

WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ

(Gdańsk)

NIELINIOWE TEORIE CIENKICH POWŁOK SPRĘŻYSTYCH

Praca zawiera podstawowe zależności nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych oraz różne warianty równań przybliżonych.

Ścisłe zależności geometryczne dla deformacji powierzchni środkowej powłoki sformułowano poprzez symetryczne tensory odkształcenia i zmiany krzywizny. Stosując zasadę pracy wirtualnej podano dwuwymiarowo ścisłe równania równowagi i warunki brzegowe, wyrażone przez symetryczne tensory sił wewnętrznych i momentów. Wszystkie zależności podstawowe podano zarówno w opisie Eulera, jak i Lagrange'a, a równania równowagi sformułowano również w opisie mieszanym.

Dla cienkich izotropowych powłok sprężystych o stałej grubości przedyskutowano przybliżone dwuwymiarowe równania, konstruowane przy założeniu, że odkształcenia w powłoce są małe. Dla takiej geometrycznie nieliniowej teorii powłok podano konsekwentnie uproszczony układ równań podstawowych. Przyjmując dalsze niezależne ograniczenia stosunku odkształceń giętych i błonowych, długości przewidywanej fali deformacji, obrotów otoczenia punktów powierzchni środkowej i inne, podano klasyfikację różnych wariantów równań, których błąd bezwzględny nie przekracza błędu wprowadzonego do równań przez dwuwymiarowe równania konstytutywne. Przedstawione sformułowanie teorii nieliniowej, po pełnej jej linearyzacji, sprowadza się do „najlepszego” wariantu Sandersa-Koitera liniowej teorii cienkich powłok sprężystych.

Na zakończenie podano również krótki przegląd prac polskich z nieliniowej teorii powłok sprężystych oraz niektóre problemy wymagające badań.

1. Wstęp

Teoria powłok usiłuje dokonać rzeczy niemożliwej, jak opisanie stanu naprężenia i odkształcenia w cienkim ciele trójwymiarowym przy pomocy skończonej liczby wielkości zdefiniowanych na powierzchni środkowej powłoki. Teoria powłok jest więc teorią przybliżoną z definicji i na ogół nie może dać ani pełnej, ani ścisłej informacji o stanie naprężenia i odkształcenia w powłoce. Informacje, które można jednak uzyskać z dwuwymiarowych równań teorii powłok, są w większości przypadków wystarczająco dokładne dla zastosowań technicznych i na ogół bardzo trudne lub wręcz niemożliwe do uzyskania z równań trójwymiarowych.

Różne warianty równań dwuwymiarowych teorii powłok można otrzymać różnymi sposobami z zagadnienia trójwymiarowego. Najczęściej stosowane są metody nałożenia więzów typu Kirchhoffa-Love'a i innych [1, 2, 3, 4, 5], oszacowania rzędu członów trójwymiarowych równań różniczkowych [6, 7] i całkowania asymptotycznego [8, 9, 10]. Można też teorię powłok budować wprost jako teorię dwuwymiarową, bez związków z zagadnieniem trójwymiarowym, postulując dla powłoki słuszność modelu powierzchni Cosserat [11, 12]. Ogólne zasady budowania dwuwymiarowych równań nieliniowej teorii powłok omówione zostały obszernie w rozdziale pierwszym i w dalszych rozdziałach. Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie różnych wariantów równań nieliniowych teorii pierwszego przybliżenia dla cienkich powłok sprężystych.

Klasyczna liniowa teoria pierwszego przybliżenia cienkich powłok sprężystych, zapoczątkowana pracami Arona [14] i Love'a [15], rozwijała się burzliwie w ciągu ubiegłych stu lat. Powstało szereg szkół naukowych, wydano wiele fundamentalnych dzieł formułujących różne warianty równań liniowej teorii powłok i podających wiele sposobów ich rozwiązania. Zdecydowana większość zaproponowanych wariantów równań różni się między sobą członami rzędu η/R w określeniu tensora zmiany krzywizny, gdzie η jest największym odkształceniem powłoki, a R najmniejszym promieniem krzywizny jej powierzchni środkowej. Koiter [16] pokazał, że przy małych odkształceniach różnice rzędu η/R w określeniu tensora zmiany krzywizny dają w energii deformacji błąd tego samego rzędu co wpływy drugorzędne pomijane zwykle w ramach pierwszego przybliżenia, np. energia sprężysta od momentów drugiego rzędu lub od sił ścinających. W sensie energii deformacji wszystkie takie warianty teorii liniowej są więc równoważne. Na podstawie szeregu kryteriów dodatkowych Budiansky i Sanders [17] zaproponowali, aby spośród wielu równoważnych wariantów liniowej teorii powłok za „najlepszy” uznać wariant opracowany niezależnie przez Sandersa [18] i Koitera [16]. W wariacie tym m. in. a) tensory sił wewnętrznych i momentów oraz tensory odkształcenia i zmiany krzywizny są symetryczne, b) spełnione są ściśle twierdzenia wariacyjne analogiczne do znanych z liniowej teorii sprężystości, c) słuszna jest analogia statyczno-geometryczna, d) równania konstytutywne nie są sprzężone. Od tej pory liczba proponowanych nowych wariantów teorii liniowej wyraźnie zmalała i ten „najlepszy” wariant Sandersa-Koitera można uznać jako standardowy wariant pierwszego przybliżenia liniowej teorii powłok sprężystych.

Nieco inna sytuacja istnieje ciągle w nieliniowej teorii powłok, w szczególności powłok sprężystych. Mimo bardzo wielu prac o charakterze ogólnym, które pojawiły się głównie w ostatnim 15-leciu, podstawy teorii są ciągle przedmiotem sporów. Wielu autorów pracujących dłużej w tej dziedzinie dąży do sformułowania i preferowania własnego wariantu równań podstawowych, co przypomina sytuację panującą do niedawna w klasycznej liniowej teorii powłok. Jedyna w literaturze polskiej monografia Woźniaka [4] oraz wykonane ostatnio obszerne opracowania Koitera i Simmondsa [19] oraz Naghdiego [12] zawierają obszerną dyskusję podstaw teorii nieliniowej oraz obszerną bibliografię prac z nieliniowej teorii powłok sprężystych. Wiele przykładów zastosowań różnych prostych wariantów równań, głównie równań geometrycznie nieliniowej teorii powłok o małej wyniosłości, podano np. w monografiach Musztariego i Galimowa [3], Wolnira [20, 21], Grigoljuka i Kabanowa [22], które również zawierają obszerną bibliografię. Zwalnia to autora niniejszego referatu od dokonania zbędnego w tej sytuacji przeglądu wszystkich pojawiających się tu zagadnień i pozwala skupić się tylko nad niektórymi wybranymi problemami nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych.

Nieliniowe miary odkształcenia dla powłoki mogą być definiowane jako symetryczne [1, 4, 19, 23, 24] lub niesymetryczne [2, 12, 25, 26]. W niniejszej pracy używamy symetrycznych miar odkształcenia (3) definiowanych poprzez zmianę tensora metrycznego i tensora krzywizny powierzchni środkowej powłoki. Wprowadzenie pewnej modyfikacji tensora zmiany krzywizny (6) powoduje, że liniowa część tego tensora jest taka sama jak w „najlepszej” liniowej teorii powłok [17]. Równania równowagi i naturalne warunki brzegowe można łatwo uzyskać ściśle z równań trójwymiarowych przez ich bezpośrednie

całkowanie po grubości powłoki w konfiguracji odkształconej. Jednak tensory sił wewnętrznych i momentów zdefiniowane w ten sposób są niesymetryczne [2, 12, 27], chociaż można je potem przekształcić do postaci symetrycznej przy pomocy żmudnych transformacji [28, 29]. Analogiczne ściśle równania można jednak uzyskać z zasad wariacyjnych, a w szczególności z zasady pracy wirtualnej [1, 16, 23, 24], gdzie przy użyciu symetrycznych miar odkształcenia tensory sił wewnętrznych i momentów są od razu symetryczne z definicji. Ten sposób jako szybciej wiodący do celu wykorzystamy również w niniejszej pracy.

Istnieje szereg możliwości formułowania równań nieliniowej teorii powłok poprzez wielkości symetryczne. Chociaż nie wszystkie argumenty podnoszone w [17], np. dotyczące analogii statyczno-geometrycznej, mają zastosowanie w teorii nieliniowej, celowe wydaje się dążenie do formułowania teorii nieliniowej poprzez takie wielkości, by przy przejściu granicznym do teorii liniowej uzyskać jej „najlepszy” wg [17] wariant. Przedstawiona poniżej nieliniowa teoria powłok spełnia ten postulat.

Termin „teoria nieliniowa” jest używany do określenia wielu, czasem bardzo różniących się, wariantów równań podstawowych, począwszy od najprostszego wariantu równań nieliniowych typu Kármána dla powłok o małej wyniosłości (54), aż po nieliczne ściśle rozwiązania teorii skończonych odkształceń dla cienkiego ciała sprężystego. Wyróżnia się przy tym wyraźnie nieliniową teorię powłok dla małych odkształceń, zwaną często teorią geometrycznie nieliniową, w odróżnieniu od teorii nieliniowej, w której ani odkształcenia, ani obroty czy przemieszczenia nie są ograniczane. Równania konstytutywne dla powłok sprężystych wynikają z pewnej zawsze przybliżonej postaci dwuwymiarowej energii sprężystej. Kluczowym zagadnieniem staje się oszacowanie dokładności dwuwymiarowych równań konstytutywnych, co wpływa na dokładność i możliwości uproszczeń wszystkich innych równań teorii. Taką dyskusję błędów równań konstytutywnych dla przypadku małych odkształceń przeprowadził Koiter [16]. Dla odkształceń skończonych dyskusja dokładności dwuwymiarowych równań konstytutywnych nie została, jak dotychczas, przeprowadzona, a różne postacie dwuwymiarowej energii sprężystej są na ogół postulowane [12] lub wprowadzane poprzez nałożenie dodatkowych więzów na deformację po grubości powłoki [4, 30].

W nieliniowej teorii powłok istotną sprawą staje się rozróżnienie opisu Eulera (prze-strzennego) od opisu Lagrange’a (materialnego), podobnie jak to się robi w nieliniowej mechanice ośrodka ciągłego. W opisie Eulera wszystkie wielkości są definiowane i analizowane w geometrii odkształconej powierzchni środkowej powłoki, w opisie Lagrange’a są one definiowane i analizowane w geometrii powierzchni środkowej w pewnej wybranej konfiguracji odniesienia powłoki. W rozważaniach ogólnych chętnie stosowany jest [1, 4, 12, 23] opis Eulera, jako prowadzący do prostszych postaci równań równowagi i warunków brzegowych. W konkretnych zagadnieniach nieliniowej teorii powłok geometria odkształconej powierzchni środkowej na ogół nie jest znana i bezpośrednio zastosowanie zależności Eulerowskich na ogół nie jest możliwe. Wprowadza się więc szereg dalszych uproszczeń pozwalających na wyrażenie zależności Eulerowskich w geometrii powierzchni odniesienia. W ostatnim okresie wykonano szereg prac, w których różne warianty teorii powłok sprężystych sformułowane zostały od razu w opisie Lagrange’a [24, 25, 26, 27,

31, 32]. W niniejszym rozdziale podano sformułowanie podstawowych zależności w obu opisach. Równania równowagi sformułowano również w opisie mieszanym [38], tzn. Eulerowskie wektorowe równania równowagi, zapisane w składowych bazy odkształconej, wyrażono poprzez wielkości Lagrange'owskie. Wprowadzając tensor przestrzennego gradientu deformacji [33] podano również proste związki między wprowadzonymi wielkościami w opisie Eulera i Lagrange'a.

