УДК 539.3

В. Петрашкевич

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК РЕЙССНЕРА*)

1. Рассмотрим оболочку S, состоящую из частиц $X, Y \in S$ [1]. Движение оболочки S описывается отображением $\chi = \gamma \circ \varkappa$ отсчетной конфигурации оболочки $S_\varkappa = \varkappa(S)$ на актуальную конфигурацию $S_\gamma = \gamma(S, t)$. Во время движения радиус-векторы $\mathbf{p} = \varkappa(X)$ и $\bar{\mathbf{p}} = \gamma(X, t) = \chi(\mathbf{p}, t)$ определяют места, занимаемые частицей $X \in S$ в конфигурации $\varkappa$ и γ, а t обозначает время.

Отнесем оболочку к криволинейной системе координат ϑ^i $(i = 1, 2, 3)$ такой, что в отсчетной конфигурации $\mathbf{r} = \mathbf{r}\ (\vartheta^\alpha)$ $(\alpha = 1, 2)$ обозначает радиус-вектор точки M срединной поверхности $\mathcal{M}_\varkappa$, а $\vartheta^3 = \zeta$ — расстояние от этой поверхности. Пусть $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha}$ является поверхностным базисом $\mathcal{M}_\varkappa$, а $\mathbf{n} \equiv \mathbf{a}_3$ — единичной нормалью к $\mathcal{M}_\varkappa$. Разложим отображение χ в ряд Тейлора в окрестности поверхности $\mathcal{M}_\varkappa$, учитывая линейную часть этого разложения:

$$\bar{\mathbf{p}} = \chi(\mathbf{p}, t) = \chi(\mathbf{r}, t) + \zeta\, \mathbf{G}\mathbf{n} + \ldots, \tag{1.1}$$

где тензор второго ранга

$$\mathbf{G} = \nabla \chi(\mathbf{p}, t)\big|_{\mathbf{p}=\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{a}}_a \otimes \mathbf{a}^a \tag{1.2}$$

является градиентом диформации окрестности точек срединной поверхности $\mathcal{M}_\varkappa$, а $\bar{\mathbf{a}}_a$ $(a = 1, 2, 3)$ обозначает пространственный базис окрестности срединной поверхности в актуальной конфигурации.

При (1.1) $\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha}$, но вектор $\bar{\mathbf{a}}_3$ в общем случае не является ни единичным, ни нормальным к $\mathcal{M}_\gamma$. Вектор перемещения $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{p}, t)$ определяется двумя независимыми векторными величинами, заданными на $\mathcal{M}_\varkappa$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \zeta \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}, t) + \ldots, \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r} = u^\alpha \mathbf{a}_\alpha + w\mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\beta} = \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{n} = \beta^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \beta\mathbf{n}, \\ &\mathbf{u}_{,\alpha} = \varphi_{\cdot\alpha}^{\lambda} \mathbf{a}_\lambda + \varphi_\alpha \mathbf{n}, \qquad \boldsymbol{\beta}_{,\alpha} = \psi_{\cdot\alpha}^{\lambda} \mathbf{a}_\lambda + \psi_\alpha \mathbf{n}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_{\cdot\alpha}^{\lambda} = u^\lambda|_\alpha - b_\alpha^\lambda w, \qquad \varphi_\alpha = w_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda, \\ &\psi_{\cdot\alpha}^{\lambda} = \beta^\lambda|_\alpha - b_\alpha^\lambda \beta, \qquad \psi_\alpha = \beta_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda \beta_\lambda, \end{aligned} \tag{1.5}$$

---

*) Текст доклада, прочитанного доктором В. Петрашкевичем (Institute of fluid — flow machinery, Poland) в 1976 г. на 3-м Совещании ученых Ленинграда и Гданьска и на математико-механическом факультете ЛГУ.

а $(\ )|_\alpha$ обозначает двухмерное ковариантное дифференцирование на поверхности $\mathcal{M}_x$. Компоненты тензора деформации $\mathbf{E}$ определяются выражениями [2]

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta} + \zeta \frac{1}{2}(\varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa_{\beta\alpha}) + \zeta^2 \delta_{\alpha\beta}, \\
E_{3\beta} &= \gamma_{3\beta} + \zeta \frac{1}{2} \varkappa_{3\beta}, \quad E_{33} = \gamma_{33},
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где

$$
\begin{aligned}
2\gamma_{\alpha\beta} &= \varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha} + a^{\lambda\mu}\varphi_{\lambda\alpha}\varphi_{\mu\beta} + \varphi_\alpha\varphi_\beta, \\
\varkappa_{\alpha\beta} &= \psi_{\alpha\beta} - b^\lambda_\alpha \varphi_{\lambda\beta} + a^{\lambda\mu}\varphi_{\lambda\alpha}\psi_{\mu\beta} + \varphi_\alpha\psi_\beta, \\
2\delta_{\alpha\beta} &= a^{\lambda\mu}\psi_{\lambda\alpha}\psi_{\mu\beta} - b^\lambda_\alpha \psi_{\lambda\beta} - b^\lambda_\beta \psi_{\lambda\alpha} + \psi_\alpha\psi_\beta, \\
2\gamma_{3\beta} &= \varphi_\beta + \beta_\beta + a^{\lambda\mu}\varphi_{\lambda\beta}\beta_\mu + \varphi_\beta\beta, \\
\varkappa_{3\beta} &= \psi_\beta - b^\lambda_\beta \beta_\lambda + a^{\lambda\mu}\psi_{\lambda\beta}\beta_\mu + \psi_\beta\beta, \\
2\gamma_{33} &= 2\beta + a^{\lambda\mu}\beta_\lambda\beta_\mu + \beta^2,
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

а через $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ обозначены компоненты метрического тензора и тензора кривизны поверхности $\mathcal{M}_x$.

