}+\dots
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Zakładając, że deformacja χ_0 jest mała w sensie małości gradientu przemieszczenia $\mathbf{H}_0$ (por. (4.1)), by uzyskać rozwinięcie $\mathbf{T}$ do członów ε^2 włącznie, potrzebne są następujące rozwinięcia

$$
\mathbf{B}_0^{-1}(\varepsilon)=\mathbf{1}+\varepsilon(-2\tilde{\mathbf{E}}_0)+\varepsilon^2(4\tilde{\mathbf{E}}_0^2-\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^T)+\dots,
\tag{5.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_0(\varepsilon) &= \varepsilon\tilde{\mathbf{E}}_0+\varepsilon^2\tfrac{1}{2}\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0+\dots,\\
\mathbf{E}_0^2(\varepsilon) &= \varepsilon^2\tilde{\mathbf{E}}_0^2+\dots,
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{\mathbf{E}_0}(\varepsilon) &= \varepsilon I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+\varepsilon^2\tfrac{1}{2}I_{\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0}+\dots,\\
II_{\mathbf{E}_0}(\varepsilon) &= \varepsilon^2 II_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+\dots,\\
III_{\mathbf{E}_0}(\varepsilon) &= \dots
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Rozwijając $\mathbf{T}_0=\sum_{r=-1}^{1}\tilde{z}_r(\mathbf{E}_0)\mathbf{B}_0^r$ w szereg według potęg ε i zachowując wyrazy do ε^2 włącznie, po przekształceniach podobnych do przekształceń pracy [14], otrzymano równanie (4.4), w którym stałe α_i wyrażone są przez wartości niezmienników z_r w konfiguracji $\boldsymbol{\kappa}_0$ następującymi zależnościami

$$
\alpha_0=\zeta_{-1}+\zeta_0+\zeta_1\equiv 0,
\tag{5.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \sum_{r=-1}^{1}\zeta_{r,1}\equiv\lambda,\\
\alpha_2 &= (-\zeta_{-1}+\zeta_1)\equiv\mu,
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_3 &= \tfrac{1}{2}\sum_{r=-1}^{1}\zeta_{r,11},\\
\alpha_4 &= \sum_{r=-1}^{1}\zeta_{r,2},
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

$$\alpha_5 = 2(-\zeta_{-1,1} + \zeta_{1,1}),$$

$$\alpha_6 = 4\zeta_{-1},$$

przy oznaczeniach

$$\tilde{z}_r(\mathbf{0}) = \zeta_r, \dots, \quad \frac{\partial \tilde{z}_r}{\partial I_{\mathbf{E}*}}(\mathbf{0}) = \zeta_{r,1}, \dots,$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{z}_r}{\partial I_{\mathbf{E}*} \partial I_{\mathbf{E}*}}(\mathbf{0}) = \zeta_{r,11}. \tag{5.14}$$

Pamiętając o (4.11) równanie (4.4) można również napisać w postaci

$$\mathbf{T}_0 = \varepsilon\{\lambda I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}\mathbf{1} + 2\mu\tilde{\mathbf{E}}_0\} + \varepsilon^2\Big\{\Big[\Big(\frac{\lambda}{2} + \alpha_3\Big) I^2_{\tilde{\mathbf{E}}_0} + (\alpha_4 - \lambda) II_{\tilde{\mathbf{E}}_0} + \lambda II_{\tilde{\mathbf{R}}_0}\Big]\mathbf{1} +$$

$$+ \alpha_5 I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}\tilde{\mathbf{E}}_0 + \mu(\tilde{\mathbf{E}}_0^2 - \tilde{\mathbf{R}}_0^2) + \mu(\tilde{\mathbf{R}}_0\tilde{\mathbf{E}}_0 - \tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{R}}_0) + \alpha_6\tilde{\mathbf{E}}_0^2\Big\} + \dots . \tag{5.15}$$