Wszystkie równania i zależności geometryczne podane w p. 2 i 3 niniejszego rozdziału są dwuwymiarowo ściśle dla powłoki utożsamianej z jej powierzchnią środkową i słuszne dla pełnej nieliniowej teorii dwuwymiarowej. Dopiero w p. 4 założono, że odkształcenia są małe i przeprowadzono dyskusję możliwych uproszczeń równań podstawowych dla przypadku geometrycznie nieliniowej teorii powłok sprężystych.

Dla niektórych klas zadań łatwo jest przewidzieć pewne charakterystyczne cechy rozwiązania i z góry ograniczyć dopuszczalne wartości wybranych parametrów. W ten sposób dla różnych zadań równania podstawowe mogą być jeszcze znacznie uproszczone bez wpływu na dokładność otrzymanego rozwiązania. Taką klasyfikację różnych teorii szczegółowych dla geometrycznie nieliniowej teorii powłok przedyskutowano w p. 5, 6 i 7, ograniczając niezależnie stosunek odkształceń giętych i błonowych, długość przewidywanej fali deformacji oraz obroty otoczenia punktów powierzchni środkowej powłoki. Pokazano również przejście do równań klasycznej nieliniowej teorii powłok o małej wyniosłości. Koiter [1] podał klasyfikację opartą na ograniczeniach podobnych parametrów, dokonaną jednak przy pomocy oszacowania błędu względnego w równaniach podstawowych. W równaniach nieco uproszczonych w stosunku do stosowanych w niniejszym rozdziale pomijano w pracy [1] niektóre człony małe w stosunku do innych członów, zakładając, że mały błąd w równaniach powoduje również mały błąd w rozwiązaniu. Wiadomo jednak, że w nieliniowej teorii powłok, szczególnie przy badaniu zagadnień stateczności, takie założenie nie jest na ogół bezpieczne. W pracy [1] wykluczono więc zagadnienia stateczności rozważając je niezależnie [34]. W niniejszym rozdziale klasyfikację równań uproszczonych wykonano na podstawie oszacowania błędu bezwzględnego i wynikającego tylko z przybliżonego charakteru równań konstytutywnych, co nie wyklucza rozważania również zagadnień stateczności, czym jednak obecnie nie będziemy się zajmować.

2. Oznaczenia i zależności geometryczne

W opracowaniu będziemy używali układu oznaczeń głównie wg [1, 19, 24]. Niech $\mathbf{r}(\vartheta^a)$ i $\bar{\mathbf{r}}(\vartheta^a)$ będą wektorami pozycyjnymi punktów powierzchni środkowej powłoki w konfiguracji odniesienia i aktualnej, gdzie ϑ^a , $a = 1, 2$, są współrzędnymi konwekcyjnymi na powierzchni. Geometrię powierzchni środkowej S powłoki w konfiguracji odniesienia opisują kowariantne wektory bazy $\mathbf{a}_a = \mathbf{r}_{,a}$, kowariantne składowe tensora metrycznego $a_{a\beta} = \mathbf{a}_a \cdot \mathbf{a}_\beta$, wektor jednostkowy $\mathbf{n} = \frac{1}{2}\varepsilon^{a\beta}\mathbf{a}_a \times \mathbf{a}_\beta$ prostopadły do powierzchni S oraz kowariantne składowe tensora krzywizny $b_{a\beta} = \mathbf{a}_{a,\beta} \cdot \mathbf{n}$. Tutaj $(\)_{,a}$ oznacza pochodną cząstkową względem ϑ^a , natomiast $\varepsilon^{a\beta}$ są kontrawariantnymi składowymi tensora permutacji. Podobne wielkości geometryczne związane z powierzchnią odkształconą \bar{S} wyróż-

niane będą kreską, np. $\bar{a}_\alpha, \bar{a}_{\alpha\beta}, \bar{n}, \bar{b}_{\alpha\beta}, \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ etc. Pochodną kowariantną w metryce odniesienia i odkształconej oznaczymy odpowiednio przez $(\)_{|\alpha}$ i $(\)_{|\alpha}$.

Deformacja powierzchni środkowej powłoki może być wyrażona przez wektor przemieszczenia

$$(1) \quad \mathbf{u}(\vartheta^\alpha) = \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r} = u^\alpha \mathbf{a}_\alpha + w \mathbf{n} = \bar{u}^\alpha \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \bar{w} \bar{\mathbf{n}}.$$

W opisie Lagrange'a wszystkie wielkości geometryczne powierzchni odkształconej \bar{S} są wyrażane przez u^α , w przy pomocy zależności [1, 24]

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_\alpha &= l_{,\alpha}^* \mathbf{a}_\alpha + \varphi_\alpha \mathbf{n}, & \bar{\mathbf{n}} &= n^* \mathbf{a}_\alpha + n \mathbf{n}, \\ l_{,\alpha}^* &= \delta_\alpha^* + u_{|\alpha}^* - b_\alpha^* w, & \varphi_\alpha &= w_{,\alpha} + b_\alpha^* u_\alpha, \\ n^* &= \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\kappa} \varphi_\alpha l_{\lambda\beta}, & n &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\kappa} l_{\lambda\alpha} l_{\kappa\beta}. \end{aligned}$$

Kowariantne składowe tensorów odkształcenia i zmiany krzywizny powierzchni środkowej powłoki w opisie Lagrange'a zdefiniowane są zależnościami

$$(3) \quad \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(l_{,\alpha}^* l_{\kappa\beta} + \varphi_\alpha \varphi_\beta - a_{\alpha\beta}), \\ \kappa_{\alpha\beta} &= -(\bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) = -[n(\varphi_{\alpha|\beta} + b_\beta^* l_{\kappa\alpha}) + n_\kappa (l_{,\alpha|\beta}^* - b_\beta^* \varphi_\alpha) - b_{\alpha\beta}] \end{aligned}$$

i spełniają następujące warunki ciągłości [1]

$$(4) \quad \begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} [\kappa_{\beta\lambda|\mu} + \bar{a}^{\kappa\nu} (b_{\kappa\lambda} - \kappa_{\kappa\lambda}) \gamma_{\nu\beta\mu}] &= 0, \\ K \gamma_\kappa^* + \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} [\gamma_{\alpha\mu|\beta\lambda} - b_{\alpha\mu} \kappa_{\beta\lambda} + \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\mu} \kappa_{\beta\lambda} + \bar{a}^{\kappa\nu} \gamma_{\kappa\alpha\mu} \gamma_{\nu\beta\lambda})] &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5) \quad \begin{aligned} \gamma_{\kappa\alpha\mu} &= \gamma_{\kappa\alpha|\mu} + \gamma_{\kappa\mu|\alpha} - \gamma_{\alpha\mu|\kappa}, \\ \bar{\alpha}^{\kappa\lambda} &= \frac{\bar{a}}{a} (a^{\kappa\lambda} + 2\varepsilon^{\kappa\alpha} \varepsilon^{\lambda\beta} \gamma_{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{a}}{a} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\mu} (a_{\alpha\beta} + 2\gamma_{\alpha\beta})(a_{\lambda\mu} + 2\gamma_{\lambda\mu}).$$

Często stosowany jest tensor zmiany krzywizny $\varrho_{\alpha\beta}$ zdefiniowany zależnością

$$(6) \quad \varrho_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(b_\alpha^* \gamma_{\kappa\beta} + b_\beta^* \gamma_{\alpha\kappa}).$$

Liniowa część tego tensora występuje w „najlepszej” liniowej teorii powłok [17].

W opisie Eulera wszystkie wielkości geometryczne powierzchni odniesienia są wyrażane przez \bar{u}^α , \bar{w} przy pomocy analogicznych do (2) zależności:

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_\alpha &= \bar{l}_{,\alpha}^* \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \bar{\varphi}_\alpha \bar{\mathbf{n}}, & \mathbf{n} &= \bar{n}^* \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \bar{n} \bar{\mathbf{n}}, \\ \bar{l}_{,\alpha}^* &= \bar{\delta}_\alpha^* - \bar{u}_{|\alpha}^* + \bar{b}_\alpha^* \bar{w}, & \bar{\varphi}_\alpha &= -(\bar{w}_{,\alpha} + \bar{b}_\alpha^* \bar{u}_\alpha), \\ \bar{n}^* &= \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} \bar{\varepsilon}^{\lambda\kappa} \bar{\varphi}_\alpha \bar{l}_{\lambda\beta}, & \bar{n} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} \bar{\varepsilon}^{\lambda\kappa} \bar{l}_{\lambda\alpha} \bar{l}_{\kappa\beta}. \end{aligned}$$

Kowariantne składowe tensorów odkształcenia i zmiany krzywizny powierzchni środkowej powłoki w opisie Eulera zdefiniowane są zależnościami

$$(8) \quad \begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta} - \bar{l}_{,\alpha}^* \bar{l}_{\kappa\beta} - \bar{\varphi}_{\alpha} \bar{\varphi}_{\beta}), \\ \bar{\kappa}_{\alpha\beta} &= -(\bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) = -[\bar{b}_{\alpha\beta} - \bar{n}(\bar{\varphi}_{\alpha;\beta} + \bar{b}_{\beta;\kappa\alpha}^*) - \bar{n}_{,\kappa}(\bar{l}_{,\alpha;\beta}^* - \bar{b}_{\beta}^* \bar{\varphi}_{\alpha})] \end{aligned}$$

i spełniają warunki ciągłości analogiczne do (4).

Tensor gradientu deformacji powłoki w układzie współrzędnych konwekcyjnych określony jest na powierzchni środkowej powłoki wzorem [33]

$$(9) \quad \mathbf{G} = \bar{\mathbf{a}}_{\alpha} \otimes \mathbf{a}^{\alpha} + \bar{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{a}_{\alpha} \otimes \bar{\mathbf{a}}^{\alpha} + \mathbf{n} \otimes \bar{\mathbf{n}}.$$

Łatwo więc wykazać, że tensory odkształcenia i zmiany krzywizny są zdefiniowane w sposób absolutny zależnościami

$$(10) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= \frac{1}{2}(\mathbf{G}^T \mathbf{G} - \mathbf{I}), \quad \boldsymbol{\kappa} = -(\mathbf{G}^T \bar{\mathbf{b}} \mathbf{G} - \mathbf{b}), \\ \bar{\boldsymbol{\gamma}} &= \frac{1}{2}[\bar{\mathbf{I}} - (\mathbf{G}^{-1})^T \mathbf{G}^{-1}], \quad \bar{\boldsymbol{\kappa}} = -[\bar{\mathbf{b}} - (\mathbf{G}^{-1})^T \mathbf{b} \mathbf{G}^{-1}], \end{aligned}$$

gdzie

$$(11) \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}^T = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^{\alpha} \otimes \mathbf{a}^{\beta} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^T = b_{\alpha\beta} \mathbf{a}^{\alpha} \otimes \mathbf{a}^{\beta}$$

i są związane wzorami

$$(12) \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{G}^T \bar{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{G}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{G}^T \bar{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{G},$$

skąd łatwo wynikają zależności między ich kowariantnymi reprezentacjami (3) i (8).

3. Równania podstawowe

W opisie Eulera wszystkie wielkości są definiowane i rozkładane w geometrii powierzchni odkształconej \bar{S} . Niech powłoka będzie w równowadze pod wpływem zewnętrznych sił powierzchniowych $\bar{\mathbf{p}}$, danych na jednostkę powierzchni odkształconej \bar{S} , oraz sił i momentów brzegowych $\bar{\mathbf{F}}$ i $\bar{\mathbf{K}}$, danych na jednostkę długości brzegu odkształconego \bar{C} . Dla każdego dodatkowego przemieszczenia wirtualnego $\delta \bar{\mathbf{u}}$ powierzchni środkowej powłoki zasada pracy wirtualnej ma postać [1, 35]:

$$(13) \quad \int_{\bar{S}} (\bar{n}^{\alpha\beta} \delta \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \bar{m}^{\alpha\beta} \delta \bar{\varrho}_{\alpha\beta}) d\bar{A} = \int_{\bar{S}} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\bar{A} + \int_{\bar{C}} (\bar{\mathbf{F}} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{K}} \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\Omega}}) d\bar{s},$$

gdzie $\delta \bar{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\delta \bar{\varrho}_{\alpha\beta}$ oraz $\delta \bar{\boldsymbol{\Omega}}$ są liniowymi funkcjami $\delta \bar{\mathbf{u}}$ [35]. Składowe tensorów sił wewnętrznych $\bar{n}^{\alpha\beta}$ i momentów $\bar{m}^{\alpha\beta}$ są tu zdefiniowane jako współczynniki w niezmienniczym wyrażeniu podcałkowym i są symetryczne z definicji.