Введя тензорные обозначения

$$
\mathbf{1} = \mathbf{a}_a \otimes \mathbf{a}^a, \quad \mathbf{b} = b_{\alpha\beta}\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta, \quad \bar{\boldsymbol{\lambda}} = -\bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} \otimes \bar{\mathbf{a}}^\beta = \bar{\lambda}_{\alpha\beta}\bar{\mathbf{a}}^\alpha \otimes \bar{\mathbf{a}}^\beta, \tag{1.8}
$$

для лагранжева описания деформации справедливы следующие формулы [3]:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{G} - \mathbf{1}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{a}_{ab} - a_{ab}\right)\mathbf{a}^a \otimes \mathbf{a}^b, \\
\boldsymbol{\varkappa} &= -\left(\mathbf{G}^T\bar{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{G} - \mathbf{b}\right) = -\left(\bar{\lambda}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}\right)\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta, \\
\boldsymbol{\delta} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{G}^T\bar{\boldsymbol{\lambda}}^T\bar{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{G} - \mathbf{b}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{\lambda}^c_\alpha\bar{\lambda}_{c\beta} - b^\lambda_\alpha b_{\lambda\beta}\right)\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

2. По теореме Коши о полярном разложении невырожденный тензор $\mathbf{G}$ можно представить двумя способами через ортогональный тензор поворота $\mathbf{R}$ и положительно-определенные тензоры растяжения $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ [1]:

$$
\mathbf{G} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \tag{2.1}
$$

По (1.2) и (2.1) находим

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{a}}_a &= \mathbf{G}\mathbf{a}_a = \mathbf{R}\check{\mathbf{a}}_a = \mathbf{V}\overset{*}{\mathbf{a}}_a, \\
\bar{\mathbf{a}}^a &= \left(\mathbf{G}^{-1}\right)^T\mathbf{a}^a = \mathbf{R}\check{\mathbf{a}}^a = \mathbf{V}^{-1}\overset{*}{\mathbf{a}}^a.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Для лангражева описания деформации промежуточный базис определяется при помощи формул

$$
\check{\mathbf{a}}_a = \mathbf{U}\mathbf{a}_a = \mathbf{R}^T\bar{\mathbf{a}}_a, \quad \check{\mathbf{a}}^a = \left(\mathbf{U}^{-1}\right)^T\mathbf{a}^a = \mathbf{R}^T\bar{\mathbf{a}}^a, \tag{2.3}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \check{\mathbf{a}}_a \otimes \mathbf{a}^a, \quad \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{a}_a \otimes \check{\mathbf{a}}^a, \\
\mathbf{R} &= \bar{\mathbf{a}}_a \otimes \check{\mathbf{a}}^a = \bar{\mathbf{a}}^a \otimes \check{\mathbf{a}}_a.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

По теореме о спектральном разложении тензора $\mathbf{U}$ существуют три положительных собственных числа $U_m (m = 1, 2, 3)$ и три ортонормальных вектора $\mathbf{k}_m$ такие, что

$$
\mathbf{U} = \sum_m U_m \mathbf{k}_m \otimes \mathbf{k}_m. \tag{2.5}
$$

Тензоры $\mathbf{U}$ и γ соосны. Для упрощения дальнейших преобразований удобно ввести еще один лангранжев тензор деформации, тоже соосный с $\mathbf{U}$:

$$\check{\gamma} = \mathbf{U} - \mathbf{1} = \sqrt{\mathbf{1} + 2\gamma} - \mathbf{1} = \check{\gamma}_{ab}\mathbf{a}^a \otimes \mathbf{a}^b, \tag{2.6}$$

при помощи которого получаем

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{a}}_a &= \mathbf{a}_a + \check{\gamma}_{ab}\mathbf{a}^b, \\ \bar{a}_{ab} &= \check{\mathbf{a}}_a \cdot \check{\mathbf{a}}_b = (\delta^c_a + \check{\gamma}^c_a)(\delta^d_b + \check{\gamma}^d_b)\, a_{cd}, \\ 2\gamma_{ab} &= 2\check{\gamma}_{ab} + \check{\gamma}^c_a \check{\gamma}_{cb} \end{aligned} \tag{2.7}$$

и многие другие формулы, которые здесь не приводятся.

Подставляя (1.4) и (2.7) в (2.4), находим общую зависимость для тензора поворота

$$\mathbf{R} = \left[(\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha})\, \bar{a}^{ab} + (\mathbf{n} + \beta)\, \bar{a}^{3b}\right] \otimes (\mathbf{a}_b + \check{\gamma}_{bc}\mathbf{a}^c), \tag{2.8}$$

где

$$\bar{a}^{ad} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\bar{a}}\, \epsilon^{abc} \epsilon^{\mathrm{def}} (a_{be} + 2\gamma_{be})(a_{cf} + 2\gamma_{cf}), \tag{2.9}$$

$$\frac{\bar{a}}{a} = \frac{1}{6}\, \epsilon^{abc} \epsilon^{\mathrm{def}} (a_{ad} + 2\gamma_{ad})(a_{be} + 2\gamma_{be})(a_{cf} + 2\gamma_{cf}).$$

По теореме о спектральном разложении тензора $\mathbf{R}$ существует такой ортонормированный базис, в котором $\mathbf{R}$ имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \cos\omega\, (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) - \sin\omega\, (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2), \tag{2.10}$$

где

$$\begin{gathered} \cos\omega = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\mathbf{R} - 1), \\ \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2\sin\omega}\left[(R_{23} - R_{32})\,\mathbf{i}_1 + (R_{13} - R_{31})\,\mathbf{i}_2 + (R_{21} - R_{12})\,\mathbf{i}_3\right], \end{gathered} \tag{2.11}$$

а R_{kl} являются компонентами $\mathbf{R}$ в известном ортонормированном тензорном базисе $\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l$. Угол ω описывает поворот вокруг направления, определяемого единичным вектором $\mathbf{e}_1$.

В теории оболочек Рейсснера для описания поворотов удобно использовать эквивалентный вектор конечного поворота $\mathbf{\Omega}$, направленный вдоль вектора $\mathbf{e}_1$, длина которого принята равной $\sin\omega$. Учитывая (2.7) и (2.9), для $\mathbf{\Omega}$ получаем общую зависимость

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{e}_1 \sin\omega = \frac{1}{2}\check{\mathbf{a}}_a \times \bar{\mathbf{a}}^a = \frac{1}{2}\epsilon_{\mathrm{def}}\,(\delta^d_a + \check{\gamma}^d_a)\,\bar{a}^{ab} G_{.b}^{\ e}\,\mathbf{a}^{\mathrm{f}}, \tag{2.12}$$

где

$$G_{.b}^{\ e} = \mathbf{a}^e \mathbf{G} \mathbf{a}_b = \mathbf{a}^e \cdot \bar{\mathbf{a}}_b, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}. \tag{2.13}$$

Используя результаты работы [4], для вектора конечного поворота Ω получаем другую эквивалентную формулу

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\,\bar{\epsilon}^{abc}(\bar{\mathbf{a}}_a \cdot \check{\mathbf{a}}_b)\,\check{\mathbf{a}}_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\,\epsilon^{abc}\,(\delta^e_b + \check{\gamma}^e_b)(\delta^f_c + \check{\gamma}^f_c)\, G_{ea}\mathbf{a}_f. \tag{2.14}$$

При помощи (2.7) и других формул показывается, что (2.14) можно свести к виду (2.12) при помощи алгебраических преобразований.