Ponadto do uzyskania rozwinięcia (5.7) potrzebne są następujące rozwinięcia z zachowaniem członów liniowych względem ε

$$\operatorname{tr}\{\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0\} = I_{\tilde{\mathbf{E}}} + \varepsilon 2 I_{\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}} + \dots,$$

$$\operatorname{tr}\{\mathbf{E}_0(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\} = \varepsilon I_{\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}} + \dots, \tag{5.16}$$

$$\operatorname{tr}\{\mathbf{E}_0^2(\mathbf{F}_0^T\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{F}_0)\} = + \dots,$$

$$\tilde{z}_r(\mathbf{E}_0) = \zeta_r + \varepsilon\zeta_{r,1} I_{\tilde{\mathbf{E}}_0} + \dots,$$

$$\tilde{z}_{r,s}(\mathbf{E}_0) = \zeta_{r,s} + \varepsilon\zeta_{r,s1} I_{\tilde{\mathbf{E}}_0} + \dots . \tag{5.17}$$

Podstawiając uzyskane rozwinięcia do (5.7) i zachowując człony do ε^2 włącznie, po przekształceniach można otrzymać zależność (4.12), co dowodzi jej słuszności.

6. Materiał sprężysty w sensie Greena

Dla ciała sprężystego w sensie Greena, gdy równanie konstytutywne dane jest zależnością (3. 17), stałe sprężyste α_i według (4.5), (4.6) lub (4.11) - (5.13) są związane zależnością [5, 14, 15]

$$\alpha_4 + \alpha_5 = 2(\lambda - \mu). \tag{6.1}$$

Wyrażając stąd α_4 albo α_5 i podstawiając do (4.17) otrzymamy

$$\mathbf{T} = \varepsilon\{\lambda(I_{\tilde{\mathbf{E}}_0} + I_{\tilde{\mathbf{E}}})\mathbf{1} + 2\mu(\tilde{\mathbf{E}}_0 + \tilde{\mathbf{E}})\} + \varepsilon^2\{[(\alpha_3 + \lambda - \mu - \alpha_5) I^2_{\tilde{\mathbf{E}}_0} +$$

$$+ (-\tfrac{1}{2}\lambda + \mu + \alpha_5) I^2_{\tilde{\mathbf{E}}_0} + (2\alpha_3 + 2\lambda - 2\mu - \alpha_5) I_{\tilde{\mathbf{E}}_0} I_{\tilde{\mathbf{E}}} + (2\mu + \alpha_5) I_{\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}} + \lambda II_{\tilde{\mathbf{R}}_0}]\mathbf{1} +$$

$$+ \alpha_5(I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}\tilde{\mathbf{E}}_0 + I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}\tilde{\mathbf{E}} + I_{\tilde{\mathbf{E}}}\tilde{\mathbf{E}}) + (\alpha_6 + \mu)\tilde{\mathbf{E}}_0^2 + (2\mu + \alpha_6)(\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}_0) +$$

$$+ \mu(\tilde{\mathbf{R}}_0\tilde{\mathbf{E}}_0 - \tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{R}}_0) + 2\mu(\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{E}}_0 - \tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{R}}) - \mu\tilde{\mathbf{R}}_0^2\} + \dots \tag{6.2}$$

albo

$$\begin{aligned}\mathbf{T}=&\varepsilon\{\lambda(I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+I_{\tilde{\mathbf{E}}})\mathbf{1}+2\mu(\tilde{\mathbf{E}}_0+\tilde{\mathbf{E}})\}+\varepsilon^2\{[(\alpha_3+\tfrac{1}{2}\alpha_4)I^2_{\mathbf{E}_0}+\\&+(\tfrac{1}{2}\lambda-\tfrac{1}{2}\alpha_4)I^2_{\tilde{\mathbf{E}}_0}+(2\alpha_3+\alpha_4)I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}I_{\tilde{\mathbf{E}}}+(2\lambda-\alpha_4)I_{\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}}+\lambda II_{\tilde{\mathbf{R}}_0}]\mathbf{1}+\\&+(2\lambda-2\mu-\alpha_4)(I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}\tilde{\mathbf{E}}_0+I_{\tilde{\mathbf{E}}_0}\tilde{\mathbf{E}}+I_{\tilde{\mathbf{E}}}\tilde{\mathbf{E}})+(\alpha_6+\mu)\tilde{\mathbf{E}}_0^2+\\&+(2\mu+\alpha_6)(\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{E}}+\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}_0)+\mu(\tilde{\mathbf{R}}_0\tilde{\mathbf{E}}_0-\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{R}}_0)+2\mu(\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{E}}_0-\tilde{\mathbf{E}}_0\tilde{\mathbf{R}})-\mu\tilde{\mathbf{R}}_0^2\}+\ldots\end{aligned}\tag{6.3}$$

Wyrażenia (6.2) lub (6.3) dają naprężenia izotropowego ciała sprężystego w sensie Greena po kolejnym nałożeniu dwóch małych deformacji.