Stosując rachunek wariacyjny łatwo pokazać [35, 36], że zasada (13) prowadzi do następujących Eulerowskich równań równowagi

$$(14) \quad \bar{N}_{;\alpha}^{\alpha} + \bar{\mathbf{p}}^* = \mathbf{0}$$

oraz naturalnych warunków brzegowych na swobodnym i gładkim brzegu \bar{C} :

$$(15) \quad (\bar{N}^\alpha - \bar{b}_\alpha^\beta \bar{m}^{\alpha\gamma} \bar{a}_\beta) \bar{v}_\alpha + \frac{d}{d\bar{s}} (\bar{m}^{\alpha\beta} \bar{v}_\alpha \bar{t}_\beta) \bar{n} = \bar{F} - \bar{b}_\alpha^\beta \bar{K}^\alpha \bar{a}_\beta + \frac{d}{d\bar{s}} (\bar{K}^\alpha \bar{t}_\alpha) \bar{n},$$

$$\bar{m}^{\alpha\beta} \bar{v}_\alpha \bar{v}_\beta = \bar{K}^\alpha \bar{v}_\alpha.$$

W powyższych zależnościach \bar{t} jest wektorem jednostkowym stycznej, a \bar{n} wektorem jednostkowym normalnej zewnętrznej do odkształconej krzywej brzegowej, natomiast wektory sił wewnętrznych i momentów, mierzone na jednostkę długości krzywej na \bar{S} , określono następującymi zależnościami

$$(16) \quad \bar{N}^\alpha = (\bar{n}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \bar{b}_\alpha^\beta \bar{m}^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \bar{b}_\alpha^\beta \bar{m}^{\alpha\gamma}) \bar{a}_\beta + \bar{m}^{\alpha\beta} \bar{n}_\beta,$$

$$\bar{M}^\alpha = \bar{\varepsilon}_{\beta\lambda} \bar{m}^{\alpha\beta} \bar{a}^\lambda.$$

W składowych w bazie \bar{a}_α, \bar{n} równania (14) mają postać

$$(17) \quad (\bar{n}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \bar{b}_\alpha^\beta \bar{m}^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \bar{b}_\alpha^\beta \bar{m}^{\alpha\gamma})_{;\alpha} \bar{a}_\beta - \bar{b}_\alpha^\beta \bar{m}^{\alpha\gamma}_{;\gamma} + \bar{p}^\beta = 0,$$

$$\bar{m}^{\alpha\beta}_{;\alpha\beta} + \bar{b}_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta} + \bar{p} = 0.$$

Równania równowagi (14), (17) oraz naturalne warunki brzegowe (15) mają stosunkowo prostą postać i zawierają tylko wielkości zdefiniowane lub analizowane w geometrii powierzchni odkształconej \bar{S} . Wszystkie operacje różniczkowania kowariantnego wykonuje się również w geometrii \bar{S} . Przy rozważaniach ogólnych opis Eulera jest chętnie stosowany, właśnie ze względu na stosunkową prostotę uzyskiwanych zależności. Należy jednak podkreślić, że w konkretnych zadaniach z nieliniowej teorii powłok geometria powierzchni \bar{S} nie jest na ogół znana i bezpośrednie zastosowanie zależności Eulerowskich jest możliwe tylko w wyjątkowych przypadkach. Często jednak zależności te stanowią wygodną podstawę do wyprowadzenia szeregu wariantów uproszczonych nieliniowej teorii powłok.

W opisie Lagrange'a wszystkie wielkości są definiowane i analizowane w geometrii powierzchni nieodkształconej S .

Korzystając z zależności geometrycznych zachodzących podczas deformacji powierzchni środkowej powłoki [24, 37]

$$(18) \quad d\bar{A} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} dA, \quad d\bar{s} = \sqrt{1 + 2\gamma_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta} ds,$$

$$\bar{v}_\alpha d\bar{s} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} v_\alpha ds, \quad \bar{t}_\alpha d\bar{s} = (t_\alpha + 2\gamma_{\alpha\beta} t^\beta) ds,$$

wprowadźmy Lagrange'owskie wektory sił wewnętrznych N^α i momentów M^α , liczonych na jednostkę długości krzywej na S , zewnętrznych sił powierzchniowych p , liczonych na jednostkę powierzchni S , oraz sił i momentów brzegowych F i K , liczonych na jednostkę długości brzegu C , przy pomocy następujących zależności [24]:

$$(19) \quad \bar{N}^a = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} \mathbf{G} N^a, \quad \bar{M}^a = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} (\mathbf{G}^{-1})^T M^a,$$

$$\bar{P} = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} P, \quad \bar{F} = \frac{F}{\sqrt{1+2\gamma_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta}}, \quad \bar{K} = \frac{K}{\sqrt{1+2\gamma_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta}}.$$

gdzie

$$(20) \quad N^a = Q^{a\beta} \mathbf{a}_\beta + Q^a \mathbf{n}, \quad M^a = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \varepsilon_{\beta\lambda} M^{a\beta} \mathbf{a}^\lambda,$$

$$Q^{a\beta} = N^{a\beta} + \frac{1}{2} \bar{b}_*^a M^{*\beta} - \frac{1}{2} \bar{b}_*^\beta M^{a*},$$

$$Q^a = M^{a\beta} \gamma_{\nu\lambda\mu} + \bar{a}^{a\nu} \gamma_{\nu\lambda\mu} M^{\lambda\mu},$$

$$N^{a\beta} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \bar{n}^{a\beta}, \quad M^{a\beta} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \bar{m}^{a\beta}, \quad \bar{b}_*^a = \bar{a}^{a\nu} (b_{\nu*} - \kappa_{\nu*}),$$

a pozostałe wielkości określone są przez relacje (5).

Eulerowskie i Lagrange'owskie tensory sił wewnętrznych i momentów zdefiniowane należnościami

$$(21) \quad \bar{N} = \bar{n}^{a\beta} \bar{\mathbf{a}}_a \otimes \bar{\mathbf{a}}_\beta, \quad \bar{M} = \bar{m}^{a\beta} \bar{\mathbf{a}}_a \otimes \bar{\mathbf{a}}_\beta,$$

$$N = N^{a\beta} \mathbf{a}_a \otimes \mathbf{a}_\beta, \quad M = M^{a\beta} \mathbf{a}_a \otimes \mathbf{a}_\beta,$$

związane są wzorami

$$(22) \quad \bar{N} = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} \mathbf{G} \mathbf{N} \mathbf{G}^T, \quad \bar{M} = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} \mathbf{G} \mathbf{M} \mathbf{G}^T.$$

Zależności (22) są analogiczne do znanej w mechanice ośrodka ciągłego transformacji pomiędzy tensorem naprężenia Cauchy'ego i drugim tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa [33]. Tensory N i M można więc uważać za pewien analog drugiego tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa w nieliniowej teorii powłok.

Dokonując odpowiednich przekształceń [24, 35] zasady pracy wirtualnej (13) otrzymamy Lagrange'owskie równanie równowagi

$$(23) \quad (\mathbf{G} N^a)_{,a} + P = O$$

oraz Lagrange'owskie naturalne warunki brzegowe na swobodnym i gładkim brzegu C

$$(24) \quad [\mathbf{G} N^a + M^{a*} (\mathbf{G} \mathbf{n})_{,a}] \nu_a + \frac{d}{ds} (M^{a\beta} \nu_a t_\beta) \mathbf{G} \mathbf{n} = F + (R^* \mathbf{G} \mathbf{n})_{,*} + \frac{d}{ds} (R^\beta t_\beta) \mathbf{G} \mathbf{n},$$

$$M^{a\beta} \nu_a \nu_\beta = R^\beta \nu_\beta,$$

gdzie

$$(25) \quad R^\beta = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} \varepsilon^{\beta\alpha} \mathbf{K} \cdot \mathbf{G} \mathbf{a}_\alpha.$$

W składowych w bazie $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{n}$ równanie (23) ma postać [24]

$$(26) \quad \begin{aligned} (Q^{\alpha\lambda} l_\lambda^\beta + Q^\alpha n^\beta)_{|\alpha} - b_\alpha^\beta (Q^{\alpha\lambda} \varphi_\lambda + Q^\alpha n) + p^\beta &= 0, \\ (Q^{\alpha\lambda} \varphi_\lambda + Q^\alpha n)_{|\alpha} + b_{\alpha\beta} (Q^{\alpha\lambda} l_\lambda^\beta + Q^\alpha n^\beta) + p &= 0. \end{aligned}$$

Równania równowagi (23), (26) oraz naturalne warunki brzegowe (24) w opisie Lagrange'a zawierają tylko wielkości zdefiniowane i analizowane w geometrii powierzchni odniesienia S , a wszystkie operacje różniczkowania kowariantnego wykonuje się również w geometrii S . Przy rozwiązywaniu konkretnych zadań z nieliniowej teorii powłok geometria S jest na ogół znana i w zasadzie zależności Lagrange'owskie (26), (24) mogą być bezpośrednio zaprogramowane na EMC dla powłoki o ustalonej geometrii jej powierzchni środkowej S . Równania (26) i (24) są jednak znacznie bardziej skomplikowane od równań Eulerowskich (17), (15) i zawierają w sposób jawny nieznanne składowe tensora gradientu deformacji \mathbf{G} . Umożliwia to rozwiązywanie równań Lagrange'owskich tylko w składowych wektora przemieszczenia. Jest to całkowita analogia do nieliniowych zagadnień trójwymiarowych rozwiązywanych przy użyciu drugiego tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa [33].

W niektórych przypadkach celowe może być zastosowanie ujęcia mieszanego [38], w którym Eulerowskie równania równowagi (17), będące składowymi (14) w bazie odkształconej $\bar{\mathbf{a}}_\alpha, \bar{\mathbf{n}}$, przekształca się do postaci zawierającej tylko wielkości Lagrange'owskie i różniczkowanie kowariantne w geometrii S . Wyrażając $\bar{n}^{\alpha\beta}$ i $\bar{m}^{\alpha\beta}$ poprzez $N^{\alpha\beta}$ i $M^{\alpha\beta}$ przy pomocy zależności (20)₄ i korzystając z zależności

$$(27) \quad \left(\sqrt{\frac{\bar{a}}{\bar{a}}} T^{\alpha\beta} \right)_{;a} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{\bar{a}}} (T^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} + \bar{a}^{\beta\mu} \gamma_{\mu\lambda} T^{\alpha\lambda})$$

ślusznej dla każdego tensora $\mathbf{T} = T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta$, dochodzimy do następującej postaci równań równowagi (17):

$$(28) \quad \begin{aligned} N^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} + \bar{a}^{\beta\mu} (2\gamma_{\mu\lambda|\alpha} - \gamma_{\lambda\alpha|\mu}) N^{\lambda\alpha} - \frac{1}{2} (\bar{b}_\alpha^\beta M^{\alpha\kappa} - \bar{b}_\alpha^\kappa M^{\alpha\beta})_{|\alpha} - \\ - \bar{b}_\alpha^\beta M^{\alpha\kappa}{}_{|\alpha} - \bar{b}^{\beta\mu} (2\gamma_{\mu\lambda|\alpha} - \gamma_{\lambda\alpha|\mu}) M^{\lambda\alpha} + \sqrt{\frac{\bar{a}}{\bar{a}}} \bar{p}^\beta = 0, \\ M^{\alpha\beta}{}_{|\alpha\beta} + [\bar{a}^{\beta\mu} (2\gamma_{\mu\lambda|\beta} - \gamma_{\lambda\beta|\mu}) M^{\lambda\alpha}]_{|\alpha} + \bar{b}_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + \sqrt{\frac{\bar{a}}{\bar{a}}} \bar{p} = 0; \end{aligned}$$

przekształcone naturalne warunki brzegowe podane są w pracy [38]. Danielson i Simmonds [39] na podstawie równań (28) wyprowadzili odpowiednie równania dla stateczności sprężystej powłoki w opisie mieszanym. Równania stateczności sprężystej powłok w opisie Lagrange'a, oparte na równaniach (26), podano w pracy [35].