Используя вектор $\mathbf{\Omega}$, получаем

$$\bar{\mathbf{a}}_a = \mathbf{R}\check{\mathbf{a}}_a = \check{\mathbf{a}}_a + \mathbf{\Omega} \times \check{\mathbf{a}}_a + \frac{1}{2\cos^2 \omega/2}\,\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \check{\mathbf{a}}_a). \tag{2.15}$$

3. Рассмотрим деформацию граничного элемента оболочки. В отсчетной конфигурации контур $C_\varkappa$ срединной поверхности $\mathcal{M}_\varkappa$ задается равенством $\vartheta^\alpha = \vartheta^\alpha(s)$, где s обозначает длину дуги контура $C_\varkappa$. С контуром $C_\varkappa$ связан триэдр ортов: $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ — единичный вектор касательной к $C_\varkappa$, $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к $\mathcal{M}_\varkappa$ и $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ — единичный

вектор тангенциальной нормали к $C_\varkappa$. С контуром C_γ в актуальной конфигурации связаны векторы $\bar{\mathbf{a}}_t$, $\bar{\mathbf{a}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_t \times \bar{\mathbf{a}}_3 = \bar{\mathbf{a}}_\nu$, в которые переходят орты $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\nu}$ после деформации. Вводя дополнительный вектор $\bar{\mathbf{a}}_n = \bar{\mathbf{a}}_\nu \times \bar{\mathbf{a}}_t$, получаем

$$\bar{\mathbf{a}}_t = \bar{\mathbf{a}}_\alpha t^\alpha = \mathbf{t} + \frac{d\mathbf{u}}{ds}, \quad \bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{n} + \boldsymbol{\beta},$$

$$\bar{\mathbf{a}}_\nu = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\, \bar{\mathbf{a}}^\alpha \nu_\alpha = \left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{u}}{ds}\right) \times (\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}), \tag{3.1}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_n = \nu_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} \left(\bar{a}_{\beta\lambda}\bar{\mathbf{a}}_3 - \bar{\mathbf{a}}_\beta \bar{a}_{3\lambda}\right) t^\lambda = (1 + 2\gamma_{tt})\bar{\mathbf{a}}_3 - 2\gamma_{3t}\bar{\mathbf{a}}_t,$$

где
$$\mathbf{t} = t^\alpha \mathbf{a}_\alpha = \epsilon^{\beta\alpha} \nu_\beta \mathbf{a}_\beta, \quad \mathbf{a}_\alpha = \nu_\alpha \boldsymbol{\nu} + t_\alpha \mathbf{t}. \tag{3.2}$$

Длины этих векторов равны

$$\bar{a}_t = |\bar{\mathbf{a}}_t| = \sqrt{1 + 2\gamma_{tt}}, \quad \bar{a}_3 = \sqrt{1 + 2\gamma_{33}},$$
$$\bar{a}_\nu = \sqrt{(1 + 2\gamma_{tt})(1 + 2\gamma_{33}) - (2\gamma_{3t})^2}, \quad \bar{a}_n = \bar{a}_t \bar{a}_\nu, \tag{3.3}$$

где физические компоненты тензора γ и произвольного тензора s даны соотношениями

$$\gamma_{tt} = \gamma_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta, \quad \gamma_{3t} = \gamma_{3\alpha} t^\alpha, \quad \gamma_{3\nu} = \gamma_{3\alpha}\nu^\alpha, \quad s_{\nu t} = s_{\alpha\beta}\nu^\alpha t^\beta, \quad s_{tt} = s_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta, \ \ldots \tag{3.4}$$

Согласно (2.2), (2.3) существуют промежуточные векторы $\check{\mathbf{a}}_t$, $\check{\mathbf{a}}_3$, $\check{\mathbf{a}}_\nu$ и $\check{\mathbf{a}}_n$, которые преобразованием (2.15) переводятся в векторы $\bar{\mathbf{a}}_t$, $\bar{\mathbf{a}}_3$, $\bar{\mathbf{a}}_\nu$, $\bar{\mathbf{a}}_n$. Используя (2.7), получаем

$$\check{\mathbf{a}}_t = \check{\gamma}_{\nu t}\boldsymbol{\nu} + (1 + \check{\gamma}_{tt})\,\mathbf{t} + \check{\gamma}_{3t}\mathbf{n},$$
$$\check{\mathbf{a}}_3 = \check{\gamma}_{3\nu}\boldsymbol{\nu} + \check{\gamma}_{3t}\mathbf{t} + (1 + \check{\gamma}_{33})\,\mathbf{n}, \tag{3.5}$$
$$\check{\mathbf{a}}_\nu = \check{\mathbf{a}}_t \times \check{\mathbf{a}}_3, \quad \check{\mathbf{a}}_n = \check{\mathbf{a}}_\nu \times \check{\mathbf{a}}_t.$$

При чистой деформации $\check{\gamma}$ орты $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ переводятся в орты $\check{\boldsymbol{\nu}} = \dfrac{\check{\mathbf{a}}_\nu}{\bar{a}_\nu}$, $\check{\mathbf{t}} = \dfrac{\check{\mathbf{a}}_t}{\bar{a}_t}$, $\check{\mathbf{n}} = \dfrac{\check{\mathbf{a}}_n}{\bar{a}_n}$. Введем вектор конечного поворота

$$\check{\boldsymbol{\Omega}}_t = \check{\mathbf{e}}_t \sin \check{\omega}_t = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nu} \times \check{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{t} \times \check{\mathbf{t}} + \mathbf{n} \times \check{\mathbf{n}}), \tag{3.6}$$

