

Wojciech PIETRASZKIEWICZ*

O NIELINIOWEJ TEORII POWŁOK CIENKICH FORMUŁOWANEJ W OBROTACH

Praca dedykowana Profesorowi Janowi Filipkowskiemu

Rozważono takie sformułowanie nieliniowej teorii powłok cienkich, w którym obroty skończone są jednym z niezależnych pól zagadnienia brzegowego. W ogólnym przypadku skończonych odkształceń powłoki, zarówno tensor zginania powierzchni jak i powierzchniowy tensor momentów wewnętrznych, gdy są definiowane względem bazy obróconej, są tensorami na ogół niesymetrycznymi. W wyniku przekształcenia powierzchniowej zasady pracy wirtualnej sformułowano kilka zagadnień brzegowych w obrotach w silnej i słabej postaci. Opracowano m.in. globalne zasady wariacyjne typu całkowitej energii potencjalnej, Hu – Washizu i Simmondsa – Danielsona. Wykazano, że w przypadku jednorodnej, izotropowej powłoki gumopodobnej najprostsze przybliżenie do energii odkształcenia powłoki nie zawiera niesymetrycznej części tensora zginania.

1. WSTĘP

W modelu mechanicznym powłoki cienkiej zakłada się, że deformacja powłoki jako ciała trójwymiarowego może być z wystarczającą dokładnością opisana przez deformację jej powierzchni podstawowej. Warunki równowagi takiej powłoki są na ogół formułowane z zasady pracy wirtualnej postulowanej dla powierzchni podstawowej. W stacjonarnym opisie Lagrange'a prowadzi to do skomplikowanego zagadnienia brzegowego względem trzech składowych pola przemieszczeń \mathbf{u} jako jedynych zmiennych niezależnych (por. [1-4], gdzie podano obszerną literaturę źródłową).

W niniejszej pracy rozważamy alternatywne sformułowanie nieliniowej teorii powłok cienkich, w którym zmiennymi niezależnymi są: tensor obrotu \mathbf{R} i inne pola określone na powierzchni podstawowej. Tensor obrotu wprowadza

* Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk

się do teorii powłok przez opisanie deformacji powierzchni podstawowej w nieholonomicznej bazie obróconej, wynikającej z rozkładu biegunowego gradientu deformacji powłoki, [2]. Ałumiae [5] pierwszy wprowadził bazę obróconą w sposób opisowy i względem tej bazy zdefiniował powierzchniowe miary deformacji: symetryczny tensor odkształcenia $\eta_{\alpha\beta}$ i niesymetryczny tensor zginania $\mu_{\alpha\beta}$. W [5] wyprowadzono również odpowiednie równania równowagi i warunki ciągłości odkształceń, [6]. Simmonds i Danielson [7,8] wprowadzili obrót również w sposób opisowy, ale jawny, sformułowali zagadnienie brzegowe względem wektora obrotu skończonego i wektora funkcji naprężeń jako zmiennych niezależnych oraz skonstruowali odpowiednią zasadę wariacyjną, [8]. Tematyka formułowania nieliniowej teorii powłok cienkich w obrotach została rozwinięta m.in. w pracach [9-12], a wyniki podsumowane w opracowaniach monograficznych [2,13,14,4].

Rozważania szczegółowe są jednak ograniczone w literaturze do małych odkształceń sprężystych, dla których są znane i dobrze uzasadnione klasyczne równania konstytutywne. W takim przypadku, w ramach konsekwentnej teorii pierwszego przybliżenia [15], tylko symetryczna część $\mu_{(\alpha\beta)}$ tensora zginania występuje w funkcji gęstości energii sprężystej powłoki. W rezultacie, we wszystkich zależnościach takiego sformułowania mogą być uwzględnione tylko symetryczne składowe powierzchniowe wypadkowego tensora momentów wewnętrznych, [2].

W zagadnieniach skończonych odkształceń sprężystych, dowolnej anizotropii materiału i dowolnej niejednorodności powłoki niesymetryczna część tensora zginania nie może być jednak z góry pominięta. Dlatego w ogólnych rozważaniach nieliniowej teorii powłok cienkich formułowanej w obrotach, wypadkowy tensor momentów wewnętrznych powinien być również traktowany jako tensor niesymetryczny.

Celem niniejszej pracy jest rozszerzenie stosowalności geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych, sformułowanej w [2] w obrotach i innych polach jako zmiennych niezależnych, na zagadnienia skończonych odkształceń sprężystych, dowolnej anizotropii materiału i dowolnej niejednorodności powłoki. W wyniku odpowiednich przekształceń powierzchniowej zasady pracy wirtualnej, wyprowadzono jej zmodyfikowaną postać uwzględniającą niesymetryczny tensor zginania i niesymetryczny wypadkowy tensor momentów wewnętrznych. Opracowano rozszerzoną zasadę pracy wirtualnej oraz sformułowano silne i słabe zagadnienia brzegowe w obrotach i innych polach jako zmiennych niezależnych. Wyprowadzono też kilka globalnych zasad wariacyjnych, w tym zasadę całkowitej energii potencjalnej, zasadę typu Hu - Washizu i zasadę typu Simmondsa - Danielsona. Na zakończenie, przeprowadzono jakościową analizę zaproponowanej w [3]

funkcji gęstości energii sprężystej dla jednorodnej, izotropowej powłoki gumopodobnej. Wykazano, że w ramach błędów najprostszego przybliżenia do energii odkształcenia ta odpowiednio zmodyfikowana funkcja nie zawiera niesymetrycznej części tensora $\mu_{\alpha\beta}$.

2. GEOMETRIA I DEFORMACJA POWIERZCHNI

W tej pracy będziemy używali systemu oznaczeń stosowanego w [1-4].

Dowolny punkt M powierzchni regularnej \mathcal{M} określamy przez podanie wektora wodzącego $\mathbf{r} = \overline{OM} = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{k=1}^3 r^k(\theta^\alpha) \mathbf{i}_k \equiv r^k \mathbf{i}_k$, $k = 1, 2, 3$, $\alpha = 1, 2$, gdzie θ^α są współrzędnymi na powierzchni, a \mathbf{i}_k jest bazą ortonormalną zaczepioną w punkcie O trójwymiarowej przestrzeni fizycznej \mathcal{E} .

Powierzchnię odkształconą $\overline{\mathcal{M}}$ określimy w tej samej bazie zależnością

$$\overline{\mathbf{r}} = \chi[\mathbf{r}(\theta^\alpha)] = \overline{r}^k(\theta^\alpha) \mathbf{i}_k = \mathbf{r}(\theta^\alpha) + \mathbf{u}(\theta^\alpha), \quad (1)$$

gdzie θ^α są współrzędnymi konwekcyjnymi powierzchni, χ jest funkcją deformacji, $\mathbf{u} \in V$ jest polem przemieszczeń, natomiast V jest trójwymiarową przestrzenią wektorową.