Należy podkreślić, że przedstawione tutaj trzy równoważne układy równań równowagi w opisach Eulera (17), Lagrange'a (26) oraz mieszanym (28) wyprowadzone zostały bez nakładania żadnych ograniczeń na odkształcenia, przemieszczenia lub obroty powierzchni

środkowej powłoki. Dążąc do przedstawienia teorii pierwszego przybliżenia dla powłok cienkich utożsamiliśmy tutaj deformację powłoki z deformacją jej powierzchni środkowej. Uzyskane w ten sposób zależności można więc nazwać dwuwymiarowo ścisłymi dla powierzchni środkowej powłoki. Bezpośrednie zastosowanie twierdzenia o pracy wirtualnej (13) pozwoliło wyrazić równania równowagi i naturalne warunki brzegowe tylko poprzez symetryczne tensory sił i momentów wewnętrznych. Odpowiedni dobór miar deformacji (3)₁ i (6) umożliwił wprowadzenie takich sił i momentów wewnętrznych, że po linearyzacji wszystkich równań i zależności otrzymujemy w granicy „najlepszy” wariant liniowej teorii powłok sprężystych [17]. Łatwo np. zauważyć, że liniowe człony warunków ciągłości (4) oraz równań równowagi (26) lub (28) sprzężone są poprzez analogię statyczno-geometryczną [2].

Dla powłok wykonanych z materiału sprężystego równania konstytutywne, wiążące siły wewnętrzne i momenty z miarami odkształcenia powierzchni środkowej powłoki, wynikają z odpowiedniej dwuwymiarowej funkcji energii sprężystej powłoki. Jeżeli jednak dotychczas wyprowadzone równania równowagi, warunki brzegowe, warunki ciągłości, wyrażenia miar odkształcenia przez składowe przemieszczenia i inne podane zależności są dwuwymiarowo ściśle dla powierzchni środkowej powłoki, to energia sprężysta powłoki może być tylko z pewnym przybliżeniem wyrażona poprzez wielkości dane na powierzchni środkowej powłoki. Również w niemożności podania ścisłych dwuwymiarowych równań konstytutywnych tkwi fakt, że każda teoria powłok jest z definicji teorią przybliżoną.

Można oczywiście ominąć trudności postulując istnienie ścisłej dwuwymiarowej energii sprężystej w opisie Lagrange'a $V(\gamma_{\alpha\beta}, \varrho_{\alpha\beta})$ lub Eulera $\bar{V}(\bar{\gamma}_{\alpha\beta}, \bar{\varrho}_{\alpha\beta})$, której postać ograniczana jest jedynie zasadą obiektywności oraz założoną symetrią materiału, a pojawiające się stałe materiałowe wyznaczać z odpowiednich badań doświadczalnych. Tak np. dla opisu Lagrange'a ściśle równania konstytutywne wyznaczane są wtedy wprost z zależności

$$(29) \quad N^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{\beta\alpha}} \right), \quad M^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho_{\alpha\beta}} + \frac{\partial V}{\partial \varrho_{\beta\alpha}} \right).$$

Takie podejście jest charakterystyczne dla modelu powłoki jako tzw. powierzchni Cosserat [11], co wyczerpująco omówione zostało ostatnio przez Naghdiego [12]. Wtedy równania konstytutywne (29), równania równowagi (26), naturalne warunki brzegowe (24), warunki ciągłości (4) oraz zależności między miarami odkształcenia i składowymi wektora przemieszczenia (3)₁ i (6) tworzą matematycznie zamknięty ścisły układ równań nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych w opisie Lagrange'a. Podobnie **jest** dla opisu Eulera i mieszanego.

Dwuwymiarowa przybliżona postać energii sprężystej może być uzyskana z energii sprężystej cienkiego ciała trójwymiarowego w różny sposób, np. przy pomocy rozwinięć asymptotycznych po grubości powłoki lub założenia więzów typu Kirchhoffa-Love'a i innych na deformację powłoki. Kluczowym zagadnieniem staje się oszacowanie dokładności zbudowanej dwuwymiarowej energii sprężystej, która wpływa na dokładność równań konstytutywnych, a stąd na dokładność całego układu równań nieliniowej teorii powłok sprężystych. Niestety, w oszacowaniu dokładności dwuwymiarowej energii sprężystej

zadowalające rezultaty uzyskano tylko dla przypadku małych odkształceń sprężystych powłoki. Dalszą dyskusję teorii przybliżonych ograniczymy więc tylko do przypadku małych odkształceń.

4. Teoria małych odkształceń

Dla przypadku gdy odkształcenia η w powłoce są założone jako małe, Koiter [16] przeprowadził obszerną dyskusję wyrażenia energii sprężystej dla powłoki o stałej grubości h wykonanej z materiału izotropowego. Po rozwinięciu trójwymiarowego wyrażenia energii sprężystej w szereg względem współrzędnej normalnej do powłoki i scałkowaniu go po grubości powłoki, dokonano oszacowania wszystkich członów występujących w rozwinięciu i otrzymano następujące oszacowanie Lagrange'owskiej postaci energii sprężystej powłoki na jednostkę powierzchni nieodkształconej

$$(30) \quad V = \frac{h}{2} E^{\alpha\beta\lambda\mu} \left(\gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \varrho_{\alpha\beta} \varrho_{\lambda\mu} \right) [1 + O(\varepsilon^2)],$$

gdzie

$$(31) \quad \varepsilon = \max \left(\frac{h}{L}, \frac{h}{d}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \sqrt{\eta} \right),$$

$$E^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} [(1-\nu)(a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda}) + 2\nu a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu}];$$

L jest minimalną długością „fali deformacji” na powierzchni środkowej powłoki, natomiast d jest odległością od brzegu powłoki wprowadzoną do parametru ε w ostatniej pracy Koitera i Simmondsa [19] na podstawie wyników uzyskanych przez Johna [6]. Wyrażenie podobne do (31) można uzyskać również dla Eulerowskiej postaci energii sprężystej.

Przy oszacowaniach poszczególnych członów przyjmuje się, że

$$(32) \quad a_{\alpha\beta} \sim 1, \quad b_{\alpha\beta} \sim \frac{1}{R}, \quad ()_{|a} \sim \frac{()}{\lambda},$$

$$\left(\frac{h}{L} \right)^2 \ll 1, \quad \frac{h}{R} \ll 1, \quad \eta \ll 1,$$

gdzie

$$(33) \quad \lambda = \frac{h}{\varepsilon} = \min \left(L, d, \sqrt{hR}, \frac{h}{\sqrt{\eta}} \right).$$

Przybliżone równania konstytutywne wynikające z wzoru (30) zgodnie z (29) mają teraz postać

$$(34) \quad N^{\alpha\beta} = \frac{1}{A(1-\nu^2)} [(1-\nu)\gamma^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha}^{\beta}] + O(Eh\eta\varepsilon^2),$$

$$M^{\alpha\beta} = D[(1-\nu)\varrho^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} \varrho_{\alpha}^{\beta}] + O(Eh^2\eta\varepsilon^2),$$

lub po rozwikłaniu ich względem $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\varrho_{\alpha\beta}$

$$(35) \quad \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= A[(1+\nu)N_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta} N_{\alpha}^{\alpha}] + O(\eta\varepsilon^2), \\ \varrho_{\alpha\beta} &= \frac{1}{D(1-\nu^2)} [(1+\nu)M_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta} M_{\alpha}^{\alpha}] + O\left(\frac{\eta\varepsilon^2}{h}\right), \end{aligned}$$

gdzie

$$(36) \quad A = \frac{1}{Eh}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Przybliżony charakter równań konstytutywnych (34) i (35) umożliwia dokonanie istotnych uproszczeń również innych równań podstawowych. Możemy bowiem pominąć człony, które są tego samego rzędu co człony pomijane w równaniach konstytutywnych. Ważną sprawą jest tu odpowiedni dobór zmiennych niezależnych teorii powłok. W uproszczonym układzie równań uzyskanym przez Danielsona [38] z modyfikacjami wniesionymi przez Koitera i Simmondsa [19] jako zmienne niezależne wybrano symetryczne tensory sił wewnętrznych $N^{\alpha\beta}$ i zmiany krzywizny $\varrho_{\alpha\beta}$. Taki wybór uzasadniany jest tym, że w przypadku szczególnym teorii błonowej siły $N^{\alpha\beta}$ są wyznaczone wprost z równań równowagi, natomiast w przypadku szczególnym deformacji powłoki bez wydłużenia jej powierzchni środkowej zmiany krzywizny $\varrho_{\alpha\beta}$ są również wyznaczone tylko z warunków ciągłości. Tensory $\gamma_{\alpha\beta}$ i $M^{\alpha\beta}$ jako zmienne zależne są eliminowane przy pomocy równań (34)₂ i (35)₁. Po dokonaniu odpowiednich uproszczeń szczegółowo przedyskutowanych w pracach [19, 38] warunki ciągłości w opisie Lagrange'a (4), przy uwzględnieniu (6), oraz jednorodne równania równowagi w opisie mieszanym (28) mogą być sprowadzone do następującej postaci kanonicznej

$$(37) \quad \begin{aligned} &\varrho_{\alpha|\beta}^{\beta} - \varrho_{\beta|\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2}(1+\nu)A(b_{\alpha}^{\lambda}N_{\lambda}^{\beta} - b_{\lambda}^{\beta}N_{\alpha}^{\lambda})_{|\beta} - Ab_{\alpha}^{\beta}N_{\lambda|\beta}^{\lambda} + \\ &+ (1+\nu)A(\varrho_{\alpha}^{\beta}N_{\lambda|\beta}^{\lambda} + \varrho_{\lambda}^{\beta}N_{\beta|\alpha}^{\lambda}) - \nu A\varrho_{\lambda}^{\lambda}N_{\beta|\alpha}^{\beta} = O\left(\frac{\eta\varepsilon^4}{h\lambda}\right), \\ &AN_{\alpha|\beta}^{\alpha|\beta} + b_{\beta}^{\alpha}\varrho_{\alpha}^{\beta} - b_{\alpha}^{\alpha}\varrho_{\beta}^{\beta} - \frac{1}{2}\varrho_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{2}\varrho_{\alpha}^{\alpha}\varrho_{\beta}^{\beta} = O\left(\frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right), \\ &N_{\alpha|\beta}^{\beta} - \frac{1}{2}(1-\nu)D(b_{\alpha}^{\lambda}\varrho_{\lambda}^{\beta} - b_{\lambda}^{\beta}\varrho_{\alpha}^{\lambda})_{|\beta} - Db_{\alpha}^{\beta}\varrho_{\lambda|\beta}^{\lambda} + D(\varrho_{\alpha}^{\beta}\varrho_{\lambda}^{\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\beta}\varrho_{\lambda}^{\lambda}\varrho_{\lambda}^{\alpha})_{|\beta} + \\ &+ 2A(N_{\alpha}^{\lambda}N_{\lambda}^{\beta})_{|\beta} - \frac{1}{2}A[(1-\nu)N_{\lambda}^{\alpha}N_{\alpha}^{\lambda} + \nu N_{\alpha}^{\alpha}N_{\lambda}^{\lambda}]_{|\alpha} = O\left(Eh\frac{\eta\varepsilon^4}{\lambda}\right), \\ &D\varrho_{\alpha}^{\alpha|\beta} + (b_{\beta}^{\alpha} - \varrho_{\beta}^{\alpha})N_{\alpha}^{\beta} = O\left(Eh^2\frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Odpowiednio uproszczone naturalne warunki brzegowe wyrażone przez $N^{\alpha\beta}$, $\varrho_{\alpha\beta}$ podano w pracy [38].