7. Uwagi końcowe

Otrzymane zależności (4.10), (4.12), (6.2) i (6.3) dla tensora naprężenia są dość skomplikowane. Sprecyzujmy więc miejsce tych zależności w stosunku do analogicznych zależności klasycznej teorii sprężystości oraz teorii małych deformacji nałożonych na deformację skończoną ciał sprężystych [17].

Zależności (3.20) oraz (5.7) dla tensora naprężeń w konfiguracji $\boldsymbol{\lambda}$ obliczone zostały zgodnie z teorią małych odkształceń nałożonych na odkształcenia skończone przez rozwinięcie funkcji reakcji f_{κ_0} w szereg Taylora względem $\mathbf{H}$ w otoczeniu $\mathbf{B}^*=\mathbf{B}_0$ z zachowaniem liniowej części tego rozwinięcia. Można pokazać [17], że prowadzi to do możliwości zdefiniowania tensora sprężystości pierwszego rzędu w konfiguracji $\boldsymbol{\kappa}$. Wykonanie wszystkich operacji wymaga jednak znajomości jawnej postaci funkcji f_{κ_0} badanego materiału sprężystego.

Niestety, jawna postać f_{κ_0} znana jest tylko dla pewnych szczególnych klas ciał sprężystych. Dla klas pozostałych wartość funkcji $f_{\kappa_0}(\mathbf{B}_0)$ określić można po jej rozwinięciu w szereg Taylora względem $\mathbf{H}_0$ w otoczeniu $\mathbf{B}_0=\mathbf{1}$ i eksperymentalnym określeniu pojawiających się tensorów stałych sprężystych k-go ($k=1, 2, \ldots\infty$) rzędu w konfiguracji $\boldsymbol{\kappa}_0$. Można również pokazać [17], że tensor sprężystości pierwszego rzędu w $\boldsymbol{\kappa}$ da się formalnie wyrazić przez tensory sprężystości wszystkich rzędów w $\boldsymbol{\kappa}_0$.

W ramach klasycznej teorii sprężystości następuje utożsamienie tensora sprężystości pierwszego rzędu w $\boldsymbol{\kappa}$ z tensorem sprężystości pierwszego rzędu w $\boldsymbol{\kappa}_0$, co automatycznie prowadzi do zależności (3.13) oraz spełnienia zasady superpozycji.

W ramach proponowanej w niniejszej pracy teorii tensor sprężystości pierwszego rzędu w $\boldsymbol{\kappa}$ wyraża się przez tensory sprężystości tylko pierwszego i drugiego rzędu w $\boldsymbol{\kappa}_0$. Powoduje to, że reakcja materiału na obciążenie od konfiguracji $\boldsymbol{\kappa}_0$ i $\boldsymbol{\kappa}$ jest już różna i zasada superpozycji nie jest już słuszna.

Porównanie powyższych trzech teorii wskazuje, że proponowane zależności stanowią pierwszy etap pośredni między klasyczną teorią sprężystości a teorią małych deformacji nałożonych na deformację skończoną. Możliwe są również i dalsze przybliżenia, należy się jednak liczyć z tym, że trudności eksperymentalne umożliwiły dotychczas w oddzielnych przypadkach na wyznaczenie stałych sprężystych w $\boldsymbol{\kappa}_0$ co najwyżej trzeciego rzędu.

Używanie proponowanych w pracy zależności dla naprężeń staje się celowym, gdy fizyczna treść badanego zjawiska wskazuje na konieczność rozpatrywania konfiguracji napiętej $\boldsymbol{\kappa}$ jako konfiguracji odniesienia, jednocześnie jednak nie mamy jawnej postaci funkcji f_{κ_0} lecz tylko eksperymentalne wartości stałych sprężystych pierwszego i drugiego rzędu w $\boldsymbol{\kappa}_0$. Do takich zagadnień należą np. drgania i rozchodzenie się fal w ciałach wstępnie napiętych (np. wirujących), zagadnienia stateczności itp. Przy formułowaniu tych zagadnień użycie proponowanych zależności zamiast zależności klasycznej zbliża nas bardziej do rzeczywistości fizycznej.

Praca wpłynęła do Redakcji w listopadzie 1968 r.