W każdym punkcie $M \in \mathcal{M}$ określone są związki geometryczne

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\alpha &= \mathbf{r}_{,\alpha}, & a_{\alpha\beta} &= \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, & a &= \det(a_{\alpha\beta}) > 0, \\ \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta &= \delta_\beta^\alpha, & a^{\alpha\beta} &= \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta, & \mathbf{a}^\beta &= a^{\beta\alpha} \mathbf{a}_\alpha, \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, & b_{\alpha\beta} &= -\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta, & \epsilon_{\alpha\beta} &= (\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta) \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie \mathbf{a}_α i \mathbf{a}^α są wektorami bazy naturalnej i dualnej, $a_{\alpha\beta}$ i $a^{\alpha\beta}$ są składowymi tensora metrycznego, \mathbf{n} jest wersorem normalnym do \mathcal{M} ustalającym jej orientację, $b_{\alpha\beta}$ są składowymi tensora krzywizny, $\epsilon_{\alpha\beta}$ i $\epsilon^{\alpha\beta}$ są symbolami permutacji, dla których $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = \sqrt{a}$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$, natomiast δ_α^β jest symbolem Kroneckera: $\delta_1^1 = \delta_2^2 = 1$, $\delta_2^1 = \delta_1^2 = 0$.

Brzeg $\partial\mathcal{M}$ powierzchni składa się ze skończonej liczby zamkniętych, odcinkami gładkich krzywych określonych w postaci parametrycznej przez $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}[\theta^\alpha(s)]$, gdzie s jest długością mierzoną wzdłuż łuku $\partial\mathcal{M}$. W każdym regularnym punkcie $M \in \partial\mathcal{M}$ mamy wersor styczny

$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}/ds \equiv \mathbf{r}' = \tau^\alpha \mathbf{a}_\alpha$ i wektor zewnętrznej normalnej $\mathbf{v} = \mathbf{r}_{,v} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \nu^\alpha \mathbf{a}_\alpha$, gdzie $(\cdot)_{,v}$ jest pochodną normalną do $\partial\mathcal{M}$.

Analogiczne związki są słuszne również na powierzchni odkształconej $\overline{\mathcal{M}}$. Są one wyrażone przez analogiczne symbole, które na powierzchni odkształconej wyróżniamy dodatkową kreską: $\overline{\mathbf{a}}_\alpha, \overline{\mathbf{a}}^\alpha, \overline{a}_{\alpha\beta}, \overline{a}^{\alpha\beta}, \overline{\mathbf{n}}, \overline{b}_{\alpha\beta}, \overline{e}_{\alpha\beta}, \overline{a}, \overline{\boldsymbol{\tau}}, \overline{\mathbf{v}}$ itd. Wszystkie wielkości na $\overline{\mathcal{M}}$ można wyrazić przez analogiczne wielkości na \mathcal{M} i pole przemieszczeń \mathbf{u} przy pomocy zależności podanych w [1,2].

Składowe klasycznych miar deformacji typu Greena dla powierzchni mają postać

$$\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\overline{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}), \quad \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = -(\overline{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}), \quad (3)$$

gdzie $\gamma_{\alpha\beta}$ są funkcjami kwadratowymi \mathbf{u} i $\mathbf{u}_{,\alpha}$, natomiast $\kappa_{\alpha\beta}$ są funkcjami niewymiernymi $\mathbf{u}, \mathbf{u}_{,\alpha}$ i $\mathbf{u}_{,\alpha\beta}$.

Otoczenia \mathcal{M} i $\overline{\mathcal{M}}$ w \mathcal{E} można parametryzować trójką współrzędnych konwekcyjnych (θ^α, ζ) , gdzie ζ jest odległością od powierzchni wzdłuż wektorów normalnych \mathbf{n} i $\overline{\mathbf{n}}$. Gradientem deformacji powierzchni jest tensor

$$\mathbf{F} = \nabla \boldsymbol{\chi}(\mathbf{r} + \zeta \mathbf{n})|_{\zeta=0} = \overline{\mathbf{a}}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha + \overline{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n}, \quad \det \mathbf{F} = \sqrt{\frac{\overline{a}}{a}} > 0, \quad (4)$$

gdzie \otimes oznacza iloczyn tensorowy.

Rozkład biegunowy tensora \mathbf{F} przyjmuje postać

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T, \quad (5)$$

$$\mathbf{s}_\alpha = \mathbf{U}\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{R}^{-1}\overline{\mathbf{a}}_\alpha, \quad \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R}\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{a}}_\alpha.$$

Tutaj $\mathbf{R} \in SO(3)$ jest tensorem właściwego obrotu, \mathbf{U} i \mathbf{V} - prawym i lewym tensorem rozciągnięcia, \mathbf{s}_α - nieholonomiczną bazą rozciągniętą, a \mathbf{r}_α - nieholonomiczną bazą obróconą powierzchni \mathcal{M} . Słuszne są przy tym zależności

$$\mathbf{U} = \mathbf{s}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{V} = \overline{\mathbf{a}}_\alpha \otimes \mathbf{r}^\alpha + \overline{\mathbf{n}} \otimes \overline{\mathbf{n}},$$

$$\mathbf{R} = \overline{\mathbf{a}}_\alpha \otimes \mathbf{s}^\alpha + \overline{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha + \overline{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{n}, \quad (6)$$

$$\mathbf{U}^T = \mathbf{U}, \quad \mathbf{V}^T = \mathbf{V}, \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, \quad \det \mathbf{R} = +1.$$

Wprowadźmy następujące względne miary deformacji powierzchni:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{U} - \mathbf{1} = \eta_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{V} - \mathbf{1} = \varepsilon_\beta \otimes \mathbf{r}^\beta, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha, \\ \boldsymbol{\mu} &= (\mathbf{R}^T \bar{\mathbf{n}}_{,\beta} - \mathbf{n}_{,\beta}) \otimes \mathbf{a}^\beta = \mu_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta, \\ \boldsymbol{\lambda} &= (\bar{\mathbf{n}}_{,\beta} - \mathbf{R} \mathbf{n}_{,\beta}) \otimes \mathbf{r}^\beta = \lambda_\beta \otimes \mathbf{r}^\beta, \quad \boldsymbol{\lambda}_\beta = \mu_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha, \\ \eta_{\alpha\beta} &= \eta_{\beta\alpha}, \quad \mu_{\alpha\beta} \neq \mu_{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie $\mathbf{1} = \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}^\alpha + \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}$ jest tensorem metrycznym V . Miary wprowadzone w (7) spełniają szereg zależności kinematycznych podanych w [2,4].