Согласно правилу сложения конечных поворотов вектор $\boldsymbol{\Omega}_t$, эквивалентный двум последовательным поворотам $\check{\boldsymbol{\Omega}}_t$ и $\boldsymbol{\Omega}$, имеет вид

$$\boldsymbol{\Omega}_t = \left(1 - \frac{\check{\boldsymbol{\Omega}}_t \cdot \boldsymbol{\Omega}}{4\cos^2 \check{\omega}_t/2 \cos^2 \omega/2}\right)\left(\check{\boldsymbol{\Omega}}_t \cos^2 \omega/2 + \boldsymbol{\Omega} \cos^2 \check{\omega}_t/2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \times \check{\boldsymbol{\Omega}}_t\right). \tag{3.7}$$

Орты $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ переводятся в векторы $\bar{\mathbf{a}}_\nu$, $\bar{\mathbf{a}}_t$, $\bar{\mathbf{a}}_n$ по очевидным правилам, например,

$$\bar{\mathbf{a}}_t = \bar{a}_t \left[\mathbf{t} + \boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{t} + \frac{1}{2\cos^2 \omega_t/2} \boldsymbol{\Omega}_t \times (\boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{t})\right]. \tag{3.8}$$

4. Рассмотрим возможные варианты геометрических граничных условий. Согласно (1.1) боковая поверхность оболочки Рейсснера в актуальной конфигурации определена радиус-вектором

$$\bar{\mathbf{p}}(s, \zeta) = \bar{\mathbf{r}}(s) + \zeta \bar{\mathbf{a}}_3(s). \tag{4.1}$$

По (1.4) $\bar{\mathbf{r}}$ и $\bar{\mathbf{a}}_3$ определятся заданием на $C_\varkappa$ двух векторных функций

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{A}(s), \quad \boldsymbol{\beta}(s) = \mathbf{B}(s), \tag{4.2}$$

которые полностью определяют $\bar{\mathbf{p}}(s, \zeta)$. Соотношение (4.2) — основной вариант геометрических граничных условий, называемый условиями в перемещениях. Ту же боковую поверхность можно задать дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial s} = \bar{\mathbf{a}}_t + \zeta \frac{d\bar{\mathbf{a}}_3}{ds}, \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \zeta} = \bar{\mathbf{a}}_3. \tag{4.3}$$

Согласно формулам типа (3.8) векторы $\bar{\mathbf{a}}_t$, $\bar{\mathbf{a}}_3$ определяются заданием на $C_\varkappa$ вектора конечного поворота $\mathbf{\Omega}_t$, физических компонент γ_{tt}, γ_{t3}, γ_{33} тензора деформации γ, а также физических компонент на $C_\varkappa$ тензора деформации $\check{\gamma}$. Можно, однако, доказать, что группы членов, содержащие согласно (3.5)—(3.7) физические компоненты тензора $\check{\gamma}$, выражаются полностью через γ_{tt}, γ_{t3}, γ_{33}. Из этого следует, что боковая поверхность оболочки Рейсснера определяется заданием на $C_\varkappa$ одной векторной и трех скалярных функций

$$\mathbf{\Omega}_t(s) = \mathbf{m}(s); \; \gamma_{tt}(s) = l(s), \; \gamma_{3t} = m(s), \; \gamma_{33}(s) = n(s). \tag{4.4}$$

Граничные условия вида (4.4) называют иногда кинематическими.

Если $\mathbf{A}(s)$ и $\mathbf{B}(s)$ известны, то

$$2\mathbf{m} = \frac{\mathbf{v} \times \left[\left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{A}}{ds}\right) \times (\mathbf{n} + \mathbf{B})\right]}{\sqrt{(1+2l)(1+2n) - (2m)^2}} + \frac{\mathbf{t} \times \left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{A}}{ds}\right)}{\sqrt{1+2l}} +$$
$$+ \frac{\mathbf{n} \times \left\{\left[\left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{A}}{ds}\right) \times (\mathbf{n} + \mathbf{B})\right] \times \left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{A}}{ds}\right)\right\}}{\sqrt{1+2l}\sqrt{(1+2l)(1+2n) - (2m)^2}}, \tag{4.5}$$
$$2l = 2\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{ds} + \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{ds},$$

$$2m = \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{ds} + \mathbf{B} \cdot \left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{A}}{ds}\right), \quad 2n = 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}. \tag{4.6}$$

Боковую поверхность оболочки в актуальной конфигурации можно также задать дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{p}}}{\partial s^2} = \frac{d\bar{\mathbf{a}}_t}{ds} + \zeta \frac{d^2\bar{\mathbf{a}}_3}{ds^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{p}}}{\partial s \partial \zeta} = \frac{d\bar{\mathbf{a}}_3}{ds}. \tag{4.7}$$

Правила дифференцирования ортов $\mathbf{v}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ известны (ср. [5]):

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{n}, \tag{4.8}$$
$$\boldsymbol{\omega}_t = \sigma_t \mathbf{v} + \tau_t \mathbf{t} + \varkappa_t \mathbf{n},$$

$$\sigma_t = b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta, \quad \tau_t = -b_{\alpha\beta} \nu^\alpha t^\beta, \quad \varkappa_t = -\nu_\alpha t^\alpha|_\beta t^\beta,$$
$$\sigma_\nu = b_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta, \quad \varkappa_\nu = -t_\alpha \nu^\alpha|_\beta \nu^\beta. \tag{4.9}$$

Правила дифференцирования ортов $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\bar{\mathbf{a}}_\nu}{\bar{a}_\nu}$, $\bar{\mathbf{t}} = \frac{\bar{\mathbf{a}}_t}{\bar{a}_t}$, $\bar{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\mathbf{a}}_n}{\bar{a}_n}$ аналогичны правилам (4.8), но компоненты вектора $\bar{\boldsymbol{\omega}}_t$ не связаны непосредственно с геометрией поверхности $\mathcal{M}_\Gamma$, а вычисляются по формулам