Literatura

[1] W. Urbanowski, *Deformed body structure*. Arch. Mech. Stos., 13 (1961), 277 - 294.
[2] Б. А. Берг, *О деформационной анизотропии*. ПММ, 22 (1958), 1, 67 - 77.
[3] H. Zorski, *On the equations describing small deformations superposed on finite deformations*. Proc. Intl. Symp. Second-Order Effects, Haifa 1962, 109 - 128.
[4] R. A. Toupin, B. Bernstein, *Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect*. J. Acoust. Soc. Amer., 33 (1961), 2, 216 - 225.
[5] C. Truesdell, W. Noll, *The non-linear field theory*. Encyclopedia of Physics, Ed. S. Flügge, vol. III/3, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
[6] R. A. Toupin, R. S. Rivlin, *Dimensional changes in crystals caused by dislocations*. J. Math. Phys., vol. 1 (1960) 1, 8 - 15.
[7] A. E. Green, *Thermoelastic stresses in initially stressed bodies*. Proc. Royal Soc. A, vol. 266 (1962), 1 - 19.
[8] E. Lichnerowicz, *Elements of Tensor Calculus*. John Wiley a. Sons, New York 1951.
[9] P. R. Halmos, *Finite dimensional vector spaces*. 2-nd ed. Princeton University Pr., 1958.
[10] W. Greub, *Linear algebra*. 2-nd ed. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.
[11] J. Rychlewski, *Tensory i funkcje tensorowe*. Biuletyn IMP PAN nr 631, Gdańsk 1969.
[12] C. Truesdell, *The elements of continuum mechanics*. Springer-Verlag, New York 1966.
[13] W. Pietraszkiewicz, *Stałe sprężyste 2-go rzędu dla izotropowego materiału sprężystego*. Biuletyn IMP PAN nr 612, Gdańsk 1968.
[14] W. Pietraszkiewicz, *Termodynamika materiału sprężystego*. Biuletyn IMP PAN nr 637, Gdańsk 1968.
[15] C. Truesdell, *Second-order theory of wave propagation in isotropic elastic materials*. Proc. Intl. Symp. Second-Order Effects, Haifa 1962, 197 - 199.
[16] W. Noll, *A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuum media*. Arch. Rational Mech. Anal., vol. 2 (1958), 3, 195 - 226.
[17] W. Pietraszkiewicz, *Materiały sprężyste*. Biuletyn IMP PAN nr 652, Gdańsk 1969.

Напряжения в однородном изотропном упругом твердом теле после очередного наложения двух малых деформаций

Резюме

На основе теории малых деформаций, наложенных на конечную деформацию упругого твердого тела, рассматривается случай когда первая деформация, отсчитываемая от ненапряженного состояния, также мала. Малость деформаций учтена путем введения при градиентах перемещений малого параметра ε. Затем все тензорные функции развернуты в степенные ряды по ε. Доказано, что для получения очередного наложения деформаций все тензорные величины от первой деформации должны быть вычислены с точностью до членов порядка ε^2 включительно.

Для упругого в смысле Коши и Грина твердого тела вычисления велись двумя независимыми путями, отправляясь от различных, но эквивалентных форм уравнений состояния. Получены формулы на тензор напряжения, которые, кроме членов известных из классической линейной теории упругости, включают также члены порядка ε^2, составленные из комбинации тензоров малых растяжений и оборотов обеих деформаций, а также упругие постоянные первого и второго порядка твердого тела в ненапряженном состоянии.

Stress in Homogeneous Isotropic Elastic Solid after Successive Superposition of Two Small Deformations

Summary

On the basis of the theory of small elastic deformation superimposed on a finite deformation, the problem is considered with the first deformation from the natural state being assumed to be also small. On introducing a small parameter ε with both displacement gradients, and on expanding all tensor functions into ε — power series, the smallness of both deformations is taken into consideration. Absolute tensor notation is used throughout the work. It is proved that, in order to get the successive superposition of the two deformations, all tensor quantities of the first deformation must be calculated with the accuracy up to terms of the second order in ε.

Two independent ways of deriving the stress tensor, based on two different but equivalent forms of a constitutive equation, are presented for Cauchy-elastic and Green-elastic solids.

In final relations for stress tensor, in addition to the terms known from the classical linear elasticity, there are terms of the second order in ε with infinitesimal strain and rotation tensors of the both small deformations and with the first and second order elastic constants of the solid in the natural state.