3. WARUNKI RÓWNOWAGI

W nieliniowej teorii powłok cienkich warunki równowagi powłoki są tradycyjnie określone przez zasadę pracy wirtualnej, która dla każdego kinematycznie dopuszczalnego przemieszczenia wirtualnego $\delta \mathbf{u}$ jest postulowana na powierzchni podstawowej powłoki w opisie Lagrange'a w postaci [1,2,4]

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{M}} [N^{\alpha\beta} \delta\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) + M^{\alpha\beta} \delta\kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{u})] dA \\ & = \iint_{\mathcal{M}} [\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{h} \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{u})] dA + \int_{\partial \mathcal{M}_f} [\mathbf{N}^* \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{H}^* \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{u})] ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Tutaj $N^{\alpha\beta}$ i $M^{\alpha\beta}$ oznaczają powierzchniowe składowe wypadkowych symetrycznych tensorów sił i momentów wewnętrznych typu Pioli-Kirchhoffa, $\delta\gamma_{\alpha\beta}$ i $\delta\kappa_{\alpha\beta}$ - wirtualne miary deformacji powierzchni, \mathbf{p} i \mathbf{h} - wypadkowe wektory zewnętrznych sił i momentów statycznych działających na $\overline{\mathcal{M}}$, mierzone na jednostkę powierzchni nieodkształconej \mathcal{M} , \mathbf{N}^* i \mathbf{H}^* - wypadkowe wektory zewnętrznych sił i momentów statycznych przyłożonych do brzegu $\partial \overline{\mathcal{M}}_f$, mierzone na jednostkę długości brzegu nieodkształconego $\partial \mathcal{M}_f$, natomiast δ oznacza symbol wariacji. Zauważmy przy okazji, że wobec $\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \bar{\mathbf{n}} = 0$ tylko powierzchniowe składowe \mathbf{h} i \mathbf{H}^* mogą być uwzględnione w teorii powłok cienkich.

Gdy przemieszczenie \mathbf{u} jest jedyną zmienną tego sformułowania nieliniowej teorii powłok podlegającą niezależnej wariacji, odpowiednie przekształcenie zasady (8) pozwala wyprowadzić trzy lokalne równania równowagi i cztery naturalne warunki brzegowe, [1].

W przypadku gdy tensor obrotu ma być zmienną niezależną teorii powłok cienkich, zasadę (8) należy odpowiednio zmodyfikować, uwzględniając zależności podane w p. 2.

Powierzchniowe miary deformacji $\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}$ i $\eta_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}$ związane są następującymi zależnościami ([2], wzór (5.11)):

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha}^{\lambda}\eta_{\lambda\beta}, \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}[(\delta_{\alpha}^{\lambda} + \eta_{\alpha}^{\lambda})\mu_{\lambda\beta} + (\delta_{\beta}^{\lambda} + \eta_{\beta}^{\lambda})\mu_{\lambda\alpha}] - \frac{1}{2}(b_{\alpha}^{\lambda}\eta_{\lambda\beta} + b_{\beta}^{\lambda}\eta_{\lambda\alpha}).\end{aligned}\quad (9)$$

Dlatego gęstość wewnętrznej pracy wirtualnej w (8) może być wyrażona alternatywnie w nowych zmiennych

$$\begin{aligned}N^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}\delta\kappa_{\alpha\beta} &= S^{\alpha\beta}\delta\eta_{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta}\delta\mu_{\alpha\beta}, \\ S^{\alpha\beta} &= N^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\eta_{\lambda}^{\alpha}N^{\lambda\beta} + \eta_{\lambda}^{\beta}N^{\alpha\lambda}) - \frac{1}{2}[(b_{\lambda}^{\alpha} - \mu_{\lambda}^{\alpha})M^{\lambda\beta} + (b_{\lambda}^{\beta} - \mu_{\lambda}^{\beta})M^{\alpha\lambda}], \\ H^{\alpha\beta} &= (\delta_{\lambda}^{\alpha} + \eta_{\lambda}^{\alpha})M^{\lambda\beta},\end{aligned}\quad (10)$$

gdzie teraz $S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha}$, ale $H^{\alpha\beta} \neq H^{\beta\alpha}$.

Gdy tensor obrotu \mathbf{R} ma być zmienną niezależną, powinny być dodatkowo spełnione więzy geometryczne na wirtualne miary deformacji względem bazy $\mathbf{r}_{\alpha}, \bar{\mathbf{n}}$ sformułowane w [2]:

$$\epsilon^{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\alpha} \cdot \delta\eta_{\lambda\beta}\mathbf{r}^{\lambda} = 0, \quad \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta\eta_{\lambda\beta}\mathbf{r}^{\lambda} = 0. \quad (11)$$

Powyższe warunki więzów wprowadzamy do (8) przy pomocy mnożników Lagrange'a S i Q^{β} wewnątrz obszaru \mathcal{M} oraz A i B^{β} na brzegu $\partial\mathcal{M}$. Z analizy przeprowadzonej w [2] wynika, że na brzegu powłoki zawsze mamy $A = B^{\beta}v_{\beta} = 0$, a jedyną niezerową składową jest $B \equiv B^{\beta}\tau_{\beta}$. Uwzględniając ten fakt oraz zależności (9) i (10), zasada pracy wirtualnej przyjmie teraz następującą zmodyfikowaną postać:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{M}} [\mathbf{N}^{\beta} \cdot \delta\eta_{\lambda\beta}\mathbf{r}^{\lambda} + H^{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\alpha} \cdot \delta\mu_{\lambda\beta}\mathbf{r}^{\lambda}] dA &= \iint_{\mathcal{M}} (\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta\boldsymbol{\omega}) dA \\ &+ \int_{\partial\mathcal{M}} (\mathbf{N}^* \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{M}^* \cdot \boldsymbol{\omega}_{\tau}) ds + \int_{\partial\mathcal{M}} B\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta\eta_{\lambda\beta}\mathbf{r}^{\lambda}\tau^{\beta} ds,\end{aligned}\quad (12)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}^\beta &= (S^{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta} S) \mathbf{r}_\alpha + Q^\beta \bar{\mathbf{n}}, \\
 \mathbf{M}^\beta &= \bar{\mathbf{n}} \times H^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha, \quad \mathbf{M}^* = \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^*, \quad \mathbf{m} = \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}, \\
 \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}^\alpha \times \delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \bar{\mathbf{n}} \times \delta \bar{\mathbf{n}}) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}^\alpha \times \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{r}_\alpha + \bar{\mathbf{n}} \times \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{n}}), \\
 \boldsymbol{\omega}_\tau &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{v}} \times \delta \bar{\mathbf{v}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \times \delta \bar{\boldsymbol{\tau}} + \bar{\mathbf{n}} \times \delta \bar{\mathbf{n}}),
 \end{aligned} \tag{13}$$

a $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\omega}_\tau$ są wirtualnymi obrotami określonymi odpowiednio wewnątrz powierzchni podstawowej i na jej brzegu.