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_t = \bar{\sigma}_t \bar{\mathbf{v}} + \bar{\tau}_t \bar{\mathbf{t}} + \bar{\varkappa}_t \bar{\mathbf{n}},$$
$$\bar{a}_t \bar{a}_n \bar{\sigma}_t = \bar{\mathbf{a}}_n \cdot \frac{d}{ds} \bar{\mathbf{a}}_t = (1 + 2\gamma_{tt})\left(2\frac{d\gamma_{3t}}{ds} + \sigma_t - \varkappa_{tt}\right) - 2\gamma_{3t}\frac{d\gamma_{tt}}{ds},$$

$$\overline{a}_\nu \overline{a}_n \overline{\tau}_t = -\,\overline{\mathbf{a}}_n \cdot \frac{d}{ds}\,\overline{\mathbf{a}}_\nu = -\sqrt{\frac{\overline{a}}{a}}\,\nu_\lambda \left[(1+2\gamma_{tt})\left(b^\lambda_\alpha - \overline{a}^{\lambda c}\gamma_{c3\beta}\right) + 2\gamma_{3t}\left(t^\lambda|_\beta + \overline{a}^{\lambda c}\gamma_{c\alpha\beta}t^\alpha\right)\right] t^\beta, \tag{4.10}$$

$$\overline{a}_t \overline{a}_\nu \overline{\varkappa}_t = \overline{\mathbf{a}}_t \cdot \frac{d}{ds}\,\overline{\mathbf{a}}_\nu = -\sqrt{\frac{\overline{a}}{a}}\,\nu_\lambda \left(t^\lambda|_\beta + \overline{a}^{\lambda c}\gamma_{c\alpha\beta}t^\alpha\right) t^\beta,$$

где

$$\gamma_{c\alpha\beta} = \gamma_{c\alpha,\,\beta} + \gamma_{c\beta,\,\alpha} - \gamma_{\alpha\beta,\,c} - 2\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\gamma_{c\lambda} - 2b_{\alpha\beta}\gamma_{c3}. \tag{4.11}$$

Используя (3.1)—(3.4), разные члены (4.10) могут быть выражены через физические компоненты тензоров γ и $\varkappa$ на $C_\varkappa$. После громоздких преобразований получены следующие формулы:

$$\overline{\mathbf{a}}_t \cdot \frac{d}{ds}\,\overline{\mathbf{a}}_t = \frac{d\gamma_{tt}}{ds}, \quad \overline{\mathbf{a}}_3 \cdot \frac{d}{ds}\,\overline{\mathbf{a}}_3 = \frac{d\gamma_{33}}{ds}, \quad \overline{\mathbf{a}}_3 \cdot \frac{d}{ds}\,\overline{\mathbf{a}}_t = 2\frac{d\gamma_{3t}}{ds} + \sigma_t - \varkappa_{tt},$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{a}}_t \cdot \frac{d}{ds}\,\overline{\mathbf{a}}_\nu = {} & \sqrt{\frac{\overline{a}}{a}}\,\varkappa_t + \sqrt{\frac{a}{\overline{a}}}\Bigg\{\Bigg[\frac{d\gamma_{tt}}{ds_\nu} - 2\frac{d\gamma_{\nu t}}{ds} - 2\varkappa_\nu\gamma_{\nu t} + 2\sigma_t\gamma_{3\nu} + \\ & + 2\varkappa_t(\gamma_{tt} - \gamma_{\nu\nu})\Bigg]\left[(1+2\gamma_{tt})(1+\gamma_{33}) - 4\gamma^2_{3t}\right] + \Bigg(2\frac{d\gamma_{3t}}{ds} - \varkappa_{tt} - \\ & - 2\sigma_t\gamma_{33} + 2\varkappa_t\gamma_{3\nu}\Bigg)\left[2\gamma_{3\nu}(1+2\gamma_{tt}) - 4\gamma_{\nu t}\gamma_{3t}\right] + \Bigg(\frac{d\gamma_{tt}}{ds} - 2\sigma_t\gamma_{3t} + \\ & + 2\varkappa_t\gamma_{\nu t}\Bigg)\left[2\gamma_{\nu t}(1+2\gamma_{33}) - 4\gamma_{3\nu}\gamma_{3t}\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{a}}_3 \cdot \frac{d}{ds}\,\overline{\mathbf{a}}_\nu = {} & -\sqrt{\frac{\overline{a}}{a}}\,\tau_t - \sqrt{\frac{a}{\overline{a}}}\Bigg\{\Bigg[\frac{d\gamma_{3\nu}}{ds} - \frac{d\gamma_{3t}}{ds_\nu} + \frac{1}{2}(\varkappa_{\nu t} + \varkappa_{t\nu}) + \\ & + \varkappa_\nu\gamma_{3\nu} + 2\sigma_t\gamma_{\nu t} - 2\tau_t\gamma_{\nu\nu} - \varkappa_t\gamma_{3t}\Bigg]\left[(1+2\gamma_{tt})(1+2\gamma_{33}) - 4\gamma^2_{3t}\right] - \\ & - \left(\frac{d\gamma_{33}}{ds} + 2\sigma_t\gamma_{3t} - 2\tau_t\gamma_{3\nu}\right)\left[2\gamma_{3\nu}(1+2\gamma_{tt}) - 4\gamma_{\nu t}\gamma_{3t}\right] - \\ & - \left(\varkappa_{tt} + 2\sigma_t\gamma_{tt} - 2\tau_t\gamma_{\nu t}\right)\left[2\gamma_{\nu t}(1+2\gamma_{33}) - 4\gamma_{3\nu}\gamma_{3t}\right]\Bigg\},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\frac{\overline{a}}{a} = {} & 1 + 2(\gamma_{\nu\nu} + \gamma_{tt} + \gamma_{33}) + 4(\gamma_{\nu\nu}\gamma_{tt} + \gamma_{\nu\nu}\gamma_{33} + \gamma_{tt}\gamma_{33} - \gamma^2_{\nu t} - \gamma^2_{3\nu} - \gamma^2_{3t}) + \\ & + 8(\gamma_{\nu\nu}\gamma_{tt}\gamma_{33} + 2\gamma_{\nu t}\gamma_{3\nu}\gamma_{3t} - \gamma_{\nu\nu}\gamma^2_{3t} - \gamma_{tt}\gamma^2_{3\nu} - \gamma_{33}\gamma^2_{\nu t}).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Согласно (4.12), (4.13), (1.6), (1.7), (3.3) и (3.4) параметры $\overline{\sigma}_t$, $\overline{\tau}_t$ и $\overline{\varkappa}_t$ определяются только через компоненты тензоров γ и $\varkappa$ и геометрические параметры поверхности $\mathcal{M}_\varkappa$.