Rozwiązanie formułowane poprzez miary odkształcenia $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\varrho_{\alpha\beta}$ jako zmienne niezależne, lub poprzez składowe przemieszczenia, wprowadza większe uproszczenia równań

równowagi. Na przykład z zastosowania (34)₁ wynika, że błąd wprowadzony do równania równowagi (28)₁, wynikający z eliminacji $N^{\alpha\beta}$, staje się rzędu $Eh \frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda}$ i wszystkie człony, z wyjątkiem pierwszego, mogą być pominięte. W składowych odkształcenia jednorodnego równania równowagi (28) przyjmują więc postać

$$(38) \quad \frac{1}{A(1-\nu^2)} [(1-\nu)\gamma_{\alpha|\beta}^\beta + \nu\delta_\alpha^\beta \gamma_{\alpha|\beta}^\alpha] = O\left(Eh \frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda}\right),$$

$$D\varrho_{\alpha|\beta}^\alpha + (b_\beta^\alpha - \varrho_\beta^\alpha) \frac{1}{A(1-\nu^2)} [(1-\nu)\gamma_{\alpha|\beta}^\beta + \nu\delta_\alpha^\beta \gamma_{\alpha|\beta}^\alpha] = O\left(Eh^2 \frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right).$$

W zagadnieniach geometrycznie nieliniowych, gdzie brana jest pod uwagę możliwość utraty stateczności powłoki, siły błonowe są na ogół dominującymi składowymi stanu naprężenia i celowe jest rozwiązanie równań (37). W innych zagadnieniach rozwiązanie w przemieszczeniach może być bardziej celowe. Dotychczas brak jest jednak ścisłych kryteriów wyboru różnych zmiennych niezależnych.

Uproszczenia równań równowagi w opisie Lagrange'a (26) można dokonać na tym etapie ogólności tylko poprzez uproszczenia wyrażeń $Q^{\alpha\beta}$ i Q^α , gdyż we wzorach (26) występują one w kombinacji ze składowymi gradientu deformacji. Eliminując np. $M^{\alpha\beta}$ i $\gamma_{\alpha\beta}$ ze wzorów (20)_{2,3} otrzymamy

$$(38a) \quad Q^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}D(1-\nu)(b_\alpha^\alpha \varrho^{\alpha\beta} - b_\alpha^\beta \varrho^{\alpha\alpha}) + O(Eh\eta\varepsilon^4),$$

$$Q^\alpha = D\varrho_\alpha^\alpha + O\left(Eh^2 \frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda}\right);$$

uproszczone Lagrange'owskie równania równowagi oraz naturalne warunki brzegowe dla małych odkształceń sprężystych mają odpowiednio postać (26) i (24) przy wprowadzeniu tam powyższych zależności uproszczonych.

Rozwiązanie geometrycznie nieliniowych zadań, w których również warunki brzegowe dają się wyrazić całkowicie poprzez $N^{\alpha\beta}$ i $\varrho_{\alpha\beta}$, może być prowadzone bezpośrednio w tych zmiennych niezależnych na podstawie równań (37). Obliczenie naprężeń i odkształceń w powłoce staje się niezależne od wyznaczenia przemieszczeń, co dla zagadnień nieliniowych jest bardzo pożądane. Do chwili obecnej nie jest jednak zbadana sprawa możliwości sformułowania również geometrycznych warunków brzegowych tylko poprzez $N^{\alpha\beta}$ i $\varrho_{\alpha\beta}$.

Simmonds i Danielson [37] zbudowali kompletny układ równań dla dwuwymiarowo ściślej oraz geometrycznie nieliniowej teorii powłok sprężystych przyjmując jako zmienne niezależne wektor skończonego obrotu oraz wektor funkcji naprężenia. Wektorowe równania równowagi i warunki brzegowe, sformułowane w składowych Lagrange'owskich, zostały rozłożone w pewnej bazie pośredniej powstałej z bazy powierzchni odniesienia przez sztywny obrót przy pomocy wektora obrotu skończonego. Ta oryginalna i interesująca koncepcja będzie niewątpliwie rozwijana dalej.

Podkreślimy raz jeszcze, że podane tu układy równań podstawowych, wyrażone przez $N^{\alpha\beta}$ i $\varrho_{\alpha\beta}$, zawierają tylko błąd wynikający z założenia małych odkształceń, który jest pomijalny w przybliżonej postaci funkcji energii sprężystej powłoki (30).

Przy rozwiązywaniu konkretnych zadań, dla pewnej klasy zagadnień nieliniowej teorii powłok możemy z góry przewidzieć pewne charakterystyczne cechy poszukiwanego rozwiązania. Jeżeli na niektóre parametry występujące w równaniach podstawowych nałożymy z góry ograniczenia zgodne z przewidywanym rozwiązaniem, szereg dalszych członów w równaniach podstawowych może być pominiętych i równania, a także samo ich rozwiązanie, znacznie się uproszczą. Jeżeli po rozwiązaniu zadania charakter otrzymanego rozwiązania okaże się rzeczywiście zgodny z założonymi ograniczeniami, to dokładność tego rozwiązania, otrzymanego z równań uproszczonych, jest taka sama jak i rozwiązania uzyskanego na podstawie pełnego układu równań geometrycznie nieliniowej teorii powłok sprężystych.

W dalszej części niniejszego rozdziału podano niektóre uproszczone warianty równań słuszne przy różnych założeniach ograniczających, nałożonych na takie parametry, jak: stosunek odkształceń giętnych i błonowych, stosunek długości przewidywanej „fali” deformacji do krzywizny Gaussa, małe obroty otoczenia punktów powierzchni środkowej powłoki i inne. Przy korzystaniu z tych równań podkreślmy raz jeszcze konieczność sprawdzenia, w każdym konkretnym zadaniu, czy rozwiązanie uzyskane na podstawie podanych niżej równań uproszczonych rzeczywiście spełnia ograniczenia, przy których te równania są słuszne. Należy bowiem pamiętać, że równania nieliniowej teorii powłok, szczególnie przy rozwiązywaniu zadań utraty stateczności, przeskoku itp., są bardzo czułe na różnego rodzaju odchyłki i nawet niewielkie odstępstwa od założeń wyjściowych prowadzić mogą do błędnych wyników.

5. Ograniczenia stosunku odkształceń

Niech γ będzie największym odkształceniem a ϱ największą zmianą krzywizny w pewnym punkcie powierzchni środkowej powłoki. Parametr $\varrho h/\gamma$ określa relację odkształceń powstających w punktach powłoki od zginania i sił błonowych. W zależności od ograniczeń nakładanych na $\varrho h/\gamma$ wyróżnia się zwykle trzy typy równań teorii powłok:

- a) $\varrho h/\gamma \leq \varepsilon^2$, teoria błonowa,
- b) $\varrho h/\gamma \sim 1$, teoria zgięciowa,
- c) $\varrho h/\gamma \geq \varepsilon^2$, teoria bez wydłużeń powierzchni środkowej.

Równania uproszczone w [1, 36] uzyskane zostały przy pomocy oszacowania błędu względnego wynikającego z pominięcia niektórych członów w stosunku do innych członów w równaniach nieco uproszczonych w stosunku do (37). Tutaj wyprowadzimy równania uproszczone, uzyskane na zasadzie pominięcia niektórych dalszych członów w pełnych równaniach (37) bez zmniejszenia ich dokładności bezwzględnej, wynikającej tylko z przybliżonego charakteru równań konstytutywnych.

Dla teorii błonowej oszacowanie rzędu członów zawierających $\varrho_{\alpha\beta}$ w zależnościach (37) umożliwia pominięcie szeregu dalszych członów bez zmniejszenia dokładności równań podstawowych. Ostatecznie uproszczone równania (37) mają postać

$$\begin{aligned}
 \varrho_{\alpha|\beta}^\beta - \varrho_{\beta|\alpha}^\beta + \frac{1}{2}(1+\nu)A(b_\alpha^\lambda N_\lambda^\beta - b_\lambda^\beta N_\alpha^\lambda)_{|\beta} - Ab_\alpha^\beta N_{\lambda|\beta}^\lambda &= O\left(\frac{\eta\varepsilon^4}{h\lambda}\right), \\
 AN_{\alpha|\beta}^{\alpha|\beta} &= O\left(\frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right), \\
 N_{\alpha|\beta}^\beta + 2A(N_\alpha^\lambda N_\lambda^\beta)_{|\beta} - \frac{1}{2}A[(1-\nu)N_\lambda^\times N_\times^\lambda + \nu N_\times^\times N_\lambda^\lambda]_{|\alpha} &= O\left(Eh\frac{\eta\varepsilon^4}{\lambda}\right), \\
 b_\beta^\alpha N_\alpha^\beta &= O\left(Eh^2\frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Łatwo zauważyć, że nieliniowe równania równowagi (39)_{3,4} mogą być rozwiązane względem $N^{\alpha\beta}$ niezależnie od odkształceń; zagadnienie nieliniowej teorii błonowej jest więc statycznie wyznaczalne. Dodatkowy niezależny warunek (39)₂ nałożony na $N^{\alpha\beta}$ wskazuje, że w ramach geometrycznie nieliniowej teorii powłok sprężystych stan błonowy może zaistnieć tylko w pewnych przypadkach szczególnych. Po znalezieniu $N^{\alpha\beta}$ odkształcenia $\gamma_{\alpha\beta}$ obliczymy z równań konstytutywnych (35)₁, natomiast zmiany krzywizny $\varrho_{\alpha\beta}$ mogą być wyznaczone z warunków ciągłości (39)₁.

W przypadku teorii zgięciowej w ramach wskazanego błędu równań należy rozwiązać układ równań (37) bez żadnych dodatkowych uproszczeń. Jednakże dla zadań typu zgięciowego można dopuścić większy błąd w równaniach (37)_{1,3} (rzędu ε^2 zamiast ε^4 w oszacowaniach błędu). Wtedy wszystkie czony tych równań, z wyjątkiem członów głównych, mogą być pominięte i układ równań uprości się do postaci podanej dalej (42).

Dla teorii bez wydłużeń powierzchni środkowej oszacowanie rzędu członów zawierających $N^{\alpha\beta}$ w zależności (37) pozwala pominąć, podobnie jak w teorii błonowej, szereg dalszych członów bez zmniejszenia dokładności równań podstawowych. Ostatecznie równania (37) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 \varrho_{\alpha|\beta}^\beta - \varrho_{\beta|\alpha}^\beta &= O\left(\frac{\eta\varepsilon^4}{h\lambda}\right), \quad b_\alpha^\alpha \varrho_\alpha^\beta - b_\alpha^\beta \varrho_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\varrho_\beta^\alpha \varrho_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\varrho_\alpha^\alpha \varrho_\beta^\beta = O\left(\frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right), \\
 N_{\alpha|\beta}^\beta - \frac{1}{2}(1-\nu)D(b_\alpha^\lambda \varrho_\lambda^\beta - b_\lambda^\beta \varrho_\alpha^\lambda)_{|\beta} - Db_\alpha^\beta \varrho_{\lambda|\beta}^\lambda + D(\varrho_\alpha^\beta \varrho_\lambda^\lambda - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta \varrho_\lambda^\lambda \varrho_\times^\times)_{|\beta} &= O\left(Eh\frac{\eta\varepsilon^4}{\lambda}\right), \\
 D\varrho_{\alpha|\beta}^{\alpha|\beta} &= O\left(Eh^2\frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Podobnie jak dla teorii błonowej łatwo zauważyć, że nieliniowe warunki ciągłości (40)_{1,2} mogą być rozwiązane względem $\varrho_{\alpha\beta}$ niezależnie od sił wewnętrznych. Mówimy, że zagadnienia nieliniowej teorii powłok bez wydłużeń powierzchni środkowej są geometrycznie wyznaczalne. Dodatkowy niezależny warunek (40)₄ nałożony na $\varrho_{\alpha\beta}$ wskazuje, że w ramach geometrycznie nieliniowej teorii powłok sprężystych stan bez wydłużeń powierzchni środkowej może zaistnieć tylko w pewnych przypadkach szczególnych. Po znalezieniu $\varrho_{\alpha\beta}$ momenty $M^{\alpha\beta}$ obliczymy z (34)₂, natomiast siły $N^{\alpha\beta}$ mogą być wyznaczone z równania równowagi (40)₃.