Dalsze przekształcenie zasady (12) zgodnie z [2,4] pozwala na przedstawienie jej w postaci

$$\begin{aligned}
 & - \iint_{\mathcal{M}} [(\mathbf{N}^\beta|_\beta + \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M}^\beta|_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\beta \times \mathbf{N}^\beta + \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega}] dA \\
 & + \int_{\partial \mathcal{M}_f} \{[\mathbf{N}^\beta \nu_\beta + (B\bar{\mathbf{n}})' - \mathbf{N}^*] \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M}^\beta \nu_\beta + B\bar{\mathbf{a}}_\nu - \mathbf{M}^*) \cdot \boldsymbol{\omega}_\tau\} ds \\
 & + \int_{\partial \mathcal{M}_d} \{[\mathbf{N}^\beta \nu_\beta + (B\bar{\mathbf{n}})'] \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M}^\beta \nu_\beta + B\bar{\mathbf{a}}_\nu) \cdot \boldsymbol{\omega}_\tau\} ds + \sum_{M_n \in \partial \mathcal{M}} (B\bar{\mathbf{n}})_n \cdot \delta \mathbf{u}_n = 0,
 \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie $\bar{\mathbf{a}}_\nu = \bar{\mathbf{r}}' \times \bar{\mathbf{n}}$.

Kinematycznie dopuszczalne wirtualne przemieszczenia $\delta \mathbf{u}$ i obroty $\boldsymbol{\omega}_\tau$ spełniają na $\partial \mathcal{M}_d$ warunki $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\omega}_\tau = \mathbf{0}$, dlatego całka po $\partial \mathcal{M}_d$ w (14) znika tożsamościowo. Spełnienie zasady pracy wirtualnej wymaga więc, aby poza warunkami więzów wynikających z (11) były spełnione następujące rozszerzone lokalne równania równowagi i naturalne statyczne warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}^\beta|_\beta + \mathbf{p} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^\beta|_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\beta \times \mathbf{N}^\beta + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \text{w } \mathcal{M}, \\
 \mathbf{N}^\beta \nu_\beta + (B\bar{\mathbf{n}})' - \mathbf{N}^* &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^\beta \nu_\beta + B\bar{\mathbf{a}}_\nu - \mathbf{M}^* = \mathbf{0} \quad \text{na } \partial \mathcal{M}_f, \\
 (B\bar{\mathbf{n}})_n &= \mathbf{0} \quad \text{w punktach osobliwych } M_n \in \partial \mathcal{M}_f.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Analogiczne do (15) warunki równowagi dla nieliniowej teorii powłok cienkich przy małych odkształceniach sprężystych podano w [2], wzory (5.57)-(5.59). Dla takiej teorii powłok, w ramach dokładności konsekwentnego pierwszego przybliżenia do energii odkształcenia sprężystego powłoki, niesymetryczna część $H^{\alpha\beta}$ nie może być wyznaczona z równania konstytutywnego i w ramach tej teorii pozostaje wielkością nieokreśloną. Dlatego w [2] z góry przyjęto, że $\mathbf{M}^\beta = \bar{\mathbf{n}} \times H^{(\alpha\beta)} \mathbf{r}_\alpha$, gdzie $H^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (H^{\alpha\beta} + H^{\beta\alpha})$ jest symetryczną częścią $H^{\alpha\beta}$.

Podczas podanego powyżej wyprowadzenia nigdzie jednak nie założono małości odkształceń, izotropii materiału, jednorodności powłoki czy nawet sprężystego zachowania się materiału, jak to przyjęto w [2]. Dlatego w dalszych rozważaniach będziemy używali ogólnej definicji (13)₂ dla wektora momentów wewnętrznych \mathbf{M}^β .

4. ZAGADNIENIA BRZEGOWE W OBROTACH

Rozszerzone warunki równowagi (15) pozwalają na znaczną swobodę wyboru zmiennych niezależnych zagadnienia brzegowego nieliniowej teorii powłok cienkich formułowanej w obrotach.

Uzupełnijmy więc (15) o kinematyczne warunki brzegowe, wynikające z kinematycznie dopuszczalnych wirtualnych przemieszczeń i obrotów $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\omega}_\tau \times \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ na $\partial \mathcal{M}_d$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \quad \mathbf{R}_\tau \mathbf{n} = \mathbf{R}_\tau^* \mathbf{n} \quad \text{na } \partial \mathcal{M}_d, \quad (16)$$

gdzie $(.)^*$ oznacza wielkość zadaną na brzegu.

Wewnątrz obszaru \mathcal{M} więzy na wirtualne miary deformacji (11) odpowiadają następującym warunkom więzów nakładanych na globalne miary deformacji [2]:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\beta = \epsilon^{\alpha\beta} (\mathbf{R} \mathbf{a}_\alpha) \cdot (\mathbf{a}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta} - \mathbf{R} \mathbf{a}_\beta) = 0, \\ \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\beta = (\mathbf{R} \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{a}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta}) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Związki kinematyczne między wprowadzonymi miarami deformacji $\eta_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}$ a polami \mathbf{u}, \mathbf{R} mają jawną postać [2]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_\beta = (\mathbf{R}^T - \mathbf{1}) \mathbf{r}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta}, \\ \boldsymbol{\lambda}_\beta = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{R}_{,\beta} \mathbf{R}^T \mathbf{r}^\alpha + \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{R}_{,\beta} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{n}}) \times \bar{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Dla powłok cienkich wykonanych z materiału sprężystego zakładamy istnienie funkcji gęstości energii sprężystej $\Sigma(\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}; \mathbf{r})$, której wariacja ma postać zgodną z podaną w (10)₁. Jawne wyrażenia funkcji $\Sigma = \Sigma(\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}; \mathbf{r})$ dla różnych klas powłok sprężystych, a stąd i odpowiadające im równania konstytutywne, zależą zarówno od mechanicznych własności materiału jak i od geometrii powłoki nieodkształconej – jej grubości, struktury wewnętrznej po grubości, geometrii powierzchni podstawowej \mathcal{M} itp. Zostało to symbolicznie zaznaczone w Σ przez dodanie \mathbf{r} do ciągu jej argumentów. Funkcja Σ jest zwykle konstruowana albo przez konsekwentną redukcję do powierzchni \mathcal{M} odpowiedniej znanej funkcji gęstości energii sprężystej W ciała trójwymiarowego, albo bezpośrednio z rozważań dwuwymiarowych na

powierzchni \mathcal{M} popartych następnie badaniami doświadczalnymi . Szereg postaci funkcji Σ , przydatnych do analizy dużych odkształceń powłok zbudowanych z jednorodnego i izotropowego materiału sprężystego, skonstruowano m.in. w [11,3,14], postulując różne hipotezy kinematyczne i/lub dokonując oszacowań trójwymiarowego stanu odkształcenia i naprężenia w powłoce.