В [4, 5] показано, что система дифференциальных уравнений для определения ортов $\overline{\mathbf{v}}$, $\overline{\mathbf{t}}$, $\overline{\mathbf{n}}$ сводится к одному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d\mathbf{\Omega}_t}{ds} = \boldsymbol{\varkappa}_t \cos\omega_t + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_t \times \boldsymbol{\varkappa}_t - \frac{1}{4\cos^2\omega_t/2}\mathbf{\Omega}_t \times (\mathbf{\Omega}_t \times \boldsymbol{\varkappa}_t), \tag{4.14}$$

где $\boldsymbol{\varkappa}_t$ — вектор изменения кривизны контура $C_\varkappa$ в процессе деформации:

$$\boldsymbol{\varkappa}_t = -k_{tt}\mathbf{v} + k_{\nu t}\mathbf{t} - k_{3t}\mathbf{n}, \tag{4.15}$$

$$-k_{tt} = \overline{\sigma}_t - \sigma_t, \quad k_{\nu t} = \overline{\tau}_t - \tau_t, \quad -k_{3t} = \overline{\varkappa}_t - \varkappa_t. \tag{4.16}$$

Величины (4.16) полностью определены компонентами тензора деформации (1.6) и согласно (4.8) вместе с γ_{tt}, γ_{t3} и γ_{33} полностью определяют производные векторов $\bar{\mathbf{a}}_t$ и $\bar{\mathbf{a}}_3$. Тогда боковая поверхность оболочки Рейсснера может быть определена по (4.7) заданием на $C_\varkappa$ одной векторной и трех скалярных функций:

$$\varkappa_t(s) = \mathbf{p}(s); \quad \gamma_{tt}(s) = l(s), \quad \gamma_{3t}(s) = m(s), \quad \gamma_{33}(s) = n(s). \qquad (4.17)$$

Граничные условия вида (4.17) называют деформационными.

Если известен вектор $\mathbf{m}(s)$ в (4.5), то [5]

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{m}}{ds} - \frac{1}{1+\sqrt{1-\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}}}\left(\mathbf{m}\cdot\frac{d}{ds}\sqrt{1-\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}} + \mathbf{m}\times\frac{d\mathbf{m}}{ds}\right). \qquad (4.18)$$

При соответствующих упрощениях граничные условия (4.4) и (4.17) с точностью до обозначений совпадают с приведенными в [5—7].

5. Уравнения движения для оболочек Рейсснера в лангранжевом описании можно получить путем интегрирования соответственных уравнений движения трехмерного тела по толщине оболочки в отсчетной конфигурации [2]. Здесь представим вывод уравнений движения, исходя из принципа Гамильтона.

Рассматриваемая упругая оболочка является динамической системой, все характеристики которой локальны в пространстве и времени. Для произвольного промежутка времени (t_1, t_2) и произвольной части оболочки в конфигурации отсчета имеем

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}\,dt = 0, \qquad (5.1)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{E} + W_b + W_t,$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\int_{S_\varkappa}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\rho_\varkappa dv, \quad \mathcal{E} = \int_{S_\varkappa}\sigma_\varkappa\rho_\varkappa dv, \qquad (5.2)$$

$$W_b = \int_{S_\varkappa}\mathbf{b}_\varkappa\cdot\mathbf{v}\rho_\varkappa dv, \quad W_t = \int_{\partial S_\varkappa}\mathbf{t}_\varkappa\cdot\mathbf{v}\,da, \qquad (5.3)$$

где $\mathcal{K}$ — кинетическая энергия; $\mathcal{E}$ — внутренняя энергия упругой деформации; W_b и W_t — работа консервативных массовых $\mathbf{b}_\varkappa$ и поверхностных $\mathbf{t}_\varkappa$ сил; $\rho_\varkappa$ — плотность массы в отсчетной конфигурации; $\sigma_\varkappa$ — функция внутренней энергии.

Принцип (5.1) можно преобразовать к виду

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{S_\varkappa}[\mathrm{div}(\mathbf{FS}) + \rho_\varkappa(\mathbf{b}_\varkappa - \ddot{\mathbf{v}})]\cdot\delta\mathbf{v}\,dv\,dt +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial S_\varkappa}(\mathbf{t}_\varkappa - \mathbf{FSn}_\varkappa)\cdot\delta\mathbf{v}\,da\,dt = 0, \qquad (5.4)$$

где $\mathbf{F}$ — тензор градиента деформации, а

$$\mathbf{S} = \rho_\varkappa\frac{\partial\sigma_\varkappa(\mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}} \qquad (5.5)$$

является вторым (симметрическим) тензором напряжений Пиолы [1, 2]. Учитывая, что согласно (1.3) $\delta\mathbf{v} = \delta\mathbf{u} + \zeta\delta\boldsymbol{\beta}$, после довольно сложных преобразований получаем из (5.4) уравнения движения и натуральные граничные условия, которые в векторных величинах можно представить в виде

$$(\mathbf{GN}^{\beta})|_{\beta}+\mathbf{p}=\rho_0\ddot{\mathbf{u}}+\rho_1\ddot{\boldsymbol{\beta}},\quad (\mathbf{GM}^{\beta})|_{\beta}-\mathbf{GN}^3+\mathbf{l}=\rho_1\ddot{\mathbf{u}}+\rho_2\ddot{\boldsymbol{\beta}}, \tag{5.6}$$

$$\mathbf{GN}^{\beta}\nu_{\beta}=\mathbf{f},\quad \mathbf{GM}^{\beta}\nu_{\beta}=\mathbf{k}, \tag{5.7}$$

где

$$\mathbf{N}^{b}=\left(N^{ab}-\bar{a}^{ac}\bar{\lambda}_{c\lambda}M^{\lambda b}\right)\mathbf{a}_{a},\quad \mathbf{M}^{\beta}=\left(M^{a\beta}-\bar{a}^{ac}\bar{\lambda}_{c\lambda}K^{\lambda\beta}\right)\mathbf{a}_{a}, \tag{5.8}$$

$$\begin{bmatrix} N^{ab}\\ M^{ab}\\ K^{ab}\end{bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\mu S^{ab}\begin{bmatrix}1\\ \zeta\\ \zeta^2\end{bmatrix}d\zeta,\quad \begin{bmatrix}\rho_0\\ \rho_1\\ \rho_2\end{bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\mu\rho_x\begin{bmatrix}1\\ \zeta\\ \zeta^2\end{bmatrix}d\zeta. \tag{5.9}$$

Из симметрии тензора $\mathbf{S}$ можно получить зависимость

$$\bar{\mathbf{a}}_b\times\mathbf{GN}^b+\bar{\mathbf{a}}_{3,\beta}\times\mathbf{GM}^{\beta}=\mathbf{0}, \tag{5.10}$$

при помощи которой второе из уравнений (5.6) приводится к виду

$$\bar{\mathbf{a}}_{\beta}\times\mathbf{GN}^{\beta}+\left(\bar{\mathbf{a}}_3\times\mathbf{GM}^{\beta}\right)|_{\beta}+\bar{\mathbf{a}}_3\times\mathbf{l}=\bar{\mathbf{a}}_3\times(\rho_1\ddot{\mathbf{u}}+\rho_2\ddot{\boldsymbol{\beta}}). \tag{5.11}$$

Выведенные зависимости (5.6) являются наиболее общими уравнениями движения оболочек, представленными в лагранжевом описании.