Istnieje potencjalna możliwość wyróżnienia jeszcze dwóch typów pośrednich równań teorii powłok dla $\varrho h/\gamma \leq \varepsilon$ oraz $\varrho h/\gamma \geq \varepsilon$. Jednak uproszczenia zależności (37) spowodowa-

wane tymi założeniami są niewielkie i sprowadzają się do możliwości pominięcia członów kwadratowych odpowiednio względem $\varrho_{\alpha\beta}$ lub $N^{\alpha\beta}$.

Stosowalność uproszczonych układów równań (39) i (40) jest, oczywiście, ograniczona. W szczególności nie mogą one stanowić podstawy do obliczania powłok zawierających tzw. punkty osobliwe powierzchni środkowej. Na przykład, dla płaskiej membrany uproszczone równanie (39)₄ staje się nieokreślonym, gdyż wtedy $b_\beta^\alpha = 0$. Podobny problem stosowalności występuje od dawna również w liniowej teorii powłok, gdzie wskazuje się na następujące typowe przypadki osobliwości geometrycznych: płaszczyzna, nieskończenie długi walec, stożek i torus. Równania uproszczone nie powinny jednak być stosowane nawet w przypadku powłok zawierających punkty zbliżone do osobliwych, np. powłoka o bardzo małej wyniosłości lub bardzo długi walec.

6. Ograniczenie długości fali deformacji

W teorii powłok pierwszego przybliżenia dopuszcza się deformację o długości fali L przekraczającej co najmniej o rząd wielkości grubość powłoki h i spełniającą warunki (32). W niektórych zadaniach nieliniowej teorii powłok słuszne może się okazać ograniczenie długości przewidywanej fali deformacji również od góry [1]

$$(41) \quad |K|L^2 \leq \varepsilon^2.$$

Taki stan odkształceń nie powstaje w przypadkach granicznych teorii błonowej i teorii bez wydłużeń powierzchni środkowej powłoki, gdzie długość fali deformacji jest zazwyczaj porównywalna z R , natomiast często się go spotyka w zagadnieniach zgięciowej teorii powłok.

Ograniczenie charakteru przewidywanej deformacji zależnością (41) umożliwia znaczne uproszczenia układu (37), jeżeli udział L w parametrze λ okaże się decydujący. Przewidując rozwiązanie zadań tego typu w innych niż $N^{\alpha\beta}$ i $\varrho_{\alpha\beta}$ zmiennych niezależnych możemy w równaniach (37) pominąć człony rzędu członów pomijanych w równaniach konstytutywnych (34)₁ dla $N^{\alpha\beta}$ oraz w (35)₁ dla $\varrho_{\alpha\beta}$ i wówczas równania (37) przyjmują postać uproszczoną

$$(42) \quad \begin{aligned} \varrho_{\alpha|\beta}^\beta - \varrho_{\beta|\alpha}^\beta &= O\left(\frac{\eta\varepsilon^2}{h\lambda}\right), \\ AN_{\alpha|\beta}^\alpha + b_\beta^\alpha \varrho_\alpha^\beta - b_\alpha^\alpha \varrho_\beta^\beta - \frac{1}{2} \varrho_\beta^\alpha \varrho_\alpha^\beta + \frac{1}{2} \varrho_\alpha^\alpha \varrho_\beta^\beta &= O\left(\frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right), \\ N_{\alpha|\beta}^\beta &= O\left(Eh \frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda}\right), \\ D\varrho_\alpha^\alpha{}_{|\beta} + (b_\beta^\alpha - \varrho_\beta^\alpha) N_\alpha^\beta &= O\left(Eh^2 \frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Równania (42) przy warunku (41) opisują nieliniową teorię powłok słabo zakrzywionych względem deformacji („quasi shallow” wg [1]). Przy spełnieniu warunku (41) różniczkowanie kowariantne na powierzchni staje się przemienne i rozwiązanie równań (42)_{1,3} można przedstawić w postaci

$$(43) \quad \varrho_a^\beta = W|_a^\beta + O\left(\frac{\eta\varepsilon^2}{h}\right), \quad N_a^\beta = \delta_{a\lambda}^{\beta\kappa} F|_\kappa^\lambda + P_a^\beta + O(Eh\eta\varepsilon^2),$$

gdzie W i F są funkcjami odkształceń i naprężeń, a P_a^β jest całką szczególną równania (42)₃ przy uwzględnieniu składowej obciążenia powierzchniowego \bar{p}_a . Podstawiając związki (43) do (42)_{2,4} i uwzględniając obciążenie powierzchniowe otrzymamy następujący układ dwóch równań względem niewiadomych funkcji W i F :

$$(44) \quad \begin{aligned} AF|_{a\beta}^{a\beta} - \delta_{\beta\kappa}^{a\lambda} (b_a^\beta - \frac{1}{2}W|_a^\beta) W|_\lambda^\kappa + A[P_a^\alpha|_\beta^\beta - (1+\nu)P_{\beta|a}^{\alpha\beta}] &= O\left(\frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right), \\ DW|_{a\beta}^{a\beta} + \delta_{\beta\kappa}^{a\lambda} (b_a^\beta - W|_a^\beta) F|_\lambda^\kappa + (b_\beta^\alpha - W|_\beta^\alpha) P_a^\beta + \bar{p} &= O\left(Eh^2 \frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Rozwiązanie zadań spełniających warunek (41) może więc być dokonane na podstawie rozwiązania dwóch równań (44), bez konieczności wyznaczenia przemieszczeń, jeżeli również warunki brzegowe dadzą się wyrazić poprzez funkcje W i F . Pewne trudności może sprawić jednak wyznaczenie całki szczególnej P_a^β dla zadanego typu obciążenia \bar{p}_a .

7. Ograniczenia obrotów

Inne możliwości uproszczeń wynikają z przewidywania rzędu występujących obrotów i nałożenia z góry pewnych ograniczeń na parametry charakteryzujące obrót bazy odkształconej względem bazy powierzchni odniesienia.

W ogólnym przypadku deformację bazy $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{n}$ w bazę $\bar{\mathbf{a}}_\alpha, \bar{\mathbf{n}}$ można rozdzielić na trzy etapy: a) przesunięcie równoległe $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{n}$ do punktu zaczepienia $\bar{\mathbf{a}}_\alpha, \bar{\mathbf{n}}$, b) sztywny obrót przy pomocy wektora obrotu skończonego przeprowadzający \mathbf{n} w $\bar{\mathbf{n}}$, c) odkształcenie w powierzchni \bar{S} przeprowadzające obrócone wektory \mathbf{a}_α w $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$. Geometria deformacji powierzchni środkowej powłoki przy wydzieleniu takiego skończonego obrotu została opracowana przez Simmondsa i Danielsona [37, 41]. Klasyfikacja uproszczeń oparta na ograniczeniu ścisłych parametrów obrotu skończonego nie została jeszcze opracowana.

Przedstawiając parametry deformacji (2) w postaci

$$(45) \quad \begin{aligned} l_{a\beta} &= a_{a\beta} + \vartheta_{a\beta} - \omega_{a\beta} \\ \vartheta_{a\beta} &= \frac{1}{2}(u_{a|\beta} + u_{\beta|a}) - b_{a\beta} w, \\ \omega_{a\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\beta|a} - u_{a|\beta}) = \varepsilon_{a\beta} \omega \end{aligned}$$

łatwo pokazać [36], że w najprostszym przypadku liniowej teorii powłok zachodzą następujące relacje:

$$(46) \quad \bar{\mathbf{a}}_\alpha \approx \mathbf{a}_\alpha + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}_\alpha + \vartheta_\alpha^\beta \mathbf{a}_\beta, \quad \bar{\mathbf{n}} \approx \mathbf{n} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n},$$

gdzie

$$(47) \quad \boldsymbol{\Omega} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varphi_\beta \mathbf{a}_\alpha + \omega \mathbf{n}$$

jest wektorem małego obrotu. Parametry φ_α określają więc mały obrót wektora \mathbf{n} , natomiast ω określa mały obrót wektorów bazy \mathbf{a}_α dookoła \mathbf{n} .

Przy zwiększających się obrotach wartości ścisłych parametrów obrotu skończonego teorii nieliniowej będą coraz bardziej oddalały się od wartości φ_a i ω . Najbardziej powszechne i interesujące są jednak te przypadki, w których skończony obrót nie jest zbyt duży i dlatego rozważenie ograniczeń nakładanych na parametry φ_a i ω , a prowadzących do odpowiedniego uproszczenia równań podstawowych, jest celowe również w nieliniowej teorii powłok.

Ze względu na ograniczenie parametrów φ_a i ω celowe jest wyróżnienie następujących wariantów teorii [1]:

- φ, ω — nieograniczone — teoria obrotów skończonych,
- $\varepsilon < \varphi < 1, \omega \leq \varepsilon$ lub $\varepsilon < \omega < 1, \varphi \leq \varepsilon$ — teoria dużych obrotów,
- $(\varphi, \omega) \leq \varepsilon$ — teoria umiarkowanych obrotów,
- $(\varphi, \omega) \leq \varepsilon^2$ — teoria małych obrotów.

Szczegółowa dyskusja możliwych uproszczeń wynikających z założeń teorii dużych obrotów nie została dotychczas opracowana.

W teorii umiarkowanych obrotów wyrażenia miar odkształcenia Lagrange'a (3)₁ i (6) upraszczają się do postaci

$$(48) \quad \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \vartheta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}\omega^2 + \varphi_a\varphi_\beta) + O(\eta\varepsilon), \\ \varrho_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}(\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} + \underline{b_{\alpha}^* \omega_{\beta\kappa} + b_{\beta}^* \omega_{\alpha\kappa}}) + O\left(\frac{\eta\varepsilon}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

gdzie uwzględniono oszacowania

$$(49) \quad n^a = -\varphi^a - \underline{\varphi^\lambda \omega_\lambda^a} + O(\eta\varepsilon^2), \quad n = 1 + O(\eta).$$

Równania równowagi Lagrange'a (26) przy (49) przyjmują tu postać uproszczoną

$$(50) \quad \begin{aligned} [N^{\alpha\lambda} l_{\lambda}^\beta + \frac{1}{2} D(1-\nu)(b_{\alpha}^* \varrho^{\kappa\lambda} - b_{\kappa}^* \varrho^{\alpha\lambda})(\delta_\lambda^\beta - a^{\beta\mu} \omega_{\eta\lambda}) - D \varrho_{\kappa}^{*\alpha}(\varphi^\beta + \varphi^\lambda \omega_\lambda^\beta)]_{|a} - \\ - b_a^\beta (N^{\alpha\lambda} \varphi_\lambda + D \varrho_{\kappa}^{*\alpha}) + p^\beta = O\left(Eh \frac{\eta\varepsilon^4}{\lambda}\right), \\ N^{\alpha\lambda} \varphi_{\lambda|a} + D \varrho_{\kappa}^{*\alpha} + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\lambda} (\delta_\lambda^\beta - a^{\beta\mu} \omega_{\mu\lambda}) + p = O\left(Eh^2 \frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

W teorii umiarkowanych obrotów często stosowane jest ostrzejsze ograniczenie $\varphi \leq \varepsilon, \omega \leq \varepsilon^2$, gdyż powłoka jest na ogół bardziej podatna na obroty z powierzchni powłoki niż na obroty w powierzchni powłoki. Wtedy niektóre dalsze człony we wzorach (48)-(50) podkreślone linią ciągłą mogą być również pominięte, bez zmniejszenia dokładności równań podstawowych.