Przy pomocy podstawienia (9) funkcja Σ może być łatwo przekształcona do postaci zależnej w sposób jawny od $\eta_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}$:

$$\Sigma = \Sigma[\gamma_{\alpha\beta}(\eta_{\lambda\mu}), \kappa_{\alpha\beta}(\eta_{\lambda\mu}, \mu_{\lambda\mu}); \mathbf{r}] = \hat{\Sigma}(\eta_{\lambda\mu}, \mu_{\lambda\mu}; \mathbf{r}). \quad (19)$$

Różniczkując funkcję $\hat{\Sigma}(\eta_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}; \mathbf{r})$ względem miar deformacji, otrzymamy równania konstytutywne powłok sprężystych:

$$S^{\alpha\beta} = \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \eta_{\alpha\beta}} = S^{\beta\alpha}, \quad H^{\alpha\beta} = \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \mu_{\alpha\beta}} \neq H^{\beta\alpha}. \quad (20)$$

Wprowadźmy (18) do (20) a następnie do (15). Stwierdzamy, że lokalne warunki równowagi wyrażają się teraz przez pola $\mathbf{u}, \mathbf{R}, S, Q^\beta$ i B jako jedyne zmienne niezależne na powierzchni \mathcal{M} . Pozwala to na następujące *silne* sformułowanie zagadnienia brzegowego nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych: przy znanych polach wektorowych sił i momentów powierzchniowych $\mathbf{p}(\theta^\alpha), \mathbf{m}(\theta^\alpha)$ i brzegowych $\mathbf{N}^*(s), \mathbf{M}^*(s)$ klasy C^0 należy wyznaczyć pole przemieszczeń $\mathbf{u}(\theta^\alpha)$ i pole obrotów $\mathbf{R}(\theta^\alpha)$ klasy C^1 oraz pola mnożników Lagrange'a $S(\theta^\alpha), Q^\beta(\theta^\alpha), B(s)$ klasy C^0 , spełniające geometryczne warunki brzegowe (16) a także równania równowagi i naturalne statyczne warunki brzegowe (15)_{2,3}.

Każdy stan powierzchni $\overline{\mathcal{M}}$ jest teraz określony przez pola $\mathbf{u} \in V, \mathbf{R} \in SO(3), S \in R, Q^\beta \in R \times R$ i $B \in R$. Zbiór wszystkich możliwych rozwiązań $\mathbf{u} \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{R}, S, Q^\beta, B)$ tworzy przestrzeń konfiguracyjną rozwiązań $C(\mathcal{M}) = V \times SO(3) \times R^4$, a wirtualna zmiana rozwiązania $\delta \mathbf{u}$ jest elementem przestrzeni $T_u C(\mathcal{M})$ stycznej do $C(\mathcal{M})$ w $\mathbf{u} \in C(\mathcal{M})$. W otoczeniu \mathbf{u} każde pole $\mathbf{u}(\alpha)$ wzdłuż krzywej $\mathcal{L}: R \rightarrow C(\mathcal{M})$ ma postać

$$\mathbf{u}(\alpha) = \mathbf{u} + \alpha \delta \mathbf{u}, \quad \alpha \in R, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}. \quad (21)$$

Przedstawmy funkcjonal (12) pracy wirtualnej w następującej rozwiniętej postaci, uwzględniającej również równania więzów kinematycznych (17):

$$\begin{aligned}
G[\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}] = & \iint_{\mathcal{M}} \delta \hat{\Sigma}[\eta_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{R}), \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{R})] dA \\
& - \iint_{\mathcal{M}} [\mathbf{p}(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m}(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\omega}] dA \\
& - \int_{\partial \mathcal{M}_f} [\mathbf{N}^*(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}^*(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\omega}_\tau] ds \\
& + \iint_{\mathcal{M}} \delta \{ [\epsilon^{\alpha\beta} S r_\alpha(\mathbf{R}) + Q^\beta \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R})] \cdot \eta_{\lambda\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \mathbf{r}^\lambda(\mathbf{R}) \} dA \\
& - \int_{\partial \mathcal{M}} \delta [B \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \eta_{\lambda\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \mathbf{r}^\lambda(\mathbf{R}) \tau^\beta] ds.
\end{aligned} \tag{22}$$

Funkcjonał (22) jest liniowy względem S, Q^β, B oraz wymierny względem \mathbf{u}, \mathbf{R} i ich pierwszych pochodnych powierzchniowych. Zagadnienie brzegowe nieliniowej teorii powłok może być więc sformułowane w następującej *słabej* postaci: przy znanych polach $\mathbf{p}, \mathbf{m}, \mathbf{N}^*$ i \mathbf{M}^* klasy C^1 (odcinkami ciągłych) należy wyznaczyć rozwiązanie $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{R}, S, Q^\beta, B)$, w którym \mathbf{u}, \mathbf{R} są geometrycznie dopuszczalne klasy C^0 , a S, Q^β, B są klasy C^1 takie, że dla każdego kinematycznie dopuszczalnego $\delta \mathbf{u}$, w którym $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\omega}_\tau = \mathbf{0}$ na $\partial \mathcal{M}_d$, funkcyjonał wirtualny (22) znika tożsamościowo:

$$G[\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}] = 0. \tag{23}$$

W oparciu o zasadę (23) można budować efektywne algorytmy numeryczne. Podkreślimy wymaganą tu niższą klasę ciągłości pól rozwiązań niż przy analizowaniu silnego zagadnienia brzegowego. W szczególności, w przypadku stosowania metody elementów skończonych można tutaj wprowadzić elementy klasy C^0 o najprostszycjch funkcjach kształtu.

Sformułowanie (23) jest w istocie rozszerzoną zasadą pracy wirtualnej nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych, uwzględniającą w sposób jawny obroty jako zmienne niezależne. Więzy kinematyczne (17) w \mathcal{M} i na $\partial \mathcal{M}$ zostały tu wprowadzone bezpośrednio do funkcyjonału za pomocą mnożników Lagrange'a.

Gdy obciążenia zewnętrzne mają potencjał $V(\mathbf{u}, \mathbf{R})$ taki, że

$$G_{\text{ext}}[\mathbf{u}, \mathbf{R}; \delta \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}] = -\delta V[\mathbf{u}, \mathbf{R}; \delta \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}], \tag{24}$$

możemy wprowadzić funkcyjonał całkowitej energii potencjalnej

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) = & \iint_{\mathcal{M}} \{ \hat{\Sigma}[\eta_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{R}), \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{R})] + \epsilon^{\alpha\beta} S \eta_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{R}) + Q^\beta \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\beta(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \} dA \\
& - \int_{\partial \mathcal{M}} B \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\beta(\mathbf{u}, \mathbf{R}) \tau^\beta ds + V(\mathbf{u}, \mathbf{R}),
\end{aligned} \tag{25}$$

dla którego geometryczne warunki brzegowe (16) są warunkami ubocznymi. Wtedy rozszerzona zasada pracy wirtualnej przyjmuje postać zasady wariacyjnej

$$\delta I[\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}] = 0. \quad (26)$$

Warunkami stacjonarności funkcjonału $I(\mathbf{u})$ są: równania równowagi (15)₁, naturalne statyczne warunki brzegowe (15)_{2,3} oraz równania więzów (17) w \mathcal{M} i na $\partial\mathcal{M}$. Twierdzenie (26) jest zmodyfikowaną zasadą całkowitej energii potencjalnej w nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych formułowanej w obrotach.

Również funkcjonał (25) jest liniowy względem S, Q^β, B oraz wymierny względem \mathbf{u}, \mathbf{R} i ich pierwszych pochodnych powierzchniowych. Zasada (26) umożliwia budowanie rozwiązań przybliżonych w klasie C^{-1} dla S, Q^β, B i w klasie C^0 dla \mathbf{u}, \mathbf{R} , co w przypadku metody elementów skończonych oznacza możliwość użycia elementów klasy C^0 o najprostszycy funkcjach kształtu.

Przy rozwiązywaniu niektórych zadań pożyteczne może być rozważenie ogólnego swobodnego funkcjonału typu Hu - Washizu

$$\begin{aligned} J = & \iint_{\mathcal{M}} \{ \hat{\Sigma}(\eta_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}) + \epsilon^{\alpha\beta} S \eta_{\alpha\beta} + Q^\beta \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \eta_{\lambda\beta} \mathbf{r}^\lambda(\mathbf{R}) \\ & - S^{\alpha\beta} [\eta_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \mathbf{R})] - H^{\alpha\beta} [\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{R})] \} dA \\ & - \int_{\partial\mathcal{M}} B \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R}) \cdot \eta_{\lambda\beta} \mathbf{r}^\lambda(\mathbf{R}) \tau^\beta ds \\ & - \int_{\partial\mathcal{M}_d} \left\{ [(S^{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta} S) \mathbf{r}_\beta(\mathbf{R}) + Q^\beta \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R})] \nu_\beta + [B \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{R})]' \right\} \cdot (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}^*) \\ & + [H^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha(\mathbf{R}) \nu_\beta - B \bar{\mathbf{r}}'(\mathbf{u}, \mathbf{R})] \cdot (\mathbf{Rn} - \mathbf{R}^* \mathbf{n}) \Big\} ds + V(\mathbf{u}, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (27)$$

Funkcjonał J powstaje z funkcjonału I przez dołączenie zależności kinematycznych (18) i geometrycznych warunków brzegowych (16) z mnożnikami Lagrange'a. Wtedy część warunków stacjonarności funkcjonału J pozwala na identyfikację tych mnożników jako $S^{\alpha\beta}, H^{\alpha\beta}, \mathbf{N}^\beta \nu_\beta + (B \bar{\mathbf{n}})'$ oraz $H^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \nu_\beta - B \bar{\mathbf{r}}'$, odpowiednio, i tak zidentyfikowane mnożniki zostały już włączone do funkcjonału (27). W rezultacie, funkcjonał J jest określony na polach $\mathbf{u}, \mathbf{R}, \eta_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}, S^{\alpha\beta}, S, Q^\beta, H^{\alpha\beta}$ i B podlegających swobodnej wariacji. Zasada wariacyjna typu Hu - Washizu $\delta J = 0$ jest alternatywnym słabym sformułowaniem kompletu zależności nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych rozważanych w tym rozdziale.

Spełniając a priori niektóre z warunków stacjonarności funkcjonału J i/lub przyjmując dodatkowe założenia ograniczające, można go przekształcić do

różnych prostszych postaci funkcjonałów zarówno bezwarunkowych jak i z warunkami ubocznymi. Interesującym szczególnym przypadkiem takiego przekształcenia jest funkcjonał $J_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}, B)$ typu Simmondsa – Danielsona, określony na wektorze obrotu skończonego $\boldsymbol{\theta}$, wektorze funkcji naprężeń $\boldsymbol{\psi}$ i mnożniku Lagrange’a B jako zmiennych niezależnych. Występujący tu wektor obrotu skończonego określony jest zależnością $\boldsymbol{\theta} = 2 \operatorname{tg} \omega / 2 \mathbf{e}$, gdzie ω jest kątem obrotu dookoła osi ustalonej wersorem \mathbf{e} . Taki funkcjonał można skonstruować przy następujących dodatkowych założeniach:

1. Równanie równowagi sił $(15)_1$ można spełnić przez podstawienie $\mathbf{N}^\beta = \epsilon^{\alpha\beta} \boldsymbol{\psi}_{,\alpha} + \mathbf{P}^\beta$, gdzie \mathbf{P}^β jest całką szczególną tego równania równowagi.
2. Gęstość energii sprężystej $\hat{\Sigma}$ jest addytywną funkcją powierzchniowych miar deformacji $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}_\eta(\eta_{\alpha\beta}) + \hat{\Sigma}_\mu(\mu_{\alpha\beta})$, gdzie $\hat{\Sigma}_\eta(\eta_{\alpha\beta})$ jest funkcją odwracalną.
3. Potencjały sił powierzchniowych i brzegowych mają postać $\Phi = \mathbf{P}^\beta|_\beta \cdot \bar{\mathbf{r}} + f[\bar{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta})]$ oraz $\Psi = \mathbf{N}^* \cdot \bar{\mathbf{r}} + g[\bar{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta})]$.
4. Brzeg $\partial \mathcal{M}$ może być podzielony przemiennie na rozłączne części $\partial \mathcal{M}_d$ i $\partial \mathcal{M}_f$, nie ma więc części brzegu o mieszanych warunków brzegowych.
5. Są a priori spełnione następujące warunki stacjonarności:

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \hat{\Sigma}_\eta}{\partial S^{\alpha\beta}}, H^{\alpha\beta} = \frac{\partial \hat{\Sigma}_\mu}{\partial \mu_{\alpha\beta}}, \mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{N}^\beta = \epsilon^{\alpha\beta} \boldsymbol{\psi}_{,\alpha} + \mathbf{P}^\beta \text{ w } \mathcal{M}, \quad (28)$$

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}^* \text{ na } \partial \mathcal{M}_d, \quad \bar{\mathbf{r}}_n = \bar{\mathbf{r}}_n^* \text{ w } M_n \in \partial \mathcal{M}_d.$$

Konstrukcja funkcjonału $J_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}, B)$ przebiega analogicznie do konstrukcji podobnego funkcjonału dla małych odkształceń sprężystych, omówionej szczegółowo w [2], p. 5.7. Pomijając te dość skomplikowane przekształcenia, podajemy tu wynikową postać funkcjonału typu Simmondsa – Danielsona słuszną dla przypadku dużych odkształceń cienkich powłok sprężystych:

$$\begin{aligned}
 J_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}, B) = & \iint_{\mathcal{M}} \{ \hat{\Sigma}_\mu(\boldsymbol{\theta}) - \hat{\Sigma}_S^\varepsilon(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) - (\epsilon^{\alpha\beta} \boldsymbol{\psi}_{,\alpha} + \mathbf{P}^\beta) \cdot \mathbf{r}_\beta(\boldsymbol{\theta}) + f[\bar{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta})] \} dA \\
 & + \sum_{n=1,3,\dots} \left\langle \int_{s_n}^{s_{n+1}} \{ (\mathbf{G}_n + \mathbf{C}_n - \boldsymbol{\psi}) \cdot \bar{\mathbf{r}}'(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) + f[\bar{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta})] \} ds \right. \\
 & \quad \left. - [\mathbf{G}_n(s_{n+1}) \cdot \bar{\mathbf{r}}_{n+1}^* + \mathbf{C}_n \cdot (\bar{\mathbf{r}}_{n+1}^* - \bar{\mathbf{r}}_n^*)] \right\rangle \\
 & - \int_{\partial \mathcal{M}} B \bar{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \tau^\beta \\
 & - \int_{\partial \mathcal{M}_d} \{ \boldsymbol{\psi} \cdot \bar{\mathbf{r}}^* - \mathbf{P}^\beta \nu_\beta \cdot \bar{\mathbf{r}}^* + [H^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{r}_\alpha(\boldsymbol{\theta}) \nu_\beta - (B \bar{\mathbf{r}}^*)'] \cdot [\bar{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) - \bar{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}^*)] \} ds.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Tutaj $\mathbf{G}_n(s) = \int_{s_n}^s (\mathbf{N}^* - \mathbf{P}^\beta \nu_\beta) ds$ są funkcjami na $\partial \mathcal{M}_f$, $\hat{\Sigma}_S^\varepsilon$ jest funkcją gęstości energii komplementarnej spełniającą warunek $\hat{\Sigma}_S^\varepsilon(S^{\alpha\beta}) = S^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} - \hat{\Sigma}_n(\eta_{\alpha\beta})$, natomiast \mathbf{C}_n są stałymi wektorami, które mają zapewnić by wektor $\boldsymbol{\psi}$ był ciągłym przy zbliżaniu się do brzegu $\partial \mathcal{M}_f$. Zasada wariacyjna

$$\delta J_2[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}, B; \delta \boldsymbol{\theta}, \delta \boldsymbol{\psi}, \delta B] = 0 \tag{30}$$

jest równoważna spełnieniu w słabej postaci szeregu zależności nieliniowej teorii powłok omówionych w [2].

5. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE POWŁOK GUMOPODOBNYCH

Rozważmy szczególną postać funkcji gęstości energii sprężystej dla powłok jednorodnych zbudowanych z izotropowego, nieściśliwego materiału gumopodobnego. W [3] wykazano, że dla takiej powłoki funkcja

$$\Sigma \cong h W_{(0)}(\gamma_{\kappa\rho}) + \frac{h^3}{24} \{ W_{(1)}^{\alpha\beta}(\gamma_{\kappa\rho}) (\kappa_\alpha^\lambda \kappa_{\lambda\beta} - \kappa_\lambda^\lambda \kappa_{\alpha\beta}) + W_{(2)}^{\alpha\beta\lambda\mu}(\gamma_{\kappa\rho}) \chi_{\alpha\beta} \chi_{\lambda\mu} \} \tag{31}$$

jest konsekwentnym pierwszym przybliżeniem gęstości energii odkształcenia sprężystego powłoki. W wyrażeniu (31) funkcje $W_{(0)}$, $W_{(1)}^{\alpha\beta}$ i $W_{(2)}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ oznaczają, odpowiednio, zmodyfikowaną funkcję trójwymiarowej gęstości energii sprężystej oraz jej pierwszą i drugą pochodną względem odkształceń stycznych, wszystkie określone na powierzchni środkowej powłoki \mathcal{M} , h jest nieodkształconą grubością powłoki, natomiast $\chi_{\alpha\beta} = -(\sqrt{a/b_{\alpha\beta}} - b_{\alpha\beta})$.

W [3] wykazano, że udział podkreślonych w (31) członów w energii sprężystej powłoki jest stosunkowo mały i w obliczeniach inżynierskich członki te mogą być również pominięte. Ponadto, dla powłok cienkich części energii sprężystej od odkształcenia i zginania mogą mieć porównywalne wartości tylko wtedy, gdy największa wartość własna γ tensora $\gamma_{\alpha\beta}$ jest najwyżej $O(\theta)$, gdzie θ jest małym parametrem zdefiniowanym w [3]. Wtedy odkształcenia są duże w sensie, że słuszne jest oszacowanie $1 + \gamma^2 \approx 1$, ale nie są skończone w sensie, że $\gamma = O(1)$, i $\chi_{\alpha\beta}$ można przybliżyć wyrażeniem

$$\chi_{\alpha\beta} \cong \kappa_{\alpha\beta} + (b_{\alpha\beta} - \kappa_{\alpha\beta})\gamma_{\kappa}^{\kappa}. \quad (32)$$

W takim przypadku najprostsze przybliżenie funkcji gęstości energii odkształcenia sprężystego cienkiej powłoki gumopodobnej przyjmuje postać

$$\Sigma \cong hW_{(0)}(\gamma_{\kappa\rho}) + \frac{h^3}{24} W_{(2)}^{\alpha\beta\lambda\mu}(\gamma_{\kappa\rho})[\kappa_{\alpha\beta}\kappa_{\lambda\mu}(1 - 2\gamma_{\kappa}^{\kappa}) + 2b_{\alpha\beta}\kappa_{\lambda\mu}\gamma_{\kappa}^{\kappa}], \quad (33)$$

gdzie uwzględniono symetrię $W_{(2)}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ względem zamiany wskaźników α z β , λ z μ oraz $\alpha\beta$ z $\lambda\mu$.

Przekształćmy teraz (33) do postaci wyrażonej przez $\eta_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}$, ale z uwzględnieniem przybliżenia ujętego w drugim członie (33). Niech $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{(\alpha\beta)} + \epsilon_{\alpha\beta}\rho$, gdzie $\mu_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(\mu_{\alpha\beta} + \mu_{\beta\alpha})$. Przy takiej dekompozycji tensor $\kappa_{\alpha\beta}$ w $(9)_2$ przyjmie postać

$$\kappa_{\alpha\beta} = \mu_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}[\eta_{\alpha}^{\lambda}(b_{\lambda\beta} - \mu_{(\lambda\beta)}) + \eta_{\beta}^{\lambda}(b_{\alpha\lambda} - \mu_{(\alpha\lambda)})] + \frac{1}{2}(\eta_{\alpha}^{\lambda}\epsilon_{\lambda\beta} + \eta_{\beta}^{\lambda}\epsilon_{\lambda\alpha})\rho. \quad (34)$$

Z warunku ciągłości odkształceń [2] otrzymamy zależność

$$\rho = \frac{1}{2 + \eta_{\kappa}^{\kappa}} \epsilon^{\alpha\beta} \eta_{\alpha}^{\lambda} (b_{\lambda\beta} - \mu_{(\lambda\beta)}). \quad (35)$$

Szacunkowa wartość niesymetrycznej części $\epsilon_{\alpha\beta}\rho$ tensora $\mu_{\alpha\beta}$ wynikająca z (35) jest więc rzędu $\max(\eta/R, \eta\mu)$, gdzie η jest największą wartością własną tensora odkształcenia $\eta_{\alpha\beta}$, μ - największą wartością własną symetrycznego tensora zginania $\mu_{(\alpha\beta)}$, a R - najmniejszym promieniem krzywizny powierzchni podstawowej powłoki w rozważanym punkcie $M \in \mathcal{M}$. Dlatego z (35) wynika, że ze względny błąd $O(\theta^2)$ wyrażenie (34) ma następującą postać:

$$\kappa_{\alpha\beta} \cong \mu_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}[\eta_{\alpha}^{\lambda}(b_{\lambda\beta} - \mu_{(\lambda\beta)}) + \eta_{\beta}^{\lambda}(b_{\alpha\lambda} - \mu_{(\alpha\lambda)})]. \quad (36)$$

Wprowadzając (36) i $(9)_1$ do wyrażenia (33) i pomijając małe człony wprowadzające względny błąd $O(\theta^2)$ otrzymamy

$$\hat{\Sigma} \equiv h\hat{W}_{(0)}(\eta_{\kappa\rho}) + \frac{h^3}{24}W_{(2)}^{\alpha\beta\lambda\mu}(\eta_{\kappa\rho})\{\mu_{(\alpha\beta)}\mu_{(\lambda\mu)} + 2(b_{\alpha\beta} - \mu_{(\alpha\beta)})\mu_{(\lambda\mu)}\eta_{\kappa}^{\lambda} - [\eta_{\alpha}^{\sigma}(b_{\sigma\beta} - \mu_{(\sigma\beta)}) + \eta_{\beta}^{\sigma}(b_{\alpha\sigma} - \mu_{(\alpha\sigma)})]\mu_{(\lambda\mu)}\} \quad (37)$$

Z (37) wynika, że w ramach najprostszego przybliżenia do energii odkształcenia powłoki gumopodobnej funkcja $\hat{\Sigma}$ zawiera tylko symetryczną część $\mu_{(\alpha\beta)}$ tensora zginania. Dlatego dla tej szczególnej klasy powłok sprężystych tylko symetryczna część $H^{(\alpha\beta)}$ tensora momentów może być określona przez równania konstytutywne (20). Niesymetryczna część tensora momentów pozostaje wielkością nieokreśloną w ramach takiej nieliniowej teorii powłok gumopodobnych. W tym przypadku, wszystkie zależności zagadnień brzegowych sformułowanych w p. 4 niniejszej pracy można nieco uprościć przez pominięcie niesymetrycznych części tensorów $\mu_{\alpha\beta}$ i $H^{\alpha\beta}$.

BIBLIOGRAFIA

1. PIETRASZKIEWICZ W.: Lagrangian description and incremental formulation in the non-linear theory of thin shells, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **19**, 1984, 115÷140.
2. PIETRASZKIEWICZ W.: Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells, *Advances in Mechanics*, **12**, 1989, 51÷130.
3. SCHIECK B., PIETRASZKIEWICZ W., STUMPF H.: Theory and numerical analysis of shells undergoing large elastic strains, *Int. J. Solids and Structures*, **29**, 1992, 689-709.
4. PIETRASZKIEWICZ W.: Teorie nieliniowe powłok, [w:] Cz. Woźniak (Red.), *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, Rozdz. 4.2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999 (w druku).
5. AŁUMIAE N.A.: Differencialnyje urawnienija sostojanij rawnowiesija tonkostiennyh uprugich obołoczek w posliekriticzeskoj stadii, *Prikladnaja Matematika i Miechanika*, **13**, 1949, 95-106.
6. AŁUMIAE N.A.: O predstavlenii osnovnyh sootnoszenij nieliniujnoy teorii obołoczek, *Prikladnaja Matematika i Miechanika*, **20**, 1956, 136-139.
7. SIMMONDS J.G., DANIELSON D.A.: Nonlinear shell theory with a finite rotation vector, *Proc. Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen - Amsterdam*, Series B, **73**, 1970, 460-478.
8. SIMMONDS J.G., DANIELSON D.A.: Nonlinear shell theory with finite rotation and stress function vectors, *Trans. ASME, J. Applied Mechanics*, **39**, 1972, 1085-1090.
9. PIETRASZKIEWICZ W.: *Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells*, PWN, Warszawa - Poznań 1979.

10. SZKUTIN L.I.: Toczna formułowka urawnienij nieliniejnego dieformiowanija tonkich obołoczek, *Prikladnyje Problemy Procznosti i Plastiknosti*, Gorkij, **7**, 1977, 3-9; **8**, 1978, 38-43; **9**, 1978, 19-25.
11. LIBAI A., SIMMONDS J.G.: Nonlinear elastic shell theory, [w:] J.W. Hutchinson, T.Y. Wu (eds.), *Advances in Applied Mechanics*, **23**, 271-371, Academic Press, New York 1983.
12. ATLURI S.N.: Alternate stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotations, for computational analyses of finitely deformed solids, with applications to plates and shells – I. Theory, *Computers and Structures*, **18**, 1984, 93-116.
13. VALID R.: *The nonlinear theory of shells through variational principles*, John Wiley and Sons, Chicester et al. 1995.
14. LIBAI A., SIMMONDS J.G.: *The nonlinear theory of elastic shells*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge 1998.
15. KOITER W.T.: A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells, [w:] W.T. Koiter (Ed.), *Proc. IUTAM Symp. on Theory of Thin Shells*, 12-33, North-Holland P.Co., Amsterdam 1960.

ON THE NON-LINEAR THEORY OF THIN SHELLS FORMULATED IN ROTATIONS

ABSTRACT

We discuss such a formulation of the non-linear theory of thin shells in which finite rotations are among independent fields of the boundary value problem. We show that in the general case of finite shell strains the surface bending tensor and the internal couple resultant tensor are non-symmetric in general, when defined with respect to the rotated base. Transforming the surface principle of virtual work we derive several strong and weak boundary value problems. In particular, we construct global variational principles of the total potential energy, Hu – Washizu and Simmonds – Danielson type. For a homogeneous, isotropic, rubber-like shell it is shown that the simplest approximation to the strain energy function does not contain the skew-symmetric part of the bending tensor.