Если положить

$$\bar{\mathbf{N}}^{\beta}=\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\,\mathbf{GN}^{\beta},\quad \mathbf{N}=\mathbf{N}^{\beta}\otimes\mathbf{a}_{\beta},\quad \bar{\mathbf{N}}=\bar{\mathbf{N}}^{\beta}\otimes\bar{\mathbf{a}}_{\beta}, \tag{5.12}$$

то тензоры $\bar{\mathbf{N}}$ и $\mathbf{N}$ связаны зависимостью

$$\bar{\mathbf{N}}=\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\,\mathbf{GNG}^{T}. \tag{5.13}$$

Такой же зависимостью связаны в механике сплошных сред тензоры напряжений Коши и Пиолы. Поэтому тензоры $\mathbf{N}^{\beta}\otimes\mathbf{a}_{\beta}$, $\mathbf{M}^{\beta}\otimes\mathbf{a}_{\beta}$ и $\mathbf{N}^3\otimes\mathbf{n}$ являются аналогами тензора напряжений Пиолы в нелинейной теории оболочек Рейсснера.

Векторные зависимости (5.6) можно представить через компоненты в базисах $\mathbf{a}_{\alpha}$, $\mathbf{n}$ или $\bar{\mathbf{a}}_{\alpha}$, $\bar{\mathbf{a}}_3$, или $\check{\mathbf{a}}_{\alpha}$, $\check{\mathbf{a}}_3$. Уравнения движения, эквивалентные уравнениям (5.6), представленным в базисе $\mathbf{a}_{\alpha}$, $\mathbf{n}$, получены в [2] другим путем. В координатной форме первое уравнение (5.6) совпадает с полученным в [2], что касается второго, то для него составляющие по $\mathbf{a}_{\alpha}$ ведут к уравнениям

$$\begin{gathered}\left[\left(\delta^{\alpha}_{\lambda}+\varphi_{.\lambda}^{\alpha}\right)M^{\lambda\beta}+\psi_{.\lambda}^{\alpha}K^{\lambda\beta}-b^{\alpha}_{\lambda}K^{\lambda\beta}+\underline{\beta^{\alpha}M^{3\beta}}\right]\Big|_{\beta}-\\ -b^{\alpha}_{\beta}\left[\varphi_{\lambda}M^{\lambda\beta}+\psi_{\lambda}K^{\lambda\beta}+\underline{(1+\beta)M^{3\beta}}\right]-\\ -\left[\left(\delta^{\alpha}_{\lambda}+\varphi_{.\lambda}^{\alpha}\right)N^{\lambda3}+\underline{\psi_{\lambda}M^{3\lambda}-b^{\alpha}_{\lambda}M^{3\lambda}}+\beta^{\alpha}N^{33}\right]+l^{\alpha}=\rho_1\ddot{u}^{\alpha}+\rho_2\ddot{\beta}^{\alpha}.\end{gathered} \tag{5.14}$$

Эти уравнения отличаются от выведенных в [2] только подчеркнутыми членами, содержащими $M^{3\beta}$.

Представим однородные уравнения (5.6) в компонентах в базисе $\bar{\mathbf{a}}_{\alpha}$, $\bar{\mathbf{a}}_3$. Учитывая

$$\bar{\mathbf{a}}_{\alpha}|_{\beta}=b_{\alpha\beta}\bar{\mathbf{a}}_3+\bar{a}^{cd}\gamma_{d\alpha\beta},\quad \bar{\mathbf{a}}_3|_{\beta}=-\bar{\lambda}_{\alpha\beta}\bar{\mathbf{a}}^{\alpha}, \tag{5.15}$$

$$Q^{\alpha\beta}=N^{\alpha\beta}-\bar{a}^{\alpha c}\bar{\lambda}_{c\lambda}M^{\lambda\beta},\quad Q^{\beta}=N^{3\beta}-\bar{a}^{3c}\bar{\lambda}_{c\lambda}M^{\lambda\beta}, \tag{5.16}$$

из первого однородного уравнения (5.6) получаем, например,

$$
\begin{gathered}
Q^{\alpha\beta}|_\beta + \overline{a}^{\alpha d}\gamma_{d\lambda\beta}Q^{\lambda\beta} - \overline{a}^{\alpha a}\overline{\lambda}_{a\beta}Q^\beta = 0. \\
Q^\beta|_\beta + \left(b_{\alpha\beta} + \overline{a}^{3d}\gamma_{d\alpha\beta}\right) Q^{\alpha\beta} - \overline{a}^{3a}\overline{\lambda}_{a\beta}Q^\beta = 0.
\end{gathered}
\tag{5.17}
$$

Компоненты уравнений (5.6) в базисе $\check{\mathbf{a}}_\alpha$, $\check{\mathbf{a}}_3$ еще сложнее и мы их тут не приводим.

6. Определяющие уравнения упругого материала могут быть получены из упругого потенциала, который при малых деформациях принимает вид [8]

$$
\sigma_\varkappa = \frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot(\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}),
\tag{6.1}
$$

где $\mathbf{L}$ — тензор упругости четвертого ранга.

Согласно (1.6) и учитывая геометрические соотношения нормальной системы координат в отсчетной конфигурации, упругий потенциал может быть представлен рядом

$$
\sigma_\varkappa = \sigma_0 + \zeta\sigma_1 + \zeta^2\sigma_2 + \ldots .
\tag{6.2}
$$

Упругий потенциал Σ на поверхности $\mathcal{M}_\varkappa$ представим в виде ряда

$$
\begin{gathered}
\Sigma = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mu\sigma_\varkappa d\zeta = \\
= h\left[\sigma_0 + (\sigma_2 - 2H\sigma_1 + K\sigma_0)\frac{h^2}{12} + (K\sigma_2 - 2H\sigma_3 + \sigma_4)\frac{h^4}{80} + \ldots\right],
\end{gathered}
\tag{6.3}
$$

где H и K — средняя и гауссова кривизна поверхности $\mathcal{M}_\varkappa$.