Jeżeli rozwiązanie ma być wyrażane w innych zmiennych, np. przemieszczeniach, z równania konstytutywnego (34)₁ wynika, że powinniśmy dopuścić większy błąd w równaniu (50)₁, które przyjmie postać

$$(51) \quad [N^{\alpha\lambda} (\delta_\lambda^\beta - \underline{a^{\beta\mu} \omega_{\mu\lambda}})]_{|a} + p^\beta = O\left(Eh \frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda}\right).$$

Wprowadzając do wzorów (51) i (50)₂ zależności (48), (45) i (2) otrzymamy układ równań w składowych przemieszczenia dla nieliniowej teorii umiarkowanych obrotów.

Warto tutaj przypomnieć, że klasyczna nieliniowa teoria powłok o małej wyniosłości (tzw. teoria typu Kármána) wprowadza jednocześnie ograniczenia różnego rodzaju:

$$(52) \quad \varphi \leq \varepsilon, \quad \omega \leq \varepsilon^2, \quad |K|L^2 \leq \varepsilon^2, \quad \frac{u}{w} \leq \varepsilon, \quad p^\beta \leq Eh \frac{\eta \varepsilon^2}{\lambda}.$$

Wtedy zaś mamy

$$(53) \quad \gamma_{a\beta} = \vartheta_{a\beta} + \frac{1}{2} w_{,\alpha} w_{,\beta} + O(\eta \varepsilon^2), \quad \varrho_{a\beta} = -w_{|\alpha\beta} + O\left(\frac{\eta \varepsilon}{\lambda}\right)$$

przy czym $\varrho_{a\beta}$ obliczone z (53)₂ spełnia równanie (42)₁. Wprowadzając funkcję naprężeń zgodnie z (43)₂ przy $P_a^\beta = 0$, ze związków (42)₂ oraz (50)₂ otrzymamy układ równań klasycznej nieliniowej teorii powłok o małej wyniosłości [1]

$$(54) \quad \begin{aligned} AF|_{a\beta}^{a\beta} + \delta_{\beta\alpha}^{\alpha\lambda} (b_a^\beta + \frac{1}{2} w|_a^\beta) w|_\lambda^\alpha &= O\left(\frac{\eta \varepsilon^2}{\lambda}\right), \\ Dw|_{a\beta}^{\alpha\beta} - \delta_{\beta\alpha}^{\alpha\lambda} (b_a^\beta + w|_a^\beta) F|_\lambda^\alpha &= p + O\left(Eh^2 \frac{\eta \varepsilon^2}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Większość z dotychczas rozwiązanych zadań geometrycznie nieliniowej teorii powłok oparta jest na rozwiązaniu równań (54).

Założenia teorii małych obrotów prowadzą do linearyzacji równań podstawowych, co prowadzi do układu równań „najlepszego” wariantu klasycznej liniowej teorii cienkich powłok sprężystych.

8. Przegląd niektórych prac polskich

W wygłoszonym referacie przeglądowym Wilde [74] rozważył 67 prac polskich dotyczących różnych zagadnień nieliniowych płyt i powłok, wykonanych głównie po roku 1960. Większość prac dotyczyła różnych zagadnień nieklasycznych, takich jak nieliniowe zagadnienia płyt i powłok w polu temperatur, np. [42, 43, 44], o strukturze włóknistej i siatkowej, np. [45], lepkosprężystych, lepkoplastycznych, poddanych pełzaniu i innych. Obszerna grupa ponad 20 prac dotyczy rozwiązań różnych zadań stateczności sprężystej powłok izotropowych, głównie na podstawie prostych wariantów równań stateczności wynikających z równań (54), np. [46-50]. Niewiele jest jednak prac polskich dotyczących nieliniowej zgięciowej teorii cienkich powłok sprężystych, co jest głównym tematem niniejszego rozdziału. Odnosi się wrażenie, że tematyka ta była w kraju omijana, być może jako tematyka zbyt „klasyczna”. Poniżej krótko omówiono niektóre prace polskie, które wydają się najbardziej zbliżone do tematyki rozdziału. Wybór tych prac jest, oczywiście, subiektywny i niektóre ważne pozycje być może zostały przeoczone.

W monografii Woźniaka [4] szczegółowo rozważono podstawy nieliniowej teorii

powłok opierając się na sformułowanej hipotezie jednorodności stanu odkształcenia na grubości powłoki. Wprowadzając kolejno dalsze więzy i założenia upraszczające rozważono m. in. teorię Kirchhoffa–Love’a, teorię błonową dużych odkształceń, teorię małych odkształceń oraz podano szereg rozwiązań wybranych zagadnień nieliniowej teorii powłok sprężystych. Parszewski [51] podał nieliniowe równania powłok o małej wyniosłości w układzie ortogonalnych współrzędnych krzywoliniowych, a w pracy [52] wyprowadzono nieliniowe równania ruchu wirującej powłoki walcowej. Piechocki [53, 54] udowodnił twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układu równań typu Kármána dla powłoki kulistej oraz powłok o małej wyniosłości. Praca [36] zawiera zwięzły wykład nieliniowej teorii powłok sprężystych. Statyczne zagadnienia nieliniowe rozważali Wiśniewski [55] oraz Leyko [56].

Postulując odpowiednie równania konstytutywne Orkisz [57, 58, 59] zbudował dwuwymiarowo ścisłą błonową teorię powłok obrotowych wykonanych z materiału kauczukopodobnego, którą zastosowano do obliczeń konkretnej powłoki pneumatycznej [60]. Stosując geometryczną teorię siatek Czebyszewa, Wilde [61] zbudował błonową teorię powłok o małej wyniosłości przydatną dla nierozciągliwych powłok tekstylnych. Wizmur [62] podał rozwiązanie wstępnie sprężonej powłoki tekstylnej typu przekrycia Opery Leśnej w Sopocie.

W pracy [27, 63] zbudowano dynamiczną nieliniową teorię powłok w opisie Lagrange’a, w której zmiennymi niezależnymi są trzy przemieszczenia i trzy obroty. W pracy [24] podano dwuwymiarowo ścisłą teorię powłok sprężystych w opisie Lagrange’a, którą rozszerzono [35] na zagadnienia stateczności i dynamiki w nieinercyjnym układzie odniesienia. Opis Lagrange’a okazał się pożyteczny również w teorii dużych ugięć powłok plastycznych rozważanych przez Sawczuka [64] i Duszek [65].

9. Niektóre problemy otwarte

Ponieważ każda teoria powłok jest teorią z definicji przybliżoną w stosunku do teorii trójwymiarowej, kluczową sprawą jest oszacowanie błędu rozwiązania uzyskanego na podstawie teorii powłok w stosunku do ścisłej teorii trójwymiarowej. Najbardziej pożądane byłoby oszacowanie błędu popełnianego przy obliczeniu przemieszczeń i naprężeń w każdym punkcie powłoki, ale nawet uzyskanie dla rozwiązań oszacowania błędu bardziej globalnego, np. w sensie odpowiednio dobranej normy, też stanowiłoby istotny postęp w nieliniowej teorii powłok. Nieliczne oszacowania błędu rozwiązania uzyskano dotychczas tylko dla liniowej teorii powłok sprężystych [66, 67].

Błąd popełniany w równaniach konstytutywnych zwiększa się znacznie w strefie brzegowej, a w odległości od brzegu rzędu grubości powłoki dwuwymiarowe równania konstytutywne przestają w ogóle mieć sens. Zaproponowane ostatnio [19, 68] modyfikacje warunków brzegowych dla teorii małych odkształceń dążą do zmniejszenia błędu rozwiązania dwuwymiarowego w strefie brzegowej, ale problem warunków brzegowych o odpowiedniej dokładności w strefie brzegowej wydaje się nadal aktualny.

Niedostatecznie zbadana w nieliniowej teorii powłok sprężystych jest sprawa wydzielenia wszelkiego rodzaju osobliwości rozwiązania, związanych zarówno z obciążeniem

skupionym, jak i osobliwością geometrii powłoki. Nie zostały dotychczas podjęte również zagadnienia rozwiązań nieliniowych dla powłok o obszarze wielospójnym i związane z tym problemy wieloznaczności przemieszczeń i ewentualnie funkcji naprężeń, które dla liniowej teorii powłok zbadano w pracach [69, 70, 71].

Wskazane byłoby uzyskanie prostych dwuwymiarowych równań konstytutywnych dla teorii powłok uwzględniającej skończone odkształcenia materiału i oszacowanie ich dokładności w stosunku do nieliniowej teorii sprężystości. Umożliwiłoby to zbudowanie konsekwentnie uproszczonego układu równań podstawowych typu (37) również dla zgięciowej teorii powłok skończonych odkształceń i umiarkowanych obrotów.

Ogólne równania geometrycznie nieliniowej teorii powłok typu (37), zawierające tylko błąd wprowadzony przez przybliżone równania konstytutywne, zostały zaproponowane dopiero niedawno [38, 19]. Wydaje się konieczne przeanalizowanie szeregu testowych przykładów zastosowania tych równań dla powłok np. sferycznych, cylindrycznych lub obrotowych i porównanie wyników z wynikami uzyskanymi na podstawie znanych prostszych wariantów teorii geometrycznie nieliniowej wyprowadzonych dla tych powłok niezależnie od teorii ogólnej.

W nieliniowej teorii powłok sprężystych szczególnie ważne są zagadnienia utraty stateczności. W pracach [35, 39] sformułowano dwuwymiarowo ściśle równania stateczności powłok w opisie Lagrange'a i mieszanym. Ze względu na ich skomplikowaną budowę konieczne jest rozważenie możliwych uproszczeń tych równań dla teorii małych odkształceń oraz przebadanie kilku prostych przykładów testowych. Dotychczas najogólniejsze stosowane w literaturze równania stateczności, np. [34], zawierają szereg uproszczeń w stosunku do przedstawionej tu teorii geometrycznie nieliniowej. Na przykład przy obliczeniach błonowych sił krytycznych nie uwzględnia się członów kwadratowych względem sił, które to człony zachowane są w równaniach geometrycznie nieliniowej teorii błonowej (39). Istnieje przypuszczenie, że dotychczas notowane rozbieżności między wartościami siły krytycznej, stwierdzonymi doświadczalnie, a obliczonymi na podstawie teorii uproszczonych mogą być m. in. wynikiem zbyt daleko posuniętych uproszczeń równań podstawowych.

Przedstawione tu skomplikowane równania nieliniowej teorii powłok muszą być z reguły programowane na EMC. Mogą być przy tym stosowane metody różnic skończonych, elementów skończonych, całkowania numerycznego i inne (por. [72]). Na świecie istnieje już wiele różnych programów na EMC opartych na różnych wariantach równań przybliżonych. Najbardziej efektywny i ogólny wydaje się program w różnicach skończonych opracowany przez Brogana i Almrotha [73] dla dowolnej geometrii powłoki i oparty na dość ogólnym algorytmie. Wydaje się, że podobny program można byłoby opracować w Kraju na podstawie ogólniejszego równania typu (37). W decydujący sposób przyczyniłoby się to do wdrożenia do praktyki inżynierskiej naszego Kraju wielu wyników teoretycznych uzyskanych już w nieliniowej teorii powłok.

Uwaga. Niniejsza praca powstała w końcu 1973 r. w oparciu o dostępne wtedy materiały źródłowe. Szereg postawionych tutaj problemów zostało rozwiązanych już po oddaniu pracy do druku. Niektóre z tych problemów, a w szczególności ogólną teorię obrotów skończonych w powłokach, zawarto w pracach autora [75-78], gdzie można znaleźć również obszerną dodatkową bibliografię.

LITERATURA

1. W. T. Koiter, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., Ser. B, vol. 69 (1966), No. 1,1-54.
2. P. M. Naghdi, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, vol. IV, Amsterdam 1963.
3. X. M. Муштари, К. З. Галимов, *Нелинейная теория упругих оболочек*, Таткнигоиздат, Казань 1957.
4. C. Woźniak, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966.
5. C. Woźniak, *Constrained continuous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 21 (1973), 109-116, 167-182.
6. F. John, *Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations*, Comm. Pure and Appl. Math. 18 (1965), 235-267.
7. F. John, *Refined interior equations for thin elastic shells*, Comm. Pure and Appl. Math. 24 (1971), 585-615.
8. А. Л. Гольденвейзер, *Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости*, Прикл. Мат. и Мех., 27 (1973), 4, 593-608.
9. A.E. Green, W. Zerna, *Theoretical elasticity*, 2-nd ed., Clarendon Press, Oxford 1968.
10. B. Novotny, *On the asymptotic integration of three-dimensional nonlinear equations of thin elastic shells and plates*, Int. J. Sol.Str., 6 (1970), 433-451.
11. E. Cosserat, F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, A. Hermann et Fils, Paris 1909.
12. P.M. Naghdi, *The theory of shells and plates*, Handbuch der Physik, ed. by S. Flügge, Vol. VIa/2, 425-640, Berlin-Heidelberg-New York 1972.
13. C. Woźniak, *Podstawy nieliniowej mechaniki powłok*, tekst referatu zgłoszonego na Sympozjum „Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowania”, Kraków, 25-26. V. 1974.
14. H. Aron, *Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen beliebig gekrümmten elastischen Schale*, J. Reine und Angew. Math. 78 (1874), 136-174.
15. A.E.H. Love, *The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 179 (1888), 491-546.
16. W.T. Koiter, *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Proc. IUTAM Symp. „Theory of thin shells” Delft 1959, North-Holland P.Co., Amsterdam.
17. B. Budiansky, J.L. Sanders, *On the “best” first-order linear shell theory* “Progress in Applied Mechanics”, Prager Anniversary volume, vol. 192, MacMillan, New York 1963, 129-140.
18. J.L. Sanders, *An improved first-approximation theory for thin shells*, NASA Report 24 (1959).
19. W.T. Koiter, J.G. Simmonds, *Foundations of shell theory*, Report Nr 473, Dept of Mech. Engng, Delft University of Technology, Delft 1972.
20. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, изд. 2-е, Наука, Москва 1967.
21. А. С. Вольмир, *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*, Наука, Москва 1972.
22. Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов, *Устойчивость цилиндрических оболочек*, Итоги Науки, Механика твердых деформируемых тел, 6 (1967), ВИНТИ, Москва 1969.
23. J.L. Sanders, *Nonlinear theories for thin shells*, Quart. Appl. Math., Vol. 21 (1963), 21-36.
24. W. Pietraszkiewicz, *Lagrangean nonlinear theory of shells*, Archives of Mechanics 26 (1974), 2, 221-228.
25. Л. Я. Айнола, *Вариационные методы для нелинейных уравнений движения оболочек*, Прикл. Мат. и Мех. 32 (1968), 1, 154-158.
26. L.M. Nabir, I.K. Ebcioğlu, *On the equations of motion of shells in the reference state*, Ing.-Arch. 34 (1965), 28-32.
27. W. Pietraszkiewicz, *Material equations of motion for the nonlinear theory of thin shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 19 (1971), 6, 261-266.
28. P.M. Naghdi, *A new derivation of the general equations of elastic shells*, Int. J. Engng Sci., Vol. 1 (1963), 509-522.
29. P.M. Naghdi, *Further results in the derivation of the general equations of elastic shells*, Int. J. Engng Sci., Vol. 2 (1964), 269-273.

30. A.E. Green, J.E. Adkins, *Large elastic deformations*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford 1970.
31. B. Budiansky, *Notes on nonlinear shell theory*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E., vol. 35, June 1968, 393-401.
32. P.G. Glockner, D.J. Malcolm, *A Lagrangean formulation of sandwich shell theory*, University of Calgary, Res. Rp No CE 72-27, June 1972.
33. C. Truesdell, W. Noll, *The nonlinear field theory*, „Encyclopedia of Physics”, Ed. S. Flügge, vol. III/3, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
34. W.T. Koiter, *General equations of elastic stability for thin shells*, Proc. Symp. „Theory of Shells”, to honor L.H. Donnell, University of Houston, Texas, Houston 1967, 187-228.
35. W. Pietraszkiewicz, *On the Lagrangean theory of moving shells*, Prace IMP PAN Nr 64, Gdańsk 1974, 91-103.
36. W. Pietraszkiewicz, *Seminars on the nonlinear theory of shells*, Biuletyn IMP PAN Nr 74/743, Gdańsk 1973.
37. J.G. Simmonds, D.A. Danielson, *Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectors*, J. Appl. Mech. 39 (1972), No 4, 1085-1090.
38. D.A. Danielson, *Simplified intrinsic equations for arbitrary elastic shells*, Int. J. Engng Sci. 8 (1970), 251-259.
39. D.A. Danielson, J.G. Simmonds, *Accurate buckling equations for arbitrary and cylindrical elastic shells*, Int. J. Engng Sci. 7 (1969), 459-468.
40. W. Pietraszkiewicz, *Simplified equations for the geometrically non-linear thin elastic shells*, Prace IMP PAN Nr 75, Gdańsk (w druku).
41. J.G. Simmonds, D.A. Danielson, *Nonlinear shell theory with a finite rotation vector*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. B73 (1970), 460-478.
42. P. Wilde, *Postbuckling behaviour of plates due to a temperature field*, Arch. Mech. Stos. 15 (1963), 3, 435-456.
43. P. Wilde, *The thermal buckling of a thin plate in the form of a minimal surface*, Arch. Mech. Stos. 16 (1964), 1, 81-92.
44. C. Woźniak, *Stressless deformation of thin shells in the steady temperature field*, Arch. Mech. Stos. 15 (1963), 3, 327-339.
45. C. Woźniak, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
46. T. Galkiewicz, *Nieliniowe zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki walcowej poddanej skręcaniu*, Arch. Bud. Masz. 12 (1965), 4.
47. S. Janiak, *Nieliniowe zagadnienie stateczności powłoki stożkowej obciążonej ciśnieniem hydrostatycznym*, Arch. Bud. Masz. 19 (1972), 2.
48. M. Królak, *Stateczność ortotropowej powłoki stożkowej ściskanej osiowo w ujęciu nieliniowym*, Arch. Bud. Masz. 16 (1969), 3.
49. Z. Nowak, *Analiza stateczności zamkniętej ortotropowej powłoki walcowej pod działaniem ciśnienia hydrostatycznego*, Rozpr. Inż. 13 (1967), 1.
50. W. Szczyg, F. Twardosz, *O pewnym nieliniowym zagadnieniu powłoki walcowej*, Arch. Bud. Masz. 16 (1969), 2.
51. Z. Parszewski, *Equations of the engineer's non-linear theory of thin shells*, Arch. Mech. Stos. 8 (1956), 2, 143-154.
52. W. Pietraszkiewicz, *Równania ruchu wirującej powłoki walcowej*, Biuletyn IMP PAN Nr 538, 1967.
53. W. Piechocki, *On the nonlinear theory of thin elastic spherical shells*, Arch. Mech. Stos. 21 (1969), 1, 81-102.
54. W. Piechocki, *On the existence of solutions for heated non-linear orthotropic and non-homogeneous shallow shells*, Arch. Mech. Stos. 21 (1969), 6, 813-827.
55. S. Wiśniewski, *Nieliniowe zagadnienie dotyczące ugięć powłoki o postaci stożka ściętego, ściskanej siłami równomiernie rozłożonymi na brzegach*, Arch. Bud. Masz. 6 (1959), 4, 493-520.
56. J. Leyko, *Nieliniowe zagadnienie równowagi powłoki o postaci wycinka walcowego poddanej ścinaniu i obciążeniu normalnemu do jej powierzchni*, Arch. Bud. Maszyn 7 (1960), 2, 199-211.

57. J. Orkisz, *Skończone odkształcenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy pewnych typach fizycznej nieliniowości*, Rozpr. Inż. 13 (1965), 4, 693-706.
58. Я. Оркиш, *Равновесие безмоментных оболочек вращения из каучукоподобных материалов*, Изв. АН СССР, Механика, (1965), 4, 86-91.
59. J. Orkisz, *Finite deformation of a circularly symmetric shell under membrane stress in some nonlinear cases*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech. 15 (1967), 1, 31-40.
60. J. Orkisz, M. Paluch, *Obliczenie pewnej powłoki pneumatycznej w świetle teorii odkształceń skończonych*, Arch. Inż. Łąd. 15 (1969), 1/2, 111-120.
61. P. Wilde, *Some problems of the theory of membranes formed by inextensible cords*, Arch. Mech. Stos. 18 (1966), 4, 463-477.
62. M. Wismur, *Pewne rozwiązanie szczególne dla wstępnie sprężonej powłoki tekstylnej*, Rozpr. Inż. 17 (1969), 1, 3-21.
63. W. Pietraszkiewicz, *Nieliniowe równania dynamiki powłok w nieinercyjnym układzie odniesienia*, Biuletyn IMP PAN Nr 16 (682), 1971.
64. A. Sawczuk, *Zagadnienia teorii uniarkowania dużych ugięć powłok sztywno-plastycznych*, Mech. Teor. i Stos. 9 (1971), 3, 335-354.
65. M. Duszek, *Równania teorii dużych ugięć powłok plastycznych*, Rozpr. Inż. 20 (1972), 3, 389-407.
66. W.T. Koiter, *On the foundations of the linear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. B73 (1970), 169-195.
67. D.A. Danielson, *Improved error estimates in the linear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. B 74 (1971), 294-300.
68. А. Л. Гольденвейзер, *Погранслои и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки*, Прикл. Мат. и Мех. 33 (1969), 996-1028.
69. К. Ф. Черных, *Связь между дислокациями и сосредоточенными воздействиями в теории оболочек*, Прикл. Мат. и Мех. 23 (1959), 2.
70. W. Pietraszkiewicz, *Multivalued stress functions in the linear theory of shells*, Arch. Mech. Stos. 20 (1968), 1, 37-45.
71. W. Pietraszkiewicz, *Multivalued solutions for shallow shells*, Arch. Mech. Stos. 20 (1968), 1, 3-10.
72. G.A. Greenbaum, *The numerical methods of discrete shell analysis*, Proc. Conf. on Computer Oriented Analysis of Shell Str., Palo Alto, 1970.
73. F.A. Brogan, B.O. Almroth, *Practical methods for elastic collapse analysis for shell structures*, AIAA J, (1971), 9, 2321-2325.
74. P. Wilde, *Review of Polish contributions to the non-linear theory of plates and shells*, Polsko-Włoskie Sympozjum na temat nieliniowej teorii sprężystości, Jabłonna 1973.
75. W. Pietraszkiewicz, *Obrotы skończone i opis Lagrange'a w nieliniowej teorii powłok*, Biuletyn IMP PAN nr 172 (880), Gdańsk 1976, 1-191 (tłumaczenie w jęz. ang. ukaże się w 1978 r. w postaci książkowej w PWN).
76. W. Pietraszkiewicz, *Introduction to the non-linear theory of shells*, Ruhr — Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut Für Mechanik Nr 10, Mai 1977, 1-154.
77. W. Pietraszkiewicz, *Some exact reduction of the non-linear shell compatibility conditions*, Z. für Ang. Math. Mech. 57 (1977), T133-T134.
78. W. Pietraszkiewicz, *Finite rotations in the non-linear theory of shells*, Lectures presented at CISM course "Thin Shells" in Udine (Italy), October 1977 (w druku w Springer-Verlag, Wien).