Оценим порядок членов, входящих в поверхностный потенциал Σ. Для рассматриваемой теории оболочек

$$
\eta \ll 1, \quad \frac{h}{R} \ll 1, \quad \left(\frac{h}{L}\right)^2 \ll 1,
\tag{6.4}
$$

где η — наибольшая величина деформаций; R — наименьший радиус кривизны поверхности $\mathcal{M}_\varkappa$; L — наименьшая длина волны деформации. Введем малый параметр [9]

$$
\theta = \max\left(\frac{h}{L}, \ \frac{h}{d}, \ \sqrt{\frac{h}{R}}, \ \sqrt{\eta}\right),
\tag{6.5}
$$

где d — расстояние рассматриваемой точки поверхности $\mathcal{M}_\varkappa$ от граничного контура $C_\varkappa$.

В теории оболочек справедливы следующие оценки [3, 9]:

$$
\begin{gathered}
a_{\alpha\beta} \sim 1, \ b_{\alpha\beta} \sim \frac{1}{R}, \ S^{\alpha\beta} \sim E\eta, \ S^{\alpha 3} \sim E\eta\theta, \ S^{33} \sim E\eta\theta^2, \\
\gamma_{\alpha\beta} \sim h\varkappa_{\alpha\beta} \sim \eta, \ h^2\delta_{\alpha\beta} \sim \eta\theta^2, \quad \gamma_{3\alpha} \sim h\varkappa_{3\alpha} \sim \eta\theta, \ \gamma_{33} \sim \nu\eta.
\end{gathered}
\tag{6.6}
$$

После ряда преобразований, использующих (6.6), доказывается, что упругий потенциал для оболочки принимает вид

$$
\begin{gathered}
\Sigma = \frac{h}{2}H_0^{\alpha\beta\lambda\mu}\left(\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12}\varkappa_{(\alpha\beta)}\varkappa_{(\lambda\mu)}\right) + 2hL_0^{3\beta3\mu}\left(\gamma_{3\beta}\gamma_{3\mu} + \frac{h^2}{48}\varkappa_{3\beta}\varkappa_{3\mu}\right) + \\
+ \frac{h^3}{12}H_0^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta}\left(\delta_{\lambda\mu} - 2H\varkappa_{(\lambda\mu)}\right) + \frac{h^3}{12}H_1^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta}\varkappa_{(\lambda\mu)} + o\left(Eh\eta^2\theta^4\right),
\end{gathered}
\tag{6.7}
$$

где тензоры упругости $H_0^{\alpha\beta\lambda\mu}$, $H_1^{\alpha\beta\lambda\mu}$ и $L_0^{3\beta3\mu}$ в случае изотропного материала имеют вид

$$H_0^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right),$$

$$H_1^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}\Big[2\left(a^{\alpha\lambda}b^{\beta\mu} + b^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu}\right) + 2\left(a^{\alpha\mu}b^{\beta\lambda} + b^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda}\right) +$$

$$+ \frac{4\nu}{1-\nu}\left(a^{\alpha\beta}b^{\lambda\mu} + b^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right)\Big], \quad L_0^{3\beta3\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}a^{\beta\mu}.$$

Первые два члена в (6.7) имеют порядок $o(Eh\eta^2)$ и описывают теорию тонких оболочек первого приближения. Остальные члены имеют порядок $o(Eh\eta^2\theta^2)$ и являются следствием гипотез теории Рейсснера.

Определяющие уравнения легко получить из формул

$$N^{\alpha\beta} = \frac{\partial\Sigma}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}, \quad M^{\alpha\beta} = \frac{\partial\Sigma}{\partial\varkappa_{(\alpha\beta)}}, \quad K^{\alpha\beta} = \frac{\partial\Sigma}{\partial\delta_{\alpha\beta}}, \quad 2N^{\alpha3} = \frac{\partial\Sigma}{\partial\gamma_{\alpha3}}, \quad M^{3\alpha} = \frac{\partial\Sigma}{\partial\varkappa_{3\alpha}}.$$

Summary

The shell relations are derived by assuming the linear distribution of displacements across the shell thickness. The strains and finite rotations of material elements at the shell middle surface are expressed exactly in terms of two independent displacemental parameters. The total rotation of the shell boundary element is properly described and three general forms of kinematical boundary conditions are formulated. Lagrangean equations of motion are derived from the Hamilton's principle. Within small elastic strains the consistently refined form of the shell strain energy function is presented and the refined constitutive equations are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. Пер. с англ., М., 1975. 592 с.
2. Pietraszkiewicz W. Material equations of motion for the nonlinear theory of shells. — Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn., 1971, vol. 19, N 6, p. 261—266.
3. Pietraszkiewicz W. Nieliniowe teorie cienkich powłok sprężystych, Konstrukcje powłokowe, teoria i astosowania, T. I. Materiały Sympozjum. Kraków 25—27. IV. 1974, PWN. Warszawa, 1978, 27—50.
4. Шамина В. А. Об определении вектора перемещения по компонентам тензора деформации в нелинейной механике сплошной среды. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, т. 1, с. 14—22.
5. Новожилов В. В., Шамина В. А. О кинематических краевых условиях в нелинейных задачах теории упругости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, т. 5, с. 63—71.
6. Шамина В. А. Определение вектора перемещения по компонентам деформации и деформационные граничные условия в теории оболочек Е. Рейсснера. — В кн.: Проблемы механики твердого деф. тела, Л., 1970, с. 487—492.
7. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Т. 2. Л., 1964. 394 с.
8. Pietraszkiewicz W. Stress in isotropic elastic solid under superposed deformations. — Arch. Mech., 1974, vol. 26, N 5, p. 871—884.
9. Koiter W. T., Simmonds J. G. Foundations of shell theory. — In: Theoretical and applied mechanics. Proc. 13-th Int. Congr., Aug. 21—26, 1972. Berlin — Heidelberg — New York, 1973.

Статья поступила в редакцию 7 июня 1976